



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

UNIDAD PROFESIONAL "ADOLFO LÓPEZ MATEOS"

"Diseño de un software para el análisis de fractura múltiple en cuerpos sólidos basado en la teoría de la holomorfía infinita"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

CON ESPECIALIDAD EN
INGENIERÍA MECÁNICA

PRESENTA

M. en I. Jesús Mares Carreño

DIRECTORES

Dr. Samuel Alcántara Montes

Dr. Marco Antonio Gutiérrez Villegas





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 20:50 horas del día 19 del mes de octubre del 2021 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Posgrado de: la SEPI - ESIME Zacatenco para examinar la tesis titulada:

Diseño de un software para el análisis de fractura múltiple en cuerpos sólidos basado en la teoría de la holomorfía infinita del alumno:

Apellido Paterno:	Mares	Apellido Materno:	Carreño	Nombre:	Jesús
-------------------	-------	-------------------	---------	---------	-------

Número de registro: B 1 3 0 9 4 2

Aspirante del Programa Académico de Posgrado: Doctorado en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Una vez que se realizó un análisis de similitud de texto, utilizando el software antiplagio, se encontró que el trabajo de tesis tiene 07 % de similitud. **Se adjunta reporte de software utilizado.**

Después que esta Comisión revisó exhaustivamente el contenido, estructura, intención y ubicación de los textos de la tesis identificados como coincidentes con otros documentos, concluyó que en el presente trabajo SI NO **SE CONSTITUYE UN POSIBLE PLAGIO.**

JUSTIFICACIÓN DE LA CONCLUSIÓN:

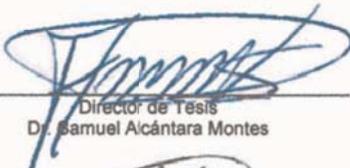
Esta tesis cumple con el Artículo 33 del Reglamento de Posgrado.

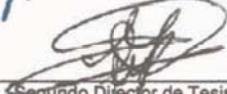
****Es responsabilidad del alumno como autor de la tesis la verificación antiplagio, y de los Directores de tesis el análisis del % de similitud para establecer el riesgo o la existencia de un posible plagio.**

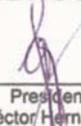
Finalmente, y posterior a la lectura, revisión individual, así como el análisis e intercambio de opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR** **SUSPENDER** **NO APROBAR** la tesis por **UNANIMIDAD** o **MAYORÍA** en virtud de los motivos siguientes:

Originalidad suficiente para otorgar el grado de Doctor en Ciencias.

COMISIÓN REVISORA DE TESIS


 Director de Tesis
 Dr. Samuel Alcántara Montes


 Segundo Director de Tesis
 Dr. Marco Antonio Gutiérrez Villegas

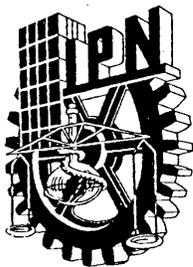

 Presidente
 Dr. Luis Héctor Hernández Gómez


 Tercer Vocal
 Dr. Jesús Alberto Meda Campaña


 Secretario
 Dr. Orlando Susarrez


 PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
 Dr. José Martínez

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
ZACATENCO



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día **26 del mes de octubre del año 2021**, el (la) que suscribe **Jesús Mares Carreño** alumno (a) del Programa de **Doctorado en Ciencias en Ingeniería Mecánica** con número de registro **B130942**, adscrito a la **Sección de Estudios de Posgrado e investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco**, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del **Dr. Samuel Alcántara Montes y Dr. Marco Antonio Gutiérrez Villegas** y cede los derechos del trabajo intitulado **“Diseño de un software para el análisis de fractura múltiple en cuerpos sólidos basado en la teoría de la holomorfía infinita”**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones jmaresc@ipn.mx, salcantara@ipn.mx y magv@azc.uam.mx .Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente de este.

M. en I. Jesús Mares Carreño

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento al **Instituto Politécnico Nacional** y en especial a la **Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco**, por ofrecerme la oportunidad de continuar mi formación académica con el más alto nivel. A todo el personal docente y de apoyo, gracias.

Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología**, por el apoyo recibido durante el desarrollo de mis estudios de posgrado.

Al **Dr. Samuel Alcántara Montes** y **Dr. Marco Antonio Gutiérrez Villegas**, por su apoyo que me permitió culminar esta etapa de mi formación. Agradezco también, a toda mi comisión revisora por sus comentarios que ayudaron a ampliar mi visión, aclarar mis ideas y mejorar mi desempeño.

Mención y agradecimiento especial al **Dr. José Ángel Lodegario Ortega Herrera** por haberme recibido en su equipo de trabajo y guiarme durante la realización de este trabajo; sin el esto no sería posible, siempre recordaré sus enseñanzas.

Agradezco a mi familia, en especial a mis padres y hermana; **Jesús Mares Pineda, Juana Carreño** y **Viridiana Mares Carreño**, por enseñarme con su ejemplo, que sin importar las adversidades siempre hay que continuar esforzándose para avanzar y cumplir tus objetivos, y a mi hijo **Caín Maximiliano Mares Abarca** por ser el impulso final que me llevó a concluir este trabajo.

Finalmente, quiero agradecer a mi esposa **Dra. Griselda Stephany Abarca Jiménez**; no puedo imaginar mejor compañera de trabajo y vida, gracias por todo el tiempo, paciencia, comprensión y apoyo.

RESUMEN

El estudio de la mecánica de la fractura es un tópico que ha ganado protagonismo dentro del análisis y diseño mecánico a partir de la década de 1940 con la formalización del estudio de los efectos de los defectos en materiales sobre el diseño de elementos mecánicos, derivado de esta formalización surgen diversos enfoques y métodos para analizar grietas en elementos mecánicos, que parten del estudio de los campos de esfuerzos hasta llegar a definir parámetros de diseño tales como el factor de intensidad de esfuerzos o la integral.

La profundización en los estudios sobre grietas ha conducido al desarrollo de métodos con mayor sofisticación que permiten estudiar diversas condiciones de fractura, de la mano con el rápido desarrollo en los sistemas computacionales a partir de la década de 1980, se cuenta hoy en día con herramientas computacionales que permiten acelerar los cálculos para diseño teniendo en cuenta defectos en elementos mecánicos tales como grietas.

En el presente trabajo se muestra el desarrollo y aplicación de un método de análisis de problemas elásticos con y sin defectos, el método se basa en el denominado potencial de Galerkin para la solución del problema biarmónico, haciendo uso además de la teoría de variables complejas la cual ha demostrado ser una herramienta útil para el estudio de fractura en problemas dos dimensionales.

La intención del trabajo es mostrar que es posible establecer un método que, basado en la teoría de las variables complejas, permite dar solución a problemas elásticos sobre dominios simple o múltiplemente conexos tres dimensionales, sin la necesidad de llevar a cabo una discretización sobre el dominio de estudio. El proceso de desarrollo del método, así como la documentación de las pruebas, implementación computacional y los resultados obtenidos se presentan a lo largo del texto.

ABSTRACT

The study of fracture mechanics has gained prominence in mechanical analysis and design since the 1940s with the formalization of studying the effects of defects in materials on mechanical elements' performance. From this formalization, multiple approaches and methods based on studying the stress fields around the crack tip were developed to analyze cracks in mechanical elements, such as the stress intensity factor or the J-integral.

The deepening of the studies on cracks has led to more sophisticated methods to study various fracture conditions. Hand in hand with the rapid development in computational systems since the 1980s, we now count on computational tools that accelerate the calculations for design, taking into account defects in mechanical elements such as cracks.

The present work shows the development and application of a method of analysis of elastic problems over domains with and without defects. The method is based on the biharmonic problem's solution using the Galerkin potential and the theory of complex variables, which has proven to be a useful tool for studying fracture in two-dimensional problems.

The work intends to show that it is possible to establish a method that allows solving elastic problems on three-dimensional simple or multiply connected domains without discretizing the domain based on the theory of complex variables. The documentation of the development, computational implementation, and results obtained from the tests are presented throughout this text.

CONTENIDO

RESUMEN	i
ABSTRACT.....	ii
CONTENIDO.....	iii
ÍNDICE DE FIGURAS	vi
ÍNDICE DE TABLAS	ix
GLOSARIO.....	x
SIMBOLOGÍA	xi
1 PRELIMINARES	1
1.1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	3
1.3 PLANTEAMIENTO DE LA HIPÓTESIS	3
1.4 OBJETIVOS.....	4
1.5 JUSTIFICACIÓN	4
1.6 ANTECEDENTES	4
2 MARCO TEÓRICO	13
2.1 TEORÍA DE LA ELASTICIDAD	13
2.1.1 GENERALIDADES.....	13
2.1.2 TENSORES DE ESFUERZO Y DEFORMACIÓN	19
2.1.3 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN	20
2.1.4 ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD.....	23
2.1.5 ESTADO DE DEFORMACIÓN Y ESFUERZOS EN UN PUNTO	24
2.1.6 ENERGÍA DE DISTORSIÓN	27
2.1.7 ELASTICIDAD PLANA	30
2.1.8 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ELASTICIDAD	33
2.2 FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA.....	34
2.2.1 GENERALIDADES.....	34
2.2.2 DERIVACIÓN	35
2.2.3 INTEGRACIÓN	38
2.2.4 SERIES INFINITAS	42
2.2.5 RESIDUOS	45
2.3 VARIABLE COMPLEJA EN PROBLEMAS DE ELASTICIDAD.....	46

2.3.1	VARIABLE COMPLEJA EN ELASTICIDAD PLANA	47
2.3.2	ELASTICIDAD PLANA COMPLEJA EN DOMINIOS MULTIPLEMENTE CONEXOS.....	48
2.3.3	SOLUCIÓN DEL PRIMER PROBLEMA FUNDAMENTAL DE ELASTICIDAD.....	50
2.3.4	SOLUCIÓN DEL SEGUNDO PROBLEMA FUNDAMENTAL DE ELASTICIDAD.....	52
2.4	MECÁNICA DE LA FRACTURA.....	53
2.4.1	GENERALIDADES.....	53
2.4.2	CAMPOS DE ESFUERZOS SINGULARES Y EL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZOS 56	
2.4.3	CAMPOS ELASTOPLÁSTICOS	59
2.4.4	MÉTODOS ENERGÉTICOS EN FRACTURA (TEORÍA DE GRIFFITH).....	62
2.4.5	LA INTEGRAL J.....	63
2.4.6	FRACTURAS MÚLTIPLES.....	65
2.5	VARIABLE COMPLEJA EN PROBLEMAS DE FRACTURA	67
2.5.1	FUNCIÓN DE ESFUERZOS COMPLEJA PARA PROBLEMAS DE FRACTURA	67
2.6	FUNCIONES DE MÚLTIPLES VARIABLES COMPLEJAS.....	69
2.6.1	EL TEOREMA DE EXTENSIÓN DE HARTOGS	70
2.6.2	PSEUDOCONVEXIDAD.....	70
2.6.3	SINGULARIDADES	71
2.6.4	REPRESENTACIONES INTEGRALES.....	72
2.6.5	SERIES INFINITAS	74
2.6.6	RESIDUOS	75
3	DESARROLLO TEÓRICO	78
3.1	POTENCIAL DE DESPLAZAMIENTOS MULTICOMPLEJO PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDAD EN \mathbb{R}^3 79	
3.2	Solución de los problemas fundamentales de la elasticidad usando el potencial de desplazamientos multicomplejo	89
3.2.1	Solución del primer problema fundamental de la elasticidad	90
3.2.2	Solución del segundo problema fundamental de la elasticidad	92
3.3	Solución de problemas de elasticidad usando el potencial de desplazamiento multicomplejo	94
3.3.1	Solución del problema biaxial.....	94
3.3.2	Solución del problema del cortante puro	97
3.4	SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELÁSTICOS CON UNA SINGULARIDAD	100
3.4.1	Solución polinomial	101

3.4.2	Solución exponencial	103
3.4.3	Solución logarítmica	108
3.5	Cálculo de la integral J	110
3.6	SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELÁSTICOS CON MÚLTIPLES SINGULARIDADES.....	112
3.6.1	Problema con dos singularidades	112
3.7	Cálculo de la integral J para problemas con múltiples singularidades	116
4	IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL	119
4.1	Solución de problemas elásticos	119
4.1.1	Problema uniaxial	120
4.1.2	Problema biaxial	121
4.1.3	Problema cortante puro	122
4.2	Solución de problemas con singularidades.....	123
4.2.1	Problema con una sola singularidad	123
4.2.2	Problema con dos singularidades	127
4.2.3	Cálculo de la integral J	130
4.3	Aplicación integrada	132
5	Conclusiones	135
6	TRABAJO FUTURO	137
7	ANEXOS	138
7.1	Comprobación de ecuaciones de equilibrio	138
7.2	Derivadas de las componentes del potencial P	140
8	Referencias.....	142

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Dominio de estudio con una grieta aislada [1]	3
Figura 1.2 Gráfico del criterio de Mohr-Coulomb	5
Figura 1.3 Fractura frágil del buque Schenectady encallado [14]	7
Figura 1.4 Modos de carga en mecánica de fractura.....	8
Figura 1.5 Efecto de blindaje en grietas paralelas	12
Figura 2.1 Sólido sometido a un sistema de fuerzas externas	14
Figura 2.2 Desplazamiento de un sólido debido a la aplicación de un sistema de fuerzas externas	14
Figura 2.3 Desplazamiento de un sólido restringido	15
Figura 2.4 Barra en deformación axial a) Previo a deformación b) Deformada.....	16
Figura 2.5 Elemento plano deformado.....	17
Figura 2.6 a) Sólido en equilibrio b) Mitad izquierda del sólido en equilibrio	18
Figura 2.7 Barra sometida a carga axial.....	21
Figura 2.8 Sección transversal de una barra sometida a cortante puro	22
Figura 2.9 Elemento tetraédrico	25
Figura 2.10 Elemento lineal en el espacio	26
Figura 2.11 Elemento prismático en extensión uniaxial	27
Figura 2.12 Descripción gráfica de la energía de distorsión del elemento prismático en tensión uniaxial.....	28
Figura 2.13 Elemento prismático en cortante puro.....	29
Figura 2.14 Representación gráfica de la energía de distorsión complementaria.....	30
Figura 2.15 Condición de esfuerzo plano	31
Figura 2.16 Condición de deformación plana	32
Figura 2.17 Integral sobre una curva suave a trozos	38
Figura 2.18 Deformación de contornos.....	40
Figura 2.19 Contorno circular embebido en un contorno simple cerrado de forma aleatoria	41
Figura 2.20 Dominio múltiplemente conexo	49
Figura 2.21 Modos de carga en mecánica de fractura.....	54
Figura 2.22 Plato infinito con grieta pasante sometida a esfuerzos uniformes.....	56
Figura 2.23 Uso de coordenadas polares para el cálculo del campo de esfuerzos	57
Figura 2.24 Problemas de platos agrietados a) en modo II y b) en modo III	59
Figura 2.25 Regiones alrededor de la punta de la grieta	60
Figura 2.26 Regiones plásticas alrededor de la punta de una grieta	61
Figura 2.27 Modelo simplificado de plasticidad de Irwin	61
Figura 2.28 Aplicación de la integral J a problemas de fractura	64
Figura 2.29 Grietas coplanares	65
Figura 2.30 Cuerpo plano con múltiples grietas.....	66
Figura 2.31 Dominio múltiplemente conexo con segmentos de arco internos	68
Figura 3.1 Sólido tres dimensional sometido a cargas externas.....	78
Figura 3.2 Celda hexaédrica unitaria sometida a tracción normal en la frontera	91
Figura 3.3 Celda hexaédrica sometida a carga biaxial	94
Figura 3.4 Celda hexaédrica bajo cortante puro.....	97
Figura 3.5 Celda hexaédrica con grieta	100
Figura 3.6 Cilindro alrededor del frente de grieta	110

Figura 3.7 Superficie cerrado sobre el frente de grieta	111
Figura 3.8 Celda hexaédrica con dos singularidades	113
Figura 3.9 Ángulos de un vector 3D.....	117
Figura 4.1 Comparación de desplazamientos calculados para el caso uniaxial a) w, b) w ANSYS, c) v, d) v ANSYS	120
Figura 4.2 Comparación de resultados globales del problema uniaxial a) desplazamiento total, b) deformación equivalente, c) esfuerzo equivalente, d) desplazamiento total ANSYS e) deformación equivalente ANSYS f) esfuerzo equivalente ANSYS	120
Figura 4.3 Comparación de desplazamientos calculados para el caso biaxial a) w, b) w ANSYS, c) u, d) u ANSYS.....	121
Figura 4.4 Comparación de resultados globales del problema biaxial a) desplazamiento total, b) deformación equivalente, c) esfuerzo equivalente, d) desplazamiento total ANSYS e) deformación equivalente ANSYS f) esfuerzo equivalente ANSYS	121
Figura 4.5 Comparación de desplazamientos calculados para el caso de cortante puro a) w, b) w ANSYS, c) u, d) u ANSYS.....	122
Figura 4.6 Comparación de resultados globales del problema biaxial a) desplazamiento total, b) deformación equivalente, c) esfuerzo equivalente, d) desplazamiento total ANSYS e) deformación equivalente ANSYS f) esfuerzo equivalente ANSYS	122
Figura 4.7 Comparativo de desplazamientos en dirección z una grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	123
Figura 4.8 Comparativo de deformaciones normales en dirección z una grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	124
Figura 4.9 Comparativo de esfuerzos en dirección z una grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	124
Figura 4.10 Comparativo de deformaciones en el plano yz una grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	125
Figura 4.11 Comparativo de esfuerzos en el plano yz una grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	125
Figura 4.12 Comparativo de desplazamientos totales grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	126
Figura 4.13 Comparativo de deformaciones equivalentes una grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	126
Figura 4.14 Comparativo de esfuerzos equivalentes una grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	126
Figura 4.15 Comparativo de desplazamientos en dirección z dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	127
Figura 4.16 Comparativo de deformaciones normales en dirección z dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	127
Figura 4.17 Comparativo de esfuerzos en dirección z dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	128
Figura 4.18 Comparativo de deformaciones en el plano yz dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	128
Figura 4.19 Comparativo de esfuerzos en el plano yz dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	129

Figura 4.20 Comparativo de desplazamientos totales dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	129
Figura 4.21 Comparativo de deformaciones equivalentes dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	130
Figura 4.22 Comparativo de esfuerzos equivalentes dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS.....	130
Figura 4.23 Integral J para problema de una grieta.....	131
Figura 4.24 Integral J para el problema de dos grietas.....	131
Figura 4.25 Vista general de la aplicación software	132
Figura 4.26 Vista del panel de aplicación de condiciones de frontera.....	132
Figura 4.27 Vista del panel de definición de grietas	132
Figura 4.28 Vista del panel de cálculo y graficación	133
Figura 4.29 Vista del panel de resultados.....	133
Figura 4.30 Solución del problema del cortante puro con la aplicación software	134
Figura 4.31 Solución del problema de una grieta con la aplicación software.....	134

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4.1 Valor de la integral J para el problema de una grieta	130
Tabla 4.2 Valor de la integral J para el problema de dos grietas	131

GLOSARIO

Isotrópico. Se dice del material que posee las mismas propiedades físicas en todas las direcciones

Vecindad. Es el conjunto de puntos situados en el interior del círculo de radio finito centrado en un punto dado.

Vecindad punteada. Es el conjunto de puntos dentro de un círculo centrado en un punto dado, salvo el propio punto.

Conjunto abierto. Aquel conjunto para el que todo elemento existe una vecindad cuyos puntos pertenecen todos al conjunto.

Conjunto conexo. Aquel conjunto en el que dados dos puntos cualesquiera existe una trayectoria que los une y cuyos puntos pertenecen al conjunto.

Contorno simple cerrado. Es una curva que no se auto interseca cuyo punto de inicio y fin son el mismo. Un contorno simple cerrado genera dos dominios uno acotado y otro sin acotar.

Curva suave. Aquella curva que un intervalo mantiene sus primeras derivadas continuas, sin anularse simultáneamente, excepto posiblemente en los puntos terminales del intervalo.

Curva suave a trozos. Es aquella curva formada por un número finito de curvas suaves, donde la dirección de la tangente de una curva suave a trozos puede cambiar de forma discontinua en los puntos de unión.

Dominio. Conjunto abierto conexo.

Dominio simple conexo. Aquel dominio para el que todos los puntos encerrados por una trayectoria simple cerrada pertenecen al dominio, es decir es aquel dominio que no tiene agujeros.

Dominio múltiplemente conexo. Aquel dominio que dada una trayectoria simple cerrada en el dominio contiene puntos que no son del dominio, es decir es un dominio con agujeros.

Punto frontera. Aquel que para el que toda vecindad contiene al menos un punto dentro y uno fuera del dominio.

Punto interior. Aquel para el cual existe una vecindad cuyos elementos son todos del conjunto.

Punto exterior. Aquel para el cual hay una vecindad cuyos elementos son todos puntos fuera del dominio.

Punto de acumulación. Es un punto para el cual toda vecindad de dicho punto contiene al menos un elemento del conjunto, distinto del punto mismo.

Región. La unión de un dominio y algunos, ninguno o todos sus puntos de frontera.

Región cerrada. Es la unión de un dominio con todos sus puntos de frontera.

Conjunto acotado. Es un conjunto para el cual existe un círculo de radio finito que circunscribe al conjunto.

SIMBOLOGÍA

Símbolo	Significado
γ	Deformación cortante
δ	Deformación normal
λ	Primer parámetro de Lamé
μ	Segundo parámetro de Lamé
ν	Coefficiente de Poisson
σ	Esfuerzo normal
τ	Esfuerzo cortante
u	Desplazamiento en dirección cartesiana x
v	Desplazamiento en dirección cartesiana y
w	Desplazamiento en dirección cartesiana z
D	Módulo cortante
E	Módulo de Young
F	Fuerza externa
G	Tasa de liberación de energía de distorsión
K_I	Factor de intensidad de esfuerzos en modo I
K_{II}	Factor de intensidad de esfuerzos en modo II
K_{III}	Factor de intensidad de esfuerzos en modo III
K_c	Tenacidad de fractura
J	Integral J
U_v	Energía de distorsión
U_c	Energía de distorsión complementaria
ϕ	Función de esfuerzos de Airy

1 PRELIMINARES

En este primer capítulo se presentan los elementos preliminares al desarrollo del trabajo; tales como, una breve introducción al tema a abordar el cual es la mecánica de fractura en el escenario de fracturas interactuantes asumiendo condiciones lineales elásticas y comportamiento frágil, así como los objetivos planteados al inicio del desarrollo, acompañados de un planteamiento del problema e hipótesis, cerrando con una revisión de los antecedentes pertinentes de acuerdo con los objetivos, alcances e hipótesis presentados.

1.1 INTRODUCCIÓN

El diseño de estructuras y/o elementos mecánicos involucra el análisis de esfuerzos y deformaciones, existiendo sofisticados métodos analíticos, numéricos y experimentales que permiten conocer la distribución de esfuerzos y deformaciones en los elementos mecánicos, lo cual posteriormente permite al diseñador utilizar algún criterio de falla adecuado al mecanismo de falla que se pretenda evaluar. Los modos de falla que de forma regular consideran los diseñadores son la falla por rigidez, la falla por inestabilidad elástica y principalmente la falla por resistencia. Los criterios de falla por resistencia tales como la máxima energía de distorsión¹ o el máximo esfuerzo cortante² aplican para fenómenos de falla dúctil; es decir cuando la falla del elemento mecánico se da posterior a una gran deformación. Por otro lado criterios de falla tales como el criterio de fricción interna³ o el de máximo esfuerzo principal⁴ aplican para el fenómeno de falla frágil, la cual se da cuando un elemento mecánico falla de forma crítica súbitamente ante pequeñas deformaciones.

A pesar de que los criterios de falla antes mencionados demuestran ser adecuados para el diseño de elementos mecánicos, estos consideran que los cuerpos son perfectos; es decir no se consideran posibles defectos que modifican las características de los materiales de los cuales están constituidas las piezas mecánicas, en específico la resistencia a sollicitaciones externas como fuerzas o momentos. Para fenómenos de falla dúctil, por ejemplo, resulta importante considerar defectos tales como las dislocaciones o espacios entre los granos superficiales, mientras que para la falla frágil los defectos grandes como rasgaduras o grietas cobran mayor relevancia.

Dado lo antes mencionado para la evaluación del posible desempeño e integridad de algún elemento mecánico con algún defecto pre-existente es necesario utilizar un criterio de falla, el cual considere el efecto que tienen dichas imperfecciones sobre el elemento mecánico. Es entonces donde surge el estudio de la mecánica de fractura como una herramienta auxiliar en el diseño e

¹ También conocido como criterio de Von Mises

² También conocido como criterio de Tresca

³ También conocido como criterio de Mohr-Coulomb

⁴ También conocido como criterio de Rankine

inspección de estructuras o cuerpos. El estudio de la mecánica de la fractura se centra entonces en determinar cuándo un defecto crecerá o se propagará de forma inestable, causando una falla crítica.

Si bien los primeros estudios formales sobre mecánica de la fractura datan de la década de los 1910's, el mayor interés por el estudio de la fractura fue propiciado por el desarrollo tecnológico militar, principalmente por el surgimiento de fallas catastróficas en transportes militares, dichos estudios fueron planteados desde la perspectiva de la elasticidad plana, simplificando los problemas reales a modelos de esfuerzo o deformación planos, con grietas aisladas y despreciando los efectos de plasticidad en las puntas de las grietas.

Estudios posteriores incluyeron los efectos de plasticidad local en la punta de las grietas, lo cual llevo al establecimiento de criterios de falla por fractura que resultaron consistentes con datos experimentales. A partir de este punto se han realizado una diversidad de trabajos acerca de cuerpos agrietados que tratan; por ejemplo, de generalizar el análisis a un estado tres dimensional, considerar distintas condiciones de carga o geometrías de grieta, implementando diversas herramientas matemáticas como el uso de funciones complejas de energía de distorsión planas y ecuaciones integrales de frontera singulares.

La sofisticación del estudio del fenómeno de fractura condujo entonces a considerar otros escenarios tales como el de fractura múltiple; donde diversos resultados muestran, que la interacción de múltiples grietas en un mismo cuerpo altera la respuesta de éste, respecto a la teoría clásica de una sola grieta aislada. Haciendo necesario entonces tomar en cuenta la interacción entre grietas para realizar un diagnóstico con mejor aproximación respecto a la integridad y resistencia remanentes en el cuerpo agrietado, para tales fines han sido desarrollados distintos métodos basados en el uso de ecuaciones de frontera resueltas por elementos finitos, elementos frontera o métodos *meshless*⁵.

Al día de hoy, el estudio de la mecánica de la fractura sigue resultando de gran relevancia, ya que la comprensión del inicio y propagación de grietas resulta de vital importancia para el diseño de estructuras o dispositivos confiables, seguros y a su vez económicos.

Por lo tanto, el desarrollo de modelos analíticos y numéricos para el mejor modelado y aproximación de resultados en problemas de estudio de mecánica de la fractura resultan de alto interés.

Un punto importante para resaltar es que en el trabajo que se presenta en próximos capítulos, se establece un método de estudio del problema de fractura múltiple haciendo uso de herramientas de la holomorfía infinita; es decir, se usan funciones de múltiples variables complejas para definir una función de densidad de energía de distorsión tres dimensional. Posteriormente se plantean integrales de Cauchy sobre las grietas presentes en el dominio de estudio, de las cuales se obtienen los resultados deseados haciendo el cálculo de residuos apoyados en series infinitas. Dando como resultado un método de estudio del tipo *meshless*.

⁵ Se denominan *meshless* a aquellos métodos que no requieren de una discretización del dominio en elementos para solucionar alguna ecuación definida sobre este, ya que las propiedades tales como masa no se asignan a elementos sino a nodos.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El estudio clásico de la mecánica de la fractura se concentra en el estudio de una grieta aislada en un dominio (Figura 1.1), dónde el objetivo es conocer la resistencia remanente del dominio, es decir, cuanto más resistirá antes de que la grieta se propague y ocasione una falla catastrófica.

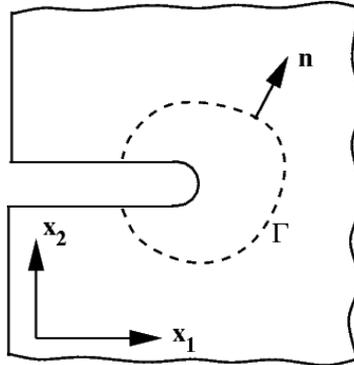


Figura 1.1 Dominio de estudio con una grieta aislada [1]

Sin embargo, es un hecho conocido que la falla por fractura de un material está estrechamente relacionada con las condiciones en las cuales interactúan defectos pre-existentes como grietas, siendo esta interacción el mecanismo de fractura del material [2]. Dado lo anterior el estudio de la interacción de dichos defectos, ante sollicitaciones externas al dominio resulta de gran importancia.

Las grietas interactuantes pueden estar sobre un mismo plano de acción, ser paralelas o tener un acomodo arbitrario, sin importar el arreglo de grietas que se tenga siempre el dato relevante a encontrar es, cuál será la punta de grieta que tenderá a propagarse primero, dadas ciertas condiciones de carga. Así entonces el problema a resolver es el de múltiples grietas interactuantes en un dominio tres dimensional con comportamiento lineal elástico e isotrópico, para el cual se busca encontrar un factor que sirva como indicativo de qué grieta será aquella que tenderá a propagarse.

1.3 PLANTEAMIENTO DE LA HIPÓTESIS

Cuando en un dominio tres dimensional cuyo comportamiento es lineal, elástico e isotrópico existen múltiples grietas, la interacción que exista entre éstas afectará la resistencia remanente del dominio. El estudio de estas situaciones mediante el uso de herramientas de la holomorfía infinita podría agilizar el proceso de cálculo, dado que podría desarrollarse un método meshless que derive en un modelo que simplifique cálculo y requiera una menor cantidad de operaciones; y en consecuencia menor recurso computacional, para la determinación del factor de intensidad de esfuerzos crítico del problema, mediante una aproximación numérica.

1.4 OBJETIVOS

Desarrollar un modelo computacional para el estudio de la mecánica de la fractura múltiple, con base en un modelo matemático desarrollado con herramientas de la teoría de la holomorfía infinita y un enfoque lineal elástico.

1.5 JUSTIFICACIÓN

Como ya se ha planteado anteriormente, la interacción entre múltiples grietas ubicadas en un mismo dominio resulta de alta importancia para una mejor aproximación de la resistencia remanente del dominio en cuestión, y dado que, en diversas aplicaciones prácticas de gran importancia como el diseño de aeronaves, barcos automóbiles, reactores, ductos, uniones estructurales soldadas o con pernos, entre otras, se presentan escenarios de grietas múltiples. Resulta entonces de gran interés el continuo desarrollo y mejoramiento de métodos de análisis que permitan a los diseñadores aproximar los posibles comportamientos de los distintos elementos que puedan presentar un estado de agrietamiento múltiple.

Y aunque se parta de un desarrollo con base teórico-matemática para el análisis de las situaciones atrás citadas, el vertiginoso ritmo de desarrollo en la ingeniería y diseño aplicados a públicos masivos, así como el gran avance en las tecnologías de la información exigen que los cálculos pertinentes para llevar a cabo un diseño disminuyan en su tiempo de ejecución y aumente en su precisión de aproximación, permitiendo una reducción de los tiempos de experimentación y liberación al mercado disminuyan, propiciando que los desarrollos sean más rentables. A pesar de que en primera instancia las aplicaciones directas de la mecánica de la fractura pudiesen sonar en extremo sofisticadas, no quedan exentas del rápido crecimiento en exigencias de desempeño, no sólo en calidad, sino en agilidad del proceso de diseño y desarrollo, haciendo así necesario no sólo el desarrollo de métodos de análisis, sino también de herramientas software que permitan realizar los cálculos de fractura en menor tiempo.

Por los argumentos antes planteados resulta entonces pertinente el plantear el desarrollo de una aplicación software para el estudio de la mecánica de fractura múltiple que permita reducir los tiempos de cálculo de los factores críticos de diseño, haciendo uso de un modelo matemático basado en la teoría de la mecánica de la fractura lineal elástica y herramientas matemáticas de la teoría de la holomorfía infinita.

1.6 ANTECEDENTES

El propósito de esta sección es plasmar de forma rápida y concisa el proceso evolutivo del estudio⁶ de la mecánica de fractura incluyendo las perspectivas analítica, numérica y experimental, desde las primeras aproximaciones de análisis de la fractura, pasando por los primeros estudios formales de fractura, el establecimiento de criterios de falla en fractura, la extensión de métodos de análisis al caso tres dimensional, la aplicación de métodos de variables compleja, hasta el estudio de fractura

⁶ No se presentan datos sobre aspectos cinemáticos o dinámicos de fractura

múltiple y la aplicación de métodos numéricos y computacionales. Los aspectos teóricos detallados que resulten relevantes para el desarrollo del trabajo que se propone en este texto se mostrarán en el capítulo 2.

Hablando desde una perspectiva histórica, algunos autores establecen que el hombre ha utilizado la mecánica de la fractura desde que se crearon las primeras herramientas de piedra, ya que crearon técnicas para desprender partes del material a placer según lo requiriera el diseño [3] o en el trabajo de creación de estructuras o esculturas durante el florecimiento de las primeras grandes civilizaciones alrededor de la tierra [4], sin embargo no se podría hablar como tal de un estudio de fractura, dado que quienes trabajaban los materiales antes mencionados lo hacían de una forma empírica y no hay escritos conocidos donde se asiente alguna indagación experimental ni mucho menos analítica.

Tal vez los inicios del estudio (y no solo su uso) de la mecánica de la fractura podríamos trazarlos hasta aproximadamente el año 1500 cuando Leonardo Da Vinci se plantea algunas preguntas sobre la ruptura de cuerpos e intenta estudiar dichos fenómenos con alambres de acero, encontrando que existía una relación de proporcionalidad inversa entre la longitud de estos y su resistencia [5], sin embargo sus trabajos solo fueron experimentales, y no fue sino hasta más de un siglo después que Galileo Galilei alrededor del 1638 investigara el problema de cuerpos agrietados desde una perspectiva matemática, tomando en cuenta efectos de tamaño [5] y experimentando con barras bajo cargas longitudinales [6], siendo el primero en establecer la proporcionalidad entre la resistencia y la sección transversal de las barras⁷ [3]. Los experimentos de Galileo fueron continuados por Mariotte [5] donde siguió demostrando los efectos de tamaño en elementos estructurales.

Para el año 1776 Coulomb; quien podría considerarse el auténtico pionero del estudio de la fractura [7], realiza importantes estudios sobre la fractura de rocas a compresión, como producto de estos estudios Coulomb desarrolló el criterio de falla por fricción interna (Figura 1.2) que al día de hoy sigue siendo utilizado.

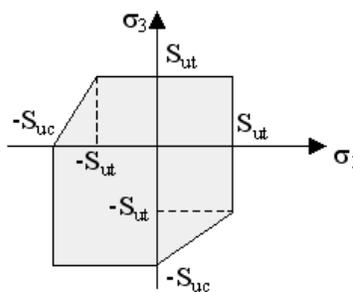


Figura 1.2 Gráfico del criterio de Mohr-Coulomb

Con la llegada de la revolución industrial en la segunda mitad del siglo XVIII hubo una explosión en el uso del acero y hierro en las construcciones y vías de comunicación como el ferrocarril, esto

⁷ Estas conclusiones de Galileo a la postre fueron aceptadas como ciertas, estableciendo que la resistencia es una propiedad intrínseca de los materiales

reanimó el estudio de la fractura, debido a que era común ver fallas críticas, principalmente en las vías de ferrocarril.

Así para 1830 Lloyd encontró como resultados de diversas pruebas que la resistencia promedio de barras cortas de acero era mayor que la de barras largas [1], mientras en 1839 Le Blanc establece que los alambres de acero más cortos resistían más que los alambres más largos del mismo diámetro [1], sin embargo ambos resultados resultan similares a las conclusiones de Da Vinci y no representan un aporte significativo al estudio de la fractura.

Fue en 1843 cuando Rankine propone la relación entre las cargas a las que se sometía un eje de ferrocarril y su falla, es decir, la fatiga [6]. Casi una década más tarde Whöler estudió fallas similares a las estudiadas por Rankine, sugiriendo que existía un límite de fatiga y estableciendo una relación empírica entre esfuerzo y número de ciclos [8], ya para 1870 la revista de ingeniería británica reporta estadísticas acerca de los accidentes relacionados con fallas por fatiga [3].

Para el año 1898 Kirsch obtiene una solución analítica para definir el estado de esfuerzos alrededor de un barreno circular en un plato infinito bajo tensión uniforme [5], ideas que fueron más desarrolladas por Kolosov, quién propone un método de cálculo para los esfuerzos alrededor de un agujero circular en un plato [5]. Dicho trabajo fue continuado por Inglis quien presenta una solución para el campo de esfuerzos alrededor de la punta de una grieta [9]. Posterior al fin de la primera guerra mundial Stanton, Batson y Docherty realizan experimentos usando barras con muescas, los cuales les permiten conocer la relación inversa entre el trabajo de fractura por unidad de volumen y las dimensiones del espécimen de prueba [1] la conclusión fue que los especímenes se comportaban de una forma frágil entre más grandes eran.

La mayoría de los estudios hasta este punto mencionados mostraban ya el conocido efecto de tamaño en la resistencia de los sólidos. Sin embargo, el primero en realizar un estudio sistemático de dicho efecto fue Griffith en la década de 1920 haciendo uso de un enfoque energético, fue él quien concluyó que un material frágil agrietado ve reducida su resistencia respecto a lo teóricamente esperado, y que los esfuerzos tienden a concentrarse y crecer rápidamente en las puntas de las grietas. Pero tal vez su mayor contribución fue establecer la relación entre el tamaño de la grieta y la resistencia remanente del cuerpo dando un tratamiento desde la perspectiva del equilibrio a dicho problema, relacionando la reducción de la energía de distorsión del cuerpo con el aumento de la energía superficial en las caras de las grietas, debido al aumento del área de éstas [10]. A pesar de que al día de hoy el trabajo de Griffith es considerado como pieza fundamental en el desarrollo de la mecánica de fractura, en su momento sus postulados y resultados no fueron apreciados como tal, incluso cuando los estudios de Obreimoff en micas, apoyaban los resultados de Griffith [3].

De forma paralela a los estudios sobre cuerpos agrietados llevados a cabo principalmente en Europa occidental (y que son los que hasta el momento se han presentado), científicos de la unión soviética hicieron aportaciones sobre el estudio de la fractura, además de desarrollar teorías de elasticidad y plasticidad que a la postre serían aplicadas a la solución de problemas de cuerpos agrietados, en este punto cabe destacar el trabajo de N.I. Muskhelishvili en elasticidad plana, donde expresó las soluciones generales de las ecuaciones de elasticidad plana haciendo uso de funciones analíticas, así como el uso de integrales de Cauchy (y en general a la teoría de las ecuaciones integrales singulares) para la solución de problemas con valores en la frontera para elasticidad plana [11, 12].

Para el año 1939 Westergaard aplicó las ideas de Griffith para el caso dos dimensional [5] haciendo uso de un método semi-inverso en el que empleaba funciones armónicas para describir los esfuerzos en un medio infinito agrietado [13]. Fue precisamente en estas épocas (a partir de 1939) que estalló la segunda guerra mundial trayendo consigo un apresurado desarrollo; tanto de armamento como de vehículos de guerra, dicho desarrollo trajo consigo nuevos paradigmas de diseño en ingeniería y revivió viejos problemas que se habían dejado un tanto “olvidados” como lo fue el estudio de la mecánica de fractura. Es un hecho bien documentado el de las fallas en los buques norteamericanos fabricados durante la segunda guerra mundial, algunos datos mencionan que de 5000 buques mercantes construidos en dicho periodo más del 20% desarrolló grietas en menos de tres años de vida útil [1] y de 2500 buques *Liberty* 145 quedaron por completo destruidos y 700 dañados por grietas originadas por defectos en la soldadura [6]. Un caso relevante es el del carguero *Schenectady* el cual se partió súbitamente en dos estados en el muelle después de haber completado pruebas exitosas en altamar (ver Figura 1.3).

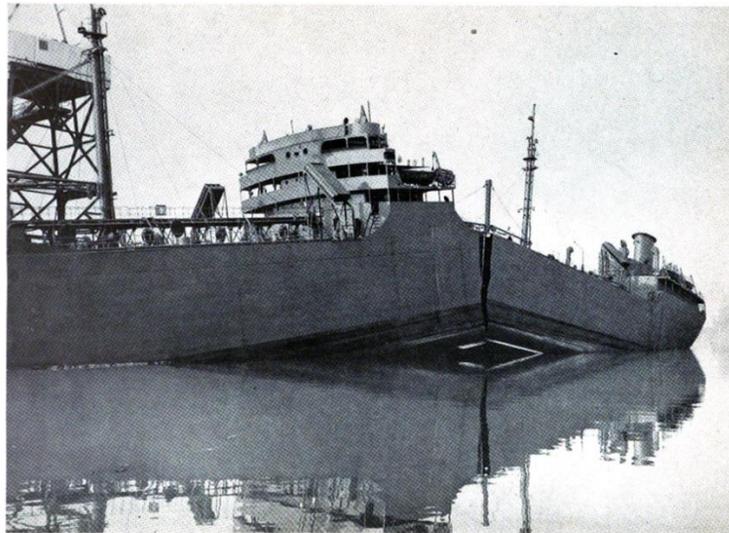


Figura 1.3 Fractura frágil del buque *Schenectady* encallado [14]

Estos eventos hicieron que se retomara atención a la mecánica de fractura, siendo Irwin quien estando al frente de la división de balística del laboratorio de investigación naval propuso la generalización de la teoría de Griffith, para grietas arbitrarias considerando esfuerzos singulares en los frentes de grieta, al tiempo que propuso un criterio para evaluar la propagación de una grieta, estableciendo así que si la energía de distorsión en el dominio de estudio “ G ” es mayor que el trabajo mínimo necesario para la creación de una nueva superficie de grieta “ G_c ”, entonces la grieta se propagaría [15]. Otra de sus relevantes aportaciones fue la introducción del factor de intensidad de esfuerzos “ K ”⁸, demostrando (basándose en el trabajo de Westergaard) que dicho factor determina completamente el estado de esfuerzos en la vecindad de la punta de la grieta [15], en general Irwin estableció la teoría de la mecánica de fractura lineal elástica (MFLE). Además de definir los clásicos modos de carga en mecánica de fractura (ver Figura 1.4), el modo I o de apertura,

⁸ Se dice que la letra K es en honor a Kies, un colega de Irwin de los 50’s

modo ii o de deslizamiento y el modo iii o de desgarramiento, de los cuales se considera que el modo i propicia un estado de tensión y los otros dos modos un estado de cortante en la grieta.

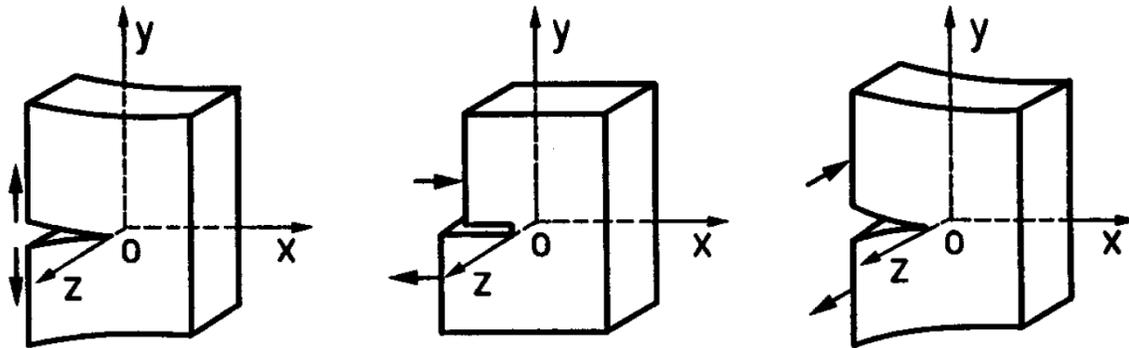


Figura 1.4 Modos de carga en mecánica de fractura

Otro personaje sin duda relevante es Orowan, y sus estudios con dispersión de rayos X (1945) en aceros de bajo carbono; para observar el espesor de la zona plástica [16]. Ya para 1952 en un simposio en el M.I.T. propuso la idea de que la energía plástica por unidad de área debía ser considerada en el balance energético sugerido por Griffith [17]. Estos trabajos fueron de gran interés para el mismo Irwin⁹ quien rescatando algunas de estas ideas llegó a la generalización de la teoría de Griffith, de hecho, en ocasiones la teoría de la MFLE es también nombrada el enfoque de Griffith-Orowan-Irwin debido a la gran contribución de los trabajos de los tres al desarrollo de la teoría.

A la par de la publicación de los trabajos de Irwin sobre el estado de esfuerzos en la punta de la grieta en el que usó el método semi-inverso de Westergaard, Williams presentó un estudio similar, dando solución al estado de esfuerzos en la punta de la grieta para problemas planos, con el uso de una serie infinita [18].

En 1959 el departamento de defensa de los Estados Unidos de Norteamérica pidió a la ASTM (American Society for Testing and Materials) la conformación de un comité especial para establecer métodos estandarizados de evaluación de resistencia a la fractura frágil, esto debido a problemas que tuvieron sus equipos de desarrollo de los programas de los programas Polaris y Vanguard durante la etapa de pruebas [19]. Así para 1970 surge el estándar E399 para la evaluación de la tenacidad de fractura de materiales metálicos.

En el mismo 1959 Barenblatt fue el primero en considerar fuerzas de cohesión en la vecindad de la punta de la grieta; asumiendo condiciones lineales elásticas [19], considerando que estas fuerzas de cohesión eliminaban la fricción entre las superficies de la grieta, más tarde (1960) Dugdale tomó ese modelo asumiendo que las fuerzas de cohesión eran constantes [20], derivado de estos trabajos se tiene el modelo de la zona de cohesión o de proceso de fractura, el cual aplica para modelos con condición de esfuerzo plano dominante, el estudio de la zona plástica bajo este modelo resulta mayor en dimensión que el modelo de Irwin. El modelo de Barenblatt-Dugdale ha tenido fuerte aplicación en métodos de estudio de fractura basados en el método del elemento finito (MEF).

⁹ Irwin y Orowan estuvieron en contacto en 1947 sin embargo al tener distintos intereses en como guiar sus investigaciones no hubo una colaboración más estrecha entre estos [3]

A un lado de las teorías que hasta el momento se han presentado que es básicamente el desarrollo de la MFLE se desarrolló la teoría de la mecánica de la fractura probabilista (MFP), propuesta por Weibull en 1939 [3], dicha teoría apoyó el entendimiento del efecto del tamaño de la grieta y tiene semejanza con la teoría de Griffith. Para 1956 Zhurkov introduce el concepto de fluctuación térmica y plantea una relación de tiempo de vida y carga para un sólido [3], siendo en 1961 cuando Paris presenta un modelo de propagación de grieta debido a fatiga del material [5] teniendo ambos trabajos un claro apego al modelo de la MFP dada la naturaleza probabilística de la fatiga de materiales.

Otra línea de desarrollo que vale la pena mencionar es la del estudio de problemas de fractura a través de métodos numéricos, en este caso es de especial interés el MEF. Si bien el origen del MEF puede trazarse al inicio del estudio de problemas de variaciones, la formulación que se usa al día de hoy fue presentada por Clough en 1960 [21] donde presentó el método desde una perspectiva de variaciones, planteando la minimización de la funcional de energía del sistema. A partir del surgimiento del MEF ha existido interés en la aplicación de este a problemas de fractura, surgiendo diversas variantes del método aplicadas a fractura como el método del elemento interfaz [5], el método de extrapolación de desplazamiento o del elemento principal.

En el campo de los métodos experimentales Irwin propuso en 1957 un primer método denominado tensometría eléctrica resistiva [15], y para 1958 realiza un análisis del factor de intensidad de esfuerzos inspirado en las ideas de Wells y Post quienes ese mismo año presentaron trabajos sobre el análisis de esfuerzos en muestras agrietadas usando un método foto elástico [15, 5]. Hoy en día existen estándares ASTM respecto al trabajo experimental en mecánica de fractura.

El enfoque del que hasta el momento se ha platicado, el de MFLE, encuentra sus limitaciones en el hecho de que es aplicable sólo para casos de cedencia a pequeña escala, situación que se da sólo cuando el material es frágil o de alta resistencia, en la búsqueda de establecer un criterio de fractura que fuese aplicable más allá de estas condiciones, es decir, cuando se presentase plasticidad a mayor escala. En este respecto son dos principales teorías en las que se atacó dicho problema, la primera presentada por Wells (1963) en la cual postulaba que sin importar las condiciones elásticas o plásticas del problema la propagación de una grieta ocurriría cuando el desplazamiento de apertura de la punta de la grieta superar un valor crítico [22] a esta teoría se le conoce comúnmente por sus siglas en inglés CTOD (crack tip opening displacement). Relacionado al CTOD surge el ángulo de apertura en la punta de la grieta o CTOA por sus siglas en inglés, el cual es presentado por McClintock (1968) como criterio de fractura dúctil y usado por Andersson y Shih (1970) [19].

La segunda de las teorías que lidia con las regiones plásticas previo a la propagación de una grieta es la presentada por Rice^{10,11} en 1968 [23] donde introduce una ley de conservación para problemas dos dimensionales, haciendo uso de una integral independiente de la trayectoria, conocida como integral J. El uso de la integral J permite el estudio de los campos de esfuerzos y desplazamientos en la vecindad de la punta de una grieta sin necesidad de pasar por esta discontinuidad del dominio de estudio. En 1973 Budiansky y Rice [24], presentan un trabajo en el que usan variables complejas en

¹⁰ Eshelby presentó en 1951 un trabajo donde planteaba una integral de este tipo, pero no da aplicación a grietas

¹¹ Cherepanov hizo un desarrollo análogo al de Rice, el cual también presentó en 1968, sin embargo, fue Rice quien vio su relevancia para casos de fractura elasto-plástica

las integrales independientes de trayectoria propuestas por Knowles y Sternberg [25]; las denominadas integrales M y L, las cuales al igual que la integral J están relacionadas con las tasas de liberación de energía. Estas integrales no distinguen entre la aportación de apertura o cortante, por tanto, no son del todo convenientes para casos de cargas combinadas, para evitar este inconveniente se han propuesto diversas integrales en las que se puedan distinguir dichas aportaciones como la integral de Bergez o Freund [26] que además permite un cálculo con MEF sin necesidad de usar elementos especiales.

Con el surgimiento del CTOD y la integral J se dio inicio a lo que se denomina la mecánica de fractura elasto-plástica (MFEP). Posterior al establecimiento de la MFEP se desarrollaron métodos experimentales para la evaluación y comprobación de estos nuevos métodos, es posible ver un compendio de algunos de estos métodos en el texto de Brocks y Schwalbe [27]. Además con el aumento de la capacidad de los sistemas de cómputo se dio una escalada en la aplicación del método del elemento finito para la solución de problemas de fractura, algunos de los trabajos buscaban un mejor tratamiento de la grieta haciendo refinamientos de malla, otros propusieron el uso de nuevos tipos de elementos finitos, como el propuesto por Byskov el cual incluía un elemento agrietado y cuya solución se basaba en los métodos de variable compleja de Muskhelishvili [5].

Otro paso en la evolución del estudio de la mecánica de fractura ha sido la generalización de los métodos clásicos de la MFLE y MFEP al caso tres dimensional. En esta área resulta importante resaltar los trabajos de Sih y sus colaboradores [2] en cuyos trabajos presentan desarrollos para la determinación del estado de esfuerzos en la punta de la grieta haciendo uso de coordenadas esféricas, las expresiones para esfuerzos y desplazamientos que presentan resultan análogas a las expresiones en dos dimensiones en términos de tres factores de intensidad de esfuerzos [28]. Resaltando además que tal vez fueron los primeros en proponer un criterio de fractura para el caso tres dimensional [29].

Los fundamentos de la teoría para el estudio de problemas tres dimensionales haciendo uso de funciones ponderadas es dada por Rice a manera de apéndice en su artículo "*Some remarks on elastic crack-tip stress fields*" de 1972 [30].

Como el mismo Rice menciona en [31], para 1985 surgió un gran interés en el estudio de la teoría en tres dimensiones para problemas de fractura; especialmente con funciones ponderadas¹²; el cual hasta ese entonces había tenido un desarrollo discreto desde los primeros postulados de Sih y Rice, sin embargo ese nuevo y creciente interés apuntó al desarrollo de nuevas técnicas haciendo uso del MEF [31], además del surgimiento de nuevas técnicas denominadas meshless las cuales tienen un mejor desempeño para el estudio de dominio con singularidades [5], así como la aplicación del método del elemento frontera (BEM), el cual aunque presenta algunos problemas de cálculo e implementación del método a problemas de fractura, da la ventaja de que no se necesita remallar durante el proceso de solución o un refinamiento o estructura compleja de malla como con el FEM [5].

El problema de fractura en tres dimensiones también ha sido abordado con métodos de ecuaciones integrales de frontera; en analogía a los problemas dos dimensionales, donde para la solución se

¹² Para mayor detalle se recomienda consultar el texto completo de Rice

usan métodos de Muskhelishvili [32]. Dentro de los trabajos en esta vertiente de estudio de la fractura tres dimensional destacan los trabajos de Bui, a partir de la segunda mitad de los 70's.

Como se ha mencionado antes la plasticidad en los problemas de fractura, es un elemento importante a considerar para obtener mejores aproximaciones en el análisis de grietas y su posible propagación y dado que hasta este punto de nuestro recorrido histórico hemos presentado la MFLE y MFEP, las cuales se centran en fallas frágiles, es necesario mencionar aunque sea de forma breve la teoría de mecánica de fractura dúctil la cual se centra en el estudio de problemas considerando un comportamiento plástico del material, el cual se caracteriza por la nucleación y crecimiento de cavidades. A diferencia de las teorías de fractura frágil, que lidian con grietas, en fractura dúctil se considera un estado de plasticidad en presencia de porosidad [32]. La fractura dúctil se presenta después de una gran deformación y para su estudio puede ser útil un análisis de deformación finita, de hecho, una de las teorías más importantes en el estudio de la fractura dúctil se basa en un análisis de ese tipo, la teoría de Rousselier (1981).

Los modelos, teorías y métodos de análisis de fractura hasta ahora presentados han demostrado dar buenos resultados que permiten la obtención de buenos diseños de elementos mecánicos, sin embargo, dejan un punto descubierto. Un cuerpo agrietado no necesariamente presentará una sola grieta aislada, por el contrario, existirán múltiples grietas las cuales interactúan, lo cual da como resultado una alteración en el estado de esfuerzos en las puntas de las grietas, respecto a lo calculado bajo la consideración de una grieta aislada.

Para el análisis de problemas de grietas múltiples el objetivo será saber cuál de las grietas será la que se propague en forma crítica, para esto es posible usar los métodos MFLE o MFEP si se considera que la interacción entre las grietas no es significativa, se puede considerar así cuando la distancia entre grietas es grande respecto a la longitud de estas. Si por el contrario la interacción entre las grietas es fuerte el estudio debe hacerse tomando en consideración el efecto de la interacción entre las grietas.

Los casos de grietas interactuantes que fueron estudiados primero, tal vez sean el de las grietas coplanares [33] y el de grietas paralelas [34] de los cuales se sabe que, en el primero de los casos la resistencia remanente del cuerpo es menor que en el caso de una grieta aislada y en el segundo que la resistencia remanente aumenta debido un efecto de blindaje entre las grietas (ver Figura 1.5) [35]. En cuanto a estos primeros estudios de la mecánica de fractura múltiple habría que destacar las aportaciones de Theocaris y Aksogan quienes estudiaron arreglos de grietas colineales, asimétricas, en X y oblicuo-simétricas [2].

Posteriormente se inició el estudio sobre arreglos aleatorios de grietas, en los casos donde la interacción entre grietas es fuerte los análisis suelen complicarse más, para poder abordar estos casos se han extendido métodos, como el de funciones ponderadas de Rice [31] y las integrales independientes de trayectoria, área en la cual sobresalen los trabajos de Herrmann y sus colaboradores en los cuales extienden las integrales J, L y M para casos con interacción entre grietas. Posterior a los trabajos de Herrmann, Chen extendió las ideas base en ellos planteados desarrollando así leyes conservativas aplicables a escenarios de fractura múltiple [26]. En realidad, esas leyes conservativas son una versión para fractura múltiple de los trabajos de Knowles, Sternberg, Budiansky y Rice.

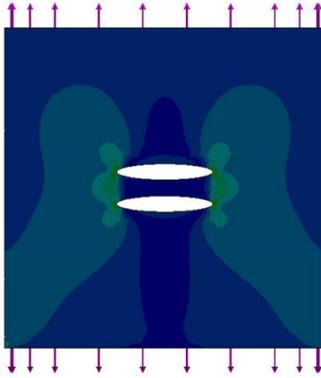


Figura 1.5 Efecto de blindaje en grietas paralelas

Otros temas sujetos a estudio en la mecánica de fractura son por ejemplo el estudio de grietas curvas o grietas ramificadas, en las cuales no se ahondará dado que quedan fuera del objeto de interés del presente trabajo. Queda así entonces concluido el repaso de antecedentes pertinentes a este trabajo.

2 MARCO TEÓRICO

En este segundo capítulo se presenta la teoría base para el desarrollo del método de análisis de problemas de fractura múltiple que se muestra en los capítulos 3 y 4 del presente escrito. Los temas por abordar en este marco teórico parten desde los fundamentos de la teoría de la elasticidad para problemas dos y tres dimensionales haciendo uso de variables reales, se continúa con conceptos de análisis con variable compleja, seguido por la aplicación de la variable compleja en problemas de elasticidad planos.

Posteriormente se presenta la teoría básica de la MFLE y MFEP; para problemas de grietas aisladas en dominios dos y tres dimensionales, así como la aplicación de los métodos de elasticidad con variable compleja a problemas planos de fractura. Además, se presenta la teoría para el análisis de problemas de fractura múltiple en dominios dos dimensionales.

Para cerrar el capítulo se presentan los conceptos de la holomorfía infinita necesarios para el planteamiento y desarrollo del método de análisis propuesto.

2.1 TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

Los métodos de la teoría de la elasticidad lidian directamente con las ecuaciones generales que obedece cualquier cuerpo elástico en equilibrio, sometido a la acción de un sistema de fuerzas externas. Estas ecuaciones permiten encontrar una solución “exacta”¹³ para el problema de distribución de esfuerzos y deformaciones en un cuerpo perfectamente elástico¹⁴ e isotrópico.

El desarrollo que será aquí presentado se basa en los trabajos de Cauchy, quién desarrolló las ecuaciones de equilibrio de sólidos elásticos usando la noción de esfuerzo y deformación, y no la noción de fuerzas moleculares que Navier había usado originalmente [36].

2.1.1 GENERALIDADES

Antes de lidiar con las ecuaciones de equilibrio de la teoría de la elasticidad, es necesario introducir conceptos esenciales como lo son, el desplazamiento, la deformación y el esfuerzo.

2.1.1.1 Desplazamiento

Considere un cuerpo referenciado a un sistema cartesiano plano X-Y, sujeto a un sistema de fuerzas externas F_1, F_2, \dots, F_n y tome dos puntos cualesquiera del cuerpo, dichos puntos estarán separados

¹³ Se suele decir que la teoría de la elasticidad da una solución más exacta de los problemas de sólidos en equilibrio que la mecánica de materiales, debido a que en elasticidad no se asume un perfil predefinido de deformación, sino que se hace el cálculo de desplazamientos y deformaciones en cada punto del sólido. Sin embargo, nunca debe perderse de vista que ambas teorías son aproximaciones de los fenómenos reales.

¹⁴ Obedecen la ley de Hooke, regresando a su forma inicial después de ser descargados.

inicialmente una distancia L y denote sus posiciones previo a la acción del sistema de fuerzas externas como A y B (Figura 2.1).

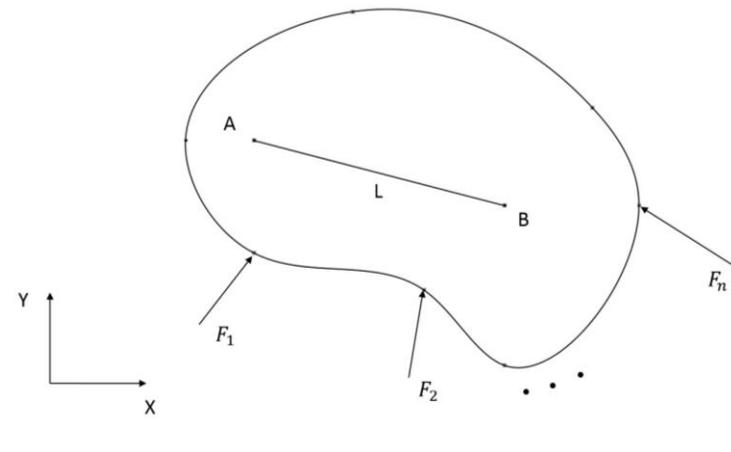


Figura 2.1 Sólido sometido a un sistema de fuerzas externas

Una vez que las fuerzas actúan sobre el cuerpo, los puntos seleccionados del cuerpo cambiarán su posición de A a A' y de B a B' respectivamente, pero la distancia L' entre estas nuevas posiciones será la misma que la distancia L entre las posiciones originales (Figura 2.2). Cuando sucede lo antes descrito decimos que el cuerpo se ha desplazado de su posición original, debido a un movimiento de cuerpo rígido dado que la posición relativa entre dos puntos del cuerpo se mantiene constante. Diremos entonces que un cuerpo se desplaza por movimiento de cuerpo rígido cuando este no tiene ninguna restricción que limite su libre desplazamiento, una consecuencia de que no exista dicha restricción de movimiento será que los puntos mantienen sus distancias relativas constantes. Dado que el cuerpo está referenciado a un sistema cartesiano plano X-Y, se puede distinguir un desplazamiento del cuerpo en dirección X y otro en dirección Y, los cuales denotaremos con las letras u y v respectivamente (Figura 2.2).

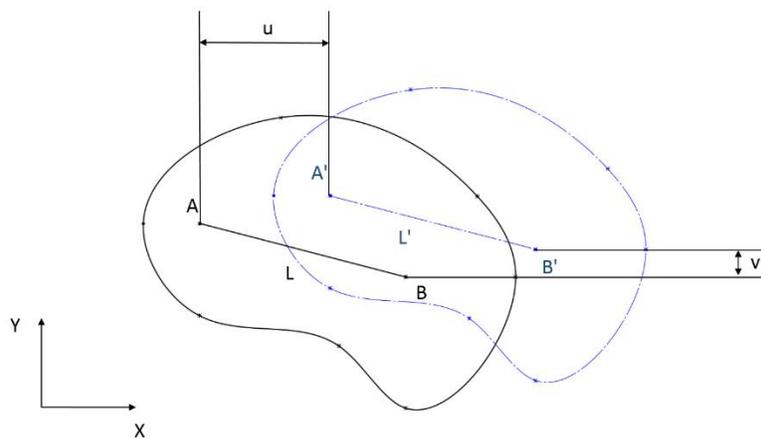


Figura 2.2 Desplazamiento de un sólido debido a la aplicación de un sistema de fuerzas externas

Ahora si tomamos el punto O del cuerpo y evitamos que cambie de posición, es decir, se restringen los desplazamientos u y v del punto O. A pesar de la restricción impuesta en el punto O, por la acción

del sistema de fuerzas externas los puntos con posición inicial A y B volverán a cambiar de posición, si los cambios de posición se vuelven a denotar por A' y B', podríamos observar que de nuevo existirán componentes u y v de desplazamiento, pero que estas no serán necesariamente iguales para A' y B' respecto a A y B, lo cual a su vez deriva en que la distancia relativa entre los puntos no permanece constante, es decir $L \neq L'$ (Figura 2.3).

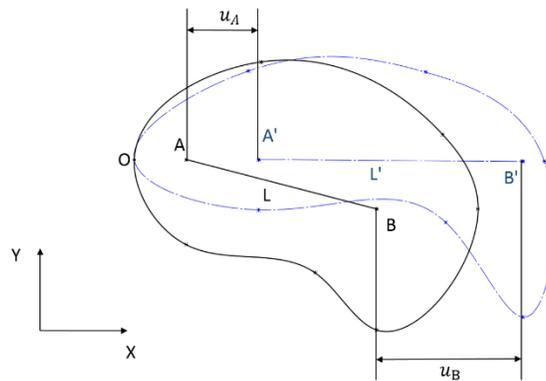


Figura 2.3 Desplazamiento de un sólido restringido

A esta situación la conoceremos como desplazamiento por distorsión o deformación del cuerpo, y es precisamente el tipo de desplazamiento que resulta de interés para nuestro estudio, de forma que cuando se mencione el término desplazamiento, se hará referencia a los desplazamientos por deformación, a menos que se indique algo diferente. Finalmente, si las situaciones antes planteadas se extienden a casos tres dimensionales, entonces existirá una tercera componente de desplazamiento, la cual irá en dirección del eje cartesiano Z, a esta componente se le denomina w.

Siempre que los desplazamientos sean pequeños¹⁵ será posible aplicar el teorema de superposición, lo cual permite calcular la respuesta del cuerpo respecto a un sistema de fuerzas, calculando de forma independiente la respuesta ante cada fuerza de forma aislada y sumando los resultados.

2.1.1.2 Deformación

Como el significado de la palabra lo indica la deformación es la pérdida de la forma natural de un cuerpo. Para los fines de este trabajo consideraremos que la deformación de los cuerpos se deberá únicamente al efecto de sistemas de fuerzas sobre éstos.

En la sección 2.1.1.1 se plantearon dos escenarios de desplazamiento de un cuerpo, donde el segundo de estos fue denominado desplazamiento por deformación, de ahí notamos que existe entonces una clara relación entre la deformación y el desplazamiento, es precisamente esa relación la que se ilustra a continuación.

Suponga una barra de longitud L y sección transversal constante restringida en un extremo, tome dos puntos con posiciones iniciales A y B a lo largo de la barra y aplique una carga F en el extremo

¹⁵ El juicio de valor respecto a la magnitud de los desplazamientos se hace con base a las dimensiones del cuerpo, generalmente si los desplazamientos se mantienen debajo del orden de magnitud de las dimensiones del cuerpo, se asumen pequeños.

libre (Figura 2.4 a)). Por acción de la carga F los dos puntos cambiarán de posición y la longitud de la barra también, asuma las nuevas posiciones como A' , B' y la nueva longitud como L' (Figura 2.4 b)).

Ahora la distancia entre las posiciones iniciales A y B denómínela como Δx . Posterior al desplazamiento, la posición A' difiere de A en u y como ya se estableció antes que los desplazamientos de los distintos puntos de un cuerpo deformado no son necesariamente iguales, se establece que la posición B' diferirá de B en $u+\Delta u$ (Figura 2.4 b)).

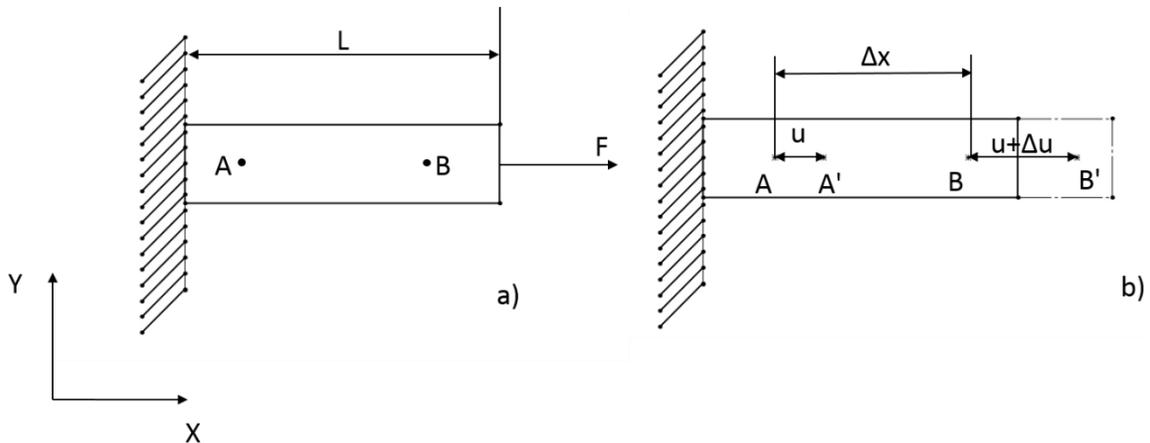


Figura 2.4 Barra en deformación axial a) Previo a deformación b) Deformada

Dado lo anterior, podemos decir que entonces la distancia Δx entre las posiciones iniciales aumentó Δu , ahora el cociente del cambio de la longitud Δu entre la longitud Δx nos permite cuantificar el cambio que sufrió el cuerpo, a dicho cambio se le denomina deformación normal de la barra en dirección x . Y se escribe como:

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad \text{Ec. 2.1}$$

La Ec. 2.1 define entonces el cambio unitario de longitud de la barra en dirección X , el signo será positivo si existen extensión y negativo si existe contracción.

El caso que se acaba de presentar considera deformación en una sola dirección, en casos más generales ya sean planos o en el espacio, además de que podrán existir deformaciones normales en dirección Y o Z , surgirá una deformación rotacional sobre los planos cartesianos, la cual es conocida como deformación cortante y será descrita a continuación.

Considere un cuerpo con un espesor muy pequeño y aplique cargas solo sobre el plano X - Y , tal que podamos considerar que la deformación del cuerpo ocurre solamente sobre dicho plano. Si tomamos un elemento del cuerpo de longitud dx y altura dy , podríamos ver que este ha tenido una distorsión angular, es decir que el ángulo que se formaba entre cualquiera de sus pares de lados se ha modificado (Figura 2.5).

Si observamos el ángulo que forman OA y OB , difiere del formado por $O'A'$ y $O'B'$. Para conocer que tanto difieren esos ángulos entre sí, consideremos la distancia que A se desplazó en dirección Y , la

cual estará dada por v más el aumento de longitud del cuerpo en dirección Y según aumenta la coordenada X, es decir:

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad \text{Ec. 2.2}$$

Haciendo lo mismo para el desplazamiento de B en dirección X, se tiene:

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad \text{Ec. 2.3}$$

De las Ec. 2.2 y Ec. 2.3 tenemos que el cambio en el ángulo de inclinación de los segmentos OA y OB está dado por la derivada parcial del desplazamiento u y v respecto a X e Y respectivamente. Así el ángulo entre OA y OB difieren con el ángulo entre O'A' y O'B' por la suma de las derivadas parciales antes mencionadas, de forma tal que tenemos que la deformación cortante unitaria sobre el plano X-Y será:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{Ec. 2.4}$$

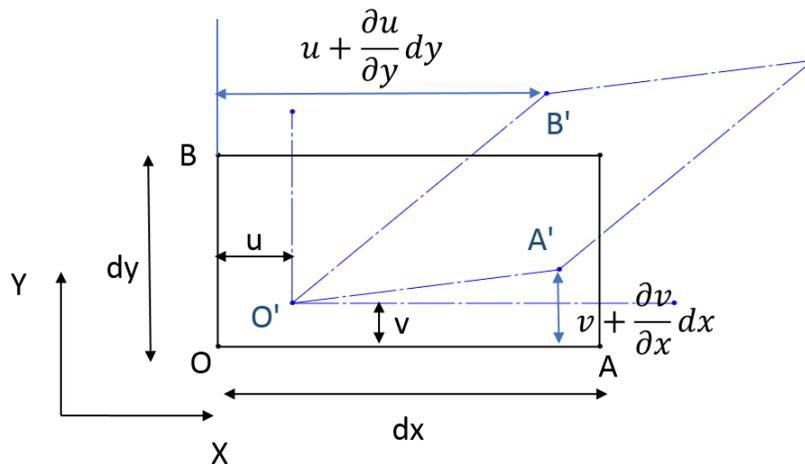


Figura 2.5 Elemento plano deformado

En el caso tres dimensional existirán también componentes de deformación cortante en los planos X-Z y Y-Z. Así entonces se dirá que se tienen nueve componentes de deformación para un cuerpo en el espacio, las cuales son tres deformaciones normales una en cada dirección definida por un eje cartesiano X, Y, Z y seis deformaciones cortantes definidas sobre los planos de un marco de referencia cartesiano X-Y, X-Z y Y-Z. Sin embargo, de las seis deformaciones cortantes en realidad solo tres son independientes, dado que en el plano X-Y definimos dos deformaciones cortantes la γ_{xy} y la γ_{yx} , pero ambas son iguales, dado que existirá la misma distorsión de X respecto a Y que de Y respecto a X, lo mismo sucede en los otros planos (Ec. 2.5).

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$$

Ec. 2.5

Por lo anterior habrá entonces seis deformaciones independientes, las cuales llamaremos componentes de deformación y son:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{Ec. 2.6}$$

Las expresiones contenidas en la Ec. 2.6 son conocidas como relaciones de desplazamiento-deformación. Si se cuenta con estos seis componentes de deformación será entonces posible calcular la deformación en cualquier otra dirección o la distorsión entre cualquier par de direcciones arbitrarias.

2.1.1.3 Esfuerzos

Considere un cuerpo sólido en equilibrio sujeto a la acción de un sistema de fuerzas externas (Figura 2.6 a)). Por acción de estas fuerzas el cuerpo desarrollará fuerzas internas, si hacemos un corte por la mitad del cuerpo (Figura 2.6 b)) observaríamos que ambas mitades seguirán en equilibrio debido a las fuerzas que ejercen una sobre otra, estas fuerzas mutuas entre las mitades del sólido son las fuerzas internas del cuerpo.

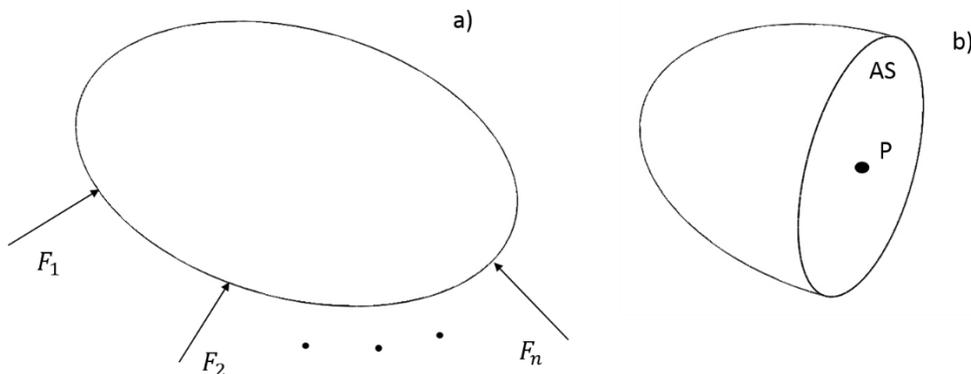


Figura 2.6 a) Sólido en equilibrio b) Mitad izquierda del sólido en equilibrio

Si nos concentramos en una de las mitades del sólido veremos entonces que dado que asumimos el equilibrio las fuerzas internas del cuerpo estarán distribuidas de forma continua sobre la superficie AS creada al realizar el corte (Figura 2.6 b)). La magnitud de las fuerzas internas está definida por su intensidad, es decir, la cantidad de fuerza por unidad de área, a esta intensidad de las fuerzas internas es a lo que llamamos esfuerzo.

El caso más sencillo de esfuerzo es cuando el cuerpo de estudio es un sólido de sección transversal uniforme en toda su longitud, con una fuerza también uniforme aplicada sobre el cuerpo similar a lo mostrado en la Figura 2.4. En ese escenario las fuerzas internas se distribuyen uniformemente sobre la sección transversal y el esfuerzo en el sólido σ se puede calcular simplemente como el cociente de la fuerza aplicada F y el área de sección transversal A (Ec. 2.7).

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{Ec. 2.7}$$

Sin embargo, de manera general la distribución de las fuerzas internas no será uniforme sobre todo un cuerpo sólido, de tal forma que para conocer la intensidad de las fuerzas internas sobre algún punto P del sólido, habrá que tomar un diferencial de área dA sobre el cuál actuará un diferencial de fuerza dF. Cuando el diferencial de área alcanza un valor límite; tendiendo a ser un punto, la magnitud de los esfuerzos en P está dada por:

$$\sigma_P = \frac{dF}{dA} \quad \text{Ec. 2.8}$$

Donde la dirección de actuación de los esfuerzos estará dada por la dirección de dF, la cual en general tendrá un ángulo de inclinación α distinto a 90° respecto al diferencial de área dA sobre el cual actúa. Dada esta inclinación se tendrán dos componentes de fuerza sobre un plano perpendicular al diferencial de área, una de estas componentes será perpendicular y otra tangencial al diferencial de área, estas componentes de fuerza darán origen a dos componentes de esfuerzo, el esfuerzo normal σ perpendicular a dA y el esfuerzo cortante τ tangencial al dA.

Ahora si estudiamos un sólido respecto a un marco de referencia cartesiano tres dimensional, entonces será posible definir componentes de esfuerzo respecto a cada plano del sistema de referencia. Entonces de forma análoga a las deformaciones existirán tres componentes de esfuerzo normal y seis componentes de esfuerzo cortante, de las cuales las componentes de esfuerzo cortante serán simétricas, quedando solo tres esfuerzos cortantes independientes (Ec. 2.9) y seis componentes totales de esfuerzo en un punto (Ec. 2.10).

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \text{Ec. 2.9}$$

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx} \quad \text{Ec. 2.10}$$

2.1.2 TENSORES DE ESFUERZO Y DEFORMACIÓN

En la sección 2.1.1 ya se estableció que el estado de esfuerzos y deformaciones en tres dimensiones para un punto de un cuerpo sólido puede ser descrito con seis componentes tanto de esfuerzo como de deformación, estas componentes de esfuerzo y deformación suelen expresarse en un tensor de orden dos, lo cual en puede ser beneficioso para fines de notación y operativos. Primero se planteará el tensor de deformación infinitesimal¹⁶ o tensor de deformación de Cauchy, para

¹⁶ Aplicable cuando se consideran pequeños desplazamientos, lo cual posibilita hacer lineales alguno de los tensores de deformación usados en la teoría de deformación finita.

expresar las componentes de deformación en esta forma tensorial se utiliza la siguiente notación indexada:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = x, y, z \quad \text{Ec. 2.11}$$

De la notación anterior, cuando $i=j$ tenemos las componentes de deformación normales, mientras que si $i \neq j$ se tienen las componentes cortantes en la forma:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \quad \text{Ec. 2.12}$$

De manera que el tensor de deformación de Cauchy queda:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 2.13}$$

Para el caso de las componentes de esfuerzo su arreglo en un tensor de orden dos es también conocido como el tensor de esfuerzos de Cauchy, el cual se aplica en teoría de elasticidad lineal, es decir, asumiendo pequeños desplazamientos. Este tensor define el estado de esfuerzos tres dimensional en un punto P de un cuerpo sólido y su expresión es la siguiente:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 2.14}$$

Cabe resaltar que ambos tensores obedecen la ley de transformación de tensores bajo cambio de coordenadas.

2.1.3 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN

Las componentes de esfuerzo y deformación mantienen una relación que fue demostrada experimentalmente y se conoce como ley de Hooke [36], como tal esta ley establece una relación de proporcionalidad entre el esfuerzo y deformación de un cuerpo, por medio de una propiedad intrínseca del material denominada módulo de Young (E), la cual se cuantifica en pascales (Pa).

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{Ec. 2.15}$$

Si se considera una barra sólida de sección cuadrada uniforme, a la cual se le aplican carga en los extremos (Figura 2.7), de forma tal que solo se produzcan esfuerzos normales sobre la barra. Para este caso considerando que el material es isotrópico, ha sido demostrado que la relación esfuerzo deformación está dada por la Ec. 2.15.

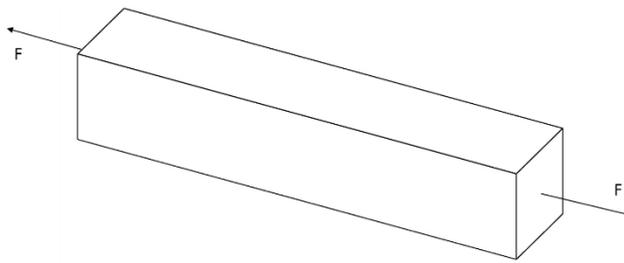


Figura 2.7 Barra sometida a carga axial

La ley de Hooke establece entonces que ante un esfuerzo el cuerpo se deformará, para el caso planteado en la Figura 2.7 la barra se extenderá a lo largo de la dirección del vector de fuerza, sin embargo, esto no es lo único que sucederá, ya que dicha extensión estará acompañada por una contracción en dos direcciones perpendiculares al vector de fuerza. Si se referencia todo a un plano cartesiano y se asume que la dirección del vector de fuerza es a lo largo de X, entonces las contracciones sucederán en direcciones Y y Z. Estas contracciones se relacionan con la extensión en X por otra propiedad intrínseca del material conocida como coeficiente de Poisson o coeficiente de distorsión volumétrica (ν) (Ec. 2.16), la cual es una cantidad adimensional.

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x, \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \quad \text{Ec. 2.16}$$

Si a la barra de la Figura 2.7 se le aplican cargas en las tres direcciones normales X, Y, Z, la barra estará sometida a tres esfuerzos normales y en consecuencia existirán también tres componentes de deformación normales, las cuales en términos de los esfuerzos normales serán:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] \quad \text{Ec. 2.17}$$

Las expresiones de la Ec. 2.17 se obtienen haciendo uso del método de superposición. Hasta este punto solo se han mostrado las relaciones entre los esfuerzos y deformaciones normales, ahora se presentarán relaciones análogas para los esfuerzos y deformaciones cortantes.

Considere ahora la barra de sección cuadrangular sometida a esfuerzos normales en dirección Y y Z, si se toma una sección cualquiera a lo largo de la barra, si se considera un cuadro de aristas abcd rotado 45° respecto a la sección transversal de la barra (Figura 2.8) es posible definir el esfuerzo cortante en la barra en términos de los esfuerzos normales, dicha expresión es:

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_z - \sigma_y) = \sigma_z \quad \text{Ec. 2.18}$$

Cuando se tienen condiciones como las antes descritas decimos que la barra se encuentra a cortante puro e implica que la extensión en dirección Z es igual a la contracción en dirección Y. Ahora si se considera un triángulo, por ejemplo, el formado entre los vértices bc y un punto central o, podemos conocer la deformación cortante si se conoce el cambio de los ángulos internos de este triángulo

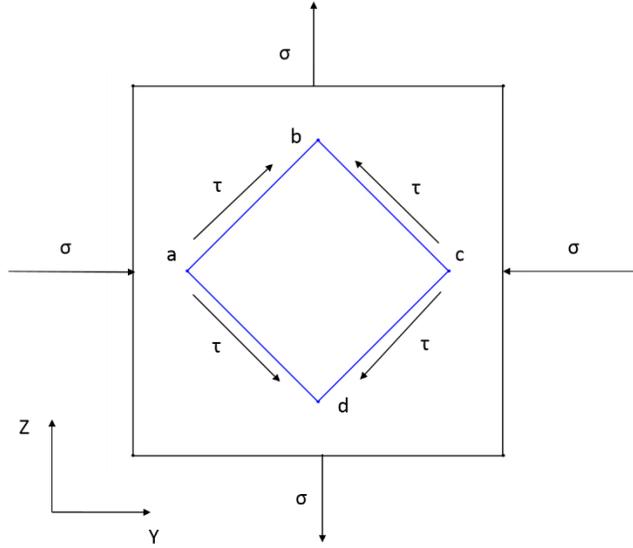


Figura 2.8 Sección transversal de una barra sometida a cortante puro

Para encontrar la deformación cortante entonces se considerará la tangente del ángulo entre ob y bc, la cual es:

$$\frac{oc}{ob} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 + \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_z} \quad \text{Ec. 2.19}$$

Dado que el esfuerzo normal en dirección X es nulo, la Ec. 2.17 queda:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_y) = \frac{(1 + \nu)\sigma_z}{E} = -\varepsilon_y \quad \text{Ec. 2.20}$$

Al mantenerse la suposición de pequeños desplazamientos también las distorsiones angulares son pequeñas, así la Ec. 2.19 se reescribe como:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_z} \quad \text{Ec. 2.21}$$

Despejando la deformación cortante de la ecuación anterior y usando la Ec. 2.20 obtenemos:

$$\gamma = \frac{2(1 + \nu)\tau}{E} = \frac{\tau}{G} \quad \text{Ec. 2.22}$$

De esta última ecuación vemos que la constante de proporcionalidad entre la deformación y el esfuerzo cortantes está dada en función del módulo de Young y el coeficiente de Poisson, a esta cantidad se le denomina módulo cortante (G) (Ec. 2.23) y también es una propiedad del material.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{Ec. 2.23}$$

Al módulo cortante también se le conoce como segundo parámetro de Lamé¹⁷. El nombre segundo parámetro da de inmediato la idea de la existencia de un primer parámetro; en efecto existe y se usa λ para denotarlo y está dado por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{Ec. 2.24}$$

Estos parámetros de Lamé sirven para expresar los esfuerzos en términos de las deformaciones como se muestra en la ecuación siguiente.

$$\sigma_i = \lambda e + 2G\varepsilon_i, \quad i = x, y, z \quad \text{Ec. 2.25}$$

En esta última expresión el término que multiplica al primer parámetro de Lamé, representa la relación entre la expansión volumétrica y los esfuerzos normales (Ec. 2.26). Esta relación a su vez contiene una constante de proporcionalidad entre la expansión volumétrica y la presión (para el caso de presión hidrostática uniforme) (Ec. 2.27), a esta constante se le conoce como módulo de deformación volumétrica (B).

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} \Theta, \quad \Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad \text{Ec. 2.26}$$

$$e = -\frac{3(1 - 2\nu)}{E} p, \quad B = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad \text{Ec. 2.27}$$

2.1.4 ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

Las ecuaciones de compatibilidad establecerán la forma admisible de variación de la deformación de un cuerpo. Estas ecuaciones aseguran que los desplazamientos respetan las fronteras geométricas y que sean funciones continuas simplemente valuadas y físicamente el cumplimiento de estas ecuaciones implica que el dominio es continuo incluso después de la deformación.

En la sección 2.1.1.2 se presentan las ecuaciones de deformación-desplazamiento, las cuales relacionan seis componentes de deformación con solo tres desplazamientos (Ec. 2.6), esto es una muestra clara de que los componentes de deformación no son independientes entre sí. Para encontrar las relaciones que guardan las componentes de deformación, partimos de la Ec. 2.6 y se obtienen todas las segundas derivadas parciales que no involucren a la variable independiente original de las componentes normales de deformación, así como las segundas derivadas parciales cruzadas de sobre el plano correspondiente a cada componente de deformación cortante. Estas

¹⁷ Cuando se le llama de esta forma se suele usar μ en lugar de G

derivadas parciales se conjugan en las ecuaciones siguientes, que son las ecuaciones de compatibilidad de un cuerpo sólido elástico.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 2.28}$$

2.1.5 ESTADO DE DEFORMACIÓN Y ESFUERZOS EN UN PUNTO

Conociendo las componentes de esfuerzo y deformación en un punto cualquiera de un cuerpo sólido elástico, es posible calcular los esfuerzos que actúan sobre un plano que pase por dicho punto, haciendo uso de las ecuaciones de equilibrio del cuerpo (Ec. 2.29), que para el caso tres dimensional son un conjunto de tres ecuaciones diferenciales, que relacionan la variación de las componentes de esfuerzo sobre un cuerpo elástico con las fuerzas externas aplicadas.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + F_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 2.29}$$

Si se considera un cubo sometido a un estado general de esfuerzos¹⁸ que se corta por un plano inclinado que pasa por tres puntos del cubo B, C y D, que además pasa a una distancia pequeña del punto A del cubo (Figura 2.9) se obtiene un tetraedro con vértices A, B, C, D. Entonces si conocemos las componentes de esfuerzo sobre los tres planos cartesianos es posible calcular los esfuerzos para el plano inclinado de corte.

Según las ecuaciones de equilibrio (Ec. 2.29) las fuerzas de cuerpo¹⁹ pueden despreciarse y si considera que el tetraedro es muy pequeño es posible asumir que la distribución de esfuerzos es

¹⁸ Se refiere al hecho de que todas las componentes de esfuerzos existan y sean diferentes de cero

¹⁹ Son aquellas que actúan sobre todo el volumen del cuerpo como las fuerzas gravitacionales o las electromagnéticas

uniforme y por tanto las fuerzas externas que actúan sobre el tetraedro pueden obtenerse al multiplicar las componentes de esfuerzo por el área de las caras del tetraedro.

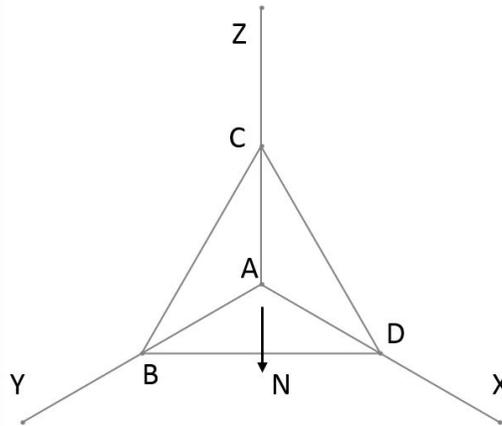


Figura 2.9 Elemento tetraédrico

Si consideramos que el área de la cara B, C, D del tetraedro es A_T , es posible definir el área de las otras tres caras haciendo una proyección de esta sobre cada uno de los planos cartesianos, para ejecutar dichas proyecciones será necesario conocer la orientación de un vector normal a la cara definida entre B, C y D (Figura 2.9). La orientación de dicho vector normal estará dada por sus cosenos directores, si consideramos que los cosenos directores estén definidos como:

$$\cos(N_x) = l, \cos(N_y) = m, \cos(N_z) = n \quad \text{Ec. 2.30}$$

Entonces las áreas de las de las caras restantes del tetraedro serán:

$$A_{ADC} = Al, A_{AVC} = Am, A_{AVD} = An \quad \text{Ec. 2.31}$$

Si se definen como X, Y, Z a las componentes de esfuerzo actuando en plano de corte y paralelas a los ejes coordinados, entonces las fuerzas que actúan sobre ese plano inclinado en dirección X estarán dadas por AX y las componentes de fuerza en la misma dirección que actúan en las otras tres caras del tetraedro serán:

$$Al\sigma_x, Am\tau_{xy}, An\tau_{xz} \quad \text{Ec. 2.32}$$

Y entonces la ecuación de equilibrio correspondiente al tetraedro en dirección X será:

$$AX - Al\sigma_x - Am\tau_{xy} - An\tau_{xz} = 0 \quad \text{Ec. 2.33}$$

De forma similar a la anterior podemos obtener las ecuaciones de equilibrio en las dos direcciones restantes y se obtendrán tres ecuaciones (Ec. 2.34) que permitirán el cálculo de las componentes de

esfuerzo sobre cualquier plano si se conocen las seis componentes de esfuerzo en un punto A y los cosenos directores de un vector normal al plano.

$$\begin{aligned} X &= l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\ Y &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ Z &= l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.34}$$

Cabe resaltar que en todo caso de análisis de esfuerzos en tres dimensiones existirán tres planos libres de cortante, los cuales resultan ser mutuamente ortogonales y que respecto a ellos los esfuerzos normales tendrán valores máximos y mínimos, a estos esfuerzos se les denomina esfuerzos principales. Los esfuerzos y direcciones principales de cuerpo elástico sometido a la acción de un sistema de fuerzas externas pueden calcularse haciendo uso de las ecuaciones de equilibrio y una transformación de base, el problema será entonces abordado como uno de máximos y mínimos.

La expresión resultante del procedimiento matemático antes mencionado es la ecuación cúbica de esfuerzo, cuyas raíces resultan ser los esfuerzos principales que además son los valores propios del tensor de esfuerzos que están asociados cada uno a un vector propio que resulta ser el conjunto de cosenos directores que define las direcciones principales²⁰.

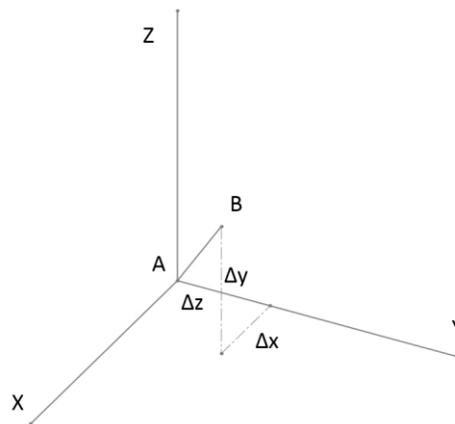


Figura 2.10 Elemento lineal en el espacio

De la misma forma en que se pueden conocer las componentes de esfuerzo sobre planos a través de un punto, es posible determinar las componentes de deformación. Consideremos un segmento lineal de longitud pequeña d que corre entre los puntos A y B, con cosenos directores l, m, n . Las proyecciones sobre los ejes coordenadas de este segmento lineal serán (Figura 2.10):

$$\Delta x = dl, \Delta y = dm, \Delta z = dn \quad \text{Ec. 2.35}$$

Estas proyecciones no son más que las coordenadas del punto B. Ahora si el punto A se desplazan las cantidades u, v y w en las direcciones X, Y y Z respectivamente, entonces el desplazamiento del punto B estará dado como:

²⁰ Para el desarrollo de este procedimiento consultar "Theory of elasticity" de S.P. Timoshenko y J.N. Goodier

$$\begin{aligned}
 u_v &= u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \\
 v_v &= v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z \\
 w_v &= w + \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 2.36}$$

Ahora dado que la longitud del segmento lineal AB se consideró pequeña, las coordenadas del punto B (Ec. 2.35) serán también pequeñas en magnitud y en consecuencia los elementos de orden superior que involucren estas coordenadas resultarán despreciables, en consecuencia las coordenadas del punto B después de la deformación serán funciones lineales de las coordenadas iniciales de B y por tanto es posible considerar que las deformación de un cuerpo en un punto A son homogéneas.

Entonces si se considera la elongación de un segmento lineal AB, el cuadrado de la longitud después de la deformación será igual a la suma de los cuadrados de las coordenadas del punto B después de la deformación, así bajo todas las consideraciones mencionadas la elongación del segmento AB se puede escribir como:

$$\varepsilon = l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n^2 \frac{\partial w}{\partial z} + lm \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + ln \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + mn \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
 \tag{Ec. 2.37}$$

De la expresión anterior podemos concluir que las elongaciones de cualquier elemento se pueden calcular si se conocen las componentes de deformación respecto al marco cartesiano de referencia. Al igual que para el caso de los esfuerzos existirán tres direcciones mutuamente ortogonales en un sólido elástico bajo cargas externas, para las cuales la deformación cortante en cualquier plano es nula, estas serán las direcciones principales de deformación y pueden calcularse de forma similar que las direcciones principales de esfuerzo.

2.1.6 ENERGÍA DE DISTORSIÓN

Como se ha mencionado antes los métodos energéticos en el estudio de la mecánica de fractura son de gran relevancia (sección 1.6). Dichos métodos se basan en el conocimiento de una función de energía de distorsión en el cuerpo de estudio, cuya obtención se presenta a continuación.

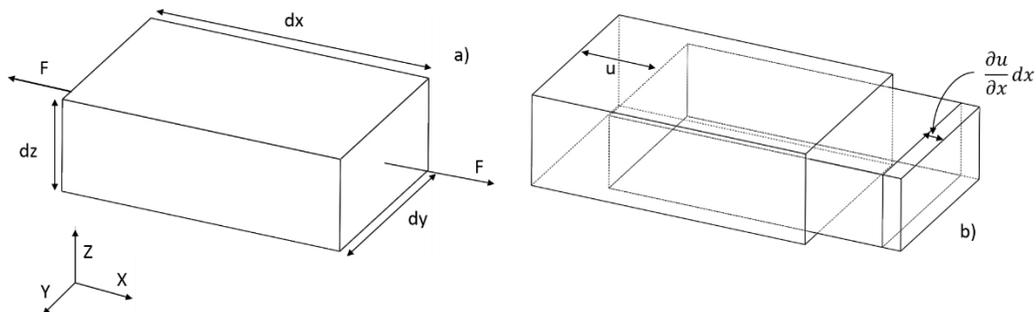


Figura 2.11 Elemento prismático en extensión uniaxial

Suponga un elemento prismático de sección transversal constante sometida a tensión solo en la dirección X y con dimensiones dx, dy, dz (Figura 2.11 a)), si se asume que durante la aplicación de las cargas se mantiene el equilibrio entonces la fuerza aplicada sobre la barra y la deformación normal en dirección X para un sólido lineal elástico tendrán una relación descrita por una línea recta (Figura 2.12).

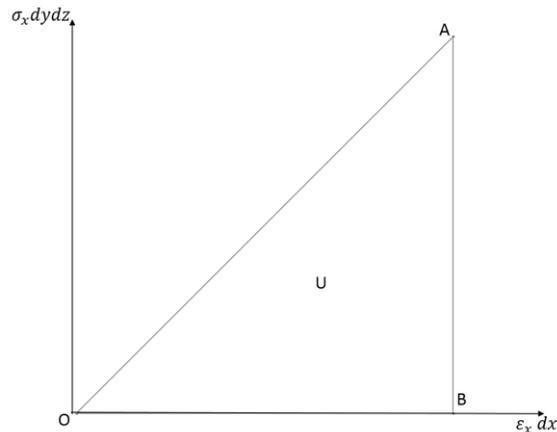


Figura 2.12 Descripción gráfica de la energía de distorsión del elemento prismático en tensión uniaxial

Ahora bien si se observa la Figura 2.6b se observan los desplazamientos en el elemento prismático debidos a la aplicación de las fuerzas F, en consecuencia y observando que el trabajo realizado por las dos fuerzas en direcciones opuestas respecto al desplazamiento u se “neutralizan” entre sí, el trabajo neto resultante sobre el elemento prismático estará dado por:

$$W_F = \int_0^{\epsilon_x} F d\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx\right) \quad \text{Ec. 2.38}$$

Si en la ecuación anterior expresamos la fuerza en términos del esfuerzo, se encuentra la forma:

$$W_\sigma = \int_0^{\epsilon_x} (\sigma_x dydz) d\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx\right) = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x dx dy dz \quad \text{Ec. 2.39}$$

Por el teorema del trabajo y energía la Ec. 2.39 no solo representa el trabajo sobre el elemento prismático, sino el cambio de energía potencial del mismo. Esto será cierto siempre que el comportamiento del elemento sea elástico y en consecuencia el sistema se pueda considerar conservativo.

En el caso del estudio de elasticidad a la energía potencial del cuerpo la denominaremos energía de distorsión, y normalmente se representará por unidad de volumen

$$U_V = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x \quad \text{Ec. 2.40}$$

Si hacemos uso de la relación esfuerzo deformación e integramos la ecuación anterior se obtiene:

$$U_V = \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \quad \text{Ec. 2.41}$$

Esta última cantidad resulta ser el área del triángulo de vértices OAB de la Figura 2.12. Ahora se considera la energía elástica almacenada en el elemento prismático en una condición de cortante puro (Figura 2.13).

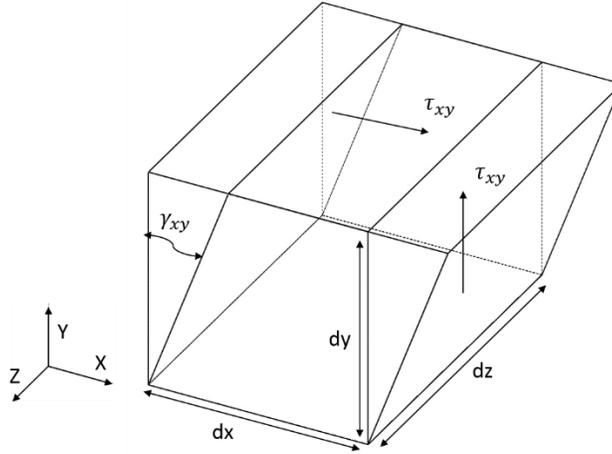


Figura 2.13 Elemento prismático en cortante puro

El trabajo realizado por el esfuerzo cortante estará dado por:

$$W_\tau = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} dx dy dz \quad \text{Ec. 2.42}$$

Y la energía de distorsión por unidad de volumen queda:

$$U_V = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} \quad \text{Ec. 2.43}$$

Aplicando relaciones de esfuerzo deformación e integrando, la Ec. 2.43 se reescribe como:

$$U_V = \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 = \frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2 \quad \text{Ec. 2.44}$$

De los desarrollos anteriores para la energía de distorsión en tensión y cortante puro, podemos plantear una expresión generalizada para la energía de distorsión de un cuerpo bajo un estado general de esfuerzos, dicha expresión es:

$$U_V = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \quad \text{Ec. 2.45}$$

Para el caso en que el comportamiento no sea completamente elástico, la relación ejemplificada por la Figura 2.12 se verá alterada como en la Figura 2.14 . A esta curva modificada se le denomina energía de distorsión complementaria y se puede definir como:

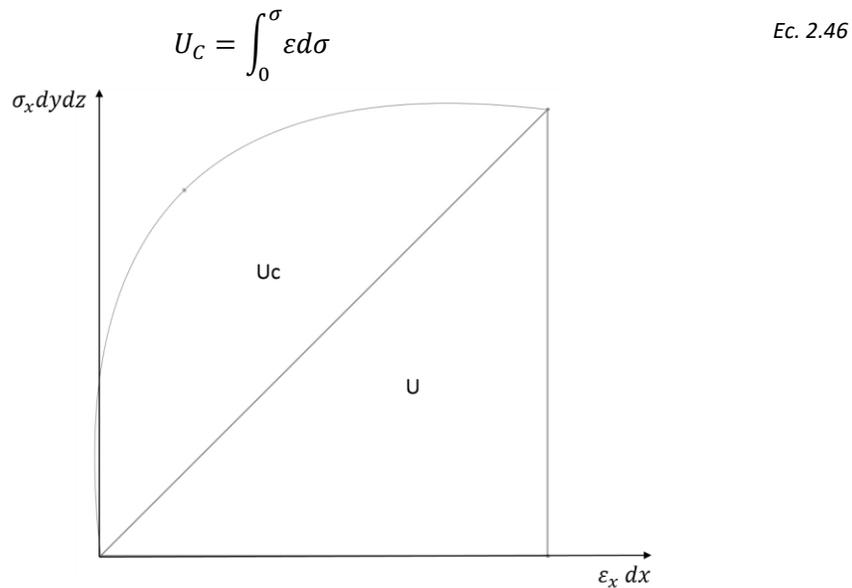


Figura 2.14 Representación gráfica de la energía de distorsión complementaria

2.1.7 ELASTICIDAD PLANA

Los conceptos que se han presentado hasta este punto están relacionados con el estudio tres dimensional de la elasticidad, sin embargo, la simplificación de problemas a una dimensión superior suele ser de gran utilidad, de hecho, los métodos clásicos de estudio de fractura están desarrollados bajo simplificaciones planas de los estados de esfuerzos de los cuerpos de estudio.

En este sentido existen dos casos clásicos de simplificación en elasticidad plana el esfuerzo y la deformación planos, los cuales se presentan de forma breve a continuación.

2.1.7.1 Esfuerzo plano

Se asume una condición de esfuerzo plano cuando el cuerpo de estudio tiene un espesor pequeño respecto a su sección transversal y las cargas externas que se aplican sobre él, actúan solo sobre planos paralelos al plano de sección transversal (Figura 2.15).

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \quad \text{Ec. 2.47}$$

En condición de esfuerzo plano siempre se considerará que el esfuerzo normal en dirección Z o dirección del espesor será cero, así como los esfuerzos cortantes sobre los planos perpendiculares al plano de sección transversal, que para el caso de la Figura 2.15 son el YZ y ZX. Así para el caso de esfuerzo plano las componentes de esfuerzo serán solo tres (Ec. 2.47).

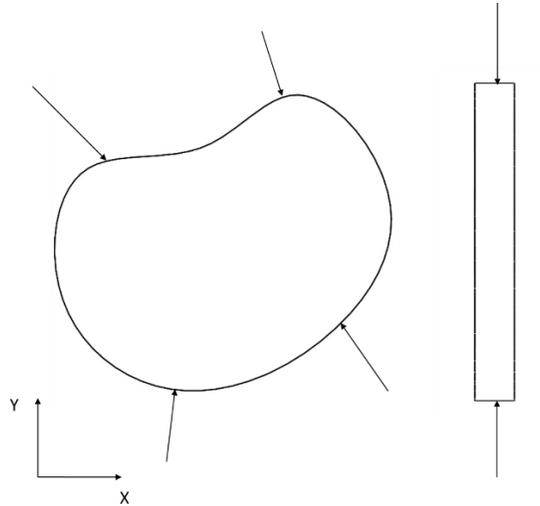


Figura 2.15 Condición de esfuerzo plano

Si se estudian las relaciones de esfuerzo-deformación para el caso del esfuerzo plano se encuentra un resultado importante, ya que de la Ec. 2.17 se puede ver que, aunque el esfuerzo normal en Z sea cero, la deformación normal resulta distinta de cero y se puede expresar en términos de las otras dos componentes de deformación normal. Así las componentes de deformación en esfuerzo plano son:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned}\tag{Ec. 2.48}$$

Para el caso de esfuerzo plano existirán tres relaciones de deformación-desplazamiento únicamente (Ec. 2.49), dado que, aunque la deformación normal en dirección Z es diferente de cero esta es función de las otras dos deformaciones normales, en consecuencia, el desplazamiento w en dirección Z no es una variable independiente del problema de esfuerzo plano.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\tag{Ec. 2.49}$$

Al tener tres relaciones de desplazamiento-deformación dependientes de solo dos variables, es necesaria una ecuación de compatibilidad que relacione las deformaciones normales en X, Y con la deformación cortante en el plano XY (Ec. 2.50).

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\tag{Ec. 2.50}$$

2.1.7.2 Deformación plana

El otro caso para estudiar en elasticidad plana es el de deformación plana el cual se da cuando la longitud del cuerpo en dirección perpendicular a la sección transversal es mucho mayor que las longitudes sobre el plano de sección transversal, además de que las cargas externas solo actúan sobre planos paralelos a la sección transversal (Figura 2.16).

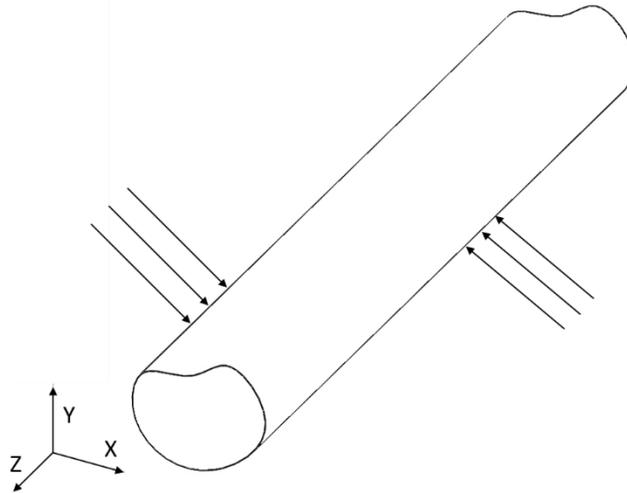


Figura 2.16 Condición de deformación plana

En analogía al caso de esfuerzo plano, para la deformación plana se considera que la deformación normal en dirección Z es nula, en consecuencia, un cuerpo en condición de deformación plana solo tendrá tres componentes de deformación (Ec. 2.51).

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \quad \text{Ec. 2.51}$$

En cuanto a las relaciones de esfuerzo-deformación, si tomamos las Ec. 2.22 y Ec. 2.25; considerando que tres componentes de deformación son nulas, obtenemos las relaciones de esfuerzo-deformación para el problema de deformación plana (Ec. 2.52), se puede ver que a pesar de que se asume que la deformación normal en dirección Z es nula, la componente de esfuerzo normal en Z es distinta de cero, pero función de las otras dos componentes normales de esfuerzo.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.52}$$

Con base en el resultado anterior podemos escribir las componentes de deformación, para este problema plano como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right) \\ \gamma_x &= \frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned}\tag{Ec. 2.53}$$

Las relaciones de desplazamiento-deformación para este problema son solo tres (Ec. 2.49) en consecuencia se requiere una ecuación de compatibilidad para relacionar las deformaciones normales con la deformación cortante en el plano XY, esta ecuación resulta ser la misma que para el caso de esfuerzo plano (Ec. 2.50).

Cabe resaltar que para ambos casos de elasticidad plana se considera que las componentes de esfuerzo y deformación presentes sobre el plano XY, se mantienen constantes sobre toda la longitud del cuerpo en dirección Z. Además, en ambos casos se tenderán solo dos ecuaciones de equilibrio (Ec. 2.54).

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y &= 0\end{aligned}\tag{Ec. 2.54}$$

2.1.8 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ELASTICIDAD

La solución de los problemas de elasticidad requiere de la solución de las ecuaciones diferenciales de equilibrio y compatibilidad además de las condiciones de frontera. La solución de estas ecuaciones puede ser bastante complicado por lo cual se prefieren los métodos inversos o semi-inversos de solución. En un método semi-inverso se propone una solución parcial al problema, usando una función de esfuerzo, deformación o desplazamiento en términos de coeficientes desconocidos.

Uno de los métodos de solución de problemas de elasticidad es usando la función de esfuerzos de Airy, la cual para el caso de problemas planos tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \nabla^4 \Phi = 0\tag{Ec. 2.55}$$

Usando la función de esfuerzo de Airy el problema se reduce entonces a solucionar una sola ecuación bi-armónica, donde la función de Airy Φ se relaciona con las componentes de esfuerzo, como lo indica la Ec. 2.56

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\tag{Ec. 2.56}$$

2.2 FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

A continuación, se presentará un breve repaso de términos y conceptos de funciones de una variable compleja que resultan relevantes para comprender la aplicación de dichas funciones en el estudio de problemas de elasticidad y fractura.

2.2.1 GENERALIDADES

En lo que respecta a los números complejos, cabe recordar cosas simples como el hecho de que estos están compuestos de una parte real y una parte imaginaria, donde esta última se identifica por estar multiplicada por el número i cuyo valor es $\sqrt{-1}$, para escribir números complejos existen diversas notaciones, a lo largo de este texto se preferirá la notación de Euler Ec. 2.57 o la notación polar Ec. 2.58, reservaremos la z minúscula para definir una variable compleja; a menos que se indique algo distinto, y para la distinción de variables complejas se usarán subíndices.

$$z = a + ib \quad \text{Ec. 2.57}$$

$$z = r \angle \theta \quad \text{Ec. 2.58}$$

Las operaciones básicas con números complejos son la suma y el producto (Ec. 2.59) para las cuales se cumplen las leyes de conmutatividad, distributivas y asociatividad.

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2) \\ z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.59}$$

Para fines operativos el cero complejo será:

$$z = 0 + i0 \quad \text{Ec. 2.60}$$

Y el uno:

$$z = 1 + i0 \quad \text{Ec. 2.61}$$

Dada su naturaleza todo número complejo tendrá su conjugado, el cual se define y denota de la forma siguiente.

$$\begin{aligned} z &= a + ib \\ \bar{z} &= a - ib \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.62}$$

Cabe recordar además que dos números complejos se consideran iguales si y solo tanto su parte real como su parte imaginaria son iguales y que la jerarquía de tamaño no existe.

De la notación de Euler para números complejos es claro que todo número complejo tendrá dos componentes por tanto para la representación gráfica de un complejo es necesario el uso de un plano, este plano se suele denominar plano complejo o plano de Argand y está definido por dos ejes, uno real en disposición horizontal y otro imaginario en disposición vertical.

Respecto a las funciones de una variable compleja, diremos que son aquellas funciones que dependen de una variable independiente compleja z , se consideran definidas en el plano complejo y que para cada valor de z corresponderá un valor de la variable independiente, la cual será otra variable compleja. Para fines del presente texto las variables complejas se expresarán como se muestra en la Ec. 2.63, donde toda función compleja tendrá su parte imaginaria y su parte real que son función de la variable z , la cual a su vez se expresará como función de x, y .

$$w(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 + iy \quad \text{Ec. 2.63}$$

De la expresión anterior vemos que para graficar la función de una variable compleja son necesarias cuatro variables, lo cual impide la graficación directa de las funciones de variable compleja en un plano. Otro punto que también salta a la vista de lo presentado hasta al momento es que las funciones de una sola variable compleja serán localmente homologas a funciones reales de dos variables reales, es decir el espacio complejo de dimensión uno es homologo al espacio real 2 dimensional.

2.2.2 DERIVACIÓN

Para hablar sobre derivación es necesario primero definir los conceptos de límite y continuidad. El concepto de límite para funciones de una variable compleja se muestra en la Ec. 2.64, resulta relevante establecer que al estar ubicadas sobre un plano existirá un número infinito de trayectorias por las que se puede aproximar a un punto o valor límite para las funciones de una variable compleja, sin embargo, la dirección de aproximación no afecta al resultado del cálculo del límite.

Sea $f(z)$ una función de una variable compleja z y f_0 una constante compleja. Si para todo real $\varepsilon > 0$ existe un real $\delta > 0$ tal que:

$$|f(z) - f_0| < \varepsilon \quad \forall z |0 < |z - z_0| < \delta \quad \text{Ec. 2.64}$$

Entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f_0$$

Respecto a la continuidad de funciones de una variable compleja, se dice que estas serán continuas si cumplen con la Ec. 2.65, además afirmaremos que, si una función es continua en todos los puntos de una región, entonces la función es continua en dicha región.

Sea $f(z)$ una función de una variable compleja, $f(z)$, se dirá continua en $z = z_0$ sii:

$$\begin{aligned} & a) f(z_0) \text{ está definido} \\ & b) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f_0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.65}$$

Una vez establecidas las definiciones de límite y continuidad de una función, y considerando estas como condiciones suficientes para establecer la derivabilidad de una función de una variable compleja, la derivada se puede definir entonces como:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad \text{Ec. 2.66}$$

Al existir una infinidad de trayectorias de aproximación a un valor límite al tratar con funciones de una variable compleja y considerando que una variable compleja tendrá siempre una componente real x y una imaginaria y , el incremento de z en la Ec. 2.666 puede escribirse en la forma

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y \quad \text{Ec. 2.67}$$

Así el incremento de z podría variar solo en x ; lo que representará una trayectoria de aproximación al valor límite, aplicando esto a la Ec. 2.66 y desarrollando se obtiene la derivada de la función de una variable compleja (Ec. 2.68).

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \text{Ec. 2.68}$$

Si se hace algo similar pero ahora variando y , también se encontrará la derivada de la misma función (Ec. 2.69).

$$f'(z_0) = \left(-i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \text{Ec. 2.69}$$

Como se estableció anteriormente el cálculo del límite de una función de una variable compleja es independiente de la trayectoria de aproximación, en consecuencia también el cálculo de la derivada, en ese sentido la Ec. 2.68 y la Ec. 2.69 son iguales, por tanto podemos igualar sus partes real e imaginaria, obteniendo como resultado las Ec. 2.70, también conocidas como ecuaciones de Cauchy-Riemann, respecto a las cuales se enuncia un importante teorema (Teorema 2.1).

Teorema 2.1 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sea $f(z)$ una función de una variable compleja, tal que $z = x + iy$, entonces, si tanto u y v como sus primeras derivadas parciales son continuas en una vecindad de z_0 , las ecuaciones de Cauchy – Riemann son una condición necesaria y suficiente para que exista $f'(z_0)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{Ec. 2.70}$$

Todas las fórmulas del cálculo de una variable real pueden ser trasladadas a funciones de una variable compleja. Ahora es necesario presentar algunas definiciones de conceptos relevantes, respecto a las funciones de una variable compleja y su derivación.

Definición 2.1 Función holomorfa

Toda función definida sobre el plano complejo y diferenciable en cada punto es una función holomorfa

La holomorfia es una condición más fuerte que la diferenciable en el caso de las funciones reales, ya que implica que la función es infinitamente diferenciable y expandible en serie de Taylor.

Definición 2.2 Analiticidad

$f(z)$ es analítica en z_0 si $f'(z)$ no sólo existe en z_0 sino en todo punto de una vecindad de z_0

El término función analítica y función holomorfa suele usarse de forma indistinta, dado que toda función holomorfa es analítica. De cualquier forma, la holomorfia, analiticidad o expansibilidad en series de Taylor implicarán la diferenciable de una función de una variable compleja.

Definición 2.3 Función entera

Una función es entera si es analítica en todo el plano complejo

Definición 2.4 Singularidad

Si una función $f(z)$ no es analítica en z_0 pero si lo es en al menos un punto de toda vecindad de z_0 , decimos que z_0 es una singularidad de la función $f(z)$

Las singularidades son un tópico relevante en el estudio de funciones holomorfas como se verá en la siguiente sección (sección 2.2.3) e importantes teoremas de integración y expansión en series sirven para el cálculo alrededor de éstas, estos teoremas a su vez son de gran utilidad cuando se aplican las funciones holomorfas en la solución de problemas de fractura. Otro concepto que será útil respecto a la aplicación de funciones de variable compleja a problemas de fractura y elasticidad es el de funciones armónicas (Definición 2.5), ya que las soluciones clásicas implican una función de energía de distorsión, la cual como se verá más adelante (2.5) resulta ser una función armónica.

Definición 2.5 Función armónica

Toda función que satisfaga la ecuación de Laplace en un dominio será una función armónica

La importancia de las funciones armónicas respecto a las funciones de una variable compleja se establece en el siguiente teorema.

Teorema 2.2 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Si $f(z)$ es una función analítica en un dominio, entonces sus componentes real e imaginaria son funciones armónicas en dicho dominio

Dado lo anterior es posible definir entonces una función armónica conjugada como:

Definición 2.6 Función armónica conjugada

Dada función armónica $u(x, y)$ se dice que $v(x, y)$ es su función armónica conjugada si la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica

2.2.3 INTEGRACIÓN

Como ya se comentó anteriormente el espacio complejo de dimensión uno es homólogo al espacio euclidiano de dimensión dos, entonces una función de una variable compleja definirá un campo complejo, y como se hace en funciones de dos variables reales, la forma de integrar sobre dicho campo es seguir un trayecto o curva. Así entonces para hablar de integración de funciones de una variable compleja nos remitiremos al concepto de integral de línea de funciones de variables reales.

Considere una curva suave a trozos sobre el plano complejo, para encontrar la integral de una función compleja sobre dicha trayectoria, se suman las integrales sobre cada curva suave (Figura 2.17).

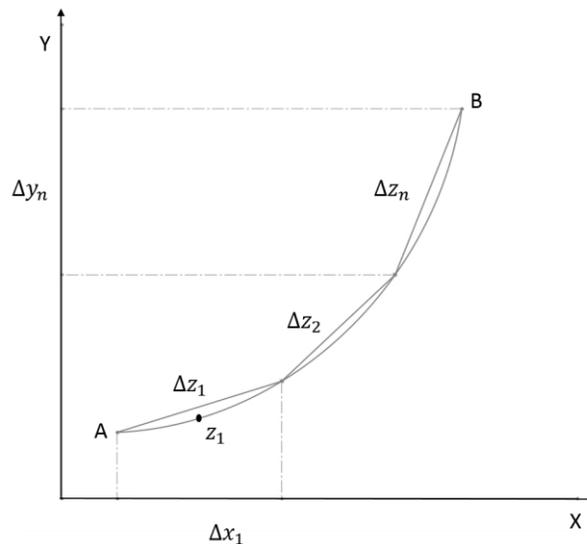


Figura 2.17 Integral sobre una curva suave a trozos

Para obtener la integral sobre cada curva suave se define un segmento lineal entre los puntos de inicio y fin de cada curva suave, a estos segmentos lineales los denominaremos Δz_n y tendrán componentes Δx_n y Δy_n (Figura 2.17). Ahora tomando el punto medio sobre cada una de las curvas suaves y valuando la función compleja en ese punto, para posteriormente multiplicar estos valores por los segmentos Δz_k la suma de estos productos cuando el número de divisiones de la curva suave a trozos tiende a infinito dan como resultado la integral de la función compleja sobre la trayectoria definida entre los puntos A y B (Ec. 2.71).

$$\int_A^v f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(z_k)\Delta z_k \quad \text{Ec. 2.71}$$

Recordando la definición de función de una variable compleja (Ec. 2.63) es posible expresar la integral compleja en términos de integrales reales (Ec. 2.72).

$$\int_A^v f(z)dz = \int_A^v u(x,y)dx - \int_A^v v(x,y)dy + i \int_A^v v(x,y)dx + i \int_A^v u(x,y)dy \quad \text{Ec. 2.72}$$

Ahora si la curva de integración antes definida fuese un contorno simple cerrado, manteniendo en cuenta la Ec. 2.72 y haciendo uso del teorema de Green (Teorema 2.3) obtenemos las Ec. 2.73, de las cuales su lado derecho es igual a cero por las ecuaciones de Cauchy-Riemann (Teorema 2.2).

Teorema 2.3 Teorema de Green

Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ y sus primeras derivadas parciales continuas en una región definida por un contorno simple cerrado. Entoces:

$$\oint Pdx + Qdy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\begin{aligned} \oint udx - vdy &= \iint \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \\ \oint udx - vdy &= \iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.73}$$

De lo anterior se puede concluir entonces que la integral de una función compleja sobre un contorno simple cerrado es igual a cero (Ec. 2.74).

$$\oint f(z)dz = 0 \quad \text{Ec. 2.74}$$

A la conclusión anterior se le conoce como teorema de Cauchy-Goursat, dado que Cauchy llego a él antes de que se formulara el teorema de Green y posteriormente Goursat hizo una demostración en la que requería menos condiciones que la deducción de Cauchy. La demostración de Goursat hizo ver que el teorema sigue siendo válido aún en dominios múltiplemente conexos con un número finito de agujeros. Finalmente, otra consecuencia del Teorema 2.4 es el hecho de que la integral sobre cualquier par de trayectorias simples cerradas es igual (Teorema 2.5).

Teorema 2.4 Teorema de Cauchy-Goursat

Sea C un contorno simple cerrado y $f(z)$ una función analítica en un dominio simple conexo, entoces:

$$\oint f(z)dz = 0$$

Teorema 2.5 Teorema de deformación de contornos

Las integrales de línea de una función analítica $f(z)$ alrededor de dos contornos cerrados simples serán idénticas si uno de los contornos puede transformarse en el otro por medio de una deformación continua, sin pasar por una singularidad

El Teorema 2.5 Teorema de deformación de contornos no requiere que los contornos no se autointersecten, pero si requiere de un contorno interno común a ambos contornos (Figura 2.18). De este teorema es posible deducir un método para encontrar integrales sobre contornos abiertos.

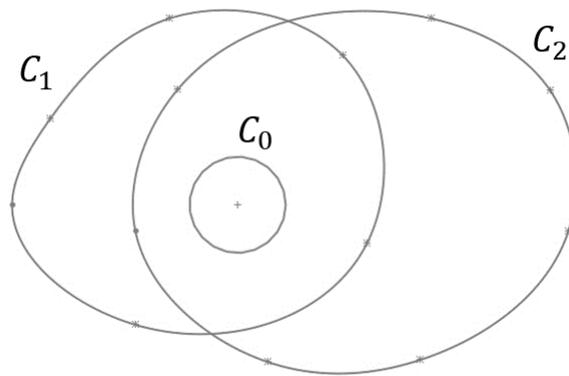


Figura 2.18 Deformación de contornos

Teorema 2.6 Teorema de independencia de trayectoria

Sea $f(z)$ una función analítica en todo punto de un dominio simplemente conexo y sean a y b dos puntos en dicho dominio. Si se usan contornos contiguos en el dominio para ir de a hasta b , entonces la integral no dependerá del contorno usado

$$\int_a^b f(z) dz = 0$$

Ahora suponga un contorno simple cerrado y una función que sea analítica sobre el contorno y todos los puntos interiores a este. Interior al contorno antes mencionado defina un círculo de radio r y centro en z_0 si la función $f(z)$ está dada por la Ec. 2.75, es claro que esta función es analítica en todos los puntos contenidos en el contorno C incluyendo los puntos sobre C y C_0 con excepción del punto z_0 (Figura 2.19).

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)} \tag{Ec. 2.75}$$

Por el Teorema 2.5 es claro que la integración de la función dada por la Ec. 2.75 sobre los contornos C y C_0 son iguales (Ec. 2.76).

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = \oint_{C_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz \quad \text{Ec. 2.76}$$

Puede demostrarse que el lado derecho de la ecuación anterior es igual a $2\pi i f(z_0)$ (Ec. 2.77), así entonces si construimos una nueva ecuación donde a la integral del lado derecho de la Ec. 2.76 les restamos tanto el lado derecho como el izquierdo de la Ec. 2.77 se obtiene la expresión de la Ec. 2.78, donde el término al lado derecho es igual a cero.

$$2\pi i f(z_0) = \oint_{C_0} \frac{f(z_0)}{(z - z_0)} dz \quad \text{Ec. 2.77}$$

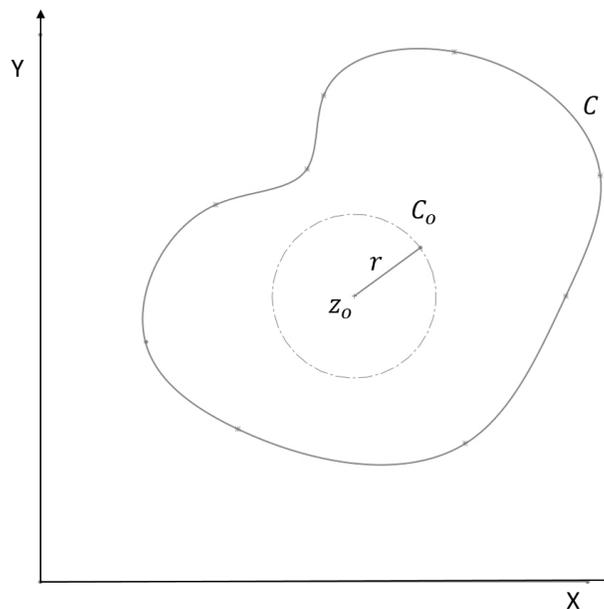


Figura 2.19 Contorno circular embebido en un contorno simple cerrado de forma aleatoria

$$\oint_{C_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz - 2\pi i f(z_0) = \oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} dz \quad \text{Ec. 2.78}$$

Dado lo anterior la Ec. 2.78 puede reescribirse como:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz \quad \text{Ec. 2.79}$$

La anterior es la fórmula integral de Cauchy, de la cual se establece el teorema siguiente:

Teorema 2.7 Teorema integral de Cauchy

Sea $f(z)$ una función analítica sobre un contorno simple cerrado C y también dentro de dicho contorno. Sea z_0 un punto del interior de C , entonces:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz$$

El Teorema 2.6 permite conocer el valor de una función analítica en un punto, cuando se conocen los valores de la función en un contorno simple cerrado que contenga al punto en cuestión. Como se verá en secciones subsecuentes este resultará de gran importancia para un estudio analítico de fractura haciendo uso de funciones de variables complejas.

Además de permitir evaluar una función como se acaba de comentar el Teorema 2.6, se puede extender para conocer las derivadas de cualquier orden de una función analítica sobre un punto al interior de un contorno simple cerrado, dicha extensión se plantea en el teorema siguiente:

Teorema 2.8 Extensión del teorema integral de Cauchy

Sea $f(z)$ una función analítica sobre un contorno simple cerrado C y también dentro de dicho contorno. Sea z_0 un punto del interior de C , entonces:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Las ideas planteadas en los teoremas integrales de Cauchy permiten realizar el cálculo del valor de una función sobre un punto en el cual de otra forma no podría calcularse. Así entonces queda de manifiesto la relación que se puede establecer entre el estudio de la mecánica de la fractura y el cálculo con funciones complejas.

2.2.4 SERIES INFINITAS

Como ya se mencionó en secciones anteriores (sección 2.2.4) la condición de analiticidad de una función de una variable compleja implica la expansión en series infinitas de la misma. Expandir una función en serie infinita permite realizar aproximaciones de valores de integrales que no pueden calcularse en términos de funciones comunes. En específico la serie de Laurent lleva al estudio de residuos, lo cual permitirá construir herramientas para evaluar una integral de contorno sobre una trayectoria simple cerrada.

Del estudio de funciones de una variable real, es sabido que no todas las funciones tienen expansión en serie de Taylor, o que existen valores específicos de las funciones para los cuales la serie no es válida, al no existir convergencia. Dificultades similares existirán al intentar expandir una función de una variable compleja en series de potencias.

Antes de definir cuando una función tiene o no expansión en series o convergencia de dicha serie en un punto, se establecen conceptos como el de sucesión y convergencia.

Sea la Ec. 2.80 una serie infinita cuyos miembros son funciones de una variable compleja

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_\infty(z) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(z) \quad \text{Ec. 2.80}$$

Y si además se definen las sumas parciales de la serie infinita (Ec. 2.81), dichas sumas parciales pueden usarse para definir una sucesión de funciones de la forma mostrada en la Ec. 2.82.

$$\begin{aligned} s_1(z) &= u_1(z) \\ s_2(z) &= u_1(z) + u_2(z) \\ s_n(z) &= \sum_{j=1}^n u_j(z) \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.81}$$

$$s_1(z), s_2(z), s_3(z), \dots, s_n(z) \quad \text{Ec. 2.82}$$

De la última ecuación se dirá que la sucesión tendrá por límite $S(z)$ cuando el valor del índice n tienda a infinito, si dado un número ϵ mayor a cero existe un entero N tal que el valor absoluto de la diferencia entre $S(z)$ y el n -ésimo elemento de la sucesión es menor a ϵ . Lo anterior define el concepto de convergencia ordinaria que en forma de expresión matemática está dada por la Ec. 2.83

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) = s(z) \quad \text{Ec. 2.83}$$

El conjunto de valores de z para los cuales la serie converge se denomina región de convergencia. Si los términos de una serie infinita no comienzan a reducirse a cero en algún momento la serie no puede converger. Ahora se dice que si una serie es absolutamente convergente si la serie de sus módulos es convergente, de lo contrario se dice que la serie es condicionalmente convergente.

Las series complejas absolutamente convergentes tienen una serie de propiedades útiles, que a continuación se enlistan:

- Convergen en el sentido ordinario
- Su suma es independiente del en que se sumen los términos
- Pueden multiplicarse de la misma forma que dos polinomios y su producto será absolutamente convergente

Para conocer si una serie compleja es absolutamente convergente se puede usar el criterio del cociente al igual que en las series reales (Teorema 2.9).

Si una serie converge uniformemente a $S(z)$ en una región, si para todo número ϵ mayor a cero existe un número N independiente de z tal que para todo z en la región, el valor absoluto de la diferencia entre $S(z)$ y el n -ésimo término de la serie es menor a ϵ . Para evaluar si una serie compleja es uniformemente convergente se puede usar el criterio de Weierstrass

Teorema 2.9 Criterio del cociente

Para una serie $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ considere la expresión

$$\Gamma = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{j+1}(z)}{u_j(z)} \right|$$

Si $\Gamma < 1$, la convergencia es absoluta

Si $\Gamma > 1$, la serie diverge

Si $\Gamma = 1$, no hay información sobre la convergencia

Teorema 2.10 Criterio M

Sea $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$ una serie convergente cuyos términos son constantes positivas

la serie $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ converge uniformemente en la región R si:

$$|u_j(z)| \leq M_j \quad \forall z \in R$$

Las series que convergen uniformemente en una región dada tienen las propiedades siguientes:

- Convergen a una función continua
- Se pueden integrar término a término
- Se pueden derivar término a término
- La suma de una serie uniformemente convergente es analítica y todos los términos de la serie son analíticos

Los conceptos de convergencia hasta ahora planteados pueden extenderse a las series de potencias. Una serie de potencias es una suma de la forma mostrada en la Ec. 2.84

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad \text{Ec. 2.84}$$

Si una serie de potencias converge cuando $z=z_1$ entonces converge para todo z tal que:

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0| \quad \text{Ec. 2.85}$$

La convergencia será absoluta para dichos valores de z , más aún si $z_0 \neq z_1$ se dice que la convergencia será uniforme y la suma de la serie será analítica. De esta definición de convergencia para series de potencia se puede deducir que las regiones de convergencia serán de frontera circular.

Con lo planteado en los párrafos anteriores se puede definir una serie de Taylor como se enuncia en el Teorema 2.11. El desarrollo en serie de Taylor alrededor de un punto de una función $f(z)$ es la única serie de potencias que converge a $f(z)$ en todo punto de un dominio centrado en dicho punto.

Teorema 2.11 Serie de Taylor

Sea $f(z)$ una función analítica en z_0 . Sea C el mayor círculo centrado en z_0 dentro del cual $f(z)$ es analítica y $a > 0$ el radio de C . Entonces existe una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = f(z), |z - z_0| < a$$

Donde:

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

A dicha serie se le denominará expansión en serie de Taylor de $f(z)$ alrededor de z_0

Ahora si se plantea una función de la forma $1/f(z)$ y se realiza una expansión en series se puede observar que surgen exponentes negativos, los cuales no aparecen en una serie de Taylor. Además, el dominio de dicha sería será de forma anular a diferencia de la serie del dominio de una serie de Taylor.

A una serie que contenga tanto potencias positivas como negativas se le denomina serie de Laurent, una expresión matemática generalizada para describir una serie de Laurent se muestra en la Ec. 2.86 donde los coeficientes de la serie están dados por el Teorema 2.12

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad \text{Ec. 2.86}$$

Teorema 2.12 Teorema de Laurent

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio anular D definido por

$$r_1 |z - z_0| < r_2$$

Si z pertenece a D , $f(z)$ puede representarse en un desarrollo en serie de Laurent

Donde:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

La integral de línea podrá evaluarse sobre cualquier contorno simple cerrado contenido en D

La serie de Laurent converge uniformemente en toda región anular cerrada, además de poder ser diferenciada término a término y ser única en el mismo sentido que la serie de Taylor.

2.2.5 RESIDUOS

El cálculo de residuos es una poderosa herramienta para la solución de ciertos tipos de integrales complejas. Revisando la Definición 2.8 es claro que z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$, será posible desarrollar en serie de Laurent $f(z)$ alrededor de z_0 . (Ec. 2.87).

$$f(z) = \dots + C_{-2}(z - z_0)^{-2} + C_{-1}(z - z_0)^{-1} + C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 \quad \text{Ec. 2.87}$$

Definición 2.7 Residuo

Sea $f(z)$ una función analítica sobre un contorno simple cerrado C y en todo punto interior de C salvo en z_0 . Entonces el residuo de $f(z)$ en z_0 está dado por:

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

Definición 2.8 Singularidad Aislada

Se dice z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$, si $f(z)$ no es analítica en z_0 pero si en una vecindad punteada de z_0

El residuo definido en la forma anterior puede evaluarse si se toma un círculo C de radio r centrado en z_0 . Así $f(z)$ puede representarse por una serie de Laurent y luego integrar término a término (Ec. 2.88).

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \oint_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n dz \quad \text{Ec. 2.88}$$

De la ecuación anterior todos los términos son igual a cero excepto el término -1 en el cual el resultado es $2\pi i$, así entonces el residuo está dado por Ec. 2.89

$$\text{Res}[f(z), z_0] = C_{-1} \quad \text{Ec. 2.89}$$

De lo anterior se desprende el Teorema 2.13 Residuo

Teorema 2.13 Residuo

El residuo de $f(z)$ en un punto singular aislado z_0 es igual al coeficiente C_{-1} de la serie de Laurent que representa a $f(z)$ en una región anular

Poder evaluar residuos entonces proveerá también la capacidad de poder evaluar integrales sobre singularidades aisladas, lo cual constituye una poderosa herramienta para el análisis de ciertos problemas de aplicación, como el de la mecánica de fractura.

2.3 VARIABLE COMPLEJA EN PROBLEMAS DE ELASTICIDAD

En el estudio de la teoría de la elasticidad se suelen reconocer dos problemas de equilibrio fundamentales. El primer problema fundamental es aquel en el que se conocen las cargas externas y el segundo problema fundamental es aquel en el que se conocen los desplazamientos, lo anterior es el equivalente a hablar de un problema con valores en la frontera del tipo de Neumann o Dirichlet respectivamente.

Para la solución de estos problemas de elasticidad se pueden utilizar los métodos descritos en la sección 2.1.8 en donde se define una función de esfuerzo bi-armónica. Si se retoma ese método semi-inverso usando una función de esfuerzo de Airy, la inclusión de variables complejas resulta natural ya que para toda función analítica en un dominio su parte real e imaginaria son funciones armónicas en dicho dominio (Teorema 2.2) y más aún las funciones son C^∞ lo cual las hace aptas

para la solución de la ecuación biarmónica, siempre que sean simplemente valuadas en el dominio de estudio.

2.3.1 VARIABLE COMPLEJA EN ELASTICIDAD PLANA

Para dar solución a problemas de elasticidad plana es necesario definir primero una función biarmónica en términos de funciones de variable compleja, de manera tal que sea posible aplicar el método de solución planteado en la sección 2.1.8.

Se parte entonces proponiendo una función de una variable compleja como la de la Ec. 2.90, donde P y Q son funciones armónicas conjugadas, satisfaciendo además las ecuaciones de Cauchy Riemann (Teorema 2.1). En consecuencia, la función de la Ec. 2.90 será holomorfa en un dominio simple cerrado en el que las funciones P y Q sean armónicas.

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \quad \text{Ec. 2.90}$$

Ahora si consideramos que el laplaciano de la función de esfuerzos de Airy (Φ) es igual a la función P, entonces el laplaciano de la función P sería igual a cero (Ec. 2.91)

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= P \\ \Delta P &= \Delta\Delta\Phi = 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.91}$$

Si se define una función $\varphi(z)$ de la siguiente forma:

$$\varphi(z) = p + iq = \frac{1}{4} \int f(z) dz \quad \text{Ec. 2.92}$$

Entonces su derivada cumplirá con lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= \frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{4} (P + iQ) \\ \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} &= \frac{1}{4} P, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{4} Q \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.93}$$

Utilizando las Ec. 2.91 Ec. 2.93 se puede verificar que la función en la Ec. 2.94 es armónica.

$$\Delta(\Phi - px - qy) = 0 \quad \text{Ec. 2.94}$$

Entonces la Ec. 2.95 será cierta siempre que p_1 sea una función armónica en la misma región en que p y q son armónicas.

$$\Phi = px + qy + p_1 \quad \text{Ec. 2.95}$$

Si ahora se define una función $\chi(z)$ cuya parte real sea p_1 y parte imaginaria q_1 esta será holomorfa siempre que la región en la que se define sea simplemente conexa. Así entonces la ecuación anterior se puede reescribir como en la Ec. 2.96, la cual representa una función biarmónica, siempre que $\varphi(z)$ y $\chi(z)$ sean holomorfas. Finalmente, si se obtiene el laplaciano de Φ se nota que la expresión

resultante solo dependerá de la parte real de $\varphi'(z)$ (Ec. 2.97) y consecuentemente $\Delta\Delta\Phi$ se iguala a cero.

$$\Phi = \Re\{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\} = \frac{1}{2}(\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}) \quad \text{Ec. 2.96}$$

$$\Delta\Phi = 4\Re\{\varphi'(z)\} = 2\{\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\} \quad \text{Ec. 2.97}$$

De la teoría de la elasticidad; específicamente en elasticidad plana, se conocen los resultados obtenidos por A.E.H. Love [11] que relacionó los desplazamientos con la función de esfuerzos de la forma en que se muestra en la Ec. 2.98; si se usa la función P antes introducida en esta ecuación, se tiene entonces Ec. 2.99, si se integra esta última se obtienen las expresiones de la Ec. 2.100.

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Delta\Phi, \quad 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Delta\Phi \quad \text{Ec. 2.98}$$

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} P, \quad 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} P \quad \text{Ec. 2.99}$$

$$2\mu u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} p + f_1(y), \quad 2\mu v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} q + f_2(x) \quad \text{Ec. 2.100}$$

En la Ec. 2.100 las funciones $f_1(y)$ y $f_2(x)$ representan movimientos de cuerpo rígido y por tanto se omiten en la presente formulación. Para expresar los desplazamientos expresados en la Ec. 2.100 en términos de una variable compleja la segunda expresión se multiplica por i y se suma a la primera de lo cual resulta la Ec. 2.101.

$$2\mu(u + iv) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \varphi(z) = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \frac{d\chi}{dz} \quad \text{Ec. 2.101}$$

Al igual que los desplazamientos, las componentes de esfuerzos pueden expresarse en términos de una variable compleja, haciendo uso de la función de esfuerzos se puede comprobar que las componentes de esfuerzo en forma compleja están dadas por la Ec. 2.102.

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)] = 2(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)) \quad \text{Ec. 2.102}$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\Re\varphi'(z)$$

Las expresiones presentadas para las componentes de desplazamiento y esfuerzo son analíticas, dado que las funciones de las cuales dependen son analíticas.

2.3.2 ELASTICIDAD PLANA COMPLEJA EN DOMINIOS MULTIPLEMENTE CONEXOS

Todas las expresiones desarrolladas en la sección anterior (sección 2.3.1) se obtienen considerando un dominio simplemente conexo, ahora se plantea el caso de un dominio múltiplemente conexo. Suponga una región R múltiplemente conexa como la de la Figura 2.20, donde se definen diversos contornos simples que no se intersecan entre sí y donde el contorno C_{n+1} contiene a los demás contornos. Las funciones complejas que se han definido en secciones anteriores φ y χ , son definidas holomorfas y simplemente valuadas en cualquier contorno simple conexo de la región R, a pesar de que en forma general sobre la región R resulten multi-valuadas. Es importante mostrar que las componentes de desplazamiento y esfuerzo son simples-valuadas de forma tal que exista pertinencia respecto a la teoría de la elasticidad.

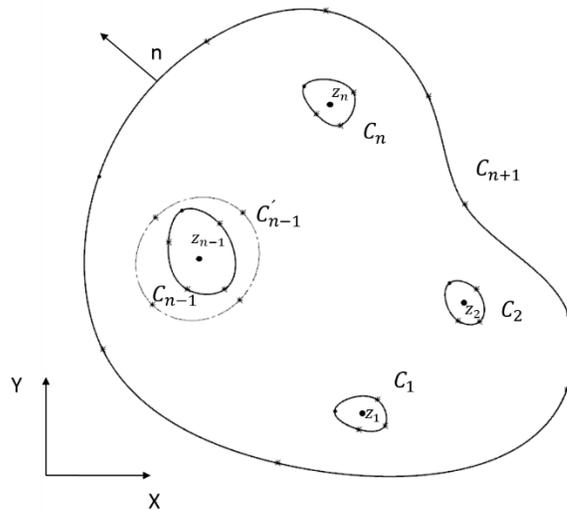


Figura 2.20 Dominio múltiplemente conexo

Si se considera que cada contorno de la Figura 2.20 definiera por ejemplo un agujero en un dominio plano y se toma un punto fijo z dentro de cada uno de estos contornos excepto en C_{n+1} , se tratará de mostrar la naturaleza multi-valuada de las funciones de esfuerzo φ y χ , con el fin de clarificar el comportamiento de su multiplicidad. Primero se definen nuevas funciones ψ , Ψ y Θ (Ec. 2.103).

$$\psi(z) = \frac{d\chi}{dz}, \Psi(z) = \psi'(z), \Theta(z) = \varphi'(z) \quad \text{Ec. 2.103}$$

De la segunda expresión de la Ec. 2.102 se sabe que la parte real de $\Theta(z)$ es simple-valuada, dado que los esfuerzos normales lo son, sin embargo, no se tiene certidumbre de si su parte imaginaria lo es también. Es posible que dicha parte imaginaria tenga un incremento (Ec. 2.104) cuando z describe un ciclo alrededor del contorno cerrado C'_{n-1} en sentido antihorario.

$$B_n = 2\pi A_n, A_n = \text{constante real} \quad \text{Ec. 2.104}$$

Ahora definiendo la función de la Ec. 2.105; donde z_{n-1} es un punto arbitrario del agujero acotado por C_{n-1} , dicha función será holomorfa y simple-valuada. Así para la función φ se obtiene la Ec. 2.106,

donde la última integral representa en si una función de variable compleja que presenta un incremento de la forma $2\pi c_n$ al dar un ciclo sobre un contorno (Ec. 2.107). Combinando las últimas dos ecuaciones se obtiene la Ec. 2.108, donde γ son constantes complejas y φ^* es una función holomorfa. De la primera expresión de la Ec. 2.102 se ve que la función $\Psi(z)$ será holomorfa.

$$\Theta_0(z) = \Theta(z) - \sum_{n=1}^m A_n \log(z - z_{n-1}) \quad \text{Ec. 2.105}$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \int_{z_0}^z \Theta(z) dz + \text{const} \\ &= \sum_{n=1}^m A_n \{(z - z_n) \log(z - z_n) - (z - z_n)\} + \int_{z_0}^z \Theta_0(z) dz + \text{const} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.106}$$

$$\int_{z_0}^z \Theta_0(z) dz = \sum_{n=1}^m c_n \log(z - z_n) + f \quad \text{Ec. 2.107}$$

$$\varphi(z) = z \sum_{n=1}^m A_n \log(z - z_n) + \sum_{n=1}^m \gamma_n \log(z - z_n) + \varphi^*(z) \quad \text{Ec. 2.108}$$

Siguiendo un desarrollo análogo al hecho para encontrar la Ec. 2.108 se puede encontrar una expresión para $\psi(z)$, donde γ son constantes complejas y ψ^* es una función holomorfa.

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^m \gamma'_n \log(z - z_n) + \psi^*(z) \quad \text{Ec. 2.109}$$

Ahora tomando en consideración la ecuación de desplazamientos compleja (Ec. 2.101), en función de $\varphi(z)$ (Ec. 2.108) y $\psi(z)$ (Ec. 2.109) se puede reescribir como se muestra en la Ec. 2.110. Para que los desplazamientos sean simplemente valuados es necesario y suficiente que en las ecuaciones 2.105 a 2.110 A_n y $\kappa\gamma_n + \gamma'_n$ sean iguales a cero.

$$\begin{aligned} 2\mu(u + iv) &= \kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2\pi i\{(\kappa + 1)A_n z + \kappa\gamma_n + \overline{\gamma'_n}\} \\ \kappa &= \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.110}$$

2.3.3 SOLUCIÓN DEL PRIMER PROBLEMA FUNDAMENTAL DE ELASTICIDAD

En el primer problema fundamental se busca encontrar el equilibrio estático, dadas las cargas externas $F_x + iF_y$ aplicadas al dominio. Por el principio fundamental del equilibrio estático el vector

principal tanto de fuerzas como de momentos externos debe ser igual a cero sobre la frontera del dominio (Ec. 2.111).

$$\int (F_{xn} + iF_{yn})ds = 0, \int (-yF_{xn} + xF_{yn})ds = 0 \quad \text{Ec. 2.111}$$

Si se toma un punto p_0 cualquiera en la frontera del dominio y se considera t como un parámetro que define la curva de la frontera, se define al vector principal de esfuerzos externos como en la Ec. 2.112 [37] el cual es simple-valuado bajo la primera condición de equilibrio (Ec. 2.111).

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t) = i \int_{t_0}^t (F_{xn} + iF_{yn})ds = 0 \quad \text{Ec. 2.112}$$

La segunda condición de equilibrio (Ec. 2.111) puede simplificarse haciendo uso de los resultados anteriores obteniendo la forma de la Ec. 2.113 donde las funciones f son simple-valuadas sobre la frontera del dominio

$$\int f_1 dx + f_2 dy = \Re \int \overline{f(t)} dt = 0 \quad \text{Ec. 2.113}$$

Así entonces la función $F_x + iF_y$ debe satisfacer la Ec. 2.113 donde $f(t)$ está definida como en la Ec. 2.112 satisfaciendo la primera condición de equilibrio. Reescribiendo la primera condición de equilibrio en términos de las funciones complejas $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ se obtiene la expresión en la Ec. 2.114, donde la función entre corchetes es simple-valuada y satisface la Ec. 2.113 (Ec. 2.115)

$$[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]_{C_{n+1}} = 0 \quad \text{Ec. 2.114}$$

$$\Re \int \psi(t) dt = 0 \quad \text{Ec. 2.115}$$

Las funciones complejas $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ deben satisfacer la condición de frontera de la Ec. 2.116. Si t_0 se mantiene fijo entonces la constante en la Ec. 2.116 está bien determinada y el primer problema fundamental se reduce a encontrar dos funciones holomorfas $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ en el dominio de estudio que satisfagan la condición de la Ec. 2.116, conociendo las sollicitaciones externas al sistema.

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + Const \quad \text{Ec. 2.116}$$

La solución de este primer problema fundamental no es única, a menos que se cumplan las condiciones de la Ec. 2.117

$$\varphi(0) = 0, \Im\{\varphi'(0)\} = 0, \psi(0) = 0 \quad \text{Ec. 2.117}$$

Lo anterior aplica para un dominio simplemente conexo, cuando se trata con dominios múltiplemente conexos se parte del mismo punto el vector principal de esfuerzos externos bajo la primera condición de equilibrio (Ec. 2.118) donde el parámetro t_n se toma sobre el contorno C_n (Figura 2.20) y bajo un procedimiento análogo al presentado para el dominio simplemente conexo se establece la Ec. 2.119 que establece el problema con valores en la frontera y donde las constantes

en general son distintas para distintos contornos. Para asegurar la unicidad de la solución de la Ec. 2.119 se requiere una vez más que las condiciones de la Ec. 2.117 se cumplan.

$$f(t) = i \int_{t_n}^t (F_{xn} + iF_{yn}) ds \quad \text{Ec. 2.118}$$

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + \text{Cos}nt_n \quad \text{Ec. 2.119}$$

Finalmente, para solucionar cualquiera de los problemas con valores en la frontera que se han planteado (Ec. 2.116 y Ec. 2.119) existen diversos métodos, destacando la reducción a ecuaciones del tipo de Fredholm, ya que permite de forma natural la aplicación de métodos numéricos de solución [11].

2.3.4 SOLUCIÓN DEL SEGUNDO PROBLEMA FUNDAMENTAL DE ELASTICIDAD

El segundo problema fundamental de la teoría de la elasticidad es aquel en donde se conocen los desplazamientos $u(t)+iv(t)$ en la frontera del dominio de estudio. Siguiendo un desarrollo similar al de la sección anterior se encuentra el problema de valores en la frontera para el segundo problema fundamental en un dominio simplemente conexo

$$\kappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2\mu g(t) \quad \text{Ec. 2.120}$$

Donde la función $g(t)$ es continua sobre la frontera del dominio y está dada por

$$g(t) = u(t) + iv(t) \quad \text{Ec. 2.121}$$

Para que la solución de la Ec. 2.120 sea única se deben cumplir además las condiciones complementarias siguientes.

$$\varphi(0) = 0, \psi(0) = 0 \quad \text{Ec. 2.122}$$

Para el caso de dominios múltiplemente conexos el problema de valores en la frontera es el de la

$$\kappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2\mu g^*(t) \quad \text{Ec. 2.123}$$

Donde g^* está dada por

$$2\mu g^*(t) = 2\mu g(t) + \frac{\kappa}{\pi(1+\kappa)} \sum_{n=1}^m (F_{xn} + iF_{yn}) \ln|t - z_n| - \frac{t}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{n=1}^m \frac{F_{xn} - iF_{yn}}{t - z_n} \quad \text{Ec. 2.124}$$

Siendo necesario cumplir con las condiciones complementarias de la Ec. 2.122 para la unicidad de la solución de la Ec. 2.123. Los mismos métodos usados para solucionar los problemas de valores en la frontera del primer problema fundamental pueden utilizarse para la solución del segundo problema fundamental, dónde las Ec. 2.120 y Ec. 2.123 suelen llevarse primero a una forma de ecuación integral para después solucionar los problemas.

2.4 MECÁNICA DE LA FRACTURA

Para el cálculo de la resistencia remanente de un componente mecánico agrietado, es necesario conocer el estado de esfuerzos y desplazamientos, específicamente en la punta de las grietas dado que la condición en estas zonas es de crucial importancia para predecir una posible propagación de las grietas.

Realizando un cálculo matemático la punta del agrieta representará una singularidad; en consecuencia, los esfuerzos y deformaciones sobre esta serían infinitas, mientras que, en una situación experimental, si bien los esfuerzos no son infinitos, si pueden ser superiores en magnitud al esfuerzo de cedencia del material en cuestión, lo cual dará origen a una región de plasticidad alrededor de la punta de la grieta.

En el desarrollo histórico de la mecánica de fractura primero se presentaron enfoques que no consideraba la zona plástica antes mencionada; a esta teoría se le conoce como mecánica de fractura lineal elástica (MFLE), posteriormente se incluyeron en los análisis las consideraciones de plasticidad, dando origen a la mecánica de fractura elastoplástica (MFEP). En la presente sección se plantean las principales ideas de los enfoques antes mencionados, sin profundizar en demostraciones.

2.4.1 GENERALIDADES

Antes de plantear un análisis sobre el estado de esfuerzos y desplazamientos en la punta de una grieta es importante mencionar la forma en que las superficies de las grietas responden a la aplicación de cargas externas. Se considera en general que una grieta tiene dos superficies opuestas entre sí y se pueden distinguir en general tres movimientos relativos entre las superficies de una grieta, separación, deslizamiento y deslizamiento oblicuo.

Los movimientos entre superficies antes mencionados se relacionan directamente con la forma en que se aplican las cargas externas, a las diversas formas en que se puede cargar un cuerpo agrietado de manera tal que se produzcan los distintos movimientos entre superficies, se les denomina modos de carga.

Para entender los modos de carga suponga un cuerpo con una grieta plana pasante²¹ sobre el plano yz, si ahora se ubica un marco de referencia sobre un punto medio de la grieta y si se aplica una carga de tensión en dirección z las superficies de la grieta tenderán a separarse simétricamente respecto al plano xy (Figura 2.21 a)), a esta condición se le conoce como modo I de carga o de apertura.

Si ahora las cargas se aplican sobre el plano yz provocando cortante, las superficies tenderán a deslizarse simétricamente respecto al plano yz y oblicuo-simétrico respecto al plano xy, a esta condición se le denomina modo II o de deslizamiento (Figura 2.21 b)). Finalmente, si las cargas se aplican en dirección normal al plano yz, entonces las superficies de grieta tendrán un

²¹ Se dice que una grieta es pasante cuando se extiende por todo el espesor de un cuerpo

desplazamiento oblicuo-simétrico respecto a los planos yz y xy, a esta condición se le llama modo III o de desgarramiento (Figura 2.21 c)),

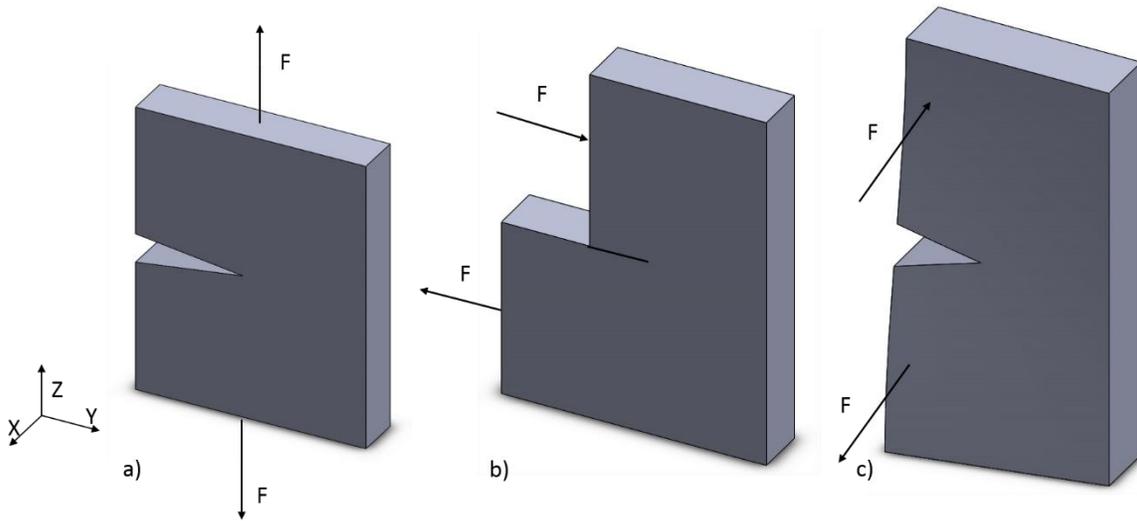


Figura 2.21 Modos de carga en mecánica de fractura

Típicamente los análisis de los campos de esfuerzos y desplazamientos en la punta de la grieta se hacen para casos de elasticidad plana, así en las secciones siguientes los desarrollos presentados son para casos de elasticidad plana.

Un método simple y útil que permite resolver problemas de elasticidad plana; usando la función de esfuerzos de Airy, es el método de Westergaard en el cual se propone una función de la forma presentada en la Ec. 2.125 como solución a la ecuación bi-armónica (Ec. 2.55). En donde las funciones α_i pueden ser la parte real o imaginaria de una función analítica.

$$\Phi = \alpha_1 + x\alpha_2 + y\alpha_3 \quad \text{Ec. 2.125}$$

Para problemas simétricos Westergaard propuso una función de Airy como la de la Ec. 2.126, en donde el subíndice I hace referencia al modo I de carga. Esta forma de la función de esfuerzos de Airy satisface la ecuación bi-armónica, obteniendo como resultado las componentes de esfuerzo de la Ec. 2.127.

$$\Phi_I = \Re \bar{z}_I + y \Im \bar{z}_I$$

$$\bar{z}_I = \frac{d\bar{z}_I}{dz_I}, z_I = \frac{dz_I}{dz_I}, z'_I = \frac{dz_I}{dz_I} \quad \text{Ec. 2.126}$$

$$\sigma_x = \Re z_I - y \Im z'_I, \sigma_y = \Re z_I + y \Im z'_I, \tau_{xy} = -y \Re z'_I \quad \text{Ec. 2.127}$$

Usando la ley de Hooke y las relaciones deformación-desplazamiento, se pueden encontrar los desplazamientos (Ec. 2.128). Donde k toma distintos valores según sea el caso de esfuerzo o deformación planos.

$$2\mu u = \frac{k-1}{2} \Re \bar{z}_I - y \Im \bar{z}_I, 2\mu v = \frac{k+1}{2} \Im \bar{z}_I - y \Re z_I$$

$$k = 3 - 4\nu \rightarrow \text{Deformación plana}, k = \frac{3-\nu}{1+\nu} \rightarrow \text{Esfuerzo plano}$$
Ec. 2.128

Por otro lado, para problemas oblicuo-simétricos; es decir para el modo II de carga, la función de esfuerzos tiene la forma de la Ec. 2.129 y sus componentes de esfuerzo y desplazamiento están dadas por las Ec. 2.130 Ec. 2.131 respectivamente. Para el modo III se considera una combinación de los modos I y II.

$$\Phi_{II} = y \Im \bar{z}_{II}$$
Ec. 2.129

$$\sigma_x = 2\Re z_{II} - y \Im z'_{II}, \sigma_y = y \Im z'_{II}, \tau_{xy} = -\Im z_{II} - y \Re z'_{II}$$
Ec. 2.130

$$2\mu u = \frac{k+1}{2} \Re \bar{z}_{II} - y \Im z_{II}, 2\mu v = \frac{k-1}{2} \Im \bar{z}_{II} - y \Re z_{II}$$
Ec. 2.131

Finalmente, si se considera un plato infinito con una grieta pasante de longitud $2a$, ubicada sobre el eje x y cuyo centro es coincidente con el origen de un marco de referencia XY y el plato está sometido a esfuerzos uniformes tanto en X como en Y (Figura 2.22). Se tendrían las condiciones de frontera de la Ec. 2.132.

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = 0 \text{ en } y = 0, -a < x < a$$

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = \sigma, \tau_{xy} = 0 \text{ en } (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty$$
Ec. 2.132

$$z_I = \frac{\sigma z}{(z^2 - a^2)^{1/2}}$$
Ec. 2.133

$$Z_{II} = \frac{i\tau z}{(z^2 - a^2)^{1/2}}$$

Ec. 2.134

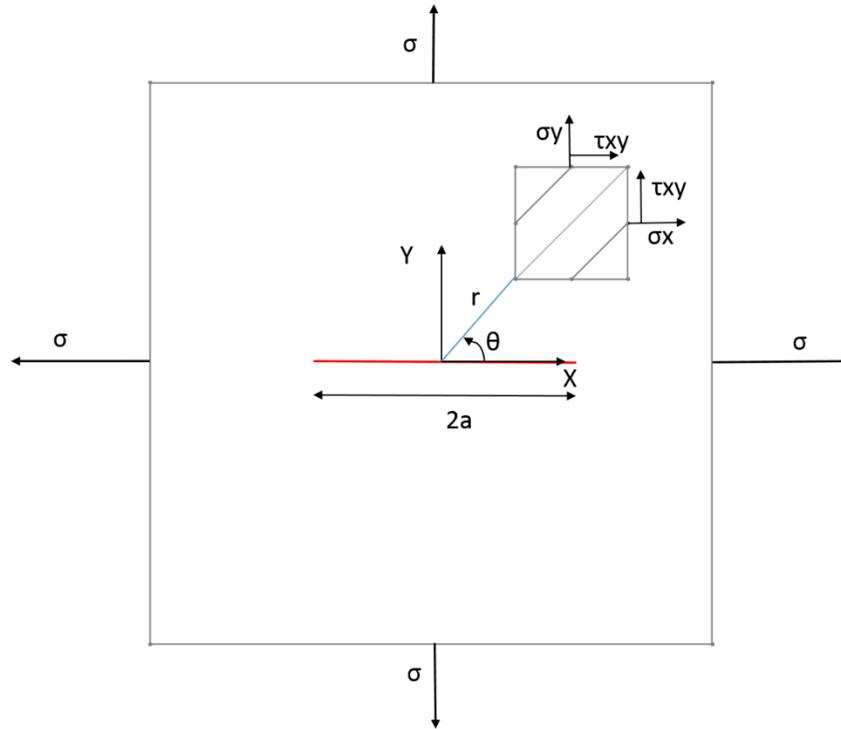


Figura 2.22 Plato infinito con grieta pasante sometida a esfuerzos uniformes

Entonces las funciones Z_I y Z_{II} que son solución para las ecuaciones anteriores, están dadas por la Ec. 2.133 y la Ec. 2.134 donde para modo I se requiere que la función sea analítica en toda la región, excepto en la zona de la grieta. Además, el numerador debe ser igual a σ en ∞ , mientras que para el modo II el numerador debe ser igual a τ en ∞ .

2.4.2 CAMPOS DE ESFUERZOS SINGULARES Y EL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZOS

Los campos de esfuerzos y desplazamientos en la punta de la grieta gobiernan el proceso de fractura, en consecuencia, resultan de gran importancia, si se considera de nuevo el problema de la Figura 2.22 y se usa la función de la Ec. 2.133, transformando a coordenadas polares las componentes de esfuerzo serían las que a continuación se presentan. Donde r_1 y θ_1 son los mostrados en la Figura 2.23.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2r_1}} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta_1 \sin \frac{3}{2} \theta_1 \right) \\ \sigma_y &= \frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2r_1}} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{2} \sin \theta_1 \sin \frac{3}{2} \theta_1 \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2r_1}} \left(\sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{1}{2} \theta_1 \cos \frac{3}{2} \theta_1 \right)\end{aligned}$$

Ec. 2.135

$$\sigma_y = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r_1}}$$

$$\tau_{xy} = 0$$

Ec. 2.136

Mientras que a lo largo de la grieta los esfuerzos están dados por la Ec. 2.136, de la cual se puede definir el factor de intensidad de esfuerzos como:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$$

Ec. 2.137

Las componentes de esfuerzos de las Ec. 2.135 Ec. 2.136 tienen una singularidad del tipo $1/\sqrt{r}$ y el factor de intensidad de esfuerzos define la magnitud de estas. De la misma forma en que las componentes de esfuerzo se obtienen haciendo uso de coordenadas polares es posible obtener los desplazamientos (Ec. 2.138).

$$u = \frac{K_I}{8\mu\pi} \sqrt{2\pi r} \left((2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$v = \frac{K_I}{8\mu\pi} \sqrt{2\pi r} \left((2k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

Ec. 2.138

$k = 3 - 4\nu \rightarrow$ Deformación plana y $k = \frac{3-\nu}{1+\nu} \rightarrow$ Esfuerzo plano

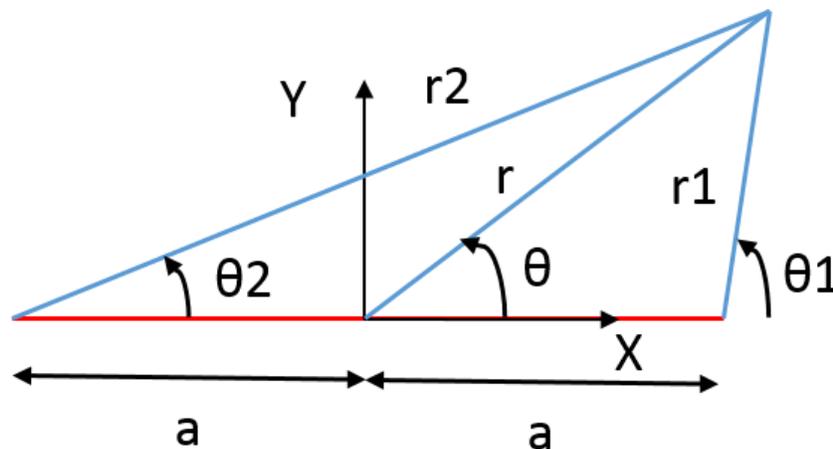


Figura 2.23 Uso de coordenadas polares para el cálculo del campo de esfuerzos

Las expresiones al momento presentadas para las componentes de esfuerzo y desplazamiento fueron obtenidas de un problema de fractura específico, sin embargo los campos alrededor de la punta de la grieta se mantienen para cualquier cuerpo agrietado en modo I, con la única diferencia de que el factor de intensidad de esfuerzos será diferente y dependerá de la componente de esfuerzo en dirección Y como se muestra en la Ec. 2.139.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi r} \sigma_y \quad \text{Ec. 2.139}$$

Para el caso de los modos II y III de carga se pueden seguir procedimientos similares para determinar los campos de esfuerzos y desplazamiento, donde la diferencia serán las condiciones de frontera y la función de Westergaard propuesta. Las condiciones de frontera se obtienen de los problemas mostrados en la Figura 2.24 donde se tiene un plato infinito con una grieta pasante de longitud $2a$ en el centro. Para el caso de modo II la función de Westergaard a usar es la de la Ec. 2.134 con las condiciones de frontera de la Ec. 2.140 siendo los campos de desplazamientos y esfuerzos son los presentados en las Ec. 2.141 Ec. 2.142 respectivamente

$$\begin{aligned} \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \text{ en } y = 0, |x| \leq a \\ \sigma_x = 0, \sigma_y = \sigma, \tau_{xy} = \tau \text{ en } (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.140}$$

Mientras que para el caso del modo III la función de Westergaard a usar es la Ec. 2.143 y las condiciones de frontera son las de la Ec. 2.144, mientras los resultados en cuanto a los campos de desplazamiento y esfuerzos son los de las Ec. 2.145 Ec. 2.146 respectivamente.

$$\begin{aligned} u = \frac{K_{II}}{8\mu\pi} \sqrt{2\pi r} \left((2k+3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ v = -\frac{K_{II}}{8\mu\pi} \sqrt{2\pi r} \left((2k-3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.141}$$

$$k = 3 - 4\nu \rightarrow \text{Deformación plana y } k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \rightarrow \text{Esfuerzo plano}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.142}$$

Donde $K_{II} = \tau \sqrt{\pi a}$

$$z_{III} = S \sqrt{z^2 - a^2} \quad \text{Ec. 2.143}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = 0 \text{ en } y = 0, |x| \leq a \\ \tau_{yz} = \tau \text{ en } |y| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.144}$$

$$w = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r_1}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}$$

Ec. 2.145

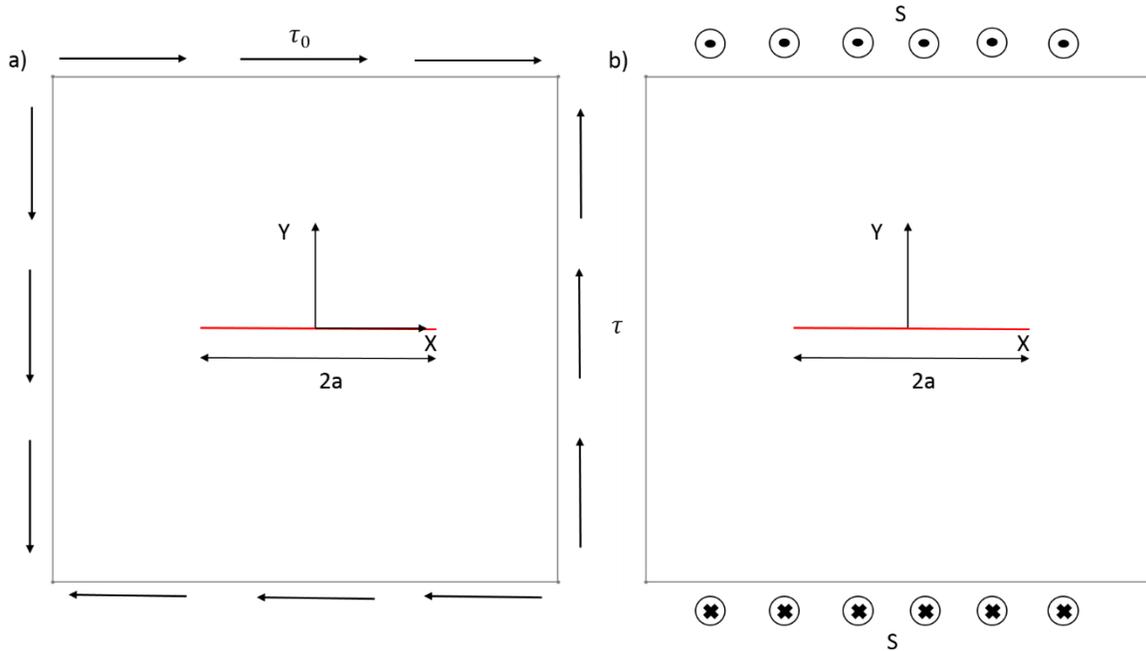


Figura 2.24 Problemas de platos agrietados a) en modo II y b) en modo III

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r_2}} \cos \frac{\theta_1}{2}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r_1}} \sin \frac{\theta_1}{2}$$

Donde $K_{III} = S\sqrt{\pi a}$

Ec. 2.146

2.4.3 CAMPOS ELASTOPLÁSTICOS

Los análisis elásticos aplican solo cuando se trata con materiales frágiles ideales para los cuales la zona plástica en la punta de la grieta es despreciable, sin embargo en la mayoría de los casos existe una zona de plasticidad en la punta de la grieta. Los campos de esfuerzos antes determinados para los distintos modos de carga (Ec. 2.135 Ec. 2.142 Ec. 2.146) son singulares y asintóticos cuando la distancia a la punta de la grieta tiende a cero y su campo de validez se limita a una zona muy pequeña alrededor de la punta.

Si se supone una región inelástica circular de radio r alrededor de la punta de la grieta y otra de radio R , denominada K-dominante (Figura 2.25). Cuando $r \ll R$ el campo singular de esfuerzos es una buena aproximación del campo elástico en la región anular entre r y R .

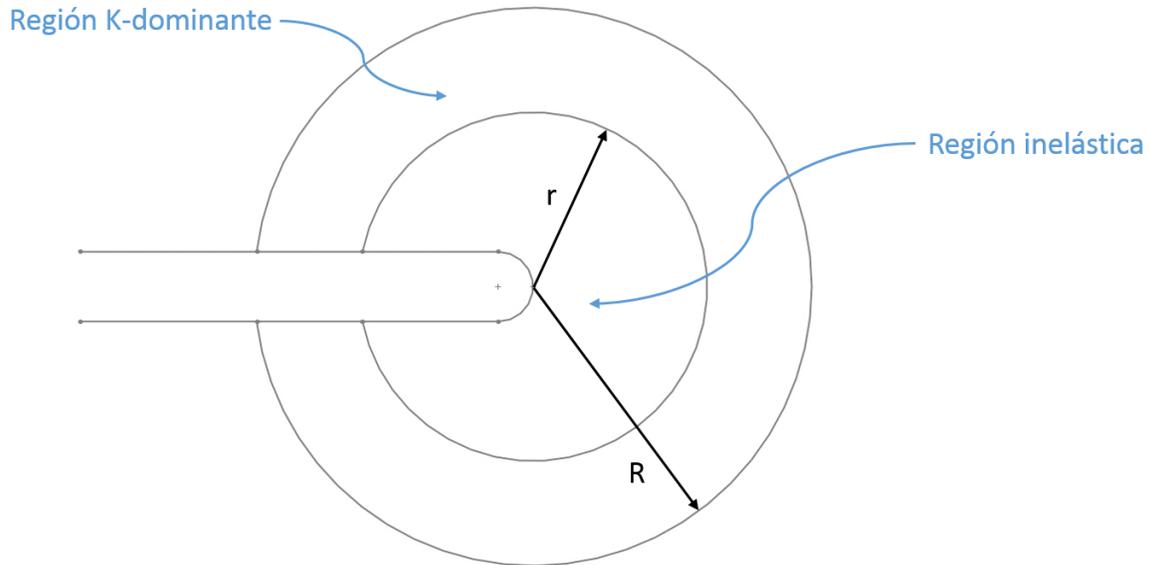


Figura 2.25 Regiones alrededor de la punta de la grieta

Ahora respecto a la región plástica, esta se debería determinar haciendo un estudio elasto-plástico alrededor de la punta de la grieta, sin embargo, se puede obtener una buena aproximación simplemente determinando los puntos donde se sobrepasa el límite de cedencia. Si se toman en consideración los campos de esfuerzo para modo I (Ec. 2.135), se aplica el criterio de Von Mises y se despeja el radio de la expresión resultante se obtiene una aproximación del radio de la zona plástica así como la extensión de la misma a lo largo del eje X tanto para esfuerzo plano (Ec. 2.147) como para deformación plana (Ec. 2.148).

$$r = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta + 1 + \cos \theta \right)$$

$$rx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2$$

Ec. 2.147

$$r = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right)$$

$$rx = \frac{1}{18\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2$$

Ec. 2.148

De la determinación de los radios anteriores se determinan las formas de la zona plástica (Figura 2.26), observado que la zona plástica en esfuerzo plano es mucho más grande. El esfuerzo plano domina en platos delgados mientras que para espesores grandes la condición dominante es la deformación plana.

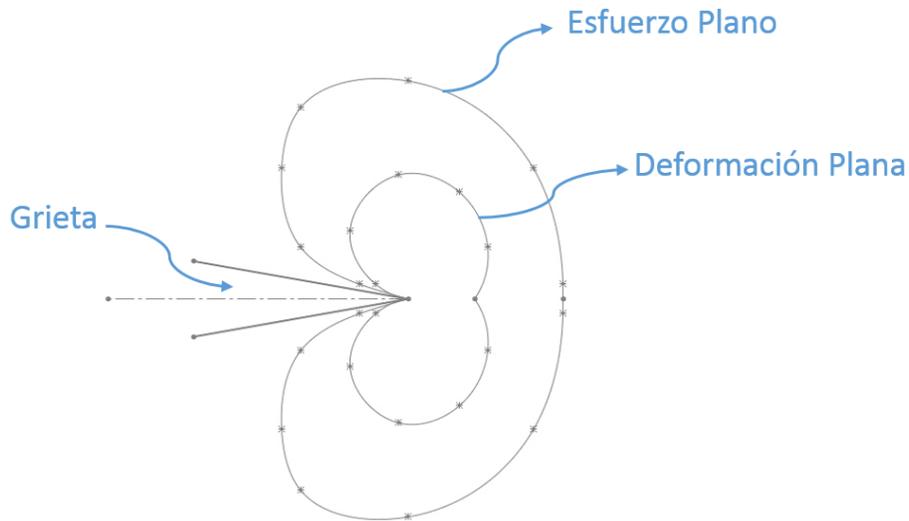


Figura 2.26 Regiones plásticas alrededor de la punta de una grieta

Irwin propuso un modelo simplificado para la determinación de la región plástica alrededor de la punta de la grieta, obedeciendo la cedencia a pequeña escala, centrando la atención en una parte del eje de la grieta y no en la forma completa de la zona plástica.

En el modelo de Irwin se considera una condición de esfuerzo plano y una distribución elástica de esfuerzos, donde la componente normal X e Y son iguales a lo largo del eje de la grieta (Figura 2.27). El radio de la región plástica se calcula entonces haciendo uso de la Ec. 2.147. La zona sombreada en la Figura 2.27 representa la plasticidad en la punta de la grieta, estos esfuerzos deberían producir una redistribución de esfuerzos a lo largo de la X y en consecuencia la longitud de la zona plástica debería ser mayor que la mostrada en la imagen. Como consecuencia de la plasticidad los desplazamientos son mayores y la rigidez del plato menor, así Irwin concluyó que el efecto de la plasticidad es como si se tuviera una grieta de mayor longitud que la real y que la distancia entre la punta de la grieta real y la ficticia está dada por la Ec. 2.149

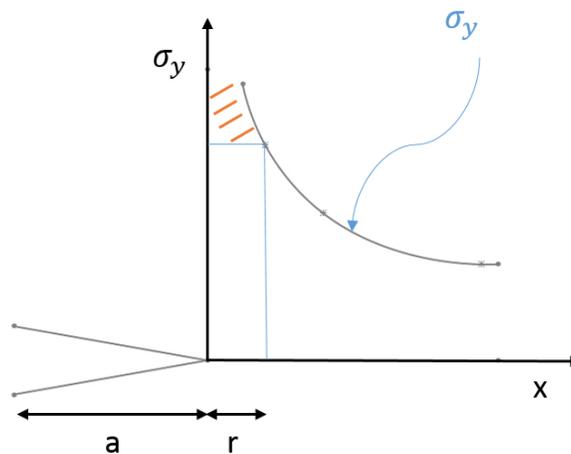


Figura 2.27 Modelo simplificado de plasticidad de Irwin

$$\delta = \frac{k+1}{2\mu} \sigma \sqrt{(a+c/2)^2 - a^2}$$

$$c = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 = \text{longitud de la zona plástica}$$

Ec. 2.149

2.4.4 MÉTODOS ENERGÉTICOS EN FRACTURA (TEORÍA DE GRIFFITH)

Si se considera una grieta de área A en un dominio continuo y deformable, sujeto a cargas arbitrarias y se establece un balance energético de acuerdo con la ley de conservación de energía (Ec. 2.150), en donde el trabajo hecho por las cargas externas se presenta por W, la energía cinética y potencial del cuerpo como K y E, y finalmente la energía invertida en aumentar el tamaño de la grieta como Γ .

$$\dot{W} = \dot{E} + \dot{K} + \dot{\Gamma}$$

Ec. 2.150

Considerando que en el cuerpo agrietado existirá energía potencial tanto plástica como elástica esta se puede expresar como:

$$E = U^e + U^p$$

Ec. 2.151

Si las cargas no varían en el tiempo y la grieta se propaga lentamente, entonces la energía cinética puede despreciarse. Y dado que todos los cambios respecto al tiempo son causados por variaciones en el área de la grieta la Ec. 2.150 se puede reescribir en términos del cambio de área (Ec. 2.152), que relaciona el decrecimiento de la energía potencial con la energía disipada en deformación plástica y crecimiento de la grieta.

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial A} = \frac{\partial U^p}{\partial A} + \frac{\partial \Gamma}{\partial A}, \quad \Pi = U^e - W$$

Ec. 2.152

En el caso de materiales frágiles ideales la energía plástica es despreciable y el balance energético se puede reescribir como en la Ec. 2.153, de donde la G al derivarse de una función potencial se le denomina fuerza motriz de la grieta y el lado derecho de la Ec. 2.153 representa la resistencia a la propagación de la grieta.

$$G = \frac{\partial W}{\partial A} - \frac{\partial U^e}{\partial A} = \frac{\partial \Gamma}{\partial A} = 2\gamma$$

Ec. 2.153

$\gamma = \text{energía usada para formar una unidad de superficie}$

En general la ecuación anterior establece un criterio de propagación de grieta, el cual se considera inestable cuando la energía del sistema en equilibrio es máxima y estable cuando es mínima. Se asume que la fractura se propagará cuando G sea igual a la energía necesaria para crear una unidad de superficie de fractura, a esta última energía se le conoce como energía crítica de fractura. Es común que este criterio de fractura se exprese en términos del factor de intensidad de esfuerzos (Ec. 2.154) donde el factor de intensidad de esfuerzos crítico K_c está dado por la Ec. 2.155 y es también conocido como tenacidad de fractura y es una propiedad del material del que está hecho el dominio de estudio.

$$K = K_C \quad \text{Ec. 2.154}$$

$$K_C = \sqrt{\frac{ER}{\beta}}, R = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial A^2} \quad \text{Ec. 2.155}$$

$\beta = 1 \rightarrow$ Esfuerzo plano, $\beta = 1 - \nu^2 \rightarrow$ Deformación plana

2.4.5 LA INTEGRAL J

La integral J es una ley de conservación de energía en la forma de una integral de línea independiente de la trayectoria, introducida por Rice. La independencia de trayectoria en esta formulación permite definir una ruta de integración cercana o lejana a la punta de la grieta.

Para la aplicación de la integral J se asume que los dominios son elásticos (lineales o no lineales), homogéneos, presentan pequeñas deformaciones, están en equilibrio estático y tienen una superficie limitante continua.

Retomando la Ec. 2.39, que representa la energía de distorsión de un dominio elástico y donde la integral es independiente de la trayectoria de integración en el dominio elástico deformado. Si se considera que no existen fuerzas de cuerpo las ecuaciones de equilibrio son las dadas en la Ec. 2.29, entonces el vector tracciones estará dado por la Ec. 2.156

$$T_j = \sigma_{ij} n_i, \quad i, j = x, y, z$$

$\sigma_{ij} \rightarrow$ Componentes del tensor de esfuerzos de Cauchy
 $n_i \rightarrow$ Vector normal

Ec. 2.156

Dado que se asumen pequeños desplazamientos, las componentes del tensor de deformación están dadas por la Ec. 2.11. Proponiendo las integrales siguientes:

$$Q_j = \iint_{\Sigma} (U_V n_j - T_k u_{kj}) d\Sigma, \quad j, k = 1, 2, 3$$

$\Sigma \rightarrow$ Superficie frontera

Ec. 2.157

Si se aplica el teorema de divergencia de Gauss se obtiene la Ec. 2.158, cuyo integrando es igual a cero.

$$Q_j = \iiint (U_V \delta_{jl} - \sigma_{lk} u_{kj}) dV, \quad j, k, l = 1, 2, 3$$

$\delta_{jl} \rightarrow$ Delta de Kroenecker

Ec. 2.158

Para el caso particular de 2D la Ec. 2.158 se reescribe como la Ec. 2.159, donde J es igual a cero para cualquier curva cerrada.

$$J = \iint \left(U_V dy - T_k \frac{\partial u_k}{\partial x} \right) dS = 0, \quad k = 1, 2 \quad \text{Ec. 2.159}$$

Ahora si se considera una grieta con superficies planas y paralelas al eje x (Figura 2.28) la integral J (Ec. 2.159) se calcula considerando la ruta Γ_1 en sentido antihorario empezando en un punto arbitrario en la parte inferior de la grieta y terminando en un punto arbitrario en la parte superior de la grieta. Si también se tiene una segunda ruta de integración Γ_2 similar a Γ_1 , pero en sentido horario, entonces se define una región R acotada por la curva cerrada $AB\Gamma_1CD\Gamma_2A$, libre de singularidades y sobre la cual la integral J es igual a cero (Figura 2.28).

En realidad, la integral J sobre la curva antes descrita se puede ver como la suma de cuatro integrales (Ec. 2.160). Si las secciones de curva AB y CD sobre las superficies de la grieta son paralelas al eje X y libres de fricción, entonces las integrales sobre dichas secciones son nulas, de lo cual se puede concluir la Ec. 2.161 que establece la independencia de ruta en la integral J.

$$J_{ABCD\Gamma_2A} = J_{B\Gamma_1C} + J_{CD} + J_{D\Gamma_2A} + J_{AB} = 0 \quad \text{Ec. 2.160}$$

$$J_{B\Gamma_1C} = J_{D\Gamma_2A} \quad \text{Ec. 2.161}$$

De lo anterior y dada la naturaleza del campo de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta, si se define una ruta circular alrededor de la punta de la grieta, cuando el radio de dicha ruta tienda a cero, solo los términos singulares del campo de esfuerzos contribuyen a J.

Finalmente, la integral J se relaciona con la tasa de decaimiento de la energía potencial respecto a la longitud de la grieta, es decir se iguala a la G de la Ec. 2.153. Pudiendo así usar J de forma directa para compararla con la tenacidad de fractura del material del dominio para establecer un criterio de fractura.

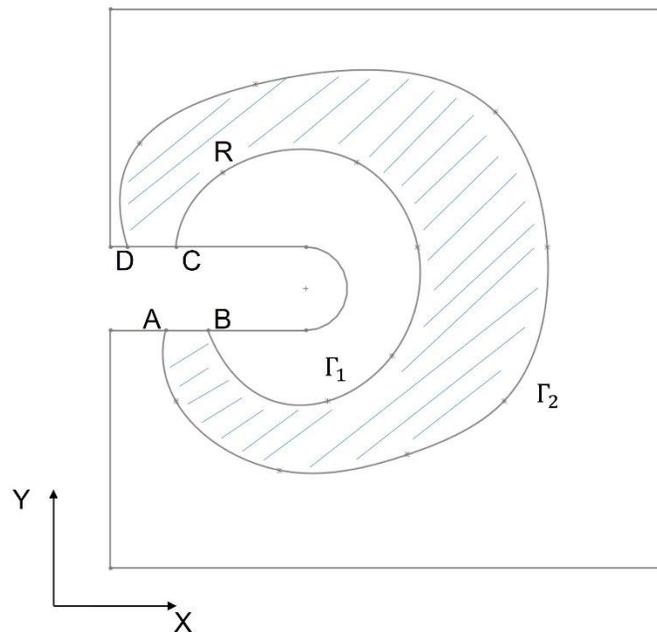


Figura 2.28 Aplicación de la integral J a problemas de fractura

Además de la integral J existen otras dos integrales independientes de la trayectoria, similares a la integral J y conocidas como integral M (Ec. 2.162) e integral L (Ec. 2.163), las cuales también se relacionan con las tasas de liberación de energía respecto a la expansión uniforme o rotación de una grieta respectivamente

$$M = \oint (\omega x_i n_i - T_k u_{i,k} x_i) dS = 0, \quad k = 1, 2 \quad \text{Ec. 2.162}$$

$$L = e_{3ij} \oint (\omega x_i n_i - T_i u_j - T_l u_l x_j) dS = 0, \quad k, j = 1, 2$$

$$e_{3ij} = \begin{cases} -1 & \text{cuando } i = 2 \text{ y } j = 1 \\ 0 & \text{cuando } i = j \\ 1 & \text{cuando } i = 1 \text{ y } j = 2 \end{cases} \quad \text{Ec. 2.163}$$

2.4.6 FRACTURAS MÚLTIPLES

Si en un dominio no se tiene una sola grieta aislada, los campos de esfuerzos y desplazamientos pueden verse fuertemente afectados por las grietas vecinas. La relación entre grietas dependerá de su orientación relativa entre sí, pudiendo magnificar o atenuar el factor de intensidad de esfuerzos en las grietas.

Por ejemplo, para el caso de grietas coplanares (Figura 2.29 Grietas coplanares) mientras menor sea la separación entre ellas, menor es el área por la cual se transmite la fuerza, lo cual deriva en el aumento del factor de intensidad de esfuerzos, el cual está dado por la Ec. 2.164. El efecto resulta tal que las grietas se comportan como si fuesen una sola de mayor longitud.

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[\frac{2W}{\pi a} \tan \left(\frac{\pi a}{2W} \right) \right]^{1/2} \quad \text{Ec. 2.164}$$

Otro caso es el de las grietas paralelas (Figura 1.5) en el cual las grietas tienden a blindarse entre sí, lo cual deriva en una disminución del factor de intensidad de esfuerzos, entre mayor cercanía exista entre las grietas.

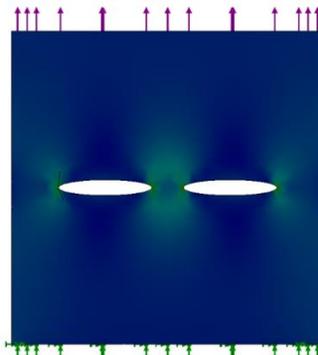


Figura 2.29 Grietas coplanares

Casos más complejos de interacción entre grietas requieren métodos de estudios diferentes. Para dichos modelos se han propuesto principalmente generalizaciones de leyes de conservación y ecuaciones integrales [26] [35].

Si se supone un cuerpo infinito con múltiples grietas fuertemente interactuantes, sometido a esfuerzos uniformes en las direcciones X e Y (Figura 2.30); para verificar que la integral J se mantiene para este problema se introduce un contorno cerrado Γ que rodee todas las grietas en sentido antihorario, además de dicho contorno se introducen contornos cerrados C_n que rodean a cada grieta por separado (Figura 2.30). De acuerdo con las propiedades de la integral J, el valor de esta sobre el contorno Γ , debe ser igual a la sumatoria de integrales sobre los contornos C_n (Ec. 2.165).

$$J_{\Gamma} = \sum_{i=1}^n J_{C_i} \quad \text{Ec. 2.165}$$

Para entender la igualdad entre las dos integrales de la Ec. 2.165, es necesario primero resaltar algunos hechos. Primero, las integrales al lado derecho de 2.165 no son necesariamente iguales a cero debido a la interacción entre grietas.

Otro efecto de la interacción entre grietas es que el factor de intensidad de esfuerzos en las puntas de una misma grieta es diferente en magnitud. Dados los efectos antes mencionados de la interacción entre grietas la pregunta natural resulta ser como es entonces que la integral J para el problema de múltiples grietas es independiente de la trayectoria; es decir, igual a cero.

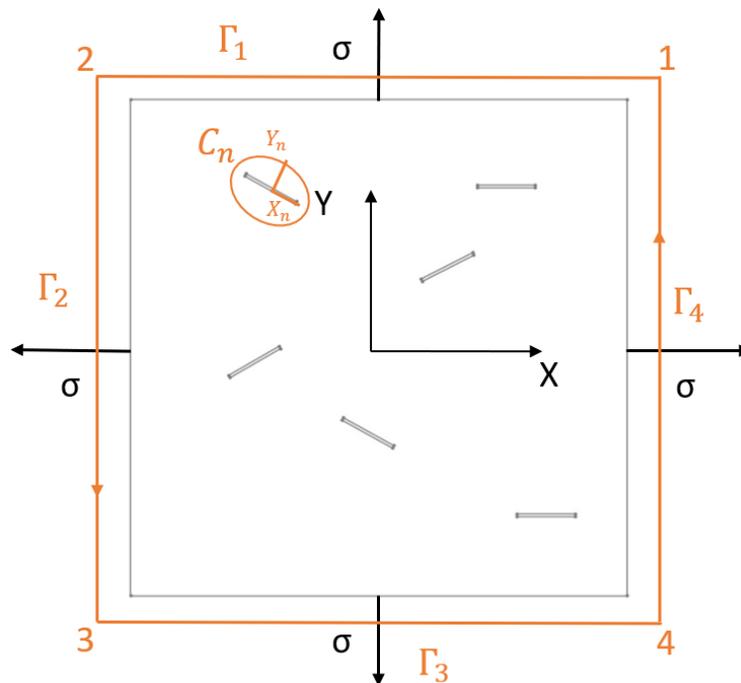


Figura 2.30 Cuerpo plano con múltiples grietas

Para dar respuesta a dicha pregunta es necesario tomar en consideración los campos de esfuerzos y desplazamientos uniformes aplicados al cuerpo agrietado, además de la integral J sobre el

contorno Γ (Ec. 2.166) para la cual $dy=0$ sobre Γ_1, Γ_3 y $dx=0$ sobre Γ_2, Γ_4 , teniendo además normales de signo opuesto entre Γ_1, Γ_3 y Γ_2, Γ_4 .

$$J_{\Gamma} = \int_{\Gamma_1+\Gamma_3} -T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds + \int_{\Gamma_2+\Gamma_4} -T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds + \int_{\Gamma_2+\Gamma_4} U_V dy$$

$$= \sigma \left[\int_1^2 u_i dx - \int_3^4 u_i dx \right] + \sigma \left[\int_1^4 u_i dy - \int_2^3 u_i dy \right] + \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \left[\int_2^3 dy - \int_1^4 dy \right] \quad \text{Ec. 2.166}$$

En la Ec. 2.166 el último término es igual a cero dada la simetría del contorno Γ propuesto, respecto a los otros dos términos puede argumentarse que serán en general diferentes a cero dado que el arreglo de grietas no es simétrico respecto a ninguno de los ejes coordenados. Sin embargo, si se considera que el contorno Γ es suficientemente grande, se puede asumir el comportamiento asintótico de los desplazamientos cuando los segmentos Γ_i se encuentran lejos de la zona daño. Así bajo la consideración de desplazamientos asintóticos los desplazamientos sobre los segmentos Γ_i se asumen constantes, lo cual da como resultado que las primeras dos integrales en la Ec. 2.166 sean iguales a cero, confirmando así que se puede extender el cálculo de la integral J a problemas de fractura múltiple.

2.5 VARIABLE COMPLEJA EN PROBLEMAS DE FRACTURA

En la sección 2.3 se han presentado métodos de solución de problemas de elasticidad plana haciendo uso de funciones de una variable compleja planteando incluso el caso de dominios múltiplemente conexos (sección 2.3.2) lo cual de inmediato se relaciona con la solución de problemas de cuerpos agrietados. Para estos problemas se considerará que las grietas son segmentos de arco dentro del dominio, los cuales son suaves y no se intersecan (Figura 2.31).

2.5.1 FUNCIÓN DE ESFUERZOS COMPLEJA PARA PROBLEMAS DE FRACTURA

Para establecer la función de esfuerzos se supone un dominio múltiplemente conexo cuya frontera externa orientada en sentido antihorario es Γ_0 y con fronteras internas Γ_i correspondientes a las grietas. Se establece además un origen O dentro Γ_0 considerando las direcciones X e Y como se indica en la Figura 2.31.

Si el dominio antes descrito se somete a cargas externas, las condiciones de equilibrio de la Ec. 2.111 deben cumplirse, lo cual implicaría que la suma de las tracciones sobre las superficies de las grietas debe igualarse al total de las cargas externas.

$$\zeta_i(z) = \frac{\sqrt{(z - a_i)/(z - b_i)} + 1}{\sqrt{(z - a_i)/(z - b_i)} - 1}, i = 1, \dots, n \quad \text{Ec. 2.167}$$

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(\kappa + 1)} \sum_{i=1}^n (F_{xn} + iF_{yn}) \log \zeta_i(z) + \varphi^*(z) + const$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa}{2\pi(\kappa + 1)} \sum_{i=1}^n (F_{xn} + iF_{yn}) \log \zeta_i(z) + \psi^*(z) + const \quad \text{Ec. 2.168}$$

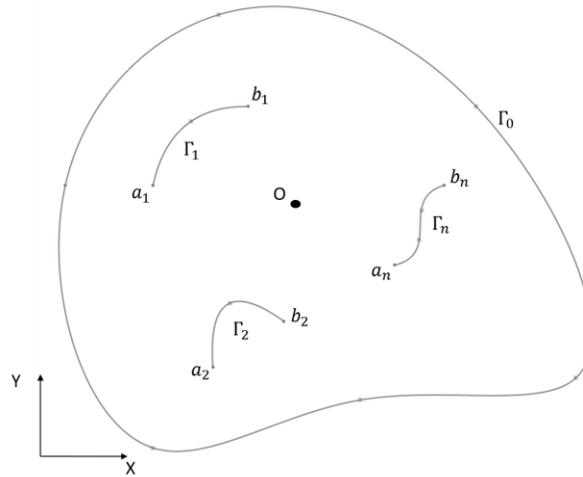


Figura 2.31 Dominio múltiplemente conexo con segmentos de arco internos

Como tal las funciones complejas de esfuerzos (sección 2.3.2) son multivaluadas, para separar las partes multivaluadas de dichas funciones se deberá usar $\log(z-a_i)(z-b_i)$ en lugar del $\log(z-z_i)$ en las Ec. 2.108Ec. 2.109, sin embargo esto introduce singularidades de orden uno en los extremos de las grietas a_i, b_i , para evitar dicho inconveniente se introduce entonces la función de la Ec. 2.167, obteniendo así las funciones de esfuerzo complejas para el problema del cuerpo plano con múltiples grietas (Ec. 2.168).

Los problemas fundamentales para el caso de dominios agrietados se plantean a forma de problemas con valores en la frontera similares a los planteados en las Ec. 2.119Ec. 2.123, estableciendo dos funciones como la de la eEc. 2.118 una recorriendo cada lado de una grieta y considerando las condiciones de equilibrio elástico (Ec. 2.111).

Finalmente, los problemas de valores en la frontera suelen llevarse a una forma de ecuación integral como la Ec. 2.169, para su solución.

$$\frac{1}{\pi i} \int \frac{\varpi(t)}{t - t_0} dt - \frac{1}{2\pi i} \int \varpi(t) d \log \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} - \frac{1}{2\pi i} \int \overline{\varpi(t)} d \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} = f(t_0) + Const_n \quad \text{Ec. 2.169}$$

$\varpi(t) \rightarrow$ función desconocida , $t_0 \in L$

2.6 FUNCIONES DE MÚLTIPLES VARIABLES COMPLEJAS

El estudio de las funciones complejas en dimensiones más allá del plano complejo; a diferencia del trabajo con funciones reales, no es una generalización directa o inmediata del estudio en dimensión uno. Lo anterior implica que cuando se trabaja con funciones de múltiples variables complejas no se puede asumir que todas las propiedades y teoremas desarrollados para el caso uno dimensional se mantienen.

Si bien no todos los resultados obtenidos en \mathbb{C} se mantiene en dimensiones superiores, varios resultados útiles para los fines de aplicación del presente texto si son extensibles a \mathbb{C}^n . Para revisar tanto los resultados que son extensibles como los que no, es necesario aclarar algunos conceptos.

Primero el espacio euclidiano \mathbb{C}^n es un espacio vectorial complejo normado de dimensión n sobre \mathbb{C} , que es localmente homólogo a \mathbb{R}^{2n} . Una función de varias variables complejas se dice holomorfa si cumple con lo establecido en la Definición 2.9, lo cual es equivalente a decir que una función de varias variables complejas es holomorfa siempre que satisfaga la ecuación de Cauchy-Riemann (Ec. 2.170) en U para cada variable z_i .

Al igual que en el caso de una dimensión, el conjunto de funciones holomorfas se denota $\mathcal{O}(U)$.

Definición 2.9 Función holomorfa de varias variables

Una función continua $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ con $U \subset \mathbb{C}^n$, se dice holomorfa en U si f es holomorfa respecto a cada variable z_i de forma independiente

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{Ec. 2.170}$$

Una vez establecido lo anterior, el primer resultado relevante que resulta extensible a dimensiones superiores es la representación integral de Cauchy para discos, la cual surge de una iteración directa de la fórmula integral para 1D, aplicándola una variable a la vez manteniendo fijas el resto de las variables. Por ejemplo, para el caso del bi-disco la fórmula integral resulta como en la Ec. 2.171. De esto se concluye entonces que las funciones holomorfas de varias variables complejas son infinitamente diferenciables, que sus derivadas pueden calcularse derivando el integrando de la Ec. 2.171 y que toda derivada parcial compleja es de nuevo holomorfa, las cuales son también propiedades definidas en la sección 2.3 para las funciones de una sola variable compleja.

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \frac{f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} \quad \text{Ec. 2.171}$$

De igual forma es posible hacer la expansión en serie de Taylor de las funciones holomorfas de múltiples variables complejas (Ec. 2.172).

$$f(z) = \sum_{v_1, v_2=0}^{\infty} \frac{D^{(v_1, v_2)} f(a)}{v_1! v_2!} (z_1 - a_1)^{v_1} (z_2 - a_2)^{v_2} \quad \text{Ec. 2.172}$$

El principio del módulo máximo, así como el teorema de la función implícita, el de la función inversa, el de identidad y el teorema de Montel también se extienden. Para entrar ahora en los resultados en \mathbb{C}^n ($n > 2$) que difieren respecto a los obtenidos en \mathbb{C} es necesario el entendimiento del “fenómeno de Hartogs” el cual revela las diferencias entre el análisis complejo uno-dimensional y el análisis complejo multidimensional y fue descubierto por F.Hartogs en 1906, dando pie a la teoría moderna del análisis complejo mutlidimensional.

Antes de hablar sobre el teorema de extensión, es necesaria una breve reflexión acerca de los ceros de una función holomorfa de varias variables complejas. En funciones de una variable los ceros de las funciones holomorfas están aislados, es decir la función es cero solo en un punto z específico y en una vecindad cercana a dicho punto el valor de la función difiere de cero, sin embargo para el caos de múltiples variables esto deja de ser cierto, el concepto de cero aislado deja de existir, esto se debe a que el conjunto de ceros $Z(f)$ de las funciones holomorfas de n varias variables complejas tiene dimensión compleja $n-1$, es decir el conjunto de ceros es una variedad compleja de dimensión $n-1$.

2.6.1 EL TEOREMA DE EXTESIÓN DE HARTOGS

El Teorema 2.14 es el teorema de extensión de Hartogs, el cual establece que toda función holomorfa tiene continuación analítica al polidisco, que es estrictamente un dominio más grande que el dominio en el que originalmente fue definida la función holomorfa.

Teorema 2.14 Teorema de extensión de Hartogs

Sea D un dominio acotado en \mathbb{C}^n con frontera conexa ∂D . Si $n \geq 2$, entonces toda función f que es holomorfa en una vecindad conexa de ∂D tiene extensión holomorfa a D

De este teorema se puede mostrar que, para dimensiones complejas superiores a uno, existen dominios tales que toda función holomorfa definida en ellos se puede extender analíticamente a dominios más grandes. Sin embargo, no en todos los dominios es posible obtener una extensión analítica de todas las funciones holomorfas definidas en él, a estos dominios se les conoce como dominios de holomorfa.

Resalta el hecho de que en el caso uno dimensional todos los dominios son dominios de holomorfa, lo cual lleva a la conclusión de que todos los dominios convexos son dominios de holomorfa.

2.6.2 PSEUDOCONVEXIDAD

Los descubrimientos de Hartogs sobre conjuntos abiertos que no son dominios de holomorfa, dio pie a la necesidad de caracterizar a los dominios de holomorfa para poder identificarlos. Por

ejemplo, los dominios de holomorfa²² se pueden identificar por una característica geométrica denominada convexidad logarítmica.

La relación de los dominios de holomorfa respecto a la convexidad se mantiene en situaciones más generales. Esta relación fue estudiada por E.E. Levi quien investigó las propiedades de los dominios de holomorfa con frontera 2-diferenciable descubriendo una condición simple y necesaria para que un dominio se considere dominio de holomorfa (Definición 2.10), condición que guarda similitud a la caracterización real de dominios convexos. A esta condición se le conoce como condición de Levi y la propiedad es llamada pseudoconvexidad de Levi (Teorema 2.15).

Definición 2.10 Dominio Levi pseudoconvexo

Un dominio $D \in \mathbb{C}^n$ se dice pseudoconvexo si todos los puntos de su frontera ∂D son Levi pseudoconvexos. Donde todo dominio de holomorfa es Levi pseudoconvexo

La pseudoconvexidad es una propiedad local de la frontera que caracteriza a los dominios de holomorfa. En general se puede decir que la pseudoconvexidad es un análogo complejo de la convexidad euclidiana, es decir es la imagen biholomorfa de la convexidad

Teorema 2.15 Pseudoconvexidad de Levi

Sea r una función de definición de un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$. Un punto p en la frontera ∂D se dice Levi pseudoconvexo si

$$L_p(r; t) = \sum_{j,k}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p) t_j \bar{t}_k \geq 0$$

Donde: $L_p(r; t)$ es el Hessiano complejo de r

t es un vector $(n - 1)$ que representa el espacio complejo tangente a ∂D en p

Para todo $t \in \mathbb{C}^n$ que satisfice:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j}(p) t_j = 0$$

Se dice que p es estrictamente pseudoconvexo, de lo contrario se dice debilmente pseudoconvexo.

2.6.3 SINGULARIDADES

Respecto a las singularidades de las funciones holomorfas de varias variables complejas, resalta el hecho de que las singularidades aisladas; las cuales son de gran relevancia en el estudio de funciones de una sola variable compleja (sección 2.2.5), desaparecen por completo cuando se trabaja en dimensiones $n > 2$, ya que como consecuencia del teorema de extensión de Hartogs (Teorema 2.14) todas las singularidades de una función holomorfa de varias variables complejas resultan ser removibles (Definición 2.11). Así entonces respecto a las singularidades de funciones complejas en dimensiones superiores, se pueden distinguir singularidades no aisladas que exhiben un comportamiento análogo a lo que sucede con funciones de una sola variable (Teorema 2.16 y 2.17).

²² Dentro de la clase de dominios completos de Reinhardt

Definición 2.11 Singularidad removible

Cuando una singularidad z_0 de una función $f(z)$ puede quitarse al redefinir $f(z)$ en z_0 se dice que $f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0

Teorema 2.16 Singularidades analíticas removibles

Sea $D \in \mathbb{C}^n$ y $E \subseteq D$ donde todo punto p de E tiene una vecindad abierta U_p tal que $E \cap U_p$ es el conjunto de ceros de una función no trivial de $\sigma(U_p)$. Si f en $\sigma(D \setminus E)$ es una función acotada, entonces f se extiende holomorficamente sobre E .

El Teorema 2.16 tiene como consecuencia que si $E \neq D$ es el conjunto de ceros de una función holomorfa entonces $D \setminus E$ es conexo. Mientras que el Teorema 2.17 establece que toda singularidad analítica de hasta dimensión $n-2$ es removible.

Teorema 2.17 Singularidades analíticas removibles

Sea $D \in \mathbb{C}^n$ y E un subconjunto analítico de D con dimensión máxima $n - 2$. Entonces toda f en $\sigma(D \setminus E)$ se extiende holomorficamente a D

2.6.4 REPRESENTACIONES INTEGRALES

Al igual que en la teoría de una variable compleja, al representación integral de Cauchy juega un papel fundamental para el desarrollo y obtención de importantes resultados como la teoría de series infinitas y residuos (sección 2.2.4 y 2.2.5) las representaciones integrales son también relevantes en la teoría de funciones de varias variables complejas ya que proveen un camino para la obtención de resultados globales sobre dominios pseudoconvexos.

2.6.4.1 FÓRMULA DE MARTINELLI-BOCHNER

La fórmula de Martinelli-Bochner, es una generalización del teorema integral de Cauchy (Teorema 2.7) para dimensiones superiores, la cual realiza el mismo trabajo que la integral de Cauchy en \mathbb{C} . Aunque con la diferencia de que la fórmula de Martinelli-Bochner deja de ser holomorfa en z , a pesar de ser armónica.

Sin embargo, la naturaleza holomorfa de la representación integral resulta crítica solo para las integrales de frontera y si se trabaja sobre dominios de holomorfa existirán funciones holomorfas sobre dichos dominios con singularidades en cualquier punto sobre la frontera del dominio la complicación de la no holomorfa de la fórmula de Martinelli-Bochner desaparece [38]. En el Teorema 2.18 se presenta la fórmula de Martinelli-Bochner para funciones de varias variables complejas.

Teorema 2.18 Fórmula de Martinelli-Bochner

Sea $D \in \mathbb{C}^n$ con frontera C^1 y f una función continua en \bar{D} tal que $\bar{\partial}f$ es también continua en \bar{D} . Entonces:

$$f = v_{\partial D}f - v_D\bar{\partial}f \text{ en } D$$

Donde:

$$v_{\partial D}f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \wedge \frac{\omega'_\zeta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}}$$

$$v_Df(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge \frac{\omega'_\zeta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}}$$

$$\omega(\zeta) = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$$

$$\omega'(\zeta) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \zeta_j d\zeta_1 \wedge \dots \wedge \hat{j} \wedge \dots \wedge d\zeta_n$$

2.6.4.2 FÓRMULA DE LERAY

Como se mencionó ya la fórmula de Martinelli-Bochner no depende holomórficamente de z , sin embargo, si en la fórmula se sustituye el término $|\zeta - z|^{2n}$ por un mapeo de Leray $\omega(z, \zeta)$ (Definición 2.12) se obtiene una generalización de la fórmula de Martinelli-Bochner conocida como la fórmula de Leray (Teorema 2.19) la cual constituye un elemento fundamental para la solución de las ecuaciones de Cauchy-Riemann no homogéneas. Además, para dominios estrictamente pseudoconvexos el mapeo de Leray puede escogerse de forma tal que sea holomorfo en z [39].

Teorema 2.19 Fórmula de Leray

Sea $D \in \mathbb{C}^n$ acotado con frontera C^1 a trozos y $\omega(z, \zeta)$ un mapeo de Leray para D Entonces para toda función continua f en \bar{D} se tiene:

$$f = L_{\partial D}^\omega f - R_{\partial D}^\omega \bar{\partial}f - v_D \bar{\partial}f \text{ en } D$$

Donde:

$$L_{\partial D}^\omega f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \frac{\omega'_\zeta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{\langle \bar{\zeta} - z, \omega(z, \zeta) \rangle^n}$$

$$R_{\partial D}^\omega f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \wedge \omega'_{\zeta, \lambda}(\eta^\omega(z, \zeta, \lambda)) \wedge \omega(\zeta) , \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\eta^\omega(z, \zeta, \lambda) = (1 - \lambda) \frac{\omega(z, \zeta)}{\langle \omega(z, \zeta), \zeta - z \rangle} + \lambda \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\langle \bar{\zeta} - \bar{z}, \zeta - z \rangle}$$

Definición 2.12 Mapeo de Leray

Siendo $D \in \mathbb{C}^n$ acotado. Una función C^1 n -valuada $\omega(z, \zeta) = (\omega_1(z, \zeta), \dots, \omega_n(z, \zeta))$ definida para un ζ en una vecindad de ∂D se denomina mapeo de Leray para D si:

$$\langle \omega(z, \zeta), \zeta - z \rangle \neq 0, \forall (z, \zeta) \in D \times \partial D$$

2.6.5 SERIES INFINITAS

En teoría de una variable compleja las series convergen dentro de un dominio determinado con un radio definido (disco)(sección 2.2.4) y fuera de este divergen, esta situación cambia al trabajar en dimensiones superiores, ya que por ejemplo en una serie con dos variables, el dominio de convergencia puede tener una infinidad de formas y no será necesariamente convexo.

Otro punto relevante al hablar de series de funciones de múltiples variables es el hecho de que el valor de la serie depende en general del orden de la sumatoria y no existe un ordenamiento canónico para realizar dichas sumatorias. Por la anterior es conveniente fijar la atención en funciones absolutamente convergentes, ya que sus términos pueden ser reordenados arbitrariamente sin cambiar el valor de la sumatoria.

2.6.5.1 DOMINIOS DE CONVERGENCIA

El dominio de convergencia de una serie de una función compleja de varias variables es el conjunto de puntos para el cual la serie converge absolutamente. Dado que los dominios de convergencia para series de funciones de varias variables complejas se definen considerando convergencia absoluta, todo dominio de convergencia será multicircular, así entonces, todo dominio de convergencia es la unión de polidiscos centrados en el origen.

En otros términos, todo dominio de convergencia de una serie de varias variables es un dominio de Reinhardt lo cual implica que serán logarítmicamente convexos (o Levi pseudoconvexos). De esto se puede establecer entonces el Teorema 2.20.

Teorema 2.20 Dominios de convergencia

Un dominio completo de Reinhardt en \mathbb{C}^n es el dominio de convergencia de alguna serie sii el dominio es logarítmicamente convexo

Entonces los dominios de convergencia son además dominios de holomorfía y la función holomorfa soportada por el dominio que no puede ser extendida fuera de este es la que puede ser representada por la serie que converge dentro de dicho dominio, donde la serie tendrá la forma de la Ec. 2.173.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{\beta(j)}}{N_{\beta(j)}(D_j)} \quad \text{Ec. 2.173}$$

Lo planteado en la Ec. 2.173 corresponde a una serie de Maclaurin, para el caso de una serie de Laurent (Ec. 2.174) para una función de dos variables (por ejemplo) los coeficientes de estas serán todos funciones holomorfas en el disco unitario (Ec. 2.175), teniendo en cuenta que si $k < 0$ la serie se reduce a una serie de Maclaurin para todo valor de w en el disco unitario. Siendo esto último otra consecuencia del teorema de extensión de Hartogs (Teorema 2.14) [40].

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_k(w) z^k \quad \text{Ec. 2.174}$$

$$c_k(w) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w, z)}{z^{k+1}} dz \quad \text{Ec. 2.175}$$

2.6.6 RESIDUOS

El cálculo de residuos para funciones de varias variables complejas resulta de mayor complejidad que su análogo en una dimensión, dado que al trabajar con variedades complejas multidimensionales (dominios de holomorfía en \mathbb{C}^n) se presentan ciertas dificultades operativas que requieren el uso de herramientas matemáticas diferentes a las usadas en una dimensión.

Uno de los principales problemas en la teoría de residuos multidimensional es el estudio y cálculo de las integrales de formas diferenciales cerradas en variedades complejas analíticas que tienen singularidades en subconjuntos analíticos de dicha variedad. Un ejemplo de lo anterior es la integración de funciones de n variables complejas sobre superficies cerradas n dimensionales, en donde la integral de la función de n variables puede tratarse como la integral de una n -forma holomorfa cerrada. Para el trabajo con formas cerradas en lugar de funciones las fórmulas integrales antes presentadas (Teorema 2.18 Teorema 2.19) se modifican dando origen a las fórmulas de Martinelli-Bochner-Koppelman y Leray-Koppelman.

El uso de la fórmula de Stokes y el teorema integral de Cauchy permiten reemplazar la integral de una forma cerrada sobre un ciclo por la integral de una forma más simple cohomóloga a la original sobre un ciclo más simple homólogo al ciclo original. Así si se tiene una forma cerrada ω de grado q en una variedad X con un conjunto de singularidades T y base de homología $\{\gamma_j\}$ de la variedad $X \setminus T$, entonces para todo ciclo γ en la variedad $X \setminus T$ se mantiene la Ec. 2.176, donde los k_j son coeficientes de expansión del ciclo γ sobre la base homología.

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_j k_j \int_{\gamma_j} \omega \quad \text{Ec. 2.176}$$

Así el problema de calcular integrales de una forma cerrada sobre ciclo se reduce al estudio de los grupos de homología del complemento $X \setminus T$ del conjunto de singularidades T , así como el cálculo de las integrales de la forma cerrada sobre los ciclos base y la determinación de los coeficientes de expansión del ciclo de integración sobre la base de homología.

Entonces para el cálculo de las integrales antes planteadas es necesario el uso de herramientas de la topología algebraica, especialmente para el caso de estudio aquí planteado el cual es multidimensional y trae consigo dificultades topológicas importantes. La solución de estos problemas se puede facilitar haciendo uso de los teoremas de dualidad de Alexander-Pontryagin o la dualidad de De Rham [41].

2.6.6.1 TEORÍA DE RESIDUOS DE LERAY

Existen dos teoremas de Leray respecto a residuos, uno para el caso de un polo simple (Teorema 2.21) y otro para el caso de polos múltiples (Teorema 2.23). Los teoremas de residuos de Leray permiten reducir integrales de la forma de la Ec. 2.176 a integrales de dimensión inferior de una forma residuo sobre un ciclo sobre una subvariedad singular.

En la teoría de residuos de Leray los conceptos importantes a establecer son el de cofrontera de Leray, formas residuo y clases residuo, que generalizan el concepto del residuo de una función holomorfa de una sola variable compleja. Primero entonces, se plantean estos conceptos, para llegar a los teoremas de residuos.

Suponga una variedad analítica compleja X de dimensión compleja n y S como una subvariedad analítica compleja de dimensión $n-1$. Una ecuación local para S con gradiente no cero en una vecindad de uno de sus puntos y de la forma $s_y(x) = 0$, y una ecuación global de la forma $s(x) = 0$. Finalmente, cuando se use el subíndice y se entenderá que la forma diferencial solo está definida en una vecindad del punto y .

Entonces, si φ es una forma regular cerrada en $X \setminus S$ con un polo de orden uno sobre S y $s_y\varphi$ es la restricción de una forma ω_y que es regular en una vecindad de y . Existen entonces formas regulares ψ_y y θ_y cerca de y , tal que la Ec. 2.177 se cumple [42].

$$\varphi = \frac{ds_y}{s_y} \wedge \psi_y + \theta_y \quad \text{Ec. 2.177}$$

De la ecuación anterior a $\psi_y|_S$ es una forma cerrada que solo depende de φ y se denota como en la Ec. 2.178. Esta última forma se denomina forma residuo y resulta holomorfa siempre que φ sea meromorfa [41].

$$res[\varphi] = \frac{s_y\varphi}{ds_y}|_S \quad \text{Ec. 2.178}$$

La clase de cohomología de $res[\varphi]$ en S solo dependerá de clase de cohomología de φ en $X \setminus S$ y es llamada clase residuo de φ y se denotará como $Res[\varphi]$ (Teorema 2.22) [42]. Así entonces se han presentado los conceptos de formas y clases residuo, para el concepto de cofrontera establezca que la subvariedad compleja S tiene codimensión 2, de forma tal que es posible construir una vecindad V con frontera suave ∂V , de tal forma que V es un haz trivial con base S y fibras homeomórficas al disco unitario, mientras que ∂V es un haz con base S y fibras V_a homeomórficas al círculo.

$$\rightarrow H_{p+2}(X) \xrightarrow{\bar{\omega}} H_p(S) \xrightarrow{\delta} H_{p+1}(X \setminus S) \xrightarrow{i} H_{p+1}(X) \rightarrow \dots \quad \text{Ec. 2.179}$$

Si σ es un elemento de una cadena S de dimensión p que puede ser un poliedro orientado embebido en S entonces, el conjunto $\mu^{-1}(\sigma)$ ²³ resulta homeomórfico al producto de las fibras V_a y el poliedro

²³ μ define un mapeo del complemento de V a S

σ . Pudiendo entonces definirse una secuencia exacta como la de la Ec. 2.179, que es llamada la secuencia de homología exacta de Leray y donde el homomorfismo δ es llamado la cofrontera de Leray.

Teorema 2.21 Teorema del residuo de Leray para polos simples

Si γ es un ciclo en S (con soporte compacto) y φ es una forma diferencial cerrada en $X \setminus S$ con un polo de orden uno sobre S , se tiene la fórmula de residuo:

$$\int_{\delta\gamma} \varphi = 2\pi i \int_{\gamma} \text{res}[\varphi]$$

Donde:

$\text{res}[\varphi]$ es la forma residuo de φ

$\delta\gamma$ es un ciclo cofrontera de Leray

Si para un ciclo $\gamma \in Z_{p+1}(X \setminus S)$ se cumple que $\{\gamma\} = \delta h \in \delta H_p(S)$, entonces dicho ciclo se denomina ciclo cofrontera. Así entonces se puede llegar a la expresión de los Teorema 2.21 Teorema 2.23 que son la generalización de la teoría de residuos para funciones de varias variables complejas.

Teorema 2.22 Existencia de la clase residuo

Toda forma cerrada regular φ en $X \setminus S$ es cohomologa en $X \setminus S$ a una forma $\tilde{\varphi}$ que tiene un polo simple en S

Teorema 2.23 Teorema del residuo de Leray para polos múltiples

Si γ es un ciclo en S (con soporte compacto) y φ es una forma diferencial cerrada en $X \setminus S$, se tiene la fórmula de residuo:

$$\int_{\delta\gamma} \varphi = 2\pi i \int_{\gamma} \text{Res}[\varphi]$$

Donde:

$\text{Res}[\varphi]$ es la clase residuo de φ

3 DESARROLLO TEÓRICO

En páginas anteriores ya se ha planteado el uso de funciones de una variable compleja para el estudio de problemas de elasticidad (sección 2.3), además de métodos de estudio de problemas de fractura múltiple con arreglos no simétricos de grietas (sección 2.4.6) que en conjunto con la aplicación de funciones de una variable compleja para la solución de problemas de fractura (sección 2.5) permiten tener no sólo una idea, sino una estrategia de estudio de problemas de fractura múltiple haciendo uso de funciones de una sola variable compleja.

Sin embargo, dichos métodos se limitan al estudio de problemas planos denotando así la necesidad de una herramienta operativa similar, que permita trabajar sobre problemas tres dimensionales.

Del estudio de la teoría de secciones anteriores, resulta claro que el punto de partida para el desarrollo de una herramienta operativa para el análisis de problemas de fractura tres dimensionales debe ser una función que permita hacer una descripción del comportamiento de los campos de esfuerzo, deformación y desplazamiento sobre el cuerpo de estudio. Un ejemplo de las funciones que permiten hacer la descripción de los campos de interés sobre un cuerpo y dan solución a los problemas fundamentales de la elasticidad son las denominadas funciones de esfuerzos (secciones 2.1.8 y 2.3.1).

Para los problemas de elasticidad, además de las funciones de esfuerzos, otra herramienta de solución común son los potenciales vectoriales de deformación, a continuación, se plantea el desarrollo de un potencial vectorial usando variables complejas, para la solución de problemas elásticos (Figura 3.1). Cabe mencionar que se propone el uso de una solución desde la perspectiva de los desplazamientos, dado que esta debería facilitar el manejo de condiciones de frontera mixtas, así como reducir la complejidad de los cálculos al evitar algún proceso de integración.

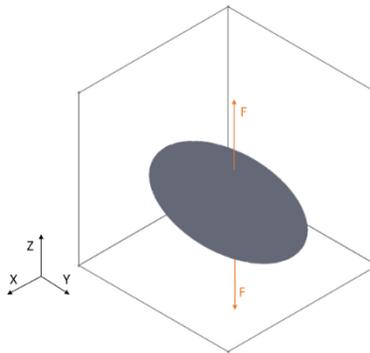


Figura 3.1 Sólido tres dimensional sometido a cargas externas

3.1 POTENCIAL DE DESPLAZAMIENTOS MULTICOMPLEJO PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDAD EN \mathbb{R}^3

En la sección 2.1 se presentaron los conceptos fundamentales de la teoría de la elasticidad, tales como desplazamientos, deformaciones y esfuerzos, además de las relaciones constitutivas y las ecuaciones de compatibilidad. Más aún se presenta un método de solución clásico para problemas planos basado en una función potencial de esfuerzos (sección 2.1.8), el cual se puede generalizar a problemas tres dimensionales, sin embargo, la formulación desde un potencial de esfuerzos implica un paso necesario de integración para poder conocer los desplazamientos del cuerpo bajo análisis.

El proceso de integración para conocer los desplazamientos a partir de las deformaciones puede resultar operativamente complicado ya sea simbólica o numéricamente, resultando lo anterior en un tiempo prolongado de solución, por tal motivo en la presente sección se ha optado por el desarrollo de un potencial formulado desde desplazamientos para el cual el paso de integración se convierte en uno de derivación de los desplazamientos para la obtención de las deformaciones.

En lo que respecta a la solución de problemas de elasticidad desde los desplazamientos existen diversos métodos bien documentados como los presentados en [43], en el cual las ecuaciones de equilibrio se presentan en términos de los desplazamientos (ecuaciones de Navier) y para las cuales se propone una solución en forma de combinación lineal de cuatro funciones armónicas. Por otro lado, en [44] y [45] se presentan las formulaciones clásicas de potenciales de desplazamiento, como la representación de Helmholtz-Lamé en la cual se construyen las soluciones con la primera derivada de dos potenciales, uno escalar y otro vectorial; idea que también retoma la representación de Papkovitch-Neuber, o la representación de Galerkin en la cual los desplazamientos son representados en términos de la segunda derivada de un solo vector.

Es relevante mencionar que también existen otros potenciales para problemas específicamente axisimétricos como el potencial de Love, el cual se deriva de la representación de Galerkin o el potencial de Boussinesq que resulta ser un caso particular de la solución de Papkovitch-Neuber.

Ya sea que se parta desde los esfuerzos o desplazamientos para la solución de problemas elásticos en ausencia de fuerzas de cuerpo; cómo se puede apreciar en el desarrollo de la sección 2.1.8, el problema a resolver resulta ser el de la ecuación biarmónica.

La solución de problemas elípticos como el de la ecuación biarmónica está bien documentada en [46], [47], [48] y [49], dentro de las diversas formas de solución planteadas para este tipo de problemas, destaca el uso de series de Fourier, el método de separación de variables y los potenciales vectoriales.

Así pues, para poder solucionar problemas de elasticidad tres dimensionales sin fuerzas de cuerpo, se debe construir una función tal que se satisfaga la ecuación biarmónica (Ec. 3.1), en la literatura se encuentran diversas propuestas de solución a este problema como en [50] y [51] donde se presenta el desarrollo de una función biarmónica de esfuerzo haciendo uso de varias variables complejas para la solución de problemas elásticos, destacando la dificultad de las integrales planteadas para obtener las funciones de desplazamiento, por otra parte en [52] se plantea la solución de problemas elásticos tres dimensionales usando funciones de una sola variable compleja,

basado en el modelo de solución de la ecuación de Laplace planteado en [47] el cual incluye también un paso de integración paramétrica. También son de destacar los métodos presentados en [53] basados en ecuaciones integrales del tipo de Fredholm, [54] donde se desarrolla una solución general al problema biarmónico partiendo del método de separación de variables, [55] donde se plantea un método de solución numérico de frontera basado en las denominadas funciones fundamentales, [56] en el cual se presenta el método de descomposición y [57] en donde haciendo uso del álgebra real de cuaterniones se extienden las fórmulas de Muskhelishvili para el caso tres dimensional. Es de destacar también la forma de representación de funciones biarmónicas para dominios tres dimensionales múltiplemente conexos presentada en [58]

Como se muestra en la sección 2.3 la formulación clásica de variable compleja para problemas de elasticidad; además de ser dos dimensional, se basa en una función de esfuerzos lo cual como ya se ha mencionado conlleva un proceso de integración el cual cuando se escala a un problema tres dimensional puede resultar complicado (ver [52]), un enfoque alternativo para la solución de problemas de elasticidad plana partiendo de la solución de las ecuaciones de Navier se plantea en [59] evitando así el proceso de integración del método clásico. Siguiendo las ideas presentadas en la literatura de referencia se plantea a continuación el desarrollo de un potencial vectorial de Galerkin con variables complejas a fin de dar solución a la ecuación biarmónica (Ec. 3.31) y aplicarlo a problemas elásticos.

$$\nabla^4 P = \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 P}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 P}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 P}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 P}{\partial z^2 \partial x^2} = 0 \quad \text{Ec. 3.1}$$

La solución a la ecuación biarmónica puede plantearse en términos de un potencial vectorial P (Ec. 3.2) el cual se puede relacionar con un vector de desplazamiento u (Ec. 3.3) en la forma que se describe a continuación.

$$P = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k} \quad \text{Ec. 3.2}$$

$$u = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \quad \text{Ec. 3.3}$$

Si se aplica el teorema de descomposición de Helmholtz al vector de desplazamiento u , este puede escribirse en términos de una componente solenoidal y otra irrotacional, las cuales a su vez podemos expresar en términos de un potencial vectorial (T) y un potencial escalar (Y) respectivamente (Ec. 3.4).

$$u = u_s + u_i = \nabla \times aT + \nabla Y$$

Donde:

$$a = \text{constante} \quad \text{Ec. 3.4}$$

$$\nabla \cdot T = 0$$

$$\nabla^2 Y = 0$$

Si se considera que el potencial escalar Y es solución de la biarmónica y el potencial vectorial T es de nuevo solenoidal, es posible representar este último en términos de otro potencial vectorial; el cual por conveniencia de notación denominaremos P . Así tras una breve manipulación la Ec. 3.4 se reescribe como.

$$u = a\nabla^2 P - a\nabla(\nabla \cdot P) + \nabla Y$$

Donde:

$a = \text{constante}$

$T = -\nabla \times P$

Ec. 3.5

Finalmente, si se asume que la divergencia del potencial P es igual al potencial escalar Y (lo cual se puede hacer sin pérdida de generalidad), la Ec. 3.5 se reduce a:

$$u = a\nabla^2 P + (1 - a)\nabla(\nabla \cdot P)$$

Ec. 3.6

La Ec. 3.6 es análoga a la forma elegida por Galerkin para representar el vector de desplazamiento para el caso de problemas de elasticidad tres dimensionales (Ec. 3.7). Para mostrar que estos vectores dan solución al problema de elasticidad, se toman las ecuaciones de equilibrio (Ec. 2.29) y se sustituyen en ellas las relaciones de esfuerzo deformación (Ec. 2.22 y Ec. 2.29) obteniendo así las ecuaciones equilibrio en términos de los desplazamientos²⁴ (Ec. 3.8).

$$2\mu u = c\nabla^2 P - \nabla(\nabla \cdot P)$$

Ec. 3.7

$$(1 - 2\nu)\nabla^2 u + \nabla(\nabla \cdot u) = 0$$

Ec. 3.8

Sustituyendo la Ec. 3.7 en la Ec. 3.8, se obtiene la Ec. 3.9 la cual demuestra que el potencial P es biarmónico, y en consecuencia sus tres componentes también lo deben ser.

$$\nabla^4 P = 0$$

Ec. 3.9

El desarrollo anterior muestra que si se puede encontrar un potencial vectorial cuyas componentes sean biarmónicas es posible utilizar este para definir el vector de desplazamientos y con base en este último calcular las componentes de esfuerzo y deformación. Cabe resaltar que al definir de forma explícita las componentes de desplazamiento, para el cálculo de las componentes de esfuerzo y deformación solo será necesario el uso de las relaciones de desplazamiento-deformación y de esfuerzo-deformación.

$$P(x, y, z) = \sum_{k=1}^m f(a_k x + b_k y + c_k z)$$

Ec. 3.10

Por lo anterior el objetivo ahora es definir un vector P que sea función de varias variables complejas y cuyos componentes sean todas biarmónicas. Definir un vector P que cumpla estas características puede resultar natural si se considera que este debe ser una solución de la ecuación biarmónica y esta al ser una ecuación elíptica tiene de forma natural soluciones complejas, haciendo uso del método generalizado de separación de variables es posible proponer una solución a la ecuación biarmónica de la forma presentada en Ec. 3.10 [60].

²⁴ También conocidas como ecuaciones de Navier

$$P(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad \text{Ec. 3.11}$$

Para definir la P buscada, se propone una solución a la Ec. 3.1 de la forma mostrada en la Ec. 3.11, al sustituir la solución propuesta en la ecuación biarmónica y dividiendo entre P(x,y,z), se obtiene:

$$\frac{X^{iv}(x)}{X} + \frac{Y^{iv}(y)}{Y} + \frac{Z^{iv}(z)}{Z} + 2\frac{X''(x)Y''(y)}{X Y} + 2\frac{Y''(y)Z''(z)}{Y Z} + 2\frac{Z''(z)X''(x)}{Z X} = 0 \quad \text{Ec. 3.12}$$

Ahora sí:

$$\frac{X''(x)}{X} = a^2, \frac{Y''(y)}{Y} = b^2, \frac{Z''(z)}{Z} = c^2 \quad \text{Ec. 3.13}$$

Ec. 3.12 se reescribe como:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 0 \quad \text{Ec. 3.14}$$

La anterior sería la ecuación característica de la biarmónica, para la cual podemos encontrar tres relaciones de la forma:

$$\begin{aligned} a_1 &= \pm i(b_1^2 + c_1^2) \\ b_2 &= \pm i(a_2^2 + c_2^2) \\ c_3 &= \pm i(a_3^2 + b_3^2) \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.15}$$

Si buscamos una correspondencia uno a uno entre las partes real e imaginaria se requerirá, por ejemplo:

$$a_1 = 1, b_1^2 + c_1^2 = 1 \quad \text{Ec. 3.16}$$

Para cumplir con dicha relación será necesario usar coeficientes paramétricos, donde la elección más simple sería:

$$b_1^2 = \cos^2 t, c_1^2 = \sin^2 t \quad \text{Ec. 3.17}$$

Así entonces se tienen tres argumentos complejos diferentes (Ec. 3.18) en donde $(a_i, b_i$ y c_i están dadas en términos de funciones paramétricas), en función de los cuales se pueden establecer funciones biarmónicas, cuya combinación lineal sea la solución que se busca para el problema tres dimensional.

$$\begin{aligned}
z_1 &= x + i(b_1y + c_1z) \\
z_2 &= y + i(a_2x + c_2z) \\
z_3 &= z + i(a_3x + b_3y)
\end{aligned}
\tag{Ec. 3.18}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_2 = b_3 = \sin t \\
b_1 &= c_2 = a_3 = \cos t
\end{aligned}$$

Ahora bien, las biarmónicas en función de los argumentos complejos se pueden construir de la misma forma que en la Ec. 2.96, dado que los argumentos complejos de Ec. 3.18 solo barren un plano, así entonces se proponen las funciones siguientes:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{2} \{ \bar{z}_1 \varphi_1(z_1) + z_1 \overline{\varphi_1(z_1)} + \chi_1(z_1) + \overline{\chi_1(z_1)} \} \\
P_2 &= \frac{1}{2} \{ \bar{z}_2 \varphi_2(z_2) + z_2 \overline{\varphi_2(z_2)} + \chi_2(z_2) + \overline{\chi_2(z_2)} \} \\
P_3 &= \frac{1}{2} \{ \bar{z}_3 \varphi_3(z_3) + z_3 \overline{\varphi_3(z_3)} + \chi_3(z_3) + \overline{\chi_3(z_3)} \}
\end{aligned}
\tag{Ec. 3.19}$$

Las tres funciones de Ec. 3.19 son biarmónicas; siempre que las funciones φ_i, χ_i sean holomorfas en el dominio de solución, y serán las componentes de la solución P (Ec. 3.20). La función P planteada es entonces solución de la ecuación biarmónica tres dimensional y, en consecuencia, puede ser utilizada como el potencial de deformación del cual se deriven los desplazamientos haciendo uso de la forma de Galerkin (Ec. 3.7).

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \tag{Ec. 3.20}$$

Para asegurar que la función P puede ser utilizada como el potencial de deformación resulta necesario demostrar que las ecuaciones de equilibrio para desplazamientos (Ec. 3.8) se respetan, para esto se sustituye la Ec. 3.20 en la Ec. 3.7, obteniendo así:

$$2\mu \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = c \nabla^2 \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} - \nabla \left(\nabla \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \right) = c \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z^2} \end{bmatrix}
\tag{Ec. 3.21}$$

Para demostrar que las condiciones de equilibrio se respetan se presenta el desarrollo solo con una componente del vector, en este caso se considera el caso de la componente u de desplazamiento, se parte de la ecuación Ec. 3.22, la cual se sustituye en la primera de las ecuaciones escalares (Ec. 3.23) que conforman la ecuación vectorial Ec. 3.8. Es importante resaltar que, aunque se trabaja solo con la primera componente es necesario tomar en cuenta las expresiones para los desplazamientos v y w (Ec. 3.24 y Ec. 3.25)

$$\begin{aligned}
2\mu u &= c \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial x} \right) \\
c &= 2(1 - \nu)
\end{aligned}
\tag{Ec. 3.22}$$

$$(1 - 2\nu)\Delta u + \frac{\partial e}{\partial x} = 0$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$
Ec. 3.23

$$2\mu v = c \left(\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial y} \right)$$
Ec. 3.24

$$2\mu w = c \left(\frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z^2} \right)$$
Ec. 3.25

Para conveniencia del proceso las ecuaciones Ec. 3.22, 3.24 y 3.25 se reescriben, previo a la sustitución, quedando de la forma:

$$u = \frac{1}{\mu} \Delta P_1 - \frac{\nu}{\mu} \Delta P_1 - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial x}$$
Ec. 3.26

$$v = \frac{1}{\mu} \Delta P_2 - \frac{\nu}{\mu} \Delta P_2 - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial y}$$
Ec. 3.27

$$w = \frac{1}{\mu} \Delta P_3 - \frac{\nu}{\mu} \Delta P_3 - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_3}{\partial z^2} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial z}$$
Ec. 3.28

Al realizar la sustitución de las ecuaciones Ec. 3.26 Ec. 3.27 Ec. 3.28 en la Ec. 3.23 se obtiene:

$$\frac{2\nu - 1}{2\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 P_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 P_1}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial y^3 \partial x^3} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial y \partial x \partial z^2} + \frac{\partial^4 P_3}{\partial z \partial x \partial y^2} + \frac{\partial^4 P_3}{\partial x \partial z^3} \right) + \frac{1 - 2\nu}{2\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 P_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 P_1}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial y^3 \partial x^3} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial y \partial x \partial z^2} + \frac{\partial^4 P_3}{\partial z \partial x \partial y^2} + \frac{\partial^4 P_3}{\partial x \partial z^3} \right) = 0$$
Ec. 3.29

Donde claramente la Ec. 3.29 se iguala con cero, lo anterior demuestra que efectivamente la función P propuesta cumple con las condiciones de equilibrio y por tanto es solución de la ecuación biarmónica²⁵.

Por otra parte, es posible demostrar que la función potencial propuesta al problema biarmónico cumple también con las condiciones de compatibilidad de esfuerzos (ecuaciones de beltrami-michell) y las condiciones de compatibilidad de deformaciones.

Para demostrar que se cumplen las condiciones de compatibilidad de deformaciones (Ec. 2.28) se procede tomando solo un ejemplo de cada condición (Ec. 3.30), como se puede observar en las condiciones de compatibilidad es necesario desarrollar expresiones para las deformaciones tanto normales como cortantes en términos de la función P. Para lo anterior derivamos las expresiones

²⁵ En la sección 7.1, se muestra el desarrollo de comprobación en extenso

de las Ec. 3.26 a 3.28, según la Ec. 2.11 obteniendo el resultado mostrado en las Ec. 3.31 para deformaciones normales y Ec. 3.32 para las deformaciones cortantes.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$
Ec. 3.30

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1-\nu}{\mu} \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 P_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 P_1}{\partial x \partial z^2} \right) - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial z \partial x^2} \right)$$

$$= \frac{1-\nu}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta P_1 \right) - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial z \partial x^2} \right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1-\nu}{\mu} \left(\frac{\partial^3 P_2}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial y \partial z^2} \right) - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial z \partial y^2} \right)$$

$$= \frac{1-\nu}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial y} \Delta P_2 \right) - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial z \partial y^2} \right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1-\nu}{\mu} \left(\frac{\partial^3 P_3}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial z \partial y^2} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial z^3} \right) - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial z^3} \right)$$

$$= \frac{1-\nu}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial z} \Delta P_3 \right) - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial z^3} \right)$$
Ec. 3.31

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{1-\nu}{\mu} \right) \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 P_1}{\partial y \partial z^2} \right) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^3 P_3}{\partial x \partial y \partial z} \right)$$

$$+ \frac{\nu}{\mu} \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$= \left(\frac{1-\nu}{\mu} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \Delta P_1 + \frac{\partial}{\partial x} \Delta P_2 \right) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial x \partial y \partial z} \right)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1-\nu}{\mu} \left(\frac{\partial^3 P_2}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial y \partial x^2} \right) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x \partial y \partial z} \right)$$

$$+ \frac{\nu}{\mu} \left(\frac{\partial^3 P_2}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial y \partial z^2} \right)$$

$$= \left(\frac{1-\nu}{\mu} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \Delta P_2 + \frac{\partial}{\partial y} \Delta P_3 \right) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial y \partial z^2} \right)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1-\nu}{\mu} \left(\frac{\partial^3 P_3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 P_1}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 P_1}{\partial y^2 \partial z} \right) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^3 P_2}{\partial x \partial y \partial z} \right)$$

$$+ \frac{\nu}{\mu} \left(\frac{\partial^3 P_3}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 P_1}{\partial x^2 \partial z} \right)$$

$$= \left(\frac{1-\nu}{\mu} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta P_2 + \frac{\partial}{\partial z} \Delta P_1 \right) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial x \partial z^2} \right)$$
Ec. 3.32

Para fines de la demostración es necesario obtener las segundas derivadas de las deformaciones ε_y , ε_x y γ_{xy} , según la Ec. 3.30, los resultados de dichas derivaciones se muestran en la Ec. 3.33.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{1-\nu}{\mu} \frac{\partial}{\partial x \partial y^2} \Delta P_1 - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^5 P_1}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 P_2}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^5 P_3}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1-\nu}{\mu} \frac{\partial}{\partial x^2 \partial y} \Delta P_2 - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^5 P_1}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 P_2}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^5 P_3}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1-\nu}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x \partial y^2} \Delta P_1 + \frac{\partial}{\partial x^2 \partial y} \Delta P_2 \right) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^5 P_1}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 P_2}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^5 P_3}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z} \right)\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.33}$$

Posteriormente se suman las primeras dos expresiones de 3.33, el resultado de esta última suma se muestra en Ec. 3.34, de donde se puede observar que el resultado de esta suma es igual a la expresión para $\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$ lo cual demuestra que se cumple la primera condición de compatibilidad de deformaciones.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1-\nu}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x \partial y^2} \Delta P_1 + \frac{\partial}{\partial x^2 \partial y} \Delta P_2 \right) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^5 P_1}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 P_2}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^5 P_3}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z} \right) \quad \text{Ec. 3.34}$$

Ahora para demostrar que también se cumple la segunda expresión de 3.30, se obtienen las derivadas de la Ec. 3.35

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{1-\nu}{\mu} \frac{\partial}{\partial x \partial y \partial z} \Delta P_1 - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^5 P_1}{\partial x^3 \partial y \partial z} + \frac{\partial^5 P_2}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^5 P_3}{\partial x^2 \partial y \partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{1-\nu}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial y \partial z} \Delta P_1 + \frac{\partial}{\partial x \partial z} \Delta P_2 \right) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^2 \partial y \partial z} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial x \partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^4 P_3}{\partial x \partial y \partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{1-\nu}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x \partial z} \Delta P_2 + \frac{\partial}{\partial x \partial y} \Delta P_3 \right) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^2 \partial y \partial z} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial x \partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^4 P_3}{\partial x \partial y \partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{1-\nu}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x \partial y} \Delta P_3 + \frac{\partial}{\partial y \partial z} \Delta P_1 \right) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^2 \partial y \partial z} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial x \partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^4 P_3}{\partial x \partial y \partial z^2} \right)\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.35}$$

Posteriormente se suman las derivadas de las tres deformaciones cortantes y se derivan respecto a x como indica la ecuación 3.30.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{2-2\nu}{\mu} \frac{\partial}{\partial x \partial y \partial z} \Delta P_1 - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^5 P_1}{\partial x^3 \partial y \partial z} + \frac{\partial^5 P_2}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^5 P_3}{\partial x^2 \partial y \partial z^2} \right) \quad \text{Ec. 3.36}$$

Del desarrollo anterior se puede determinar entonces que la Ec. 3.36 se iguala con la primera expresión de la Ec. 3.35, demostrando así que la segunda condición de compatibilidad de deformaciones se cumple también.

Para el caso de la demostración del cumplimiento de las condiciones de Beltrami-Michell (Ec. 3.37), es necesario desarrollar expresiones para los esfuerzos en términos de la función P, para ello se utiliza la ley de Hooke generalizada (Ec. 2.25), obteniendo así la Ec. 3.38 para los esfuerzos normales y la Ec. 3.39 para los esfuerzos cortantes.

$$\begin{aligned}
(1 + \nu)\Delta\sigma_x + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= 0 \\
(1 + \nu)\Delta\sigma_y + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= 0 \\
(1 + \nu)\Delta\sigma_z + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} &= 0 \\
(1 + \nu)\Delta\tau_{xy} + \frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y} &= 0 \\
(1 + \nu)\Delta\tau_{yz} + \frac{\partial^2 S}{\partial y\partial z} &= 0 \\
(1 + \nu)\Delta\tau_{zx} + \frac{\partial^2 S}{\partial z\partial x} &= 0
\end{aligned}$$

Ec. 3.37

Dónde:

$$S = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x = 2\mu\varepsilon_x + \lambda e &= (2 - 2\nu)\frac{\partial}{\partial x}\Delta P_1 - \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial x^2\partial z}\right) \\
&\quad + \nu\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta P_1 + \frac{\partial}{\partial y}\Delta P_2 + \frac{\partial}{\partial z}\Delta P_3\right) \\
\sigma_y = 2\mu\varepsilon_y + \lambda e &= (2 - 2\nu)\frac{\partial}{\partial y}\Delta P_2 - \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial y^2\partial z}\right) \\
&\quad + \nu\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta P_1 + \frac{\partial}{\partial y}\Delta P_2 + \frac{\partial}{\partial z}\Delta P_3\right) \\
\sigma_z = 2\mu\varepsilon_z + \lambda e &= (2 - 2\nu)\frac{\partial}{\partial z}\Delta P_3 - \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x\partial z^2} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial y\partial z^2} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial z^3}\right) \\
&\quad + \nu\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta P_1 + \frac{\partial}{\partial y}\Delta P_2 + \frac{\partial}{\partial z}\Delta P_3\right)
\end{aligned}$$

Ec. 3.38

Dónde:

$$\begin{aligned}
e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z &= \left(\frac{1 - 2\nu}{2\mu}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta P_1 + \frac{\partial}{\partial y}\Delta P_2 + \frac{\partial}{\partial z}\Delta P_3\right) \\
\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} &= (1 - \nu)\left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x\partial z^2} + \frac{\partial^3 P_1}{\partial y\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial^3 P_3}{\partial x\partial y\partial z}\right) \\
&\quad + \nu\left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x\partial y^2}\right) \\
&= (1 - \nu)\left(\frac{\partial}{\partial y}\Delta P_1 + \frac{\partial}{\partial x}\Delta P_2\right) - \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial x\partial y\partial z}\right) \\
\tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} &= (1 - \nu)\left(\frac{\partial^3 P_2}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x^2\partial z} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial y\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x\partial y\partial z}\right) \\
&\quad + \nu\left(\frac{\partial^3 P_2}{\partial y^2\partial z} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial y\partial z^2}\right) \\
&= (1 - \nu)\left(\frac{\partial}{\partial z}\Delta P_2 + \frac{\partial}{\partial y}\Delta P_3\right) - \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x\partial y\partial z} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial y^2\partial z} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial y\partial z^2}\right)
\end{aligned}$$

Ec. 3.39

$$\begin{aligned}\tau_{zx} = \mu\gamma_{zx} &= (1 - \nu) \left(\frac{\partial^3 P_3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 P_1}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 P_1}{\partial y^2 \partial z} \right) - \left(\frac{\partial^3 P_2}{\partial x \partial y \partial z} \right) \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^3 P_3}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 P_1}{\partial x^2 \partial z} \right) \\ &= (1 - \nu) \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta P_3 + \frac{\partial}{\partial z} \Delta P_1 \right) - \left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 P_2}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 P_3}{\partial x \partial z^2} \right)\end{aligned}$$

De nuevo para fines ilustrativos se demuestra el cumplimiento de las condiciones de Beltrami-Michell tomando solo un caso de cada una de las condiciones (Ec. 3.40).

$$\begin{aligned}(1 + \nu)\Delta\sigma_x + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= 0 \\ (1 + \nu)\Delta\tau_{xy} + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= 0\end{aligned}\tag{Ec. 3.40}$$

Así para la primera expresión de Ec. 3.40 se calcula $\Delta\sigma_x$ (Ec. 3.41) y $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$ (Ec. 3.42), de donde se puede determinar fácilmente que la primera condición de Beltrami-Michell se cumple.

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_x &= \left(-\frac{\partial^5 P_1}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 P_1}{\partial x^3 \partial y^2} - \frac{\partial^5 P_1}{\partial x^3 \partial z^2} - \frac{\partial^5 P_2}{\partial x^4 \partial y} - \frac{\partial^5 P_2}{\partial x^2 \partial y^3} - \frac{\partial^5 P_2}{\partial x^2 \partial y \partial z^2} - \frac{\partial^5 P_3}{\partial x^4 \partial z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^5 P_3}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z} - \frac{\partial^5 P_3}{\partial x^2 \partial z^3} \right)\end{aligned}\tag{Ec. 3.41}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= (1 + \nu) \left(\frac{\partial^5 P_1}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 P_1}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 P_1}{\partial x^3 \partial z^2} + \frac{\partial^5 P_2}{\partial x^4 \partial y} + \frac{\partial^5 P_2}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^5 P_2}{\partial x^2 \partial y \partial z^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^5 P_3}{\partial x^4 \partial z} + \frac{\partial^5 P_3}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^5 P_3}{\partial x^2 \partial z^3} \right)\end{aligned}\tag{Ec. 3.42}$$

Finalmente, en lo que respecta a la segunda expresión de Ec. 3.40 se deben calcular los términos $\Delta\tau_{xy}$ (Ec. 3.43) y $\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}$ (Ec. 3.44), de donde se puede determinar que la segunda condición de Beltrami-Michell también se cumple.

$$\begin{aligned}\Delta\tau_{xy} &= \left(-\frac{\partial^5 P_1}{\partial x^4 \partial y} - \frac{\partial^5 P_1}{\partial x^2 \partial y^3} - \frac{\partial^5 P_1}{\partial x^2 \partial y \partial z^2} - \frac{\partial^5 P_2}{\partial x^3 \partial y^2} - \frac{\partial^5 P_2}{\partial x \partial y^4} - \frac{\partial^5 P_2}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^5 P_3}{\partial x^3 \partial y \partial z^2} - \frac{\partial^5 P_3}{\partial x \partial y^3 \partial z} - \frac{\partial^5 P_3}{\partial x \partial y \partial z^3} \right)\end{aligned}\tag{Ec. 3.43}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= (1 + \nu) \left(\frac{\partial^5 P_1}{\partial x^4 \partial y} + \frac{\partial^5 P_1}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^5 P_1}{\partial x^2 \partial y \partial z^2} + \frac{\partial^5 P_2}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 P_2}{\partial x \partial y^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^5 P_2}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^5 P_3}{\partial x^3 \partial y \partial z^2} + \frac{\partial^5 P_3}{\partial x \partial y^3 \partial z} + \frac{\partial^5 P_3}{\partial x \partial y \partial z^3} \right)\end{aligned}\tag{Ec. 3.44}$$

Con las demostraciones anteriores, queda claro que el potencial propuesto P da solución al problema biarmónico y en consecuencia puede ser empleado para solucionar problemas de elasticidad.

3.2 Solución de los problemas fundamentales de la elasticidad usando el potencial de desplazamientos multicomplejo

Como se menciona en la sección 2.3 en lo que respecta a la teoría de elasticidad se contemplan dos problemas fundamentales, el primero es aquel en que se conocen la tracciones (cargas externas) en la frontera del dominio de análisis y el segundo en donde se conocen los desplazamientos en las fronteras del dominio.

A continuación, se presentan soluciones para los dos problemas fundamentales de la elasticidad haciendo uso del potencial P propuesto, en donde cada componente del potencial P es biarmónica y está dada según la Ec. 3.19. Dada la definición de las componentes del potencial P, las expresiones desarrolladas para los desplazamientos (Ec. 3.26Ec. 3.27Ec. 3.28), deformaciones (Ec. 3.31 Ec. 3.32) y esfuerzos (Ec. 3.38Ec. 3.39), en términos de las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ quedan como se muestra en la Ec. 3.45 para los desplazamientos, Ec. 3.46 y Ec. 3.47 para deformaciones normales y cortantes respectivamente, así como Ec. 3.48Ec. 3.49 para esfuerzos cortantes.

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{3-4\nu}{\mu}\right) \Re(\varphi_1') - \frac{1}{2\mu} (\Re(\bar{z}_1\varphi_1'' + \chi_1'') + a_2\Im(-\bar{z}_2\varphi_2'' - \chi_2'') + a_3\Im(-\bar{z}_3\varphi_3'' - \chi_3'')) \\ v &= \left(\frac{3-4\nu}{\mu}\right) \Re(\varphi_2') - \frac{1}{2\mu} (\Re(\bar{z}_2\varphi_2'' + \chi_2'') + b_1\Im(-\bar{z}_1\varphi_1'' - \chi_1'') + b_3\Im(-\bar{z}_3\varphi_3'' - \chi_3'')) \\ w &= \left(\frac{3-4\nu}{\mu}\right) \Re(\varphi_3') - \frac{1}{2\mu} (\Re(\bar{z}_3\varphi_3'' + \chi_3'') + c_1\Im(-\bar{z}_1\varphi_1'' - \chi_1'') + c_2\Im(-\bar{z}_2\varphi_2'' - \chi_2'')) \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.45}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \left(\frac{5-8\nu}{2\mu}\right) \Re(\varphi_1'') \\ &\quad - \frac{1}{2\mu} (\Re(\bar{z}_1\varphi_1''' + \chi_1''') - a_2^2\Im(-\varphi_2'' - \bar{z}_2\varphi_2''' - \chi_2''') \\ &\quad - a_3^2\Im(-\varphi_3'' - \bar{z}_3\varphi_3''' - \chi_3''')) \\ \varepsilon_y &= \left(\frac{5-8\nu}{2\mu}\right) \Re(\varphi_2'') \\ &\quad - \frac{1}{2\mu} (\Re(\bar{z}_2\varphi_2''' + \chi_2''') - b_1^2\Im(-\varphi_1'' - \bar{z}_1\varphi_1''' - \chi_1''') \\ &\quad - b_3^2\Im(-\varphi_3'' - \bar{z}_3\varphi_3''' - \chi_3''')) \\ \varepsilon_z &= \left(\frac{5-8\nu}{2\mu}\right) \Re(\varphi_3'') \\ &\quad - \frac{1}{2\mu} (\Re(\bar{z}_3\varphi_3''' + \chi_3''') - c_1^2\Im(-\varphi_1'' - \bar{z}_1\varphi_1''' - \chi_1''') \\ &\quad - c_2^2\Im(-\varphi_2'' - \bar{z}_2\varphi_2''' - \chi_2''')) \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.46}$$

Para el desarrollo de las expresiones en términos de las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3$, es necesario el cálculo de las derivadas de las componentes de P, las cuales se presentan en el anexo 7.2; cabe recordar que los elementos a_i, b_i, c_i son las funciones paramétricas definidas en la Ec. 3.18.

Las ecuaciones Ec. 3.45Ec. 3.49 se presentan ya en una forma simplificada que facilita el manejo de estas para su aplicación en los problemas a solucionar.

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{1}{\mu} a_3 b_3 \Re(-\varphi_3'' + \bar{z}_3 \varphi_3''' + \chi_3''') - \frac{1}{\mu} (b_1 \Im(-\bar{z}_1 \varphi_1''' - \chi_1''') + a_2 \Im(-\bar{z}_2 \varphi_2''' - \chi_2''')) \\
&\quad + \left(\frac{-3 + 4\nu}{\mu} \right) (b_1 \Im(\varphi_1'') + a_2 \Im(\varphi_2'')) \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{\mu} b_1 c_1 \Re(-\varphi_1'' + \bar{z}_1 \varphi_1''' + \chi_1''') - \frac{1}{\mu} (b_3 \Im(-\bar{z}_3 \varphi_3''' - \chi_3''') + c_2 \Im(-\bar{z}_2 \varphi_2''' - \chi_2''')) \\
&\quad + \left(\frac{-3 + 4\nu}{\mu} \right) (b_3 \Im(\varphi_3'') + c_2 \Im(\varphi_2'')) \\
\gamma_{zx} &= \frac{1}{\mu} a_2 c_2 \Re(-\varphi_2'' + \bar{z}_2 \varphi_2''' + \chi_2''') - \frac{1}{\mu} (a_3 \Im(-\bar{z}_3 \varphi_3''' - \chi_3''') + c_1 \Im(-\bar{z}_1 \varphi_1''' - \chi_1''')) \\
&\quad + \left(\frac{-3 + 4\nu}{\mu} \right) (a_3 \Im(\varphi_3'') + c_1 \Im(\varphi_1''))
\end{aligned} \tag{Ec. 3.47}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= (5 - 8\nu) \Re(\varphi_1'') \\
&\quad - (\Re(\bar{z}_1 \varphi_1''' + \chi_1''') - a_2^2 \Re(-\varphi_2'' + \bar{z}_2 \varphi_2''' + \chi_2''')) \\
&\quad - a_3^2 \Re(-\varphi_3'' + \bar{z}_3 \varphi_3''' + \chi_3''') + (4\nu) \Re(\varphi_1'' + \varphi_2'' + \varphi_3'') \\
\sigma_y &= (5 - 8\nu) \Re(\varphi_2'') \\
&\quad - (\Re(\bar{z}_2 \varphi_2''' + \chi_2''') - b_1^2 \Re(-\varphi_1'' + \bar{z}_1 \varphi_1''' + \chi_1''')) \\
&\quad - b_3^2 \Re(-\varphi_3'' + \bar{z}_3 \varphi_3''' + \chi_3''') + (4\nu) \Re(\varphi_1'' + \varphi_2'' + \varphi_3'') \\
\sigma_z &= (5 - 8\nu) \Re(\varphi_3'') \\
&\quad - (\Re(\bar{z}_3 \varphi_3''' + \chi_3''') - c_1^2 \Re(-\varphi_1'' + \bar{z}_1 \varphi_1''' + \chi_1''')) \\
&\quad - c_2^2 \Re(-\varphi_2'' + \bar{z}_2 \varphi_2''' + \chi_2''') + (4\nu) \Re(\varphi_1'' + \varphi_2'' + \varphi_3'')
\end{aligned} \tag{Ec. 3.48}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= a_3 b_3 \Re(-\varphi_3'' + \bar{z}_3 \varphi_3''' + \chi_3''') - (b_1 \Im(-\bar{z}_1 \varphi_1''' - \chi_1''') - a_2 \Im(-\bar{z}_2 \varphi_2''' - \chi_2''')) \\
&\quad + (-3 + 4\nu) (b_1 \Im(\varphi_1'') + a_2 \Im(\varphi_2'')) \\
\tau_{yz} &= b_1 c_1 \Re(-\varphi_1'' + \bar{z}_1 \varphi_1''' + \chi_1''') - (b_3 \Im(-\bar{z}_3 \varphi_3''' - \chi_3''') - c_2 \Im(-\bar{z}_2 \varphi_2''' - \chi_2''')) \\
&\quad + (-3 + 4\nu) (b_3 \Im(\varphi_3'') + c_2 \Im(\varphi_2'')) \\
\tau_{zx} &= a_2 c_2 \Re(-\varphi_2'' + \bar{z}_2 \varphi_2''' + \chi_2''') - (a_3 \Im(-\bar{z}_3 \varphi_3''' - \chi_3''') - c_1 \Im(-\bar{z}_1 \varphi_1''' - \chi_1''')) \\
&\quad + (-3 + 4\nu) (a_3 \Im(\varphi_3'') + c_1 \Im(\varphi_1''))
\end{aligned} \tag{Ec. 3.49}$$

3.2.1 Solución del primer problema fundamental de la elasticidad

Para ejemplificar la solución del primer problema fundamental se considera como dominio una celda hexaédrica unitaria, con esfuerzos normales en las dos caras perpendiculares al eje z cartesiano (Figura 3.2), manteniendo el resto de las caras libres de esfuerzo.

Para determinar el estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos haciendo uso del potencial P (Ec. 3.20) se deben proponer las funciones $\varphi_1(z_1)$, $\varphi_2(z_2)$, $\varphi_3(z_3)$, $\chi_1(z_1)$, $\chi_2(z_2)$, $\chi_3(z_3)$ de manera tal que se cumplan las condiciones de frontera, para este caso de carga uniaxial en un dominio simplemente conexo las funciones permiten representación en serie de potencias por lo que se proponen las funciones holomorfas según la Ec. 3.50.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \varphi_2 = \chi_1 = \chi_2 = 0 \\
\varphi_3 &= r_0 + r_1 z_3 + r_2 z_3^2
\end{aligned} \tag{Ec. 3.50}$$

Se asumen $\varphi_1(z_1)$, $\varphi_2(z_2)$, $\chi_1(z_1)$, $\chi_2(z_2)$, igual a cero, dado que no hay carga en las direcciones cartesianas x,y, las cuales corresponden a las partes reales de las variables z_1, z_2 .

En la ecuación 3.50 hace falta definir $\chi_3(z_3)$ esta función esta dada según la ecuación y se deriva del hecho de que $\sigma_x = 0$ (Ec. 3.51).

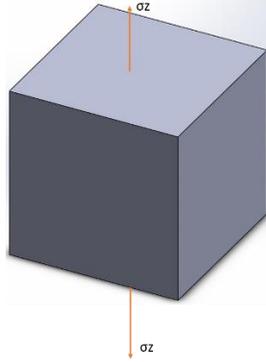


Figura 3.2 Celda hexaédrica unitaria sometida a tracción normal en la frontera

$$\begin{aligned}
 0 &= (5 - 8\nu)\Re(\varphi_1'') \\
 &\quad - \left(\Re(\bar{z}_1\varphi_1''' + \chi_1''') - a_2^2\Re(-\varphi_2'' + \bar{z}_2\varphi_2''' + \chi_2''') \right. \\
 &\quad \left. - a_3^2\Re(-\varphi_3'' + \bar{z}_3\varphi_3''' + \chi_3''') \right) + (4\nu)\Re(\varphi_1'' + \varphi_2'' + \varphi_3'') \\
 0 &= -a_3^2\Re(-\varphi_3'' + \bar{z}_3\varphi_3''' + \chi_3''') + (4\nu)\Re(\varphi_3'')
 \end{aligned} \tag{Ec. 3.51}$$

De la Ec. 3.51 se puede despejar χ_3'''

$$\chi_3''' = \varphi_3'' - \bar{z}_3\varphi_3''' + (4\nu)\varphi_3'' \tag{Ec. 3.52}$$

Integramos la anterior obteniendo

$$\chi_3'' = -\bar{z}_3\varphi_3'' + (4\nu)\varphi_3' \tag{Ec. 3.53}$$

No se realizan más integraciones de χ_3'' ya que las expresiones de χ_3' y χ_3 no son necesarias para determinar los desplazamientos, deformaciones o esfuerzos, como se puede ver en las Ec. 3.45Ec. 3.49, mismas en las que se sustituyen las expresiones propuestas para las derivadas de las funciones φ, χ ; cabe resaltar que para el desarrollo de esta solución y soluciones subsecuentes se toman solo cuatro valores discretos para las funciones paramétricas a_i, b_i, c_i , con el fin de disminuir los tiempos de cómputo de las soluciones, dichos valores son 0, 90, 180 y 270 grados, obteniendo así los resultados siguientes para los desplazamientos.

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{32\nu(1-2\nu)}{E}r_2x \\
 v &= -\frac{32\nu(1-2\nu)}{E}r_2y \\
 w &= \frac{32(1-2\nu)}{E}r_2z
 \end{aligned} \tag{Ec. 3.54}$$

Las deformaciones normales

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -\frac{32\nu(1-2\nu)}{E}r_2 \\ \varepsilon_y &= -\frac{32\nu(1-2\nu)}{E}r_2 \\ \varepsilon_z &= \frac{32(1-2\nu)}{E}r_2\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.55}$$

Las deformaciones cortantes

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= 0 \\ \gamma_{zx} &= 0\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.56}$$

Los esfuerzos normales

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z &= 32r_2 - 64\nu r_2\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.57}$$

Los esfuerzos cortantes.

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{yz} &= 0 \\ \tau_{zx} &= 0\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.58}$$

Estos resultados quedan en términos de los coeficientes del polinomio φ_3 (Ec. 3.50), el módulo de Young y el coeficiente de Poisson.

3.2.2 Solución del segundo problema fundamental de la elasticidad

El segundo problema fundamental de la elasticidad es aquel en el que se conocen los desplazamientos en la frontera del dominio, a manera de ejemplo de solución se considera la misma celda hexaédrica de caso anterior, con la diferencia de que en lugar de aplicar esfuerzos sobre las caras perpendiculares a z se aplicarán desplazamientos.

Para la solución de este segundo problema se proponen los mismos polinomios φ y χ que en el caso anterior dado que se tiene un desplazamiento uniaxial y en consecuencia las expresiones resultantes para desplazamientos, deformaciones y esfuerzos son las mismas. La diferencia en la solución de los problemas radica en la expresión de la cual se resuelven los coeficientes r , que para el primer caso es de σ_z y en el segundo de w , que son las condiciones de frontera conocidas en cada caso. Resolviendo para los coeficientes se tiene la Ec. 3.59 para el primer problema, la Ec. 3.60 para el segundo y las Ec. 3.61Ec. 3.65 para los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos, del problema uno y las Ec. 3.616Ec. 3.659 para el segundo problema.

$$r_2 = \frac{\sigma_z}{-32 + 64\nu}\quad \text{Ec. 3.59}$$

$$r_2 = \frac{wE}{32(1-2\nu)z} \quad \text{Ec. 3.60}$$

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\nu\sigma_z}{E}x \\ v &= -\frac{\nu\sigma_z}{E}y \\ w &= \frac{\sigma_z}{E}z \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.61}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -\frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.62}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= 0 \\ \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.63}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z &= \sigma_z \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.64}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{yz} &= 0 \\ \tau_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.65}$$

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\nu W}{z}x \\ v &= -\frac{\nu W}{z}y \\ w &= W \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.66}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -\frac{\nu W}{z} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu W}{z} \\ \varepsilon_z &= \frac{W}{z} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.67}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z &= \frac{EW}{z} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.68}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{yz} &= 0 \\ \tau_{zx} &= 0\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.69}$$

3.3 Solución de problemas de elasticidad usando el potencial de desplazamiento multicomplejo

En la sección anterior se presentó la solución de los problemas fundamentales de la elasticidad, a continuación, se plantea la solución de otros problemas de elasticidad como el del cortante puro, la carga biaxial, triaxial o uno con condiciones de frontera mixtas.

3.3.1 Solución del problema biaxial

Para el caso del problema biaxial (Figura 3.3) se plantean las formas siguientes para los polinomios φ y χ . En este caso se consideran fuerzas aplicadas en las fronteras, en lugar de esfuerzos, ya que la conocer el dato de fuerzas aplicadas sobre un dominio de análisis es más común que conocer los esfuerzos.

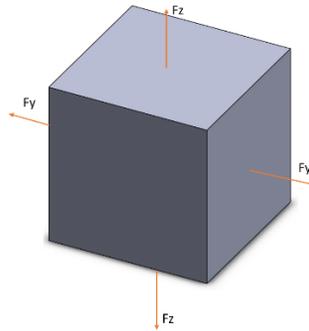


Figura 3.3 Celda hexaédrica sometido a carga biaxial

Las formas propuestas para las funciones $\varphi_1(z_1)$, $\varphi_2(z_2)$, $\varphi_3(z_3)$, $\chi_2(z_2)$.

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \chi_2 = 0 \\ \varphi_1 &= p_0 + p_1 z_1 + p_2 z_1^2 \\ \varphi_3 &= r_0 + r_1 z_3 + r_2 z_3^2\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.70}$$

Para las funciones $\chi_1(z_1)$, $\chi_3(z_3)$, considerando que $\sigma_y = 0$ será cero en este caso se pueden obtener las expresiones de la Ec. 3.72 despejando de la Ec. 3.71.

$$\begin{aligned}0 &= -\left(-b_1^2 \Re(-\varphi_1'' + \bar{z}_1 \varphi_1''' + \chi_1''') - b_3^2 \Re(-\varphi_3'' + \bar{z}_3 \varphi_3''' + \chi_3''')\right) \\ &\quad + (4\nu) \Re(\varphi_1'' + \varphi_2'' + \varphi_3'') \\ \chi_1''' + \chi_3''' &= \varphi_1'' - \bar{z}_1 \varphi_1''' + \varphi_3'' - \bar{z}_3 \varphi_3''' - (4\nu)(\varphi_1'' + \varphi_3'')\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.71}$$

$$\begin{aligned}\chi_3''' &= (4\nu)(\varphi_3'') + (\varphi_3'' - \bar{z}_3 \varphi_3''') \\ \chi_1''' &= (4\nu)(\varphi_1'') + (\varphi_1'' - \bar{z}_1 \varphi_1''')\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.72}$$

Realizando las integrales de $\chi_1(z_1)$, $\chi_3(z_3)$, se obtiene.

$$\begin{aligned}\chi_3''' &= (4\nu)(\varphi_3') + (-\bar{z}_3\varphi_3'') \\ \chi_1''' &= (4\nu)(\varphi_1') + (-\bar{z}_1\varphi_1'')\end{aligned}\tag{Ec. 3.73}$$

Al sustituir las Ec. 3.70, Ec. 3.72, Ec. 3.73 en las Ec. 3.45, Ec. 3.49, obtenemos las expresiones siguientes para los desplazamientos (Ec. 3.74), deformaciones (Ec. 3.75, 3.76) y esfuerzos (Ec. 3.77 y 3.78) para este caso específico de carga biaxial.

$$\begin{aligned}u &= \frac{32(p_2 - r_2)}{E}x \\ v &= -\frac{96(p_2 + r_2)}{E}y \\ w &= \frac{32(p_2 - r_2)}{E}z\end{aligned}\tag{Ec. 3.74}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -\frac{32(p_2 - r_2)}{E} \\ \varepsilon_y &= -\frac{96(p_2 + r_2)}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{32(p_2 - r_2)}{E}\end{aligned}\tag{Ec. 3.75}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= 0 \\ \gamma_{zx} &= 0\end{aligned}\tag{Ec. 3.76}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 32p_2 + 64r_2 \\ \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z &= 64p_2 + 32r_2\end{aligned}\tag{Ec. 3.77}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{yz} &= 0 \\ \tau_{zx} &= 0\end{aligned}\tag{Ec. 3.78}$$

En cuanto a la solución aplicando las condiciones de frontera, en este caso se debe considerar que, dado que el dato conocido son fuerzas aplicadas a las superficies y para poderlas aplicar como en los ejemplos anteriores se deben calcular primero las tracciones, recordando que las tracciones cumplen con la relación.

$$T = \frac{F}{A}\tag{Ec. 3.79}$$

Es importante recordar que las tracciones están dadas como un vector con tres componentes, uno en cada dirección cartesiana, así entonces y dado que la celda hexaédrica en estudio tiene caras con igual área, las tracciones en términos de las fuerzas aplicadas están dadas por.

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x/A \\ F_y/A \\ F_z/A \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.80}$$

A su vez las tracciones se relacionan con los esfuerzos a través de la Ec. 3.81, donde las n representan las normales a las superficies sobre las que se aplican las cargas.

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.81}$$

Ahora los esfuerzos en términos de las tracciones se expresan como en la Ec. 3.82 y Ec. 3.83, en donde la s representa el vector paralelo a la superficie de aplicación de carga.

$$\sigma = T \cdot n \quad \text{Ec. 3.82}$$

$$\tau = T \cdot s \quad \text{Ec. 3.83}$$

Haciendo uso de las ecuaciones anteriores podemos traducir las condiciones aplicadas a esfuerzos aplicados sobre las superficies (Ec. 3.84), forma que resulta más conveniente según las funciones que se han desarrollado para solucionar los problemas de elasticidad.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= F_x/A \\ \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z &= F_z/A \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.84}$$

Finalmente, a partir de las ecuaciones Ec. 3.77 Ec. 3.84, se pueden calcular valores de los coeficientes p_2 y r_2 (Ec. 3.85).

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{-F_x + 2F_z}{96} \\ r_2 &= \frac{2F_x - 2F_z}{96} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.85}$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes en las Ec. 3.74 Ec. 3.78 se obtienen los resultados de desplazamientos (Ec. 3.86), deformaciones (Ec. 3.87-3.88) y esfuerzos (Ec. 3.89-3.90) para el problema biaxial.

$$\begin{aligned} u &= \frac{(F_x - F_z)}{EA} x \\ v &= -\frac{(F_x + F_z)}{EA} y \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.86}$$

$$w = \frac{(-F_x + F_z)}{EA} z$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{(F_x - F_z)}{EA} \\ \varepsilon_y &= -\frac{(F_x + F_z)}{EA} \\ \varepsilon_z &= \frac{(-F_x + F_z)}{EA} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.87}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= 0 \\ \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.88}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= F_x/A \\ \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z &= F_z/A \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.89}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{yz} &= 0 \\ \tau_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.90}$$

3.3.2 Solución del problema del cortante puro

Para ejemplificar el problema de cortante puro se considera una celda hexaédrica con fuerzas F_x , F_y paralelas a las caras perpendiculares a las direcciones y , z cartesianas (Figura 3.4). Para este caso se proponen las formas de las funciones φ y χ presentadas en la Ec. 3.91, cabe resaltar que en estos nuevos polinomios propuestos se plantean coeficientes complejos, esto debido a la naturaleza de las expresiones desarrolladas para los esfuerzos y deformaciones cortantes (Ec. 3.47Ec. 3.49).

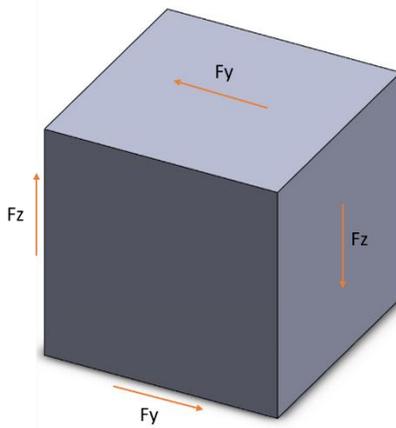


Figura 3.4 Celda hexaédrica bajo cortante puro

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \chi_1 = 0 \\ \varphi_2 &= (i * q_0) + (i * q_1)z_2 + (i * q_2)z_2^2 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.91}$$

$$\varphi_3 = (i * r_0) + (i * r_1)z_3 + (i * r_2)z_3^2$$

Dadas las condiciones de carga podemos asumir que $\tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$, trabajando con la expresión $\tau_{xy} = 0$ (Ec. 3.92), para determinar el polinomio $\chi_2(z_2)$ se obtiene la expresión de la ecuación

$$0 = a_3 b_3 \Re(-\varphi_3'' + \bar{z}_3 \varphi_3''' + \chi_3''') - (-a_2 \Im(-\bar{z}_2 \varphi_2''' - \chi_2''')) + (-3 + 4\nu)(a_2 \Im(\varphi_2'')) \quad \text{Ec. 3.92}$$

$$\chi_2''' = -\bar{z}_2 \varphi_2''' - (-3 + 4\nu)(\varphi_2'') \quad \text{Ec. 3.93}$$

Para determinar el polinomio $\chi_3(z_3)$ se parte de la expresión $\tau_{zx} = 0$ (Ec. 3.94), obteniendo la Ec. 3.95.

$$0 = a_3 b_3 \Re(-\varphi_3'' + \bar{z}_3 \varphi_3''' + \chi_3''') - (-a_2 \Im(-\bar{z}_2 \varphi_2''' - \chi_2''')) + (-3 + 4\nu)(a_2 \Im(\varphi_2'')) \quad \text{Ec. 3.94}$$

$$\chi_3''' = -\bar{z}_3 \varphi_3''' - (-3 + 4\nu)(\varphi_3'') \quad \text{Ec. 3.95}$$

Las Ec. 3.93Ec. 3.95 se integran para tener las expresiones necesarias para evaluar los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos (Ec. 3.96Ec. 3.97).

$$\chi_2'' = -\bar{z}_2 \varphi_2'' - (-3 + 4\nu)(\varphi_2') \quad \text{Ec. 3.96}$$

$$\chi_3'' = -\bar{z}_3 \varphi_3'' - (-3 + 4\nu)(\varphi_3') \quad \text{Ec. 3.97}$$

Sustituyendo las Ec. 3.7091, Ec. 3.7293, 3.95, 3.96Ec. 3.7397 en las Ec. 3.45Ec. 3.49 se obtienen las siguientes expresiones para los desplazamientos (Ec. 3.98), deformaciones (Ec. 3.99Ec. 3.100) y esfuerzos (Ec. 3.101Ec. 3.102).

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= \frac{16(q_2 + r_2)}{E} z \\ w &= \frac{16(q_2 + r_2)}{E} y \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.98}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 0 \\ \varepsilon_y &= 0 \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.99}$$

$$\gamma_{xy} = 0 \quad \text{Ec. 3.100}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{32(q_2 + r_2)}{E}$$

$$\gamma_{zx} = 0$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z &= 0\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.101}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{yz} &= 8(q_2 + r_2) \\ \tau_{zx} &= 0\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.102}$$

Ahora conociendo las condiciones de carga se pueden determinar las tracciones en las superficies del cuerpo (Ec. 3.103) y posteriormente determinar los esfuerzos en las fronteras (Ec. 3.104).

$$\begin{aligned}T_x &= 0 \\ T_y &= F_y/A \\ T_z &= F_z/A\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.103}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{yz} &= (F_y + F_z)/2A \\ \tau_{zx} &= 0\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.104}$$

Finalmente, la solución para los coeficientes q_2, r_2 queda.

$$\begin{aligned}q_2 &= \frac{0.015(F_y + F_z)}{A(-0.75 + A)} \\ r_2 &= -1\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.105}$$

Sustituyendo los valores encontrados de los coeficientes se definen las expresiones finales para desplazamientos, deformaciones y esfuerzos.

$$\begin{aligned}u &= 0 \\ v &= \frac{(-0.375 + 0.125A + 0.5A^2)(F_y + F_z)}{EA(-0.75 + A)} z \\ w &= \frac{(-0.375 + 0.125A + 0.5A^2)(F_y + F_z)}{EA(-0.75 + A)} y\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.106}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= 0 \\ \varepsilon_y &= 0 \\ \varepsilon_z &= 0\end{aligned}\quad \text{Ec. 3.107}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{(1 + A) \left((-0.75 + A)F_y + (-0.75 + A)F_z \right)}{EA(-0.75 + A)} \\ \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.108}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.109}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{yz} &= \frac{0.5F_y + 0.5F_z}{A} \\ \tau_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.110}$$

3.4 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELÁSTICOS CON UNA SINGULARIDAD

En esta sección se abordan problemas elásticos con la particularidad de que existen singularidades en los dominios de estudio, en específico para ejemplificar se considera el caso de una celda hexaédrica con una grieta horizontal pasante, con solo una punta de grieta dentro del dominio (Figura 3.5), en modo I de carga, con una fuerza aplicada en una de las caras normales al eje z cartesiano y la otra fija.

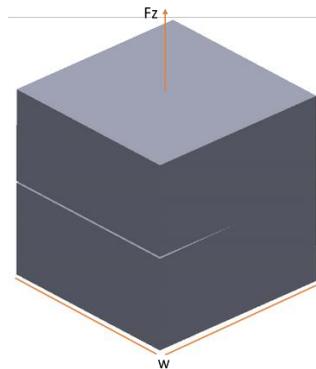


Figura 3.5 Celda hexaédrica con grieta

A fin de solucionar el problema planteado haciendo uso del potencial de desplazamientos multicomplejo desarrollado en la sección 3.1, se deben proponer formas para las funciones φ y χ , que consideren el manejo de la singularidad en el dominio. Para este caso se proponen de manera inicial tres posibles formas de las funciones, una polinomial (Ec. 3.111), una exponencial (Ec. 3.112) y otra logarítmica (Ec. 3.113).

$$\varphi = s_0 + s_1 \frac{1}{z} \quad \text{Ec. 3.111}$$

$$\varphi = s_0 + s_1 e^{1/z} \quad \text{Ec. 3.112}$$

$$\varphi = s_0 + s_1 \text{Log}(z)$$

Ec. 3.113

Con el fin de estudiar el comportamiento de los tres tipos de funciones propuestas, se realizó el desarrollo de la solución por los tres caminos, los cuales se presentan en las siguientes secciones.

3.4.1 Solución polinomial

En este caso se proponen las funciones φ y χ de la forma mostrada en la Ec. 3.114.

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \chi_1 = 0 \\ \varphi_2 &= s_1 + s_2 \frac{1}{z_3} \\ \varphi_3 &= r_1 + r_2 \frac{1}{z_2}\end{aligned}$$

Ec. 3.114

Asumiendo $u = 0$, considerando que las grietas se extienden sobre el plano cartesiano yz , se pueden obtener expresiones para las funciones χ faltantes (Ec. 3.115), las cuales se integran (Ec. 3.116) para completar las expresiones necesarias para evaluar los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos (Ec. 3.45Ec. 3.49).

$$\begin{aligned}\chi_2''' &= \varphi_2'' + \bar{z}_2 \varphi_2''' \\ \chi_3''' &= \varphi_3'' + \bar{z}_3 \varphi_3'''\end{aligned}$$

Ec. 3.115

$$\begin{aligned}\chi_2'' &= \bar{z}_2 \varphi_2'' \\ \chi_3'' &= \bar{z}_3 \varphi_3''\end{aligned}$$

Ec. 3.116

Al sustituir las expresiones anteriores en las Ec. 3.45Ec. 3.49, se obtienen los siguientes resultados para desplazamientos (Ec. 3.117), deformaciones (Ec. 3.118-3.119) y esfuerzos (Ec. 3.120-3.121).

$$\begin{aligned}u &= 0 \\ v &= \frac{8(1+\nu)(4r_2 yz(y^2 - z^2) + s_2(y^4 + (-3 + 4\nu)y^3z - 6y^2z^2 + (-3 + 4\nu)yz^3 + z^4))}{E(y^2 + z^2)^3} \\ w &= \frac{8(1+\nu)(4s_2 yz(-y^2 + z^2) + r_2(y^4 + (-3 + 4\nu)y^3z - 6y^2z^2 + (-3 + 4\nu)yz^3 + z^4))}{E(y^2 + z^2)^3}\end{aligned}$$

Ec. 3.117

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= 0 \\ \varepsilon_y &= -\frac{1}{E(y^2 + z^2)^4} 8(1+\nu)(-3r_2z(5y^4 - 10y^2z^2 + z^4) + s_2(3y^5 + 6(-1 + 2\nu)y^4z - 30y^3z^2 + 4(-1 + 2\nu)y^2z^3 + 15yz^4 + 2(1 - 2\nu)z^5))\end{aligned}$$

Ec. 3.118

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E(y^2 + z^2)^4} 4(1 + \nu)(6s_2y(y^4 - 10y^2z^2 + 5z^4) + r_2(y^6 + y^5(-5 + 8\nu - 18z) - 5y^2(-6 + z)z^3 + (-3 + z)z^5 - 5y^4z(3 + z) - 3yz^4(-5 + 8\nu + 6z) + 2y^3z^2(5 - 8\nu + 30z)))$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{E(y^2 + z^2)^4} 16(1 + \nu)((3r_2 + 2(-1 + \nu)s_2)y^5 + 3(-2(-1 + \nu)r_2 + 5s_2)y^4z - 2(15r_2 + 2(-1 + \nu)s_2)y^3z^2 - 2(2(-1 + \nu)r_2 + 15s_2)y^2z^3 + 3(5r_2 - 2(-1 + \nu)s_2)yz^4 + (2(-1 + \nu)r_2 + 3s_2)z^5))$$

Ec. 3.119

$$\gamma_{zx} = 0$$

$$\sigma_x = -\frac{1}{(-1 + 2\nu)(y^2 + z^2)^4} 4\nu(4(-1 + 2\nu)s_2z(-3y^4 - 2y^2z^2 + z^4) + r_2(y^6 + y^5(-5 + 8\nu - 18z) - 5y^4(-3 + z)z + z^5(3 + z) - 5y^2z^3(6 + z) - 3yz^4(-5 + 8\nu + 6z) + 2y^3z^2(5 - 8\nu + 30z)))$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{(-1 + 2\nu)(y^2 + z^2)^4} 4(8\nu^2(y^2 + z^2)(r_2y^3 + 3s_2y^2z - 3r_2yz^2 - s_2z^3) + 6r_2z(5y^4 - 10y^2z^2 + z^4) + s_2(-6y^5 + 12y^4z + 60y^3z^2 + 8y^2z^3 - 30yz^4 - 4z^5) + 12\nu s_2(y^5 - 3y^4z - 10y^3z^2 - 2y^2z^3 + 5yz^4 + z^5) + \nu r_2(y^6 - 5y^2(-18 + z)z^3 + (-9 + z)z^5 - 5y^4z(9 + z) - 3yz^4(-5 + 6z) + 10y^3z^2(1 + 6z) - y^5(5 + 18z)))$$

Ec. 3.120

$$\sigma_z = \frac{1}{(-1 + 2\nu)(y^2 + z^2)^4} (8s_2((-3 + 6\nu)y^5 + 6\nu(-1 + 2\nu)y^4z + 30(1 - 2\nu)y^3z^2 + 4\nu(-1 + 2\nu)y^2z^3 + 15(-1 + 2\nu)yz^4 + 2(1 - 2\nu)\nu z^5) + 4r_2((-1 + \nu)y^6 + (-1 + \nu)y^5(-5 + 8\nu - 18z) - 2(-1 + \nu)y^3(-5 + 8\nu - 30z)z^2 - 5y^2(6 + \nu(-18 + z) - z)z^3 + (3 + \nu(-9 + z) - z)z^5 - 3(-1 + \nu)yz^4(-5 + 8\nu + 6z) - 5y^4z(-3 - z + \nu(9 + z))))$$

$$\tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{yz} = \frac{1}{(y^2 + z^2)^4} 8(s_2(2(-1 + \nu)y^5 + 15y^4z - 4(-1 + \nu)y^3z^2 - 30y^2z^3 - 6(-1 + \nu)yz^4 + 3z^5) + r_2(3y^5 - 6(-1 + \nu)y^4z - 30y^3z^2 - 4(-1 + \nu)y^2z^3 + 15yz^4 + 2(-1 + \nu)z^5))$$

Ec. 3.121

$$\tau_{zx} = 0$$

Aplicando las condiciones de frontera y resolviendo para los coeficientes desconocidos se obtiene

$$r_2 = (-1 + 2\nu) F_z y (y - z) z (y + z) (y^2 + z^2)^4 / (2A (4(-72 + \nu(174 + 5\nu(-5 + 4\nu))) y^5 z^4 + 2y^3 (93 + 2\nu(\nu(-5 + 4\nu) + 3(-36 + z)) - 6z) z^6 + 2(1 - 2\nu)\nu z^9 + 6y^7 z^2 (13 + 2\nu(-14 + \nu(-5 + 4\nu) - z) + 2z) + y^8 z (19 - 62\nu + 52\nu^2 - 36(-1 + \nu)z) +$$

Ec. 3.122

$$\begin{aligned}
& y^9(-3 - 2z + 2v(3 + z)) + \\
& yz^8(-21 + 2z - 2v(-21 + 2v(-5 + 4v) + z)) + \\
& y^2z^7(75 - 36z + 4v(-61 + 50v + 9z)) + \\
& y^4z^5(-55 + 156z - 4v(-49 + 44v + 39z)) + \\
& y^6z^3(4v(95 - 82v + 39z) - 3(37 + 52z))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_2 = & (-1 + 2v)F_z(y^2 + z^2)^4(y^4 + (-3 + 4v)y^3z - 6y^2z^2 + (-3 \\
& + 4v)yz^3 + z^4))/(8A(4(-72 + v(174 + 5v(-5 \\
& + 4v))))y^5z^4 + 2y^3(93 + 2v(v(-5 + 4v) + 3(-36 \\
& + z)) - 6z)z^6 + 2(1 - 2v)vz^9 + \\
& 6y^7z^2(13 + 2v(-14 + v(-5 + 4v) - z) + 2z) + \\
& y^8z(19 - 62v + 52v^2 - 36(-1 + v)z) + \\
& y^9(-3 - 2z + 2v(3 + z)) + \\
& yz^8(-21 + 2z - 2v(-21 + 2v(-5 + 4v) + z)) + \\
& y^2z^7(75 - 36z + 4v(-61 + 50v + 9z)) + \\
& y^4z^5(-55 + 156z - 4v(-49 + 44v + 39z)) + \\
& y^6z^3(4v(95 - 82v + 39z) - 3(37 + 52z))
\end{aligned}$$

Los valores obtenidos para los coeficientes se sustituyen en las Ec. 3.117 a 3.121, sin embargo, los resultados completos no se muestran en esta sección debido a la longitud de las expresiones.

3.4.2 Solución exponencial

Para este caso se proponen las funciones φ y χ de la forma mostrada en la Ec. 3.123.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \chi_1 = 0 \\
\varphi_2 &= s_1 + s_2e^{1/z_3} \\
\varphi_3 &= r_1 + r_2e^{1/z_2}
\end{aligned}
\tag{Ec. 3.123}$$

Asumiendo $u = 0$ considerando que las fracturas se extienden en longitud sobre el plano cartesiano yz , se pueden usar las expresiones para las funciones χ faltantes como en la Ec. 3.115 y 3.116. Al sustituir las expresiones anteriores en las Ec. 3.45Ec. 3.49, se obtienen los siguientes resultados para desplazamientos (Ec. 3.124), deformaciones (Ec. 3.125-1.126) y esfuerzos (Ec. 3.127-1.28).

$$\begin{aligned}
& u = 0 \\
& v = (1/(E(y^2 + z^2)^4))4(1 + v)e^{(z/(y^2 + z^2))} \\
& s_2(2y^6 + 2(-3 + 4v)y^5z + 5y^4(1 - 2z)z + \\
& 4(-3 + 4v)y^3z^3 + 2(-3 + 4v)yz^5 - 10y^2z^3(1 + z) + \\
& z^5(1 + 2z))\text{Cos}[y/(y^2 + z^2)] + e^{(z/(y^2 + z^2))} \\
& s_2(y^5(-1 + (3 - 4v)y) + 8y^5z + \\
& y^3(10 + (3 - 4v)y)z^2 + y(-5 + (-3 + 4v)y)z^4 - \\
& 8y^5z^5 + (-3 + 4v)z^6)\text{Sin}[y/(y^2 + z^2)] + e^{(y/(y^2 + z^2))} \\
& r_2(z(5y^4 + 8y^5 - 10y^2z^2 + z^4 - 8yz^4)\text{Cos}[z/(\\
& y^2 + z^2)] + (y^5(1 + 2y) - 10y^3(1 + y)z^2 + \\
& 5(1 - 2y)y^4z^4 + 2z^6)\text{Sin}[z/(y^2 + z^2)]) \\
& w = (1/(A(y^2 + z^2)^4))4(1 + v)e^{(z/(y^2 + z^2))} \\
& s_2y(y^4(1 - 8z) - 10y^2z^2 + z^4(5 + 8z))\text{Cos}[y/(y^2 + z^2)] + \\
& e^{(z/(y^2 + z^2))}s_2(2y^6 + 5y^4(1 - 2z)z - 10y^2z^3(1 + z) + \\
& z^5(1 + 2z))\text{Sin}[y/(y^2 + z^2)] + e^{(y/(y^2 + z^2))} \\
& r_2((y^5(1 + 2y) + 2(-3 + 4v)y^5z - 10y^3(1 + y)z^2 +
\end{aligned}
\tag{Ec. 3.124}$$

$$4(-3 + 4\nu)y^3z^3 + 5(1 - 2y)yz^4 + 2(-3 + 4\nu)yz^5 + 2z^6) \text{Cos}[z/(y^2 + z^2)] \\ + ((-3 + 4\nu)y^6 - 8y^5z + 8yz^5 + z^5(-1 + 3z - 4\nu z) \\ + y^2z^3(10 + 3z - 4\nu z) + y^4z(-5 - 3z + 4\nu z)) \text{Sin}[z/(y^2 \\ + z^2)))]$$

$$\varepsilon_x = 0$$

$$\varepsilon_y = (1/(E(y^2 + z^2)^6))4(1 + \nu) \left(e^{\frac{z}{y^2+z^2}} \right. \\ s_2(-6y^9 + 8(1 - 2\nu)y^2z^6 + 2(-1 + 2\nu)z^8(1 + 2z) - \\ 8(-1 + 2\nu)y^6z^2(1 + 4z) - 2(-1 + 2\nu)y^8(-1 + 6z) - \\ 4(-1 + 2\nu)y^4z^4(5 + 6z) + 7y^3z^4(5 + 12z) + \\ 21y^5z^2(-1 + 4z(1 + z)) + y^7(1 + 12z(-3 + 4z)) - \\ \left. yz^6(7 + 6z(6 + 5z))) \text{Cos}[y/(y^2 + z^2)] - e^{\frac{z}{y^2+z^2}} \right) \\ s_2((4 - 8\nu)y^9 + 8(1 - 2\nu)y^7z + 8(-1 + 2\nu)y^5z^3(-1 + 3z) \\ + 4(-1 + 2\nu)yz^7(2 + 3z) + 8(-1 + 2\nu)y^3z^5(1 + 4z) \\ + 6y^8(-1 + 5z) + 7y^6z(-1 + 12z) + 7y^4z^3(5 \\ - 12z^2) + z^7(1 + 6z(1 + z)) - 3y^2z^5(7 + 4z(7 \\ + 4z))) \text{Sin}[y/(y^2 + z^2)] + e^{\frac{y}{y^2+z^2}} \\ r_2(z(y^6(7 + 6y(6 + 5y)) - 7y^4(5 + 12y)z^2 - \\ 21y^2(-1 + 4y(1 + y))z^4 + (-1 + 12(3 - 4y)y)z^6 + \\ 6z^8) \text{Cos}[z/(y^2 + z^2)] + (y^7(1 + 6y(1 + y)) - \\ 3y^5(7 + 4y(7 + 4y))z^2 + 7y^3(5 - 12y^2)z^4 + \\ 7y(-1 + 12y)z^6 + 6(-1 + 5y)z^8) \text{Sin}[z/(y^2 + z^2)])) \\ \varepsilon_z = (1/(E(y^2 + z^2)^6))2(1 + \nu) \left(2e^{\frac{z}{y^2+z^2}} \right. \\ s_2y(6y^8 - 7y^2z^4(5 + 12z) + y^6(-1 + 12(3 - 4z)z) - \\ 21y^4z^2(-1 + 4z(1 + z)) + z^6(7 + 6z(6 + 5z))) \text{Cos}[y/(\\ y^2 + z^2)] + 2e^{\frac{z}{y^2+z^2}} s_2(6y^8(-1 + 5z) + 7y^6z(-1 + 12z) \\ + 7y^4z^3(5 - 12z^2) + z^7(1 + 6z(1 + z)) - 3y^2z^5(7 \\ + 4z(7 + 4z))) \text{Sin}[y/(y^2 + z^2)] + e^{\frac{y}{y^2+z^2}} r_2((y^8(-5 \\ + 8\nu + y)(1 + 2y) - y^6(7 + 4y(11 + 9y(2 + y))))z \\ - 2y^6(-10 + 16\nu + y(4 + 3y))z^2 + y^4(35 + 4y(35 \\ + 6y(7 + 2y)))z^3 - \\ 2y^4(-25 + 8\nu(5 + 6y) + y(-23 + 14y))z^4 + \\ 7y^2(-3 + 4y(1 + 6y(1 + y)))z^5 - \\ 4y^2(-5 + 8\nu(1 + 4y) + y(-20 + 7y))z^6 + (1 + \\ 4y(-7 + 6y(-3 + 2y)))z^7 + (-5 + \\ \nu(8 - 48y) + (35 - 6y)y)z^8 - 36yz^9 + 2z^{10}) \text{Cos}[\\ z/(y^2 + z^2)] - (y^7(1 + y)(1 + 6y(1 + y)) + \\ y^7(-20 + 16\nu(2 + 3y) + y(-25 + 8y))z - \\ y^5(21 + 2y(56 + 84y + 39y^2))z^2 + \\ 4y^5(-5 + 4(-5 + y)y + 8\nu(1 + 4y))z^3 + \\ 7y^3(5 + 10y - 12y^3)z^4 + \\ 2y^3(10 - 37y + 16\nu(-1 + 3y))z^5 + \\ 7y(-1 + 4y(2 + 3y(2 + y)))z^6 - \\ 4y(-5 + 8\nu + 2y + 4y^2)z^7 + (-5 + \\ 6y(-2 + 13y))z^8 + (11 - 16\nu - 8y)z^9 - \\ 6z^{10}) \text{Sin}[z/(y^2 + z^2)]))$$

Ec. 3.125

$$\gamma_{xy} = 0$$

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} = & (1/(E (y^2 + z^2)^6))8 (1 + \nu) (e^{\frac{z}{y^2+z^2}}) \\ & s_2 (4 (-1 + \nu) y^9 + 8 (-1 + \nu) y^7 z - \\ & 4 (-1 + \nu) y z^7 (2 + 3 z) - 8 (-1 + \nu) y^3 z^5 (1 + 4 z) + \\ & 6 y^8 (-1 + 5 z) + 7 y^6 z (-1 + 12 z) + \\ & 8 y^5 z^3 (-1 + \nu + 3 z - 3 \nu z) + 7 y^4 z^3 (5 - 12 z^2) + \\ & z^7 (1 + 6 z (1 + z)) - 3 y^2 z^5 (7 + 4 z (7 + 4 z))) \text{Cos}[y/(\\ & y^2 + z^2)] + e^{\frac{z}{y^2+z^2}} s_2 (-6 y^9 + 8 (-1 + \nu) y^2 z^6 - 2 (-1 + \nu) z^8 (1 \\ & + 2 z) + 8 (-1 + \nu) y^6 z^2 (1 + 4 z) + 2 (-1 + \nu) y^8 (-1 \\ & + 6 z) + 4 (-1 + \nu) y^4 z^4 (5 + 6 z) + 7 y^3 z^4 (5 + 12 z) + \\ & 21 y^5 z^2 (-1 + 4 z (1 + z)) + y^7 (1 + 12 z (-3 + 4 z)) - \\ & y z^6 (7 + 6 z (6 + 5 z))) \text{Sin}[y/(y^2 + z^2)] + \\ & e^{\frac{y}{y^2+z^2}} r_2 ((y^7 (1 + 6 y (1 + y)) - 4 (-1 + \nu) y^7 (2 + 3 y) z - 3 y^5 (7 \\ & + 4 y (7 + 4 y)) z^2 - \\ & 8 (-1 + \nu) y^5 (1 + 4 y) z^3 + 7 y^3 (5 - 12 y^2) z^4 - \\ & 8 (-1 + \nu) y^3 (-1 + 3 y) z^5 + 7 y (-1 + 12 y) z^6 + \\ & 8 (-1 + \nu) y z^7 + 6 (-1 + 5 y) z^8 + 4 (-1 + \nu) z^9) \text{Cos}[z/(\\ & y^2 + z^2)] + (-2 (-1 + \nu) y^8 (1 + 2 y) - \\ & y^6 (7 + 6 y (6 + 5 y)) z + 8 (-1 + \nu) y^6 z^2 + \\ & 7 y^4 (5 + 12 y) z^3 + 4 (-1 + \nu) y^4 (5 + 6 y) z^4 + \\ & 21 y^2 (-1 + 4 y (1 + y)) z^5 + \\ & 8 (-1 + \nu) y^2 (1 + 4 y) z^6 + (1 + 12 y (-3 + 4 y)) z^7 + \\ & 2 (-1 + \nu) (-1 + 6 y) z^8 - 6 z^9) \text{Sin}[z/(y^2 + z^2)]) \end{aligned}$$

Ec. 3.126

$$\gamma_{zx} = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = & (1/((y^2 + z^2)^6))2 \nu (-4 e^{\frac{z}{y^2+z^2}}) \\ & s_2 (y^2 + z^2)^2 (y^4 (1 - 6 z) + z^4 (1 + 2 z) - 2 y^2 z^2 (3 \\ & + 2 z)) \text{Cos}[y/(y^2 + z^2)] + 8 e^{\frac{z}{y^2+z^2}} \\ & s_2 y (y^2 + z^2)^2 (-y^4 + 2 y^2 (-1 + z) z + z^3 (2 + 3 z)) \text{Sin}[\\ & y/(y^2 + z^2)] + (1/(-1 + 2 \nu)) e^{\frac{y}{y^2+z^2}} r_2 ((-2 y^{10} + y^9 (9 - 16 \nu \\ & + 36 z) + 2 y^5 z^3 (14 + (-23 + 48 \nu - 84 z) z) \\ & + 4 y^3 z^5 (35 + 4 (-5 + 8 \nu - 3 z) z) + y^4 z^3 (35 - 50 z \\ & + 80 \nu z + 28 z^3) + y^8 (5 - 8 \nu + 6 z (2 + z)) \\ & - 4 y^7 z (7 + 2 z (-1 + 6 z)) + y z^7 (-44 + z (-35 \\ & + 48 \nu + 36 z)) + y^6 z (-7 + 4 z (-5 + 8 \nu + 7 (-6 \\ & + z) z)) + z^7 (1 - z (-5 + 8 \nu + 2 z (6 + z))) + \\ & y^2 z^5 (-21 + 2 z (-10 + 16 \nu + 3 z (28 + z)))) \text{Cos}[z/(\\ & y^2 + z^2)] + (6 y^{10} + 8 y^9 z + \\ & 4 y^6 z^2 (14 + (-20 + 32 \nu - 21 z) z) + \\ & z^8 (7 + (11 - 16 \nu - 6 z) z) + \\ & 2 y^2 z^6 (-56 + z (-4 + 39 z)) + \\ & y^5 z^2 (21 + 4 z (-5 + 8 \nu + 42 z)) + \\ & 2 y^4 z^4 (35 + z (-37 + 48 \nu + 42 z)) - \end{aligned}$$

Ec. 3.127

$$\begin{aligned}
& y^8 (5 + z (25 - 48 v + 78 z)) + \\
& y^3 z^4 (-35 - 4 z (-5 + 8 v - 42 z + 4 z^2)) + \\
& y z^6 (7 - 4 z (-5 + 8 v + 2 z (9 + z))) + \\
& y^7 (-1 + 4 z (-5 + 8 v + 2 z (-9 + 2 z))) \text{Sin}[z/(\\
& \qquad \qquad \qquad y^2 + z^2))] \\
\sigma_y = & \frac{1}{(-1 + 2v)(y^2 + z^2)^6} (4(-1 + 2v)e^{\frac{z}{y^2+z^2}} s_2(-6y^9 - 8(-1 + v)y^2z^6 \\
& + 2(-1 + v)z^8(1 + 2z) - 8(-1 + v)y^6z^2(1 + 4z) - 2(-1 \\
& + v)y^8(-1 + 6z) - 4(-1 + v)y^4z^4(5 + 6z) + 7y^3z^4(5 + 12z) \\
& + 21y^5z^2(-1 + 4z(1 + z)) + y^7(1 + 12z(-3 + 4z)) - yz^6(7 \\
& + 6z(6 + 5z))) \text{Cos}[\frac{y}{y^2 + z^2}] - 4(-1 + 2v)e^{\frac{z}{y^2+z^2}} s_2(-4(-1 \\
& + v)y^9 - 8(-1 + v)y^7z + 8(-1 + v)y^5z^3(-1 + 3z) + 4(-1 \\
& + v)yz^7(2 + 3z) + 8(-1 + v)y^3z^5(1 + 4z) + 6y^8(-1 + 5z) \\
& + 7y^6z(-1 + 12z) + 7y^4z^3(5 - 12z^2) + z^7(1 + 6z(1 + z)) \\
& - 3y^2z^5(7 + 4z(7 + 4z))) \text{Sin}[\frac{y}{y^2 + z^2}] + 2e^{\frac{y}{y^2+z^2}} r_2((-vy^8(-5 \\
& + 8v + y)(1 + 2y) + y^6(-2(7 + 6y(6 + 5y)) + v(21 + 4y(29 \\
& + 33y + 9y^2)))z + 2vy^6(-10 + 16v + y(4 + 3y))z^2 \\
& - y^4(-14(5 + 12y) + v(105 + 4y(77 + 6y(7 + 2y))))z^3 \\
& + 2vy^4(-25 + 8v(5 + 6y) + y(-23 + 14y))z^4 - 7y^2(6 \\
& - 24y(1 + y) + v(-9 + 4y(7 + 6y(2 + y))))z^5 + 4vy^2(-5 \\
& + 8v(1 + 4y) + y(-20 + 7y))z^6 + (2 + 24y(-3 + 4y) - v(3 \\
& + 4y(-25 + 6y(1 + 2y))))z^7 + v(5 + y(-35 + 6y) + 8v(-1 \\
& + 6y))z^8 + 12(-1 + v + 3vy)z^9 - 2vz^{10}) \text{Cos}[\frac{z}{y^2 + z^2}] + (y^7(1 \\
& + 6y(1 + y))(-2 + v(3 + y)) + vy^7(-20 + 16v(2 + 3y) \\
& + y(-25 + 8y))z + y^5(42 - 63v + 24y(7 + 4y) - 2vy(140 \\
& + 3y(44 + 13y)))z^2 + 4vy^5(-5 + 4(-5 + y)y + 8v(1 \\
& + 4y))z^3 + 7y^3(-10 + 24y^2 + v(15 - 2y(-5 + 6y(2 \\
& + y))))z^4 + 2vy^3(10 - 37y + 16v(-1 + 3y))z^5 + 7y(2 - 24y \\
& + v(-3 + 4y(8 + 3y(2 + y))))z^6 - 4vy(-5 + 8v + 2y \\
& + 4y^2)z^7 + (12 - 60y + v(-17 + 6y(8 + 13y)))z^8 + v(11 \\
& - 16v - 8y)z^9 - 6vz^{10}) \text{Sin}[\frac{z}{y^2 + z^2}])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z = & \frac{1}{(-1 + 2\nu)(y^2 + z^2)^6} (-4(-1 + 2\nu)e^{\frac{z}{y^2+z^2}}s_2(-6y^9 + 2\nu y^8(1 - 6z) \\
& - 8\nu y^2 z^6 + 2\nu z^8(1 + 2z) - 8\nu y^6 z^2(1 + 4z) - 4\nu y^4 z^4(5 + 6z) \\
& + 7y^3 z^4(5 + 12z) + 21y^5 z^2(-1 + 4z(1 + z)) + y^7(1 \\
& + 12z(-3 + 4z)) - yz^6(7 + 6z(6 + 5z)))\text{Cos}\left[\frac{y}{y^2 + z^2}\right] + 4(-1 \\
& + 2\nu)e^{\frac{z}{y^2+z^2}}s_2(-4\nu y^9 - 8\nu y^7 z + 8\nu y^5 z^3(-1 + 3z) + 4\nu yz^7(2 \\
& + 3z) + 8\nu y^3 z^5(1 + 4z) + 6y^8(-1 + 5z) + 7y^6 z(-1 + 12z) \\
& + 7y^4 z^3(5 - 12z^2) + z^7(1 + 6z(1 + z)) - 3y^2 z^5(7 + 4z(7 \\
& + 4z)))\text{Sin}\left[\frac{y}{y^2 + z^2}\right] + 2e^{\frac{y}{y^2+z^2}}r_2(((-1 + \nu)y^8(-5 + 8\nu + y)(1 \\
& + 2y) + y^6(7 + 4y(11 + 9y(2 + y)) - \nu(21 + 4y(29 + 33y \\
& + 9y^2)))z - 2(-1 + \nu)y^6(-10 + 16\nu + y(4 + 3y))z^2 \\
& + y^4(-35 - 4y(35 + 6y(7 + 2y)) + \nu(105 + 4y(77 + 6y(7 \\
& + 2y))))z^3 - 2(-1 + \nu)y^4(-25 + 8\nu(5 + 6y) + y(-23 \\
& + 14y))z^4 + 7y^2(3 - 4y(1 + 6y(1 + y)) + \nu(-9 + 4y(7 \\
& + 6y(2 + y))))z^5 - 4(-1 + \nu)y^2(-5 + 8\nu(1 + 4y) + y(-20 \\
& + 7y))z^6 + (-1 + 3\nu + 4(7 - 25\nu)y + 24(3 + \nu)y^2 + 48(-1 \\
& + \nu)y^3)z^7 - (-1 + \nu)(5 + y(-35 + 6y) + 8\nu(-1 + 6y))z^8 \\
& - 12(\nu + 3(-1 + \nu)y)z^9 + 2(-1 + \nu)z^{10})\text{Cos}\left[\frac{z}{y^2 + z^2}\right] \\
& + (-y^7(1 + 6y(1 + y))(-1 - y + \nu(3 + y)) - (-1 \\
& + \nu)y^7(-20 + 16\nu(2 + 3y) + y(-25 + 8y))z + y^5(-21 + 63\nu \\
& + 56(-2 + 5\nu)y + 24(-7 + 11\nu)y^2 + 78(-1 + \nu)y^3)z^2 \\
& - 4(-1 + \nu)y^5(-5 + 4(-5 + y)y + 8\nu(1 + 4y))z^3 + 7y^3(5 \\
& + 10y - 12y^3 + \nu(-15 + 2y(-5 + 6y(2 + y))))z^4 - 2(-1 \\
& + \nu)y^3(10 - 37y + 16\nu(-1 + 3y))z^5 - 7y(1 - 4y(2 + 3y(2 \\
& + y)) + \nu(-3 + 4y(8 + 3y(2 + y))))z^6 + 4(-1 + \nu)y(-5 + 8\nu \\
& + 2y + 4y^2)z^7 - (5 - 17\nu + 12(1 + 4\nu)y + 78(-1 + \nu)y^2)z^8 \\
& + (-1 + \nu)(-11 + 16\nu + 8y)z^9 + 6(-1 \\
& + \nu)z^{10})\text{Sin}\left[\frac{z}{y^2 + z^2}\right])
\end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = 0$$

Ec. 3.128

$$\tau_{yz} = \frac{1}{(y^2 + z^2)^6} (4e^{\frac{z}{y^2+z^2}} s_2 (4(-1+\nu)y^9 + 8(-1+\nu)y^7z - 4(-1+\nu)yz^7(2 + 3z) - 8(-1+\nu)y^3z^5(1+4z) + 6y^8(-1+5z) + 7y^6z(-1 + 12z) + 8y^5z^3(-1+\nu+3z-3\nu z) + 7y^4z^3(5-12z^2) + z^7(1+6z(1+z)) - 3y^2z^5(7+4z(7+4z))) \cos[\frac{y}{y^2+z^2}] - 4e^{\frac{z}{y^2+z^2}} s_2 (6y^9 - 8(-1+\nu)y^2z^6 + 2(-1+\nu)z^8(1+2z) - 8(-1+\nu)y^6z^2(1+4z) - 2(-1+\nu)y^8(-1+6z) - 4(-1 + \nu)y^4z^4(5+6z) - 7y^3z^4(5+12z) + y^7(-1+12(3-4z)z) - 21y^5z^2(-1+4z(1+z)) + yz^6(7+6z(6 + 5z))) \sin[\frac{y}{y^2+z^2}] + 4e^{\frac{y}{y^2+z^2}} r_2 ((y^7(1+6y(1+y)) - 4(-1 + \nu)y^7(2+3y)z - 3y^5(7+4y(7+4y))z^2 - 8(-1+\nu)y^5(1 + 4y)z^3 + 7y^3(5-12y^2)z^4 - 8(-1+\nu)y^3(-1+3y)z^5 + 7y(-1+12y)z^6 + 8(-1+\nu)yz^7 + 6(-1+5y)z^8 + 4(-1 + \nu)z^9) \cos[\frac{z}{y^2+z^2}] + (-2(-1+\nu)y^8(1+2y) - y^6(7+6y(6 + 5y))z + 8(-1+\nu)y^6z^2 + 7y^4(5+12y)z^3 + 4(-1+\nu)y^4(5 + 6y)z^4 + 21y^2(-1+4y(1+y))z^5 + 8(-1+\nu)y^2(1+4y)z^6 + (1+12y(-3+4y))z^7 + 2(-1+\nu)(-1+6y)z^8 - 6z^9) \sin[\frac{z}{y^2+z^2}]))$$

$$\tau_{zx} = 0$$

Aplicando las condiciones de frontera se puede resolver para los coeficientes desconocidos, los resultados para los coeficientes y su posterior sustitución en las Ec. 3.117 a 3.128 no se muestran dado que son muy extensos.

3.4.3 Solución logarítmica

Para este caso se proponen las funciones φ y χ de la forma mostrada en la Ec. 3.129.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \chi_1 = 0 \\ \varphi_2 &= s_1 + s_2 \text{Log}[z_3] \\ \varphi_3 &= r_1 + r_2 \text{Log}[z_2] \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.129}$$

Asumiendo $u = 0$ considerando que las fracturas se extienden en longitud sobre el plano cartesiano yz , se pueden usar las expresiones para las funciones χ faltantes como en la Ec. 3.115 y 3.116. Al sustituir las expresiones anteriores en las Ec. 3.45 Ec. 3.49, se obtienen los siguientes resultados para desplazamientos (Ec. 3.130), deformaciones (Ec. 3.131-1.132) y esfuerzos (Ec. 3.133-1.134).

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= \frac{4(1+\nu)((-3+4\nu)s_2y^3 + 3(r_2 - s_2)y^2z + (-3+4\nu)s_2yz^2 + (-r_2 + s_2)z^3)}{E(y^2 + z^2)^2} \\ w &= -\frac{4(1+\nu)((r_2 - s_2)y^3 + (-3+4\nu)r_2y^2z + 3(-r_2 + s_2)yz^2 + (-3+4\nu)r_2z^3)}{E(y^2 + z^2)^2} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.130}$$

$$\varepsilon_x = 0 \quad \text{Ec. 3.131}$$

$$\varepsilon_y = \frac{8(1+\nu)(y-z)(y+z)((-1+2\nu)s_2y^2 - 4(r_2+s_2)yz + (-1+2\nu)s_2z^2)}{E(y^2+z^2)^3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} 2(1+\nu)(-r_2y^4(-5+8\nu+y) + 2y^3(8s_2+r_2(4+5y))z + 2r_2y^3z^2 - 4y(4s_2+r_2(2+5y))z^3 + r_2(-5+8\nu+3y)z^4 + 2r_2z^5)$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{16(1+\nu)(r_2+s_2)(-y^4 + 2(-1+\nu)y^3z + 6y^2z^2 + 2(-1+\nu)yz^3 - z^4)}{E(y^2+z^2)^3} \quad \text{Ec. 3.132}$$

$$\gamma_{zx} = 0$$

$$\sigma_x = \frac{1}{(-1+2\nu)(y^2+z^2)^3} 2\nu(-4(-1+2\nu)s_2(y^4-z^4) + r_2(y^5+y^4(-5+8\nu-10z) - 2y^3(-4+z)z + 20y^2z^3 + (5-8\nu-2z)z^4 - yz^3(8+3z)))$$

$$\sigma_y = \frac{1}{(-1+2\nu)(y^2+z^2)^3} (8(y-z)(y+z)(s_2y^2 + 4(r_2+s_2)yz + s_2z^2) + 16\nu^2(r_2+s_2)(y^4-z^4) + 2\nu(-4s_2(y-z)(y+z)(3y^2+8yz+3z^2) + r_2(y^5+20y^2z^3-3y(-8+z)z^3+(5-2z)z^4-2y^3z(12+z)-5y^4(1+2z)))) \quad \text{Ec. 3.133}$$

$$\sigma_z = -\frac{1}{(-1+2\nu)(y^2+z^2)^3} 2(4(-1+2\nu)s_2(y-z)(y+z)(-4yz+\nu(y^2+z^2)) + r_2((-1+\nu)y^5 + (-1+\nu)y^4(-5+8\nu-10z) + 20(-1+\nu)y^2z^3 - (-1+\nu)z^4(-5+8\nu+2z) + yz^3(-8-3\nu(-8+z)+3z) + 2y^3z(4+z-\nu(12+z))))$$

$$\tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{yz} = -\frac{8(r_2+s_2)(y^4 - 2(-1+\nu)y^3z - 6y^2z^2 - 2(-1+\nu)yz^3 + z^4)}{(y^2+z^2)^3} \quad \text{Ec. 3.134}$$

$$\tau_{zx} = 0$$

Aplicando las condiciones de frontera y resolviendo para los coeficientes desconocidos se obtiene

$$\begin{aligned} r_2 = & -(((-1 + 2\nu) F_z (y^2 + z^2)^3 (y^3 - 3y z^2)) / (2A (y^7 (5 - y + \nu(-17 + 16\nu + y)) + 2y^6 (12 + \nu(-22 + 4\nu(-5 + 4\nu) - 5y) + 5y)z + y^5 (-63 + \nu(211 - 176\nu - 5y) + 5y)z^2 + 2y^4 (-48 + 2\nu(59 + 2\nu(-5 + 4\nu)) + 25(-1 + \nu)y)z^3 + y^3 (-5 - 3y + \nu(17 - 16\nu + 3y))z^4 + 2y^2 (36 + 31y - \nu(90 + 4\nu(-5 + 4\nu) + 31y))z^5 + y(63 - 211\nu + 176\nu^2 + 9(-1 + \nu)y)z^6 - 2(\nu(6 + 4\nu(-5 + 4\nu) - 3y) + 3y)z^7))) \\ s_2 = & -(((-1 + 2\nu) F_z (y^2 + z^2)^3 (y^3 + (-3 + 4\nu)y^2 z - 3yz^2 + (-3 + 4\nu)z^3)) / (2A (y^7 (5 - y + \nu(-17 + 16\nu + y)) + 2y^6 (12 + \nu(-22 + 4\nu(-5 + 4\nu) - 5y) + 5y)z + y^5 (-63 + \nu(211 - 176\nu - 5y) + 5y)z^2 + \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.135}$$

$$\begin{aligned}
& 2 y^4 (-48 + 2 \nu (59 + 2 \nu (-5 + 4 \nu)) + 25 (-1 + \nu) y) z^3 + \\
& \quad y^3 (-5 - 3 y + \nu (17 - 16 \nu + 3 y)) z^4 + \\
& 2 y^2 (36 + 31 y - \nu (90 + 4 \nu (-5 + 4 \nu) + 31 y)) z^5 + \\
& \quad y (63 - 211 \nu + 176 \nu^2 + 9 (-1 + \nu) y) z^6 - \\
& \quad 2 (\nu (6 + 4 \nu (-5 + 4 \nu) - 3 y) + 3 y) z^7))
\end{aligned}$$

Los valores obtenidos para los coeficientes se sustituyen en las Ec. 3.117 a 3.135, sin embargo, los resultados completos no se muestran en esta sección debido a la longitud de las expresiones.

3.5 Cálculo de la integral J

Como se menciona en la sección 2.4.5, la integral J; para el caso plano, se deriva de una integral de línea con independencia de la trayectoria, dada la naturaleza de la integral J esta se puede aplicar de manera natural a la solución de problemas de fractura haciendo uso de funciones de variable compleja, aplicando la fórmula integral de Cauchy (2.2.3), el cálculo de residuos (2.2.5) y las series de Laurent (2.2.4).

Para realizar el cálculo de la integral J en un caso tres dimensional en analogía al caso plano (2.4.5), se parte de una integral de superficie la cual resulta difícil de evaluar, como alternativa se puede partir de una integral de volumen la cual resulta más simple de evaluar y se puede aplicar a problemas estáticos o dinámicos, con respuestas elásticas, plásticas o viscoelásticas.

Asumiendo ausencia de cargas térmicas, deformaciones plásticas y tracciones en las caras de las grietas, así como cargas de cuerpo nulas en el volumen de integración, se tiene la forma general de la ecuación 2.158, para que esta ecuación nos permita un mejor tratamiento numérico del problema se fija la atención en un punto específico t sobre el frente de grieta de una grieta plana en un dominio tres dimensional, sobre dicho punto se define un marco coordenado de referencia con x_t en dirección normal al frente de grieta, y_t normal al plano de grieta y z_t tangente al frente de grieta (Figura 3.6).

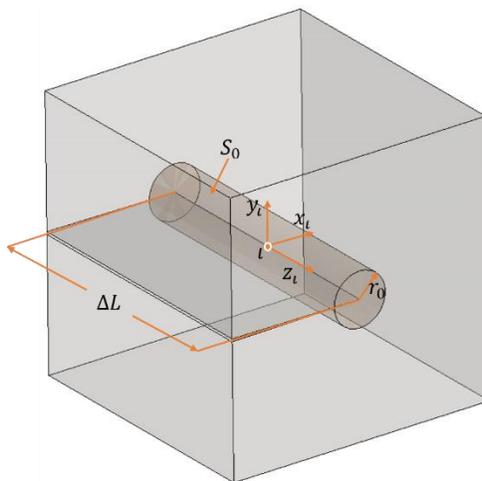


Figura 3.6 Cilindro alrededor del frente de grieta

A partir del punto ι y su marco coordenado asignado se construye un cilindro de longitud ΔL y radio r_0 que rodea al frente de grieta (Figura 3.6), asumiendo condiciones cuasi estáticas se puede definir un valor ponderado promedio (\bar{J}) de J sobre el segmento ΔL del frente de grieta como se muestra en la ecuación

$$\bar{J}\Delta L = \int_{\Delta L} J(\eta)q d\eta = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{S_0} [U_V \delta_{1j} - \sigma_{jk} u_{j1}] q n_j dS$$

Donde:

$J(\eta) \rightarrow$ Valor punto a punto de J

$S \rightarrow$ Área de la superficie del cilindro

$q \rightarrow$ Función de ponderación

Ec. 3.136

El integrando de la ecuación anterior se evalúa respecto al marco coordenado local definido para ι , en donde además la función de ponderación q se interpreta como el avance virtual de la grieta a lo largo del cilindro, partiendo de cero en los extremos. Si ahora se construye un segundo cilindro de radio r_1 alrededor del frente de grieta será posible calcular el valor promedio ponderado de J sobre una superficie cerrada (Figura 3.7), en analogía al contorno simple cerrado del caso dos dimensional (Ec. 3.137).

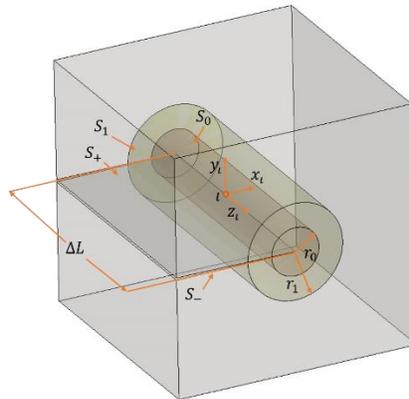


Figura 3.7 Superficie cerrada sobre el frente de grieta

$$\bar{J}\Delta L = \int_{S_0+S_1} [\sigma_{jk} u_{k1} - U_V \delta_{1j}] q m_j dS - \int_{S_++S_-} [\sigma_{2k} u_{k1}] q dS$$

Ec. 3.137

Donde:

$m_j \rightarrow$ Normal hacia afuera de la superficie

En la figura 3.7 se puede observar que se define una superficie cerrada con las superficies S_0 , S_1 , S_+ y S_- , siendo las últimas dos las superficies de la grieta encerradas por las superficies del cilindro de radio mayor si se asume que las superficies de la grieta están libres de tracción entonces la ecuación 3.137 queda como.

$$\bar{J}\Delta L = \int_{S_0+S_1} [\sigma_{jk} u_{k1} - U_V \delta_{1j}] q m_j dS$$

Ec. 3.138

Si se aplica el teorema de divergencia a la Ec. 3.138 y recordando que se asume un dominio libre fuerzas de cuerpo, tracciones en las superficies de la grieta y deformaciones térmicas, se obtiene la expresión de la ecuación 3.139 denominada integral de dominio.

$$\bar{J}\Delta L = \int_V [\sigma_{jk}u_{k,1} - U_V\delta_{1j}] \frac{\partial q}{\partial x_j} dV \quad \text{Ec. 3.139}$$

Para una representación general de J se puede omitir el factor q, el cual resulta conveniente cuando se realizan aplicaciones con elementos finitos, sin embargo, dada la naturaleza del método aquí propuesto se puede omitir sin pérdida de generalidad. Además, se puede indizar J, haciendo referencia a las distintas direcciones disponibles para el espacio tres dimensional propuesto (Ec. 3.140).

$$\bar{J}_n = \frac{1}{\Delta L} \int_V [\sigma_{jk}u_{k,1} - U_V\delta_{1j}] dV \quad \text{Ec. 3.140}$$

Considerando que el desarrollo de las soluciones de los problemas de elasticidad aquí presentados, están en términos de variables complejas, es posible emplear las herramientas presentadas en las secciones 2.3 y 2.6 para el cálculo de la integral J (Ec. 3.140), de modo que el valor de la integral alrededor de la singularidad del dominio se puede conocer evaluando el residuo del integrando. Los valores obtenidos de este cálculo se presentan en la sección 4 "Implementación computacional".

3.6 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELÁSTICOS CON MÚLTIPLES SINGULARIDADES

En la sección 3.4 se presentó la solución de problemas elásticos con una singularidad en analogía a un problema de una celda hexaédrica con una grieta horizontal pasante, en la presente sección se muestra la solución de problemas elásticos en los cuales existen al menos dos singularidades, las cuales se pueden interpretar de nuevo como las puntas de grietas pasantes sobre celdas hexaédricas

3.6.1 Problema con dos singularidades

Se resuelve un problema considerando dos singularidades, con una distribución y bajo una condición de carga como la que se muestra en la Figura 3.8. Para tal caso se proponen las funciones φ y χ de la forma mostrada en la Ec. 3.12941, se propone una forma logarítmica para la solución dado que resulta ser la que mejor se ajusta al problema. La ubicación de las distintas singularidades en el dominio se define sumando o restando un escalar a z_3 para corrimiento en z y z_2 para corrimiento en y .

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \chi_1 = 0 \\ \varphi_2 &= s_1 + s_2(\text{Log}[z_3 - 0.2] + \text{Log}[z_3]) \\ \varphi_3 &= r_1 + r_2(\text{Log}[z_2] + \text{Log}[z_2]) \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.141}$$

Asumiendo $u = 0$ considerando que las fracturas se extienden en longitud sobre el plano cartesiano yz , se pueden usar las expresiones para las funciones χ faltantes como en la Ec. 3.115 y 3.116. Al sustituir las expresiones anteriores en las Ec. 3.45-3.49, se obtienen los siguientes resultados para desplazamientos (Ec. 3.130-42), deformaciones (Ec. 3.131-43-1.144) y esfuerzos (Ec. 3.133-45-1.146).

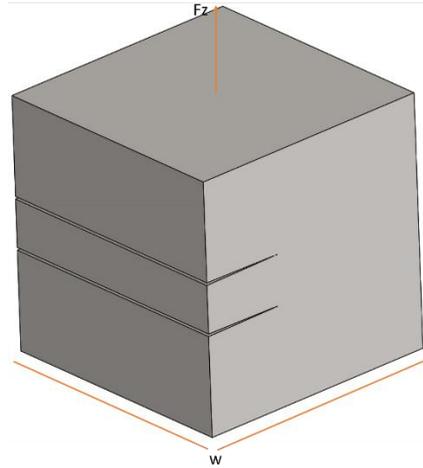


Figura 3.8 Celda hexaédrica con dos singularidades

$$\begin{aligned}
 & u = 0 \\
 v = & \frac{1}{E} \left(\frac{8(1+\nu)r_2z(-3y^2+z^2)}{(y^2+z^2)^2} + s_2 \left(-\frac{8(-3+\nu+4\nu^2)y(0.02+y^2+(-0.2+z)z)}{(0.04+y^2+(-0.4+z)z)(y^2+z^2)} \right. \right. \\
 & \left. \left. + y^2 \left(\frac{12(1+\nu)z}{(y^2+z^2)^2} + \frac{-1.6+12z+\nu(-1.6+12z)}{(0.04+y^2+z(-0.4+1z))^2} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{(y^2+(-0.2+z)^2)(y^2+z^2)^2} \left(4z(4y^2z^2(0.04+(-0.4+z)z+\nu(0.04 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + (-0.4+z)z)) + 2y^4(0.02+(-0.2+z)z+\nu(0.02+(-0.2+z)z)) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + 2z^2(0.0008+z(-0.016+z(0.14+(-0.6+z)z))) + \nu(0.0008+z(-0.016 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + z(0.14+(-0.6+z)z)))) \right) \right) \right) \quad \text{Ec. 3.142} \\
 w = & \frac{1}{E(y^2+z^2)^2} \left(-8(1+\nu)r_2(y^3+(-3+4\nu)y^2z-3yz^2+(-3+4\nu)z^3) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(0.04+y^2+(-0.4+z)z)^2} s_2 y \left((8+8\nu)y^6 + y^4(0.16-8z^2+\nu(0.16 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - 8z^2)) + y^2(0.0064+z(-0.128+z(-0.32+(12.8-40z)z))) + \nu(0.0064 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + z(-0.128+z(-0.32+(12.8-40z)z))) \right) + z^2(-0.0192+z(0.384 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + z(-3.04+(12.8-24z)z)) + \nu(-0.0192+z(0.384+z(-3.04+(12.8 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - 24z)z)))) \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_x = 0$$

$\frac{E}{c}$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left(-\frac{64(1+\nu)r_2 y(y-z)z(y+z)}{(y^2+z^2)^3} \right. \\
&+ s_2 \left(\frac{1}{(y^2+(-0.2+z)^2)^3 (y^2+z^2)^3} 32y((y^2+(-0.2+z)^2)^3 z^3 \right. \\
&+ \nu(y^2+(-0.2+z)^2)^3 z^3 - 0.002(y^2+z^2)^3 - 0.002\nu(y^2+z^2)^3 + 0.06z(y^2+z^2)^3 \\
&+ 0.06\nu z(y^2+z^2)^3 - 0.45z^2(y^2+z^2)^3 - 0.45\nu z^2(y^2+z^2)^3 + z^3(y^2+z^2)^3 \\
&+ \nu z^3(y^2+z^2)^3) + y^3 \left(-\frac{32(1+\nu)z}{(y^2+z^2)^3} + \frac{4.8 + \nu(4.8 - 32.z) - 32z}{(0.04 + 1.y^2 + z(-0.4 + 1.z))^3} \right) \\
&+ \frac{32(-0.5 + \nu(0.5 + \nu))y^2(0.0008 + y^4 + y^2(0.04 + z(-0.4 + 2.z)) + z(-0.0164 + z(0 \\
&\quad (0.04 + y^2 + (-0.4 + z)z)^2 (y^2 + z^2)^2} \\
&+ (y^2 z^2(1.28 + z(-12.8 + 32z) + \nu^2(-2.56 + (25.6 - 64z)z) + B(-1.28 + (12.8 - 32z) \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E(y^2+z^2)^3} (4(1+\nu)r_2(-y^4(-5+8\nu+y) + 2y^3(4+5y)z + 2y^3z^2 - 4y(2 \\
&\quad + 5y)z^3 + (-5+8\nu+3y)z^4 + 2z^5) \\
&\quad + \frac{1}{(0.04 + y^2 + (-0.4 + z)z)^3} s_2(y^9(-4.8 + 64z + \nu(-4.8 + 64z)) \\
&\quad + y^5 z(0.1536 + z(-2.88 + (13.44 - 9.6z)z) + \nu(0.1536 + z(-2.88 \\
&\quad + (13.44 - 9.6z)z))) + y^7(0.064 + z(1.92 + z(-38.4 + 128z)) \\
&\quad + \nu(0.064 + z(1.92 + z(-38.4 + 128.z)))) + y^3 z(0.002048 \\
&\quad + z(-0.06144 + z(0.6144 + z(-1.8559 + z(-9.6 + (76.8 - 128z)z)))) \\
&\quad + \nu(0.002048 + z(-0.06144 + z(0.6144 + z(-1.8559 + z(-9.6 + (76.8 \\
&\quad - 128.z)z)))))) + yz^3(-0.002048 + z(0.06144 + z(-0.768 + z(5.184 \\
&\quad + z(-21.12 + (52.8 - 64.z)z)))) + \nu(-0.002048 + z(0.06144 \\
&\quad + z(-0.768 + z(5.184 + z(-21.12 + (52.8 - 64z)z))))))
\end{aligned}$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{yz} &= \frac{1}{E(y^2+z^2)^3} (-32r_2((1+\nu)y^4 - 2(-1+\nu^2)y^3z - 6(1+\nu)y^2z^2 \\
&\quad - 2(-1+\nu^2)yz^3 + (1+\nu)z^4) \\
&\quad - \frac{1}{(y^2+(-0.2+z)^2)^3} 16s_2(y^4(y^2+(-0.2+z)^2)^3 \\
&\quad + \nu y^4(y^2+(-0.2+z)^2)^3 - 6y^2(y^2+(-0.2+z)^2)^3 z^2 \\
&\quad - 6\nu y^2(y^2+(-0.2+z)^2)^3 z^2 + (y^2+(-0.2+z)^2)^3 z^4 \\
&\quad + \nu(y^2+(-0.2+z)^2)^3 z^4 + 2y(y^2+(-0.2+z)^2)^3 z(y^2+z^2) \\
&\quad - 2\nu^2 y(y^2+(-0.2+z)^2)^3 z(y^2+z^2) - 0.12y^2(y^2+z^2)^3 \\
&\quad - 0.12\nu y^2(y^2+z^2)^3 + y^4(y^2+z^2)^3 + \nu y^4(y^2+z^2)^3 \\
&\quad - 0.4y(y^2+(-0.2+z)^2)(y^2+z^2)^3 + 0.4\nu^2 y(y^2 \\
&\quad + (-0.2+z)^2)(y^2+z^2)^3 - 0.008z(y^2+z^2)^3 \\
&\quad - 0.008\nu z(y^2+z^2)^3 + 1.8y^2 z(y^2+z^2)^3 + 1.8\nu y^2 z(y^2+z^2)^3 \\
&\quad + 2y(y^2+(-0.2+z)^2)z(y^2+z^2)^3 - 2\nu^2 y(y^2 \\
&\quad + (-0.2+z)^2)z(y^2+z^2)^3 + 0.12z^2(y^2+z^2)^3 \\
&\quad + 0.12\nu z^2(y^2+z^2)^3 - 6y^2 z^2(y^2+z^2)^3 - 6.\nu y^2 z^2(y^2+z^2)^3 \\
&\quad - 0.6z^3(y^2+z^2)^3 - 0.6\nu z^3(y^2+z^2)^3 + z^4(y^2+z^2)^3 \\
&\quad + \nu z^4(y^2+z^2)^3)
\end{aligned}$$

Ec. 3.144

$$\gamma_{zx} = 0$$

$$\sigma_x = \frac{1}{(1-2\nu)(1+\nu)} (v^2((8r_2(-0.5y^{11} + y^{10}(-1 + 5z) + y^9(1.29 - 8.2z - 0.5z^2) + y^8(-0.582 + 4.98z - 4.2z^2 + 5.z^3) + y^7(0.1376 - 1.728z + 3.6z^2 - 10.4z^3 + 3z^4) + y^6(-0.01872 + 0.384z - 1.116z^2 + 4.08z^3 - 5.2z^4 - 14z^5) + y^2z^3(-0.00416 + 0.01296z - 0.192z^2 + 0.284z^3 - 2.64z^4 + 2.9z^5 - 7z^6) + y^5(0.001424 - 0.0528z + 0.1536z^2 - 0.0639z^3 + 2.58z^4 + 8.4z^5 + 7.z^6) + y^4(-0.000048 + 0.004z - 0.00816z^2 - 0.224z^3 - 0.336z^4 - 3.23z^5 - 0.4z^6 - 22z^7) + z^4(0.000048 + 0.000032z + 0.0024z^2 + 0.0064z^3 + 0.086z^4 - 0.3z^5 + 1.4z^6 + z^7) + yz^3(0.000128 - 0.001392z + 0.00864z^2 - 0.0448z^3 + 0.064z^4 - 0.75z^5 + 4.6z^6 + 1.5z^7) + y^3z(-0.000128 + 0.000032z + 0.048z^2 - 0.0288z^3 + 1.216z^4 - 0.47z^5 + 15.2z^6 + 5.5z^7)))$$

$$\sigma_y = \frac{1}{(1-2\nu)(1+\nu)} (v^2((8r_2(-0.5y^{11} + y^{10}(-1 + 5z) + y^9(1.29 - 8.2z - 0.5z^2) + y^8(-0.582 + 4.98z - 4.2z^2 + 5.z^3) + y^7(0.1376 - 1.728z + 3.6z^2 - 10.4z^3 + 3z^4) + y^6(-0.01872 + 0.384z - 1.116z^2 + 4.08z^3 - 5.2z^4 - 14z^5) + y^2z^3(-0.00416 + 0.01296z - 0.192z^2 + 0.284z^3 - 2.64z^4 + 2.9z^5 - 7z^6) + y^5(0.001424 - 0.0528z + 0.1536z^2 - 0.063z^3 + 2.58z^4 + 8.4z^5 + 7.z^6) + y^4(-0.000048 + 0.004z - 0.00816z^2 - 0.224z^3 - 0.336z^4 - 3.23z^5 - 0.4z^6 - 22z^7) + z^4(0.000048 + 0.000032z + 0.0024z^2 + 0.0064z^3 + 0.086 - 0.3z^5 + 1.4z^6 + z^7) + yz^3(0.000128 - 0.001392z + 0.00864z^2 - 0.0448z^3 + 0.064z^4 - 0.75z^5 + 4.6z^6 + 1.5z^7) + y^3z(-0.000128 + 0.000032z + 0.048z^2 - 0.0288z^3 + 1.216z^4 - 0.47z^5 + 15.2z^6 + 5.5z^7)))$$

Ec. 3.145

$$\sigma_z = \frac{1}{(1+\nu)(y^2 + z^2)^3} \left(\frac{1}{(0.04 + y^2 - 0.4z + z^2)^3} 64s_2(y^9(-0.075 + \nu(-0.075 + z) + z) + y^5z(0.0024 - 0.045z + 0.21z^2 - 0.15z^3) + \nu(0.0024 - 0.045z + 0.21z^2 - 0.15z^3)) + y^7(0.001 + 0.03z - 0.6z^2 + 2z^3 + \nu(0.001 + 0.03z - 0.6z^2 + 2z^3)) + y^3z(0.000032 - 0.00096z + 0.0096z^2 - 0.028z^3 - 0.15z^4 + 1.2z^5 - 2z^6 + B(0.000032 - 0.00096z + 0.0096z^2 - 0.028z^3 - 0.15z^4 + 1.2z^5 - 2z^6)) + yz^3(-0.000032 + 0.00096z - 0.012z^2 + 0.081z^3 - 0.33z^4 + 0.825z^5 - 1z^6) + \nu(-0.000032 + 0.00096z - 0.012z^2 + 0.081z^3 - 0.33z^4 + 0.825z^5 - 1z^6))$$

$$\tau_{xy} = 0$$

Ec. 3.146

$$\tau_{yz} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(-\frac{1}{(y^2 + (-0.2 + z)^2)^3 (y^2 + z^2)^3} 16s_2(y^4(y^2 + (-0.2 + z)^2)^3 \right. \\
+ \nu y^4(y^2 + (-0.2 + z)^2)^3 - 6y^2(y^2 + (-0.2 + z)^2)^3 z^2 \\
- 6\nu y^2(y^2 + (-0.2 + z)^2)^3 z^2 + (y^2 + (-0.2 + z)^2)^3 z^4 \\
+ \nu(y^2 + (-0.2 + z)^2)^3 z^4 + 2y(y^2 + (-0.2 + z)^2)^3 z(y^2 + z^2) \\
- 2\nu^2 y(y^2 + (-0.2 + z)^2)^3 z(y^2 + z^2) - 0.12y^2(y^2 + z^2)^3 \\
- 0.12\nu y^2(y^2 + z^2)^3 + y^4(y^2 + z^2)^3 + \nu y^4(y^2 + z^2)^3 \\
- 0.4y(y^2 + (-0.2 + z)^2)(y^2 + z^2)^3 + 0.4\nu^2 y(y^2 \\
+ (-0.2 + z)^2)(y^2 + z^2)^3 - 0.008z(y^2 + z^2)^3 \\
- 0.008\nu z(y^2 + z^2)^3 + 1.8y^2 z(y^2 + z^2)^3 + 1.8\nu y^2 z(y^2 + z^2)^3 \\
+ 2y(y^2 + (-0.2 + z)^2)z(y^2 + z^2)^3 - 2\nu^2 y(y^2 \\
+ (-0.2 + z)^2)z(y^2 + z^2)^3 + 0.12z^2(y^2 + z^2)^3 \\
+ 0.12\nu z^2(y^2 + z^2)^3 - 6y^2 z^2(y^2 + z^2)^3 - 6\nu y^2 z^2(y^2 + z^2)^3 \\
- 0.6z^3(y^2 + z^2)^3 - 0.6\nu z^3(y^2 + z^2)^3 + z^4(y^2 + z^2)^3 \\
\left. + Bz^4(y^2 + z^2)^3 \right) \\
\tau_{zx} = 0$$

Aplicando las condiciones de frontera y resolviendo para los coeficientes desconocidos se obtiene

$$r_2 = (0.0625(1 - 2\nu)(1 \\
+ \nu)E(y^2 + (-0.2 + z)^2)^3((-0.2 + y)^2 + z^2)^3(y^2 + z^2)^5(0. \\
- ((-F_z)((8 + 8\nu)y^7 + y^5(0.16 - 8z^2 + \nu(0.16 - 8z^2)) \\
+ y^3(0.0064 - 0.128z - 0.32z^2 + 12.8z^3 - 40z^4 + \nu(0.0064 \\
- 0.128z - 0.32z^2 + 12.8z^3 - 40z^4)) + yz^2(-0.0192 \\
+ 0.384z - 3.04z^2 + 12.8z^3 - 24z^4 + \nu(-0.0192 + 0.384z \\
- 3.04z^2 + 12.8z^3 \\
- 24z^4))))/(E(0.04 + y^2 + (-0.4 + z)z)^2(y^2 + z^2)^2))) \quad \text{Ec. 3.147} \\
s_2 = -((0.0625(1 + \nu)(-0.5 + 1.\nu)F_z(0.04 + y^2 + (-0.4 + z)z)^3(0.04 \\
+ (-0.4 + y)y + z^2)(y^2 + z^2)^3(y^3(0.0002 + y(-0.004 \\
+ y(0.035 + (-0.15 + 0.25y)y)) + \nu(0.0002 + y(-0.004 \\
+ y(0.035 + (-0.15 + 0.25y)y)))) + y^2(-0.0006 + y(0.012 \\
+ y(-0.105 + (0.45 - 0.75y)y)) + \nu(0.0002 + y(-0.004 \\
+ y(0.035 + (-0.15 + 0.25y)y))) + \nu^2(0.0008 + y(-0.016 \\
+ y(0.14 + y(-0.6 + 1y))))))z$$

Los valores obtenidos para los coeficientes (Ec. 3.147) se sustituyen en las Ec. 3.11742 a 3.146, sin embargo, los resultados completos no se muestran en esta sección debido a la longitud de las expresiones.

3.7 Cálculo de la integral J para problemas con múltiples singularidades

De manera análoga al método presentado en la sección 3.5 para el cálculo de la integral J en problemas de fractura simple, se definen integrales de dominio para calcular la integral J en casos de fractura múltiple. Retomando la teoría presentada en la sección 2.4.6, se puede establecer el cálculo de la integral J 'global' para fractura múltiple considerando la sumatoria de integrales alrededor de cada grieta en el cuerpo como establece la Ec. 2.165.

Ya en la sección 3.5 se establece la expresión para el cálculo del vector J (Ec. 3.140) la cual para el caso de múltiples fracturas se puede reescribir como se muestra a continuación.

$$\bar{J}_n = \sum_{l=1}^N J_n^{(l)}(x, y, z) = 0 \quad \text{Ec. 3.148}$$

Donde:

$N \rightarrow$ número de grietas

Dado que el vector J podrá tener tres componentes y las grietas en el dominio pueden tener direcciones aleatorias, la Ec. 3.148 se puede reescribir teniendo en cuenta las direcciones de las grietas (Ec. 3.149) donde α, β y γ son los ángulos medidos respecto a cada dirección cartesiana (Figura 3.9), dadas las condiciones, distribución y tipos de grietas asumidas en los ejemplos antes presentados, la expresión de la Ec. 3.149 puede resumirse a la Ec. 3.150.

$$\begin{aligned} \bar{J}_x &= \sum_{l=1}^N [J_x^{(l)}(x, y, z)(\cos \alpha \cos \beta) + J_y^{(l)}(x, y, z)(\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ &\quad - \sin \alpha \cos \gamma) + J_z^{(l)}(x, y, z)(\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma)] = 0 \\ \bar{J}_y &= \sum_{l=1}^N [J_x^{(l)}(x, y, z)(\sin \alpha \cos \beta) + J_y^{(l)}(x, y, z)(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ &\quad + \cos \alpha \cos \gamma) + J_z^{(l)}(x, y, z)(\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma)] = 0 \\ \bar{J}_z &= \sum_{l=1}^N [J_x^{(l)}(x, y, z)(-\sin \beta) + J_y^{(l)}(x, y, z)(\cos \beta \sin \gamma) \\ &\quad + J_z^{(l)}(x, y, z) \cos \beta \cos \gamma] = 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.149}$$

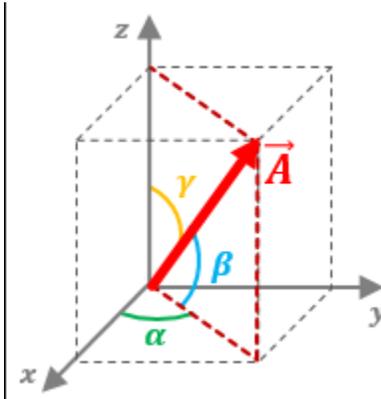


Figura 3.9 Ángulos de un vector 3D

$$\begin{aligned} \bar{J}_x &= \sum_{l=1}^N [J_x^{(l)}(x, y, z)(\cos \alpha \cos \beta) + J_y^{(l)}(x, y, z)(-\sin \alpha) \\ &\quad + J_z^{(l)}(x, y, z)(\cos \alpha \sin \beta)] = 0 \\ \bar{J}_y &= \sum_{l=1}^N [J_x^{(l)}(x, y, z)(\sin \alpha \cos \beta) + J_y^{(l)}(x, y, z)(\cos \alpha) \\ &\quad + J_z^{(l)}(x, y, z)(\sin \alpha \sin \beta)] = 0 \\ \bar{J}_z &= \sum_{l=1}^N [J_x^{(l)}(x, y, z)(-\sin \beta) + J_y^{(l)}(x, y, z) \cos \beta] = 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.150}$$

Es posible emplear las herramientas presentadas en las secciones 2.3 y 2.6 para el cálculo de la integral J (Ec. 3.140), de modo que el valor de la integral alrededor de las singularidades del dominio se puede conocer evaluando el residuo del integrando.

4 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Como se mostró en secciones (ver 3) anteriores, el uso de una función potencial de desplazamientos multicompleja, resulta válida para dar solución a problemas de elasticidad en medios continuos y medios con singularidades, sin embargo, las expresiones resultantes para los campos de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos resultan extensas, lo cual dificulta su manipulación para la obtención de resultados.

Por lo anterior resulta natural la implementación computacional del proceso de solución propuesto, esta implementación se lleva a cabo en la plataforma Wolfram Mathematica® la cual facilita la representación gráfica de los resultados, además de un manejo simple y directo de los cálculos simbólicos necesarios.

A continuación, se muestran los resultados de la implementación computacional, se empieza con los problemas elásticos asumiendo dominios simplemente conexos y posteriormente se presentan los problemas con singularidades, así como el cálculo de la integral J. Finalmente se muestra una aplicación integrada para la solución de los problemas elásticos haciendo uso del potencial multicomplejo.

4.1 Solución de problemas elásticos

Para la implementación computacional de la solución de problemas elásticos se establecen primero las constantes elásticas tales como el módulo de Young, el coeficiente de Poisson y los parámetros de Lamé, para todos los casos se consideran los valores numéricos correspondientes al acero estructural.

Una vez establecidas las constantes elásticas, se definen las variables complejas z_1, z_2, z_3 , así como las funciones paramétricas a_i, b_i, c_i , necesarias. Las funciones de solución se definen según se muestra en las secciones 3.2 y 3.3, de manera análoga las funciones de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos se definen según lo desarrollado en la sección 3.1.

Para la aplicación de las condiciones de frontera las funciones de solución son sustituidas en las expresiones de los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos, las expresiones resultantes se hacen funciones evaluables en x, y, z , lo cual permite generar un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son los coeficientes desconocidos de las soluciones propuestas.

Una vez que se conocen los valores de los coeficientes de las soluciones propuestas y se sustituyen en las expresiones necesarias, se generan los ploteos de densidad en tres dimensiones para mostrar gráficamente los resultados. Estos resultados gráficos son los que a continuación se presentan, contrastándolos contra resultados obtenidos para los mismos problemas usando una plataforma comercial basada en el método de los elementos finitos.

4.1.1 Problema uniaxial

El problema uniaxial aquí resuelto es análogo al que se plantea en la sección 3.2, se considera una celda hexaédrica unitaria, con desplazamientos de un milímetro aplicados a las caras perpendiculares a z. A continuación, se muestran las gráficas correspondientes a los desplazamientos u y w, del lado izquierdo se presentan los resultados obtenidos al aplicar el potencial de desplazamientos multicomplejo propuesto y del lado derecho los resultados obtenidos con ANSYS® (Figura 4.1) de las imágenes se concluye que los resultados son equivalentes en magnitud y distribución.

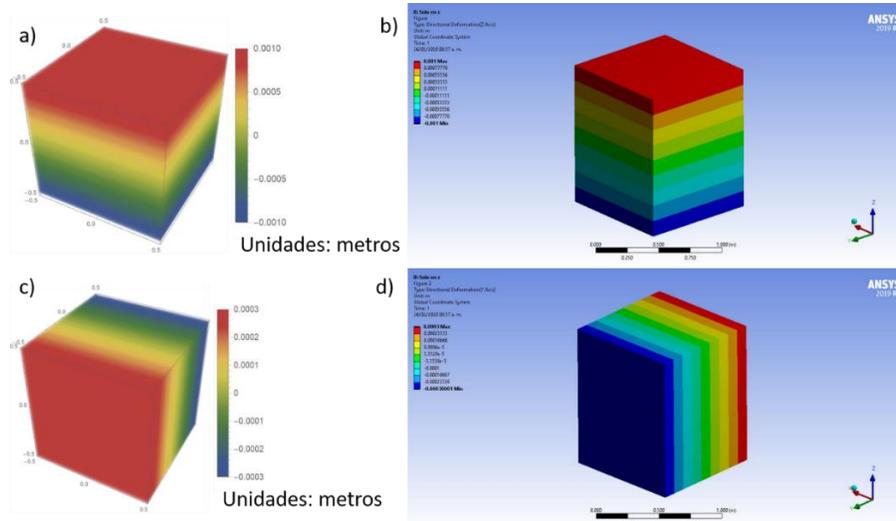


Figura 4.1 Comparación de desplazamientos calculados para el caso uniaxial a) w, b) w ANSYS, c) v, d) v ANSYS

Otros resultados relevantes de la solución del problema uniaxial tales como los desplazamientos totales, la deformación y el esfuerzo equivalentes se muestran en la Figura 4.2. Otros resultados como esfuerzos o deformaciones normales y cortantes se omiten ya que al ser constantes los gráficos no resultan significativos para análisis.

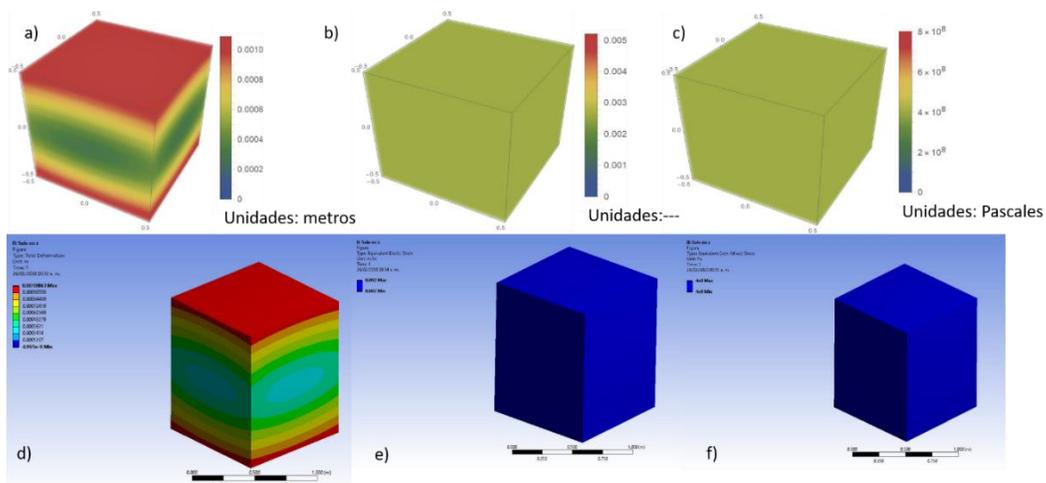


Figura 4.2 Comparación de resultados globales del problema uniaxial a) desplazamiento total, b) deformación equivalente, c) esfuerzo equivalente, d) desplazamiento total ANSYS e) deformación equivalente ANSYS f) esfuerzo equivalente ANSYS

4.1.2 Problema biaxial

Para el problema biaxial se considera la celda hexaédrica unitaria con desplazamientos de un milímetro aplicados sobre las caras perpendiculares al eje x y las caras perpendiculares al eje z, estos desplazamientos actúan en dirección normal hacia afuera de la celda. Los desplazamientos resultantes u y w se muestran en la Figura 4.3, en donde se aprecia que los resultados obtenidos por el método del potencial de desplazamientos multicomplejo son equivalentes a los resultados obtenidos en ANSYS®.

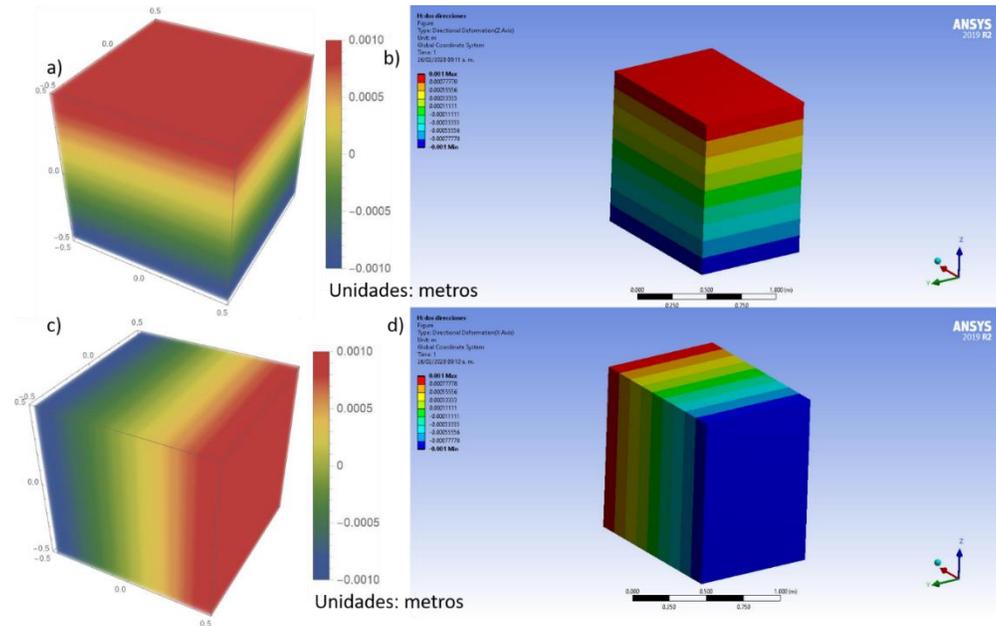


Figura 4.3 Comparación de desplazamientos calculados para el caso biaxial a) w , b) w ANSYS, c) u , d) u ANSYS

Otros resultados relevantes a comparar son los desplazamientos totales, las deformaciones y esfuerzos equivalentes, los cuales se muestran en la Figura 4.4 y de la cual se puede concluir de nuevo la equivalencia de resultados entre un método de solución y otro.

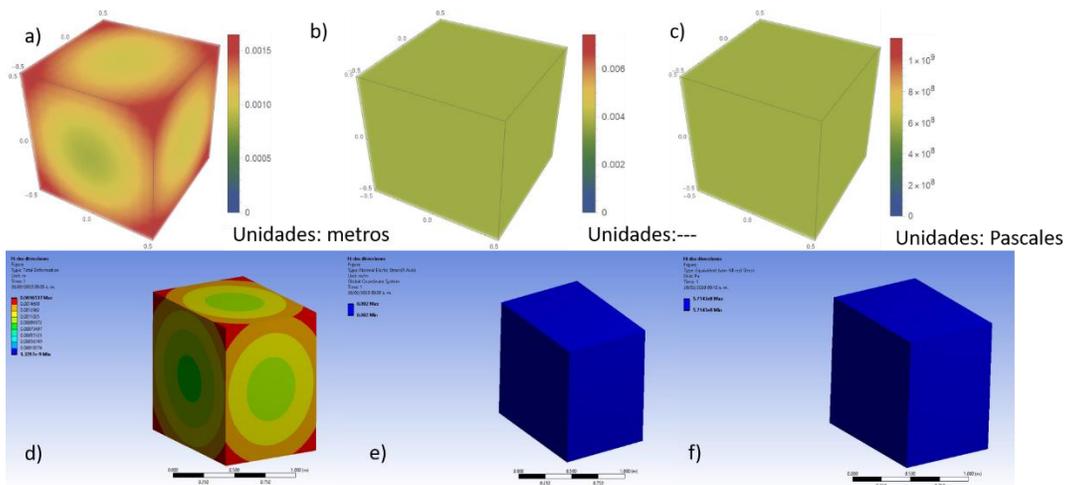


Figura 4.4 Comparación de resultados globales del problema biaxial a) desplazamiento total, b) deformación equivalente, c) esfuerzo equivalente, d) desplazamiento total ANSYS e) deformación equivalente ANSYS f) esfuerzo equivalente ANSYS

4.1.3 Problema cortante puro

Para el problema del cortante puro se aplican desplazamientos de un milímetro en dirección tangencial sobre las caras perpendiculares al eje x y al eje z (Figura 3.4), al igual que en los problemas anteriores se muestran los resultados de desplazamientos u y w (Figura 4.5) de los resultados gráficos se puede observar que los resultados vuelven a ser equivalentes.

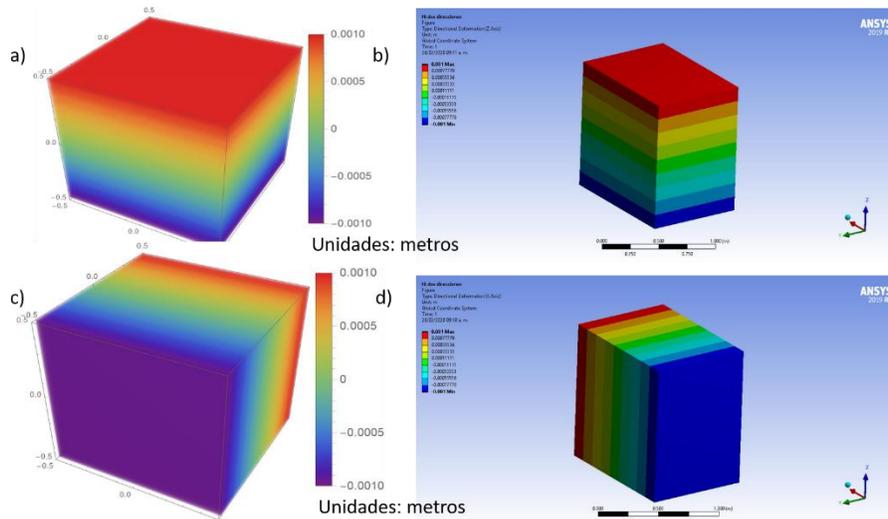


Figura 4.5 Comparación de desplazamientos calculados para el caso de cortante puro a) w, b) w ANSYS, c) u, d) u ANSYS

Los resultados de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos equivalentes también resultan ser iguales (Figura 4.6), demostrando que para condiciones de cortante el método de solución propuesto también es válido, otros resultados direccionales no se presentan debido a que al ser constantes sobre todo el dominio, no resultan significativos para el análisis de resultados.

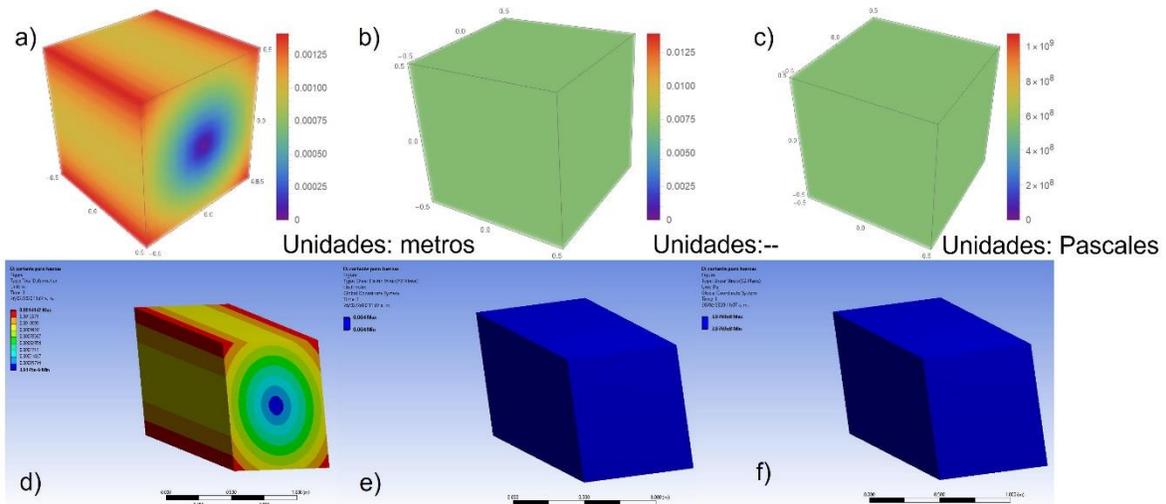


Figura 4.6 Comparación de resultados globales del problema de cortante puro a) desplazamiento total, b) deformación equivalente, c) esfuerzo equivalente, d) desplazamiento total ANSYS e) deformación equivalente ANSYS f) esfuerzo equivalente ANSYS

4.2 Solución de problemas con singularidades

En la solución de problemas con singularidades, a diferencia de las soluciones sobre dominios continuos, los resultados aplicando el potencial de desplazamientos multicomplejo difieren de los resultados obtenidos con ANSYS®, los resultados y su análisis se muestran en las siguientes secciones.

4.2.1 Problema con una sola singularidad

Para este problema se consideran condiciones análogas a las planteadas en la sección 3.4, se analiza una celda hexaédrica unitaria con una grieta horizontal pasante, con solo una punta dentro del dominio, la celda es sometida a tracción uniaxial en dirección z provocando un desplazamiento equivalente de 0.001 metros. La solución se hace usando el potencial de desplazamientos multicomplejo y el método de elementos finitos usando ANSYS®.

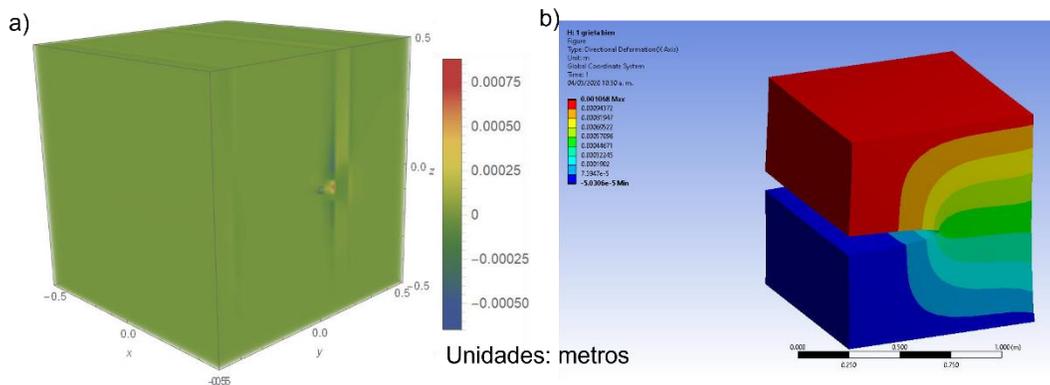


Figura 4.7 Comparativo de desplazamientos en dirección z una grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

En general las soluciones obtenidas por ambos métodos resultan con diferencias en los gráficos de distribución, tanto para desplazamientos, como para deformaciones y esfuerzos, por lo cual; contrario a los problemas sobre dominios continuos, se requiere un análisis con mayor detalle de los resultados a fin de establecer la correspondencia, similitudes y diferencias entre los dos métodos de solución. Los primeros resultados presentados corresponden a los desplazamientos (Figura 4.7), deformaciones normales (Figura 4.8) y esfuerzos normales (Figura 4.9) en dirección z, de estos gráficos es posible observar una clara diferencia en las distribuciones espaciales de los resultados, sobre todo en la gráfica de desplazamientos, en la cual el resultado obtenido por elementos finitos presenta un cambio progresivo (Figura 4.7b) sobre toda la longitud de la celda unitaria, mientras que el resultado obtenido por el potencial multicomplejo presenta una distribución casi uniforme de los desplazamientos con una clara concentración sobre la singularidad (Figura 4.7a), en cuanto a las magnitudes por elementos finitos se tiene un desplazamiento máximo de 0.0011 metros, mientras que para el caso del potencial multicomplejo se tiene un valor máximo en desplazamiento de 0.0085 m, estas diferencias, especialmente las distribuciones en los resultados se atribuyen a la forma de la solución propuesta para el potencial multicomplejo, la cual es de naturaleza logarítmica, motivo por el cual presenta el crecimiento acelerado en la vecindad de la singularidad. El efecto de concentración en la vecindad de la singularidad es en general un comportamiento esperado, sin embargo, los resultados sobre el resto del cuerpo resultan sin un cambio aparente, la obtención de las gráficas por secciones permite ver el cambio sobre las regiones del cuerpo libres de singularidades, pero por otro lado se omite el cambio alrededor de la singularidad el cual es el de

mayor importancia en este caso, así se prefiere la representación gráfica donde si se presenta la singularidad y los resultados en su vecindad.

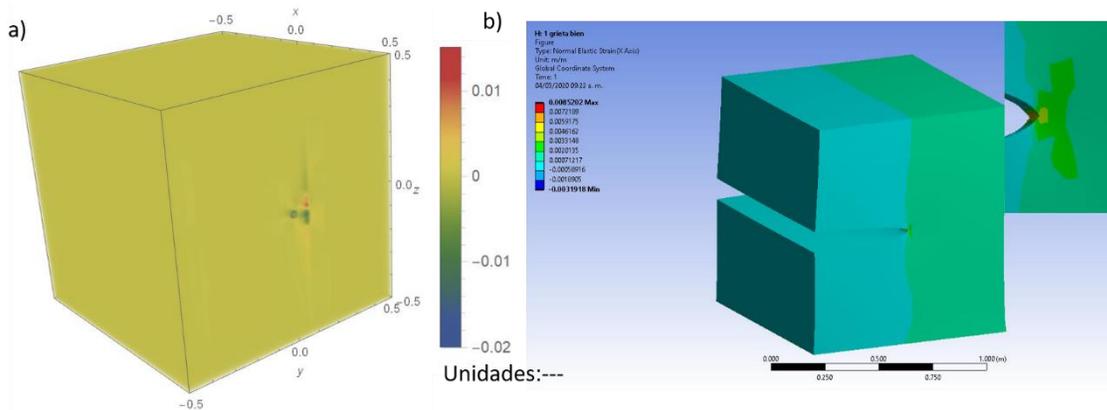


Figura 4.8 Comparativo de deformaciones normales en dirección z una grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

Para el caso de deformaciones y esfuerzos normales en dirección z, los resultados obtenidos por elementos finitos (Figura 4.8bFigura 4.9b) muestran la distribución característica en forma de “mariposa” alrededor de la punta de la grieta, por otro lado los resultados obtenidos al aplicar el potencial multicomplejo muestran un comportamiento similar alrededor de la singularidad (Figura 4.8aFigura 4.9a), para estos resultados la distribución sobre el resto del cuerpo muestra mayor coherencia entre las soluciones con los diferentes métodos. En lo que respecta a la magnitud de los resultados, para deformación normal en z, por elementos finitos se presentan magnitudes en el rango de -0.0039 a 0.085, mientras que con el potencial multicomplejo la magnitud de las deformaciones va de -0.02 a 0.014, los rangos para los esfuerzos normales van de $-7.5e8$ a $2.43e9$ Pascales, para elementos finitos y de $-4e9$ a $1e9$ Pascales, para el potencial multicomplejo.

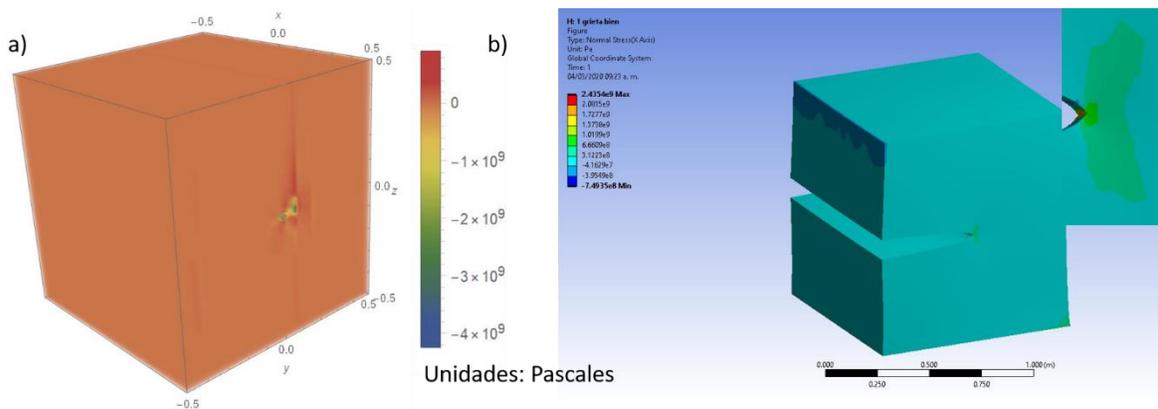


Figura 4.9 Comparativo de esfuerzos en dirección z una grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

Otros resultados relevantes para comparar son las deformaciones (Figura 4.10) y esfuerzos (Figura 4.11) cortantes sobre el plano yz, en ambos resultados se tiene una distribución centrada en la vecindad de la singularidad. En el aspecto de la distribución de resultados puede observarse cercanía entre los resultados de uno y otro método, sin embargo, la variación en magnitud resulta mayor que la obtenida en los resultados normales. Para la deformación cortante sobre el plano yz, los valores van de -0.034 a 0.032 aplicando el potencial multicomplejo, mientras que aplicando elementos

finitos el rango va de -0.0074 a 0.008 . En el caso del esfuerzo cortante se obtienen magnitudes que van de los -2.6 e9 Pascales a los 2.4 e9 Pascales, al resolver con el potencial multicomplejo y de los -5.72 e8 Pascales a los 6.21 e8 Pascales al solucionar con elementos finitos.

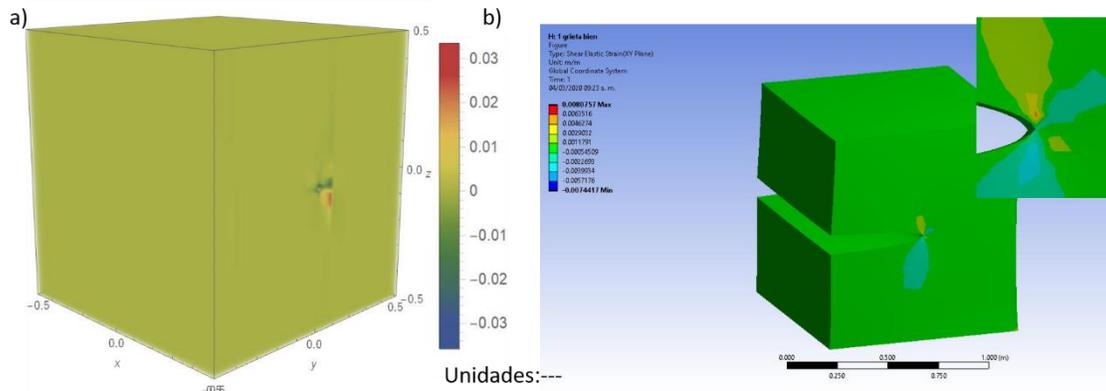


Figura 4.10 Comparativo de deformaciones en el plano yz una grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

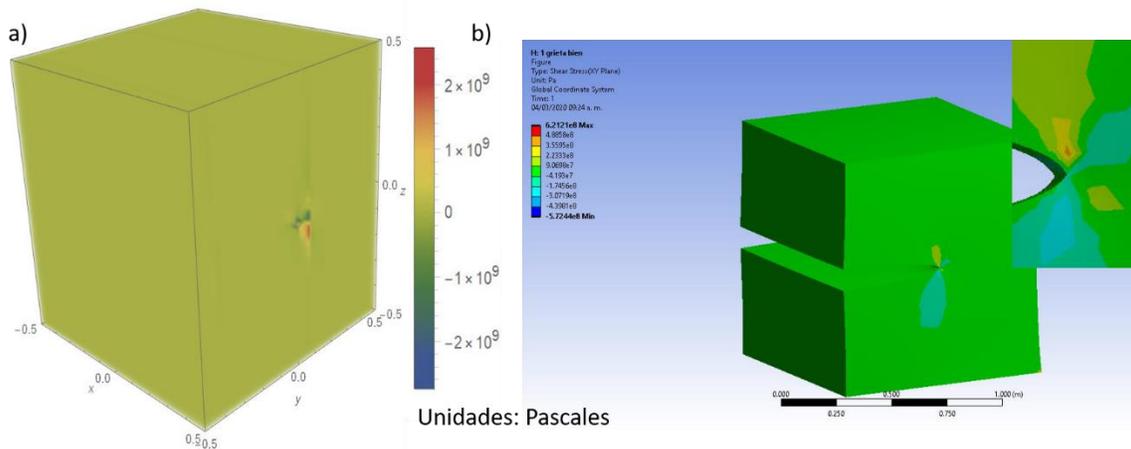


Figura 4.11 Comparativo de esfuerzos en el plano yz una grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

Al momento se han presentado los resultados que involucran la dirección z cartesiana, dado que al ser esta dirección sobre la cual se aplican las cargas, son estos resultados los que resultan de mayor impacto para el global, por lo anterior los resultados para las otras dos direcciones se omiten. Para finalizar la comparación de resultados, se presentan tres resultados globales, los cuales son los desplazamientos totales (Figura 4.132), las deformaciones equivalentes (Figura 4.13) y esfuerzos equivalentes (Figura 4.14), en los tres resultados vuelve a destacarse la concentración de resultados alrededor de la punta de la grieta.

En el resultado de desplazamientos se mantiene la mayor discrepancia en las distribuciones, ya que para la solución en ANSYS® se mantiene un cambio gradual y bien definido de la grieta hacia las fronteras (Figura 4.12b), mientras que la gráfica para los desplazamientos calculados con el potencial multicomplejo tienen una variación nula fuera de la vecindad de la singularidad (Figura 4.12a).

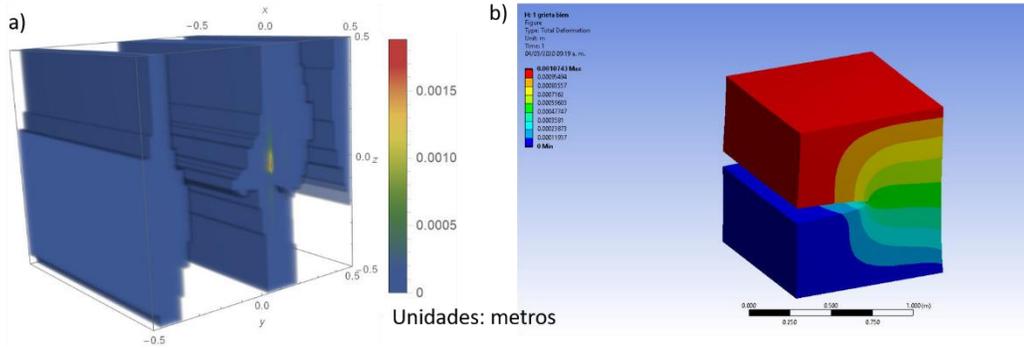


Figura 4.12 Comparativo de desplazamientos totales grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

Las distribuciones para los resultados de deformaciones y esfuerzos equivalentes resultan tener mayor congruencia entre uno y otro método de solución, en ambos casos la forma de mariposa a la derecha de la punta de la grieta se mantiene sin importar el método de solución empleado.

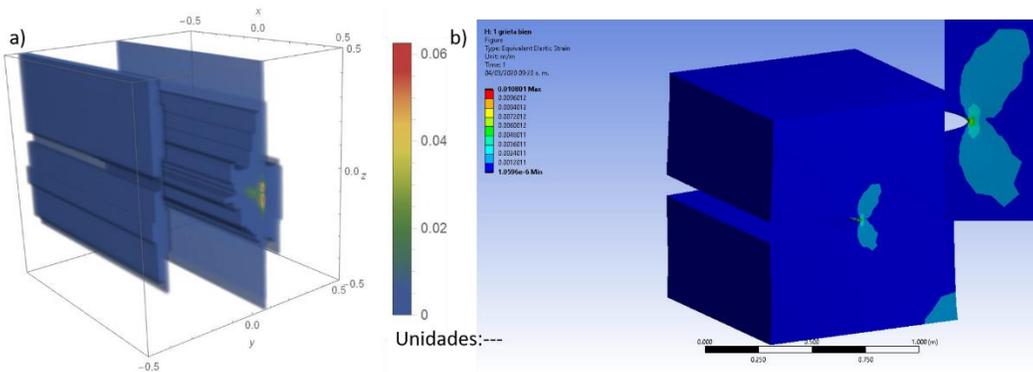


Figura 4.13 Comparativo de deformaciones equivalentes una grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

En cuanto a las magnitudes de los resultados, para los desplazamientos se tienen intervalos de 0 a 0.0011 metros al resolver por elementos finitos y de 0 a 0.0018 metros resolviendo con el potencial multicomplejo, en deformaciones equivalentes resolviendo con elementos finitos se tienen magnitudes de 0 a 0.01 y de 0 a 0.06 con el potencial, finalmente para esfuerzos equivalentes los rangos van de $2e5$ a $1.25e9$ Pascales y 0 a $5.6e9$ Pascales, para elementos finitos y el potencial multicomplejo respectivamente.

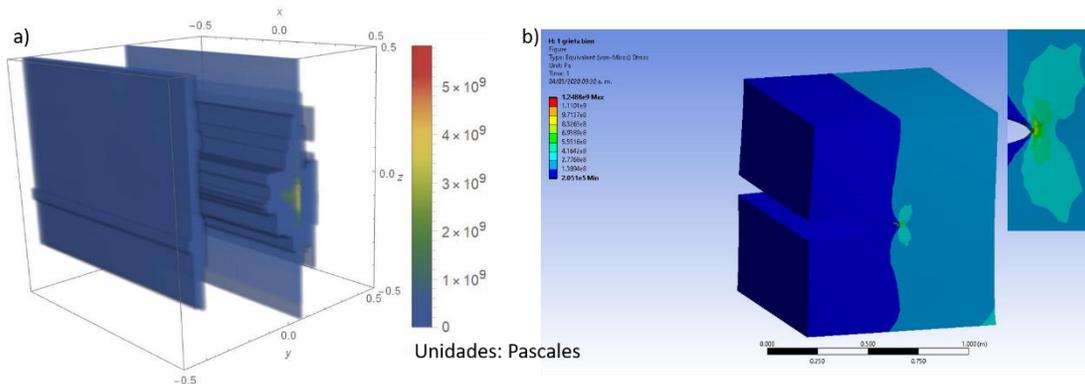


Figura 4.14 Comparativo de esfuerzos equivalentes una grieta a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

De los resultados presentados se puede concluir que el método planteado haciendo uso de un potencial multicomplejo resulta apto para resolver problemas de elasticidad con singularidades, se obtienen distribuciones de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos, según lo esperado dadas las condiciones de los problemas, sin embargo, en cuanto a las magnitudes de los resultados se tienen diferencias relevantes, lo anterior se puede atribuir a la naturaleza propia de los métodos de solución comparados, en elementos finitos se deben tener en cuenta factores tales como la calidad de la malla, el orden de los elementos, así como el promediado de los resultados o el número de puntos de cuadratura considerados, por otro lado con el potencial de desplazamientos multicomplejo la dependencia completa del resulta está en la solución propuesta, en este caso la función logarítmica, cuya aplicación a las expresiones desarrolladas y su comportamiento propio son los principales factores a considerar y que en las mayoría de los resultados obtenidos propicia magnitudes mayores, respecto a los elementos finitos.

4.2.2 Problema con dos singularidades

Para este problema se consideran condiciones análogas a las planteadas en la sección 3.6, se analiza una celda hexaédrica unitaria con dos grietas horizontales pasantes, con solo una punta dentro del dominio, la celda es sometida a tracción uniaxial en dirección z, provocando un desplazamiento equivalente de 0.001 metros. Al igual que en la sección anterior la solución se hace usando el potencial de desplazamientos multicomplejo y el método de elementos finitos usando ANSYS®.

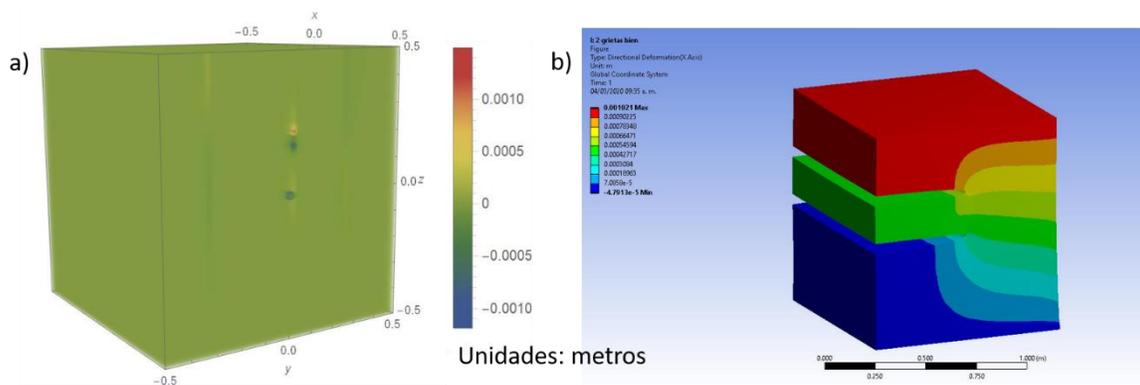


Figura 4.15 Comparativo de desplazamientos en dirección z dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

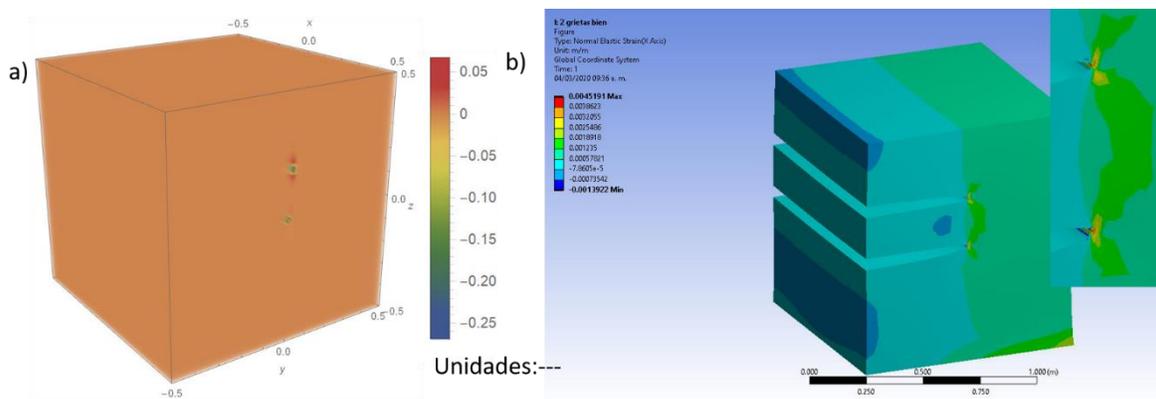


Figura 4.16 Comparativo de deformaciones normales en dirección z dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

Como se hizo en la sección anterior se presentan las gráficas correspondientes a los resultados en las que está involucrada la dirección cartesiana z, recordando que se eligen estos resultados ya que se consideran los más relevantes dadas las condiciones de carga.

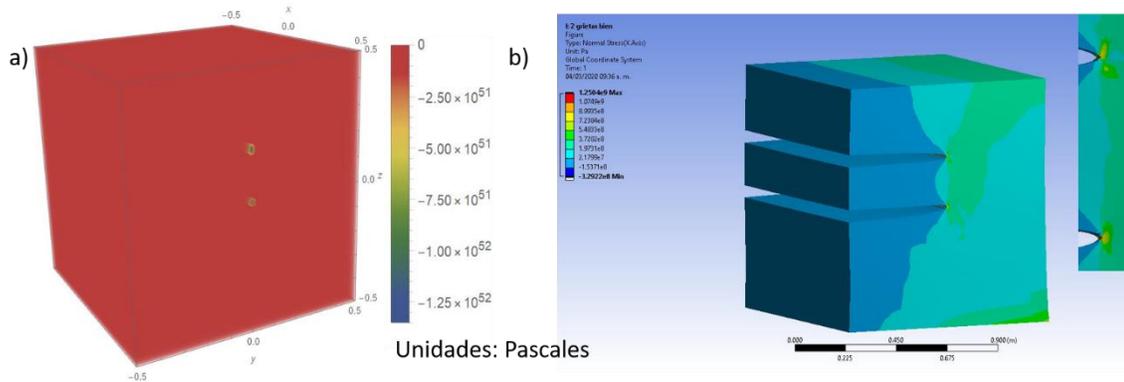


Figura 4.17 Comparativo de esfuerzos en dirección z dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

En la Figura 4.15 se muestran los resultados para los desplazamientos en dirección z, la gráfica de la izquierda corresponde a la solución con el potencial multicomplejo donde se nota un resultado concentrado en la vecindad de la punta de la grieta, el cual tiende a ser uniforme en las zonas libres de singularidades, la magnitud de los desplazamientos va de -0.0012 a 0.0018 metros, por otra parte la gráfica al lado derecho presenta el resultado de la solución con ANSYS® en el cual la distribución de desplazamientos tiene un cambio gradual sobre todo el dominio, con magnitudes entre -0.001 y 0.001.

En el caso de las deformaciones normales en z (Figura 4.176), se puede considerar que los resultados son más cercanos en cuanto a distribución, ya que se tienen las concentraciones alrededor de las puntas de las grietas, en ambos casos con mayor concentración en la grieta superior y una distribución que tiende a ser uniforme lejos de estas, sin embargo en lo que respecta a magnitudes para el caso de la solución con elementos finitos (Figura 4.176b) estas varían de -0.0014 a 0.0045 mientras que para la solución con el potencial multicomplejo el rango es de -0.25 a 0.05 (Figura 4.176a). El caso de esfuerzos normales (Figura 4.187) es similar al de deformaciones ya que las distribuciones son similares, pero las magnitudes son mucho más elevadas para el caso del potencial multicomplejo.

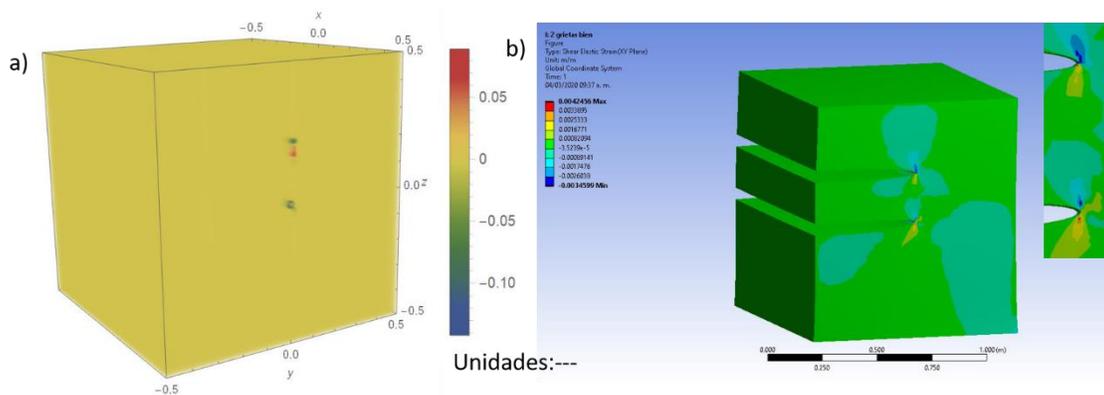


Figura 4.18 Comparativo de deformaciones en el plano yz dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

En las Figura 4.18 y Figura 4.19, se presentan los resultados de las deformaciones y esfuerzos cortantes sobre el plano yz, en comparativa las distribuciones tanto de deformaciones como de esfuerzos son cercanas, pero de nuevo las magnitudes resolviendo con el potencial multicomplejo son mayor en alrededor de un orden de magnitud.

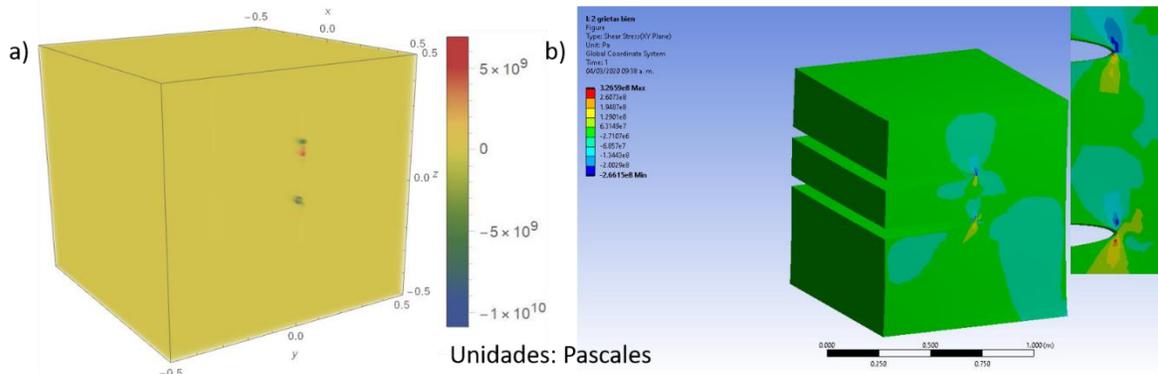


Figura 4.19 Comparativo de esfuerzos en el plano yz dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

Finalmente se tienen los resultados para desplazamientos totales (Figura 4.20), deformaciones equivalentes (Figura 4.21) y esfuerzos equivalentes (Figura 4.22). En cuanto a los desplazamientos los resultados vuelven a presentar diferencias en la distribución, ya que aplicando el potencial multicomplejo los resultados lejos de las singulares tiende a no tener variación. Los resultados de deformaciones y esfuerzos equivalentes demuestran distribuciones similares y mejor aproximadas a lo esperado para el caso de la solución con el potencial multicomplejo, sin embargo, las magnitudes presentan valores superiores en un grado de magnitud.

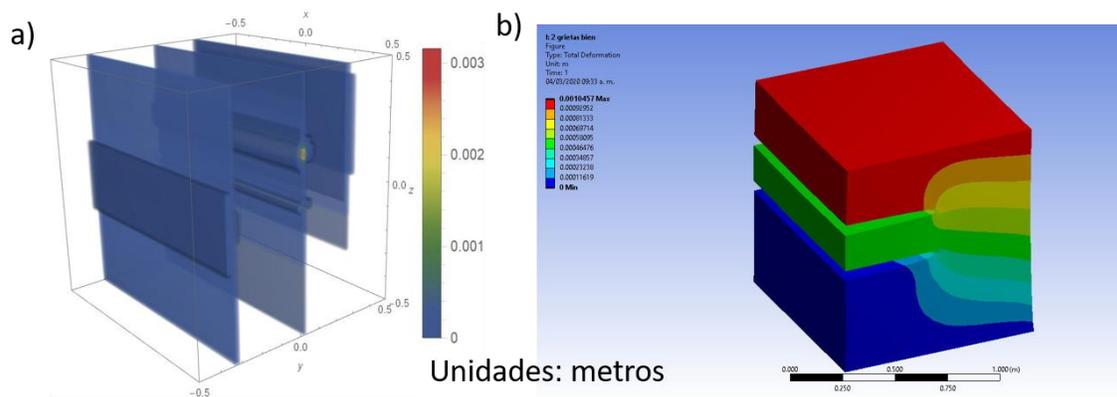


Figura 4.20 Comparativo de desplazamientos totales dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

Se destaca que en las gráficas de los resultados equivalentes del potencial multicomplejo de la presente sección y la anterior, los resultados no se ven ploteados en la totalidad del dominio, esto se debe a limitaciones debidas a la plataforma en que fueron generadas las gráficas, así como la evaluación de las expresiones resultantes.

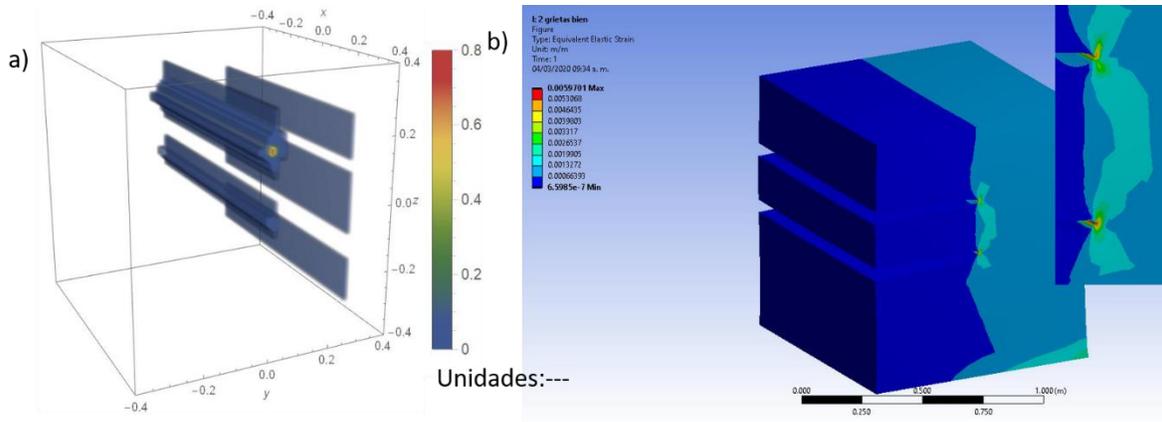


Figura 4.21 Comparativo de deformaciones equivalentes dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

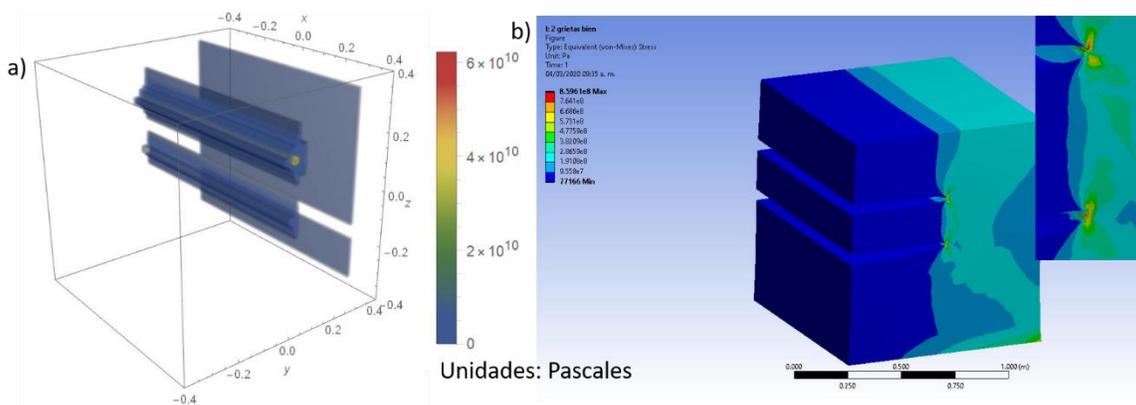


Figura 4.22 Comparativo de esfuerzos equivalentes dos grietas a) Potencial de desplazamientos b) ANSYS

4.2.3 Cálculo de la integral J

Para los problemas con singularidades además de los resultados de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos ya presentados, se hace el cálculo de la integral J. El cálculo se realiza como se plantea en las secciones 3.5 y 3.7, haciendo uso de MATHEMATICA®, los resultados obtenidos son valores numéricos, los cuales se comparan una vez más con los valores obtenidos en ANSYS®.

Los resultados obtenidos de ANSYS® se muestran gráficamente, dicha gráfica es posible obtenerla ya que al calcular por el método de los elementos finitos se obtienen valores discretos de J sobre los distintos nodos de la malla que pasan por la grieta, por otra parte, la forma en que se resuelve y calcula J con el potencial multicomplejo no permite obtener gráficas, solo un valor medio de J sobre toda la extensión de la grieta.

J
405834

Tabla 4.1 Valor de la integral J para el problema de una grieta

Los resultados de J para el problema de una grieta aplicando elementos finitos se muestran en la Figura 4.23, y el resultado con el potencial multicomplejo se muestra en la Tabla 4.1. Resalta que el valor calculado con el potencial multicomplejo resulta un orden de magnitud mayor.

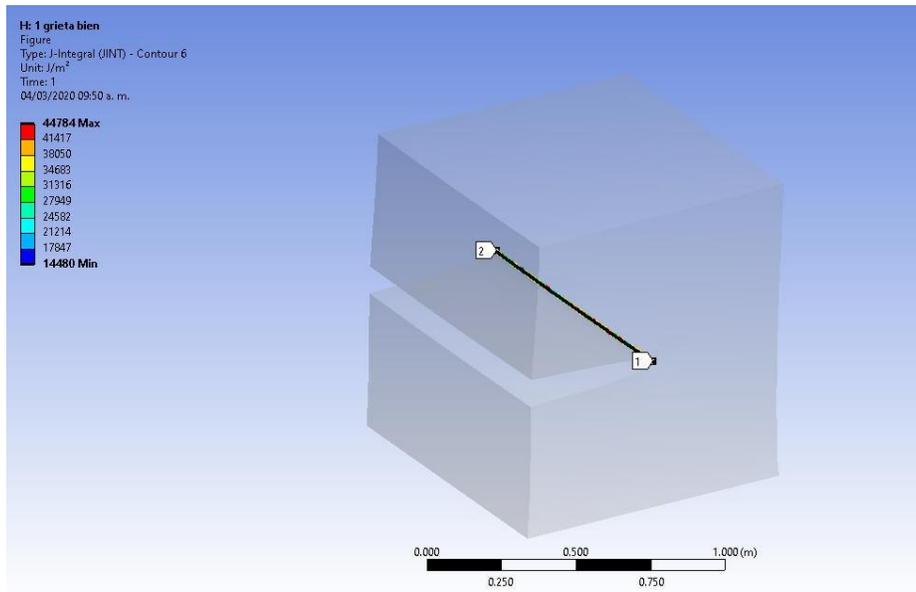


Figura 4.23 Integral J para problema de una grieta

Los resultados para el problema con dos grietas se presentan en la Tabla 4.2 y la Figura 4.24, solucionando con el potencial multicomplejo y elementos finitos respectivamente. Se denota con J1 el resultado para la grieta superior y J2 para la inferior.

J1	J2
1.08e10	6.2e6

Tabla 4.2 Valor de la integral J para el problema de dos grietas

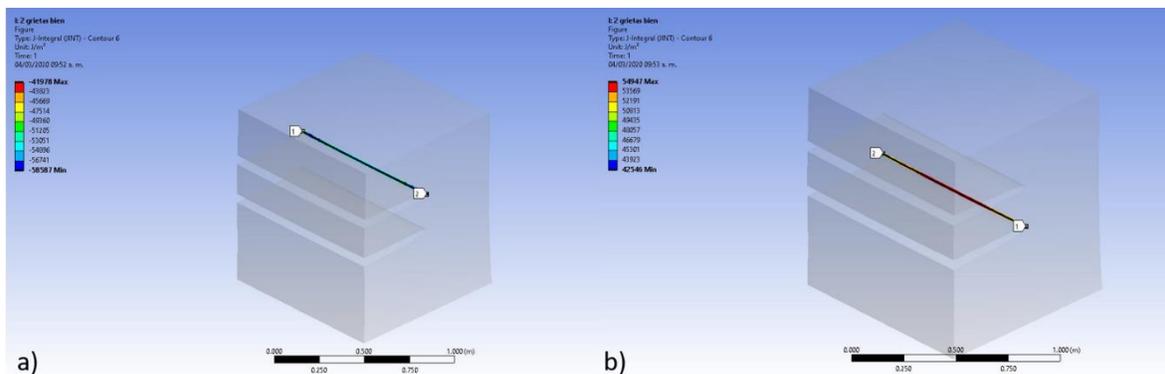


Figura 4.24 Integral J para el problema de dos grietas

Para ambos casos; con una y dos grietas, el valor de J estimado con el potencial multicomplejo resulta mayor en magnitud que el calculado por elementos finitos, lo anterior es una clara consecuencia de los valores de esfuerzos y deformaciones antes calculados que también resultan de mayor magnitud para el caso del potencial multicomplejo.

4.3 Aplicación integrada

Como parte final se desarrolló una aplicación software para la solución de problemas elásticos con o sin grietas, aplicando el potencial de desplazamientos multicomplejo desarrollado en el capítulo 3 y aplicado para solución numérica en el capítulo 4.

La aplicación se desarrolló haciendo uso de MATHEMATICA® e integra las soluciones de problemas elásticos bajo las condiciones de carga uniaxiales, biaxiales, triaxiales y cortantes, además de dar solución a problemas con 1 o 2 grietas (Figura 4.25).

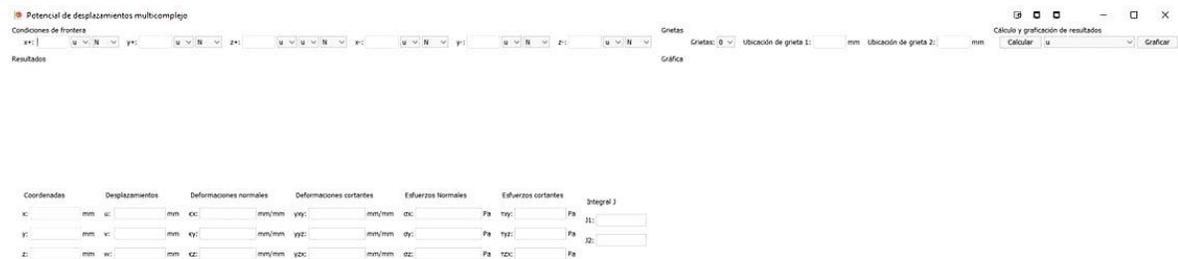


Figura 4.25 Vista general de la aplicación software

Para todos los casos se asume como dominio de solución una celda unitaria hexaédrica con volumen total de 1m^3 , solo se permite aplicar una sola condición de frontera sobre cada cara de la celda y las grietas se limitan a un máximo de dos, siendo estas siempre pasantes y con una sola punta dentro del dominio de solución, con apertura al lado izquierdo del dominio.

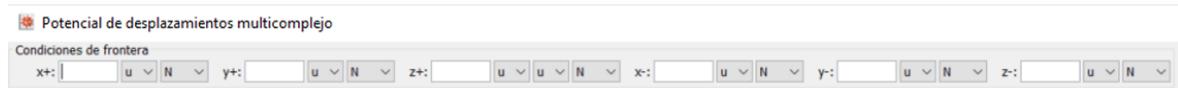


Figura 4.26 Vista del panel de aplicación de condiciones de frontera

La aplicación de las condiciones de frontera se hace a través del panel “Condiciones de frontera” (Figura 4.26), en donde es posible aplicar una y solo una condición de frontera por cada cara de la celda hexaédrica, las caras son identificadas según su ubicación en la celda, respecto a un marco cartesiano dextrógiro donde la dirección x es la que “sale” de la pantalla. La entrada de la magnitud se hace directamente después del identificador de cada cara; es posible ingresar valores negativos o con decimales, después de ingresar la magnitud hay un menú que permite seleccionar la dirección de aplicación de la carga u, v o w y posteriormente seleccionar las unidades, el menú de unidades está limitado a N o mm y se usa para discernir si la condición aplicada es una fuerza. o un desplazamiento, finalmente si una cara está libre de condiciones el espacio se deja en blanco.



Figura 4.27 Vista del panel de definición de grietas

A la derecha del panel de condiciones de frontera se encuentra el panel de “Grietas” en donde se puede definir si en el problema se asume existencia de grietas, este menú da tres opciones 0, 1 o 2. En caso de seleccionar 1 se debe entonces dar un valor en la celda ubicación de grieta 1, dicho valor define el corrimiento de la punta de la grieta sobre el eje z, cuando el valor de “Grietas” se define como 2, resulta necesario definir valores para las dos celdas de ubicación de grieta (Figura 4.27).

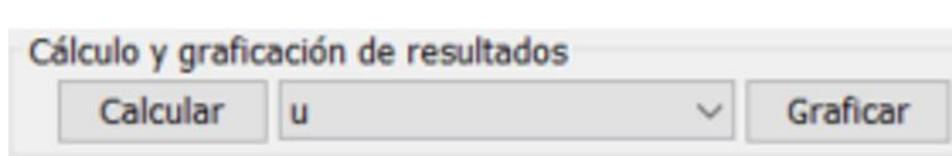


Figura 4.28 Vista del panel de cálculo y graficación

En un panel contiguo al de definición de grietas se presentan los botones que permiten el cálculo y graficación de resultados, este panel se denomina “Cálculo y graficación de resultados” (Figura 4.28) y contiene dos botones y un menú desplegable. El primer botón “Calcular” da inicio al cálculo de los resultados y para que tenga resultados exitosos es necesario que las condiciones de frontera estén correctamente definidas, el botón “Graficar” permitirá desplegar el resultado gráfico correspondiente a la selección que se haga en el menú desplegable. Los resultados graficables son los desplazamientos direccionales, las deformaciones y esfuerzos tanto normales como cortantes, así como los desplazamientos totales y la deformación y esfuerzos equivalentes, las gráficas se despliegan una a la vez y se muestran en el panel gráfica ubicado debajo de los paneles “Grietas” y “Cálculo y graficación de resultados” (Figura 4.25).



Figura 4.29 Vista del panel de resultados

La aplicación tiene un último panel llamado “Resultados” (Figura 4.29) en este se despliegan de manera numérica los resultados para desplazamientos direccionales, deformaciones y esfuerzos, tanto normales como cortantes, así como los valores de J.

Los resultados numéricos desplegados corresponden al punto en el dominio determinado por las coordenadas x, y, z que se ingresan en la primera columna del panel (Figura 4.29), cabe aclarar que de no existir grietas definidas los valores de J permanecen sin cambio.

La Figura 4.30 muestra un ejemplo de uso de la aplicación software, para el problema del cortante puro. Se puede apreciar el valor de las condiciones de frontera aplicadas, así como los resultados sobre el punto definido en el panel “Coordenadas”, la gráfica mostrada corresponde al resultado desplazamientos totales.

Finalmente se muestra en la Figura 4.31 otro ejemplo ahora de un problema con una grieta, donde el resultado mostrado es el esfuerzo normal en dirección z cartesiana.

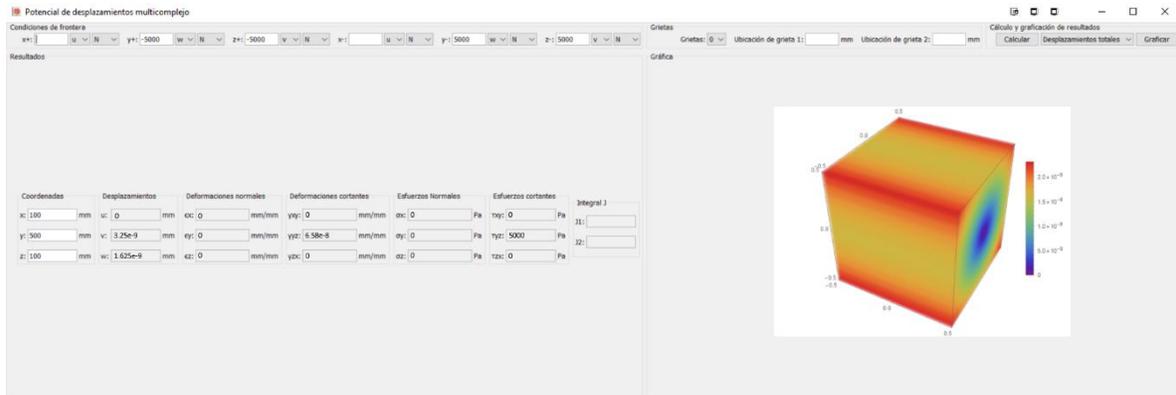


Figura 4.30 Solución del problema del cortante puro con la aplicación software

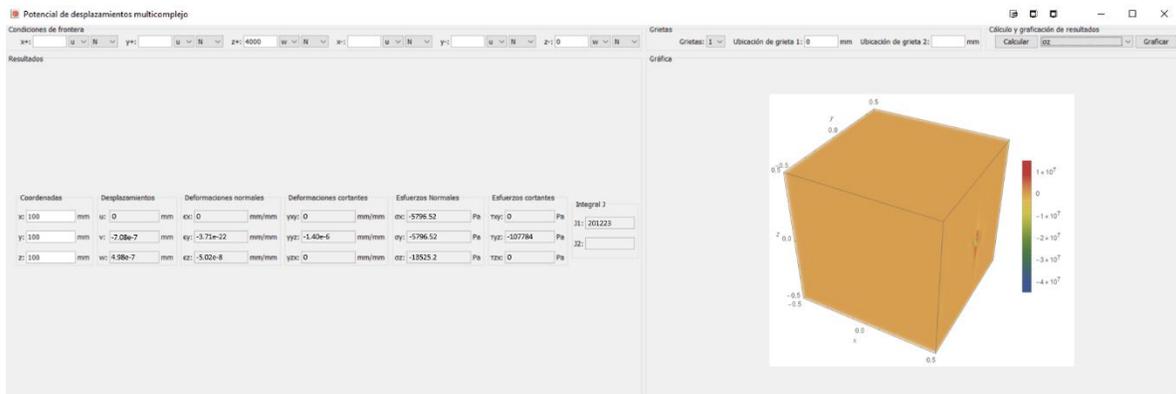


Figura 4.31 Solución del problema de una grieta con la aplicación software

5 Conclusiones

Durante el desarrollo del presente trabajo se demostró que es factible utilizar un potencial de desplazamientos en función de tres variables complejas para dar solución a problemas elásticos simple o múltiplemente conexos, además fue posible la aplicación del método sin necesidad de discretizar el dominio de estudio, obteniendo resultados certeros para el caso de problemas elásticos en medios continuos.

La aplicación del método no resulta inmediata para problemas con singularidades en el dominio, debido al comportamiento propio de las soluciones propuestas, sin embargo, el comportamiento de los campos de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos al resolver con el potencial de desplazamientos propuesto se aproxima al comportamiento obtenido al resolver con otras herramientas y en general al comportamiento esperado según la teoría clásica. Las principales diferencias se pueden observar en las magnitudes de las deformaciones y esfuerzos en la vecindad de las singularidades especialmente cuando se tiene más de una singularidad en el dominio, lo anterior se atribuye al comportamiento propio de la función logarítmica propuesta para la solución de estos problemas.

Es de destacar la ya mencionada fidelidad con que se pueden reproducir los resultados obtenidos al solucionar con el potencial propuesto, respecto a la solución por elementos finitos, para el caso de un dominio continuo. En diversos ejemplos de aplicación se tienen resultados exactamente iguales a los resultados de referencia, dejando de manifiesto la validez del método, la desventaja que se puede encontrar al aplicar el método propuesto de solución radica en la definición de las funciones χ las cuales se desarrollaron de forma particular para cada caso de carga resuelto, lo cual contrasta con la simplicidad de las funciones φ propuestas que para medio continuo son polinomios grado dos.

Por otro lado, en lo que respecta a la solución de problemas sobre medios no continuos el método muestra ser útil para dar solución haciendo uso de funciones solución simples, dando resultados aproximados en distribución a los resultados de referencia, sin embargo, presentando diferencias significativas con las magnitudes. Lo anterior lleva a plantear la necesidad de revisar la forma de las soluciones propuestas para este tipo de problemas, a fin de mejorar los resultados obtenidos, además de estudiar detalladamente las razones que producen magnitudes de resultados cada vez más alejadas a medida que se agregan singularidades al dominio.

Se reportaron además los cálculos de la integral J, estos de nuevo presentaron magnitudes diferentes a los resultados de referencia, sin embargo, se puede observar que las magnitudes de los resultados obtenidos aplicando el potencial de desplazamientos propuesto siempre resulta mayor a la magnitud de los obtenidos por elementos finitos, lo anterior conduce a la conclusión que la diferencia en los valores de la integral J viene inducido de las mayores magnitudes en los campos de deformaciones y esfuerzos, las cuales a su vez dependen del comportamiento de la función logarítmica propuesta para la solución, reafirmando la posibilidad de explorar funciones solución diferentes a fin de mejorar los resultados.

En cuanto al desarrollo de la implementación en software, éste resulta factible, sin requerir un recurso computacional excesivo, es decir el recurso físico tal como memoria RAM requerido para

dar solución a los problemas con la aplicación desarrollada es bajo, respecto a las capacidades medias de un equipo de cómputo personal. El proceso de graficación de resultados es el que toma mayor tiempo en ejecutarse, representando aproximadamente entre el 50 y 60 por ciento del tiempo total de ejecución.

Si bien el método propuesto resulta factible en cuanto aplicación e implementación computacional dando resultados aceptables, al intentar aplicarse en dominios con mayor complejidad en geometría o condiciones de frontera, es posible encontrar problemas al desarrollar funciones solución que se adecuen al problema, por otro lado, al requerir una definición específica de las funciones χ según el problema la implementación computacional es más complicada.

De lo último mencionado es posible identificar áreas de oportunidad para la mejora del método desarrollado que permitan ampliar el rango de problemas susceptibles a ser resueltos con el método y mejoren los resultados en el caso de dominio no continuos.

6 TRABAJO FUTURO

El trabajo a futuro se propone en tres diferentes vertientes:

- **Software.** Se propone desarrollar la aplicación software del potencial multicomplejo en un código o plataforma de desarrollo que permita generar un ejecutable y no dependa de la instalación previa de otro programa para poder ser utilizada. Existe además un amplio espacio de mejora en la interfaz gráfica usada.
- **Dominios de análisis.** Se propone extender la aplicación del método desarrollado a dominios más complejos en cuanto a geometría. Además se puede realizar la solución de problemas en los que el dominio de análisis contenga ambas puntas de la grieta, así como, grietas con orientaciones diferentes.
- **Funciones de prueba.** Se puede explorar el uso de diferentes funciones para la solución de problemas con dominios agrietados, a fin de buscar mayor precisión en los resultados.

7 ANEXOS

7.1 Comprobación de ecuaciones de equilibrio

$$2\mu \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = c \nabla^2 \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} - \nabla \left(\nabla \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$2\mu \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

$$2\mu u = c \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial x} \right)$$

$$c = 2(1 - \nu)$$

$$u = \frac{(1 - \nu)}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial x} \right)$$

$$(1 - 2\nu)\Delta u + \frac{\partial e}{\partial x} = 0$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\Delta u - 2\nu\Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\Delta u = \Delta \left(\frac{1}{\mu} \Delta P_1 - \frac{\nu}{\mu} \Delta P_1 - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial x} \right)$$

$$\Delta u = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2 \partial z^2} \right) - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^4 P_2}{\partial y \partial x^3} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^3 \partial x} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x \partial z^2} \right) - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^4 P_3}{\partial z \partial x^3} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial x \partial z^3} \right)$$

$$-2\nu\Delta u = -2\nu\Delta \left(\frac{1}{\mu} \Delta P_1 - \frac{\nu}{\mu} \Delta P_1 - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial x} \right)$$

$$-2\nu\Delta u = -\frac{\nu}{\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2 \partial z^2} \right) - \frac{\nu}{\mu} \left(\frac{\partial^4 P_2}{\partial y \partial x^3} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^3 \partial x} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x \partial z^2} \right) - \frac{\nu}{\mu} \left(\frac{\partial^4 P_3}{\partial z \partial x^3} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial x \partial z^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
\Delta u - 2\nu\Delta u &= \frac{2\nu - 1}{2\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial y \partial x^3} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^3 \partial x} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x \partial z^2} + \frac{\partial^4 P_3}{\partial z \partial x^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial x \partial z^3} \right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{(1 - \nu)}{\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 P_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 P_1}{\partial x^2 \partial z^2} \right) - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial y \partial x^3} + \frac{\partial^4 P_3}{\partial z \partial x^3} \right) \\
\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} &= \frac{(1 - \nu)}{\mu} \left(\frac{\partial^4 P_2}{\partial y \partial x^3} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial x \partial y \partial z^2} \right) - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 P_3}{\partial x \partial z \partial y^2} \right) \\
\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} &= \frac{(1 - \nu)}{\mu} \left(\frac{\partial^4 P_3}{\partial z \partial x^3} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial x \partial z \partial y^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial x \partial z^3} \right) - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial x \partial y \partial z^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial x \partial z^3} \right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} &= \frac{1 - 2\nu}{2\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial y \partial x^3} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^3 \partial x} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x \partial z^2} + \frac{\partial^4 P_3}{\partial z \partial x^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial x \partial z^3} \right) \\
&= \frac{2\nu - 1}{2\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial y \partial x^3} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^3 \partial x} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x \partial z^2} + \frac{\partial^4 P_3}{\partial z \partial x^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial x \partial z^3} \right) \\
&\quad + \frac{1 - 2\nu}{2\mu} \left(\frac{\partial^4 P_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 P_2}{\partial y \partial x^3} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^3 \partial x} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x \partial z^2} + \frac{\partial^4 P_3}{\partial z \partial x^3} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial z \partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial x \partial z^3} \right) = 0
\end{aligned}$$

7.2 Derivadas de las componentes del potencial P

$$\begin{aligned}
 P_{1xx} &= \frac{1}{2}(2\varphi'_1 + 2\bar{\varphi}'_1 + \bar{z}_1\varphi''_1 + z_1\bar{\varphi}''_1 + \chi''_1 + \bar{\chi}''_1) \\
 P_{1yy} &= -\frac{1}{2}b_1^2(-2\varphi'_1 - 2\bar{\varphi}'_1 + \bar{z}_1\varphi''_1 + z_1\bar{\varphi}''_1 + \chi''_1 + \bar{\chi}''_1) \\
 P_{1zz} &= -\frac{1}{2}c_1^2(-2\varphi'_1 - 2\bar{\varphi}'_1 + \bar{z}_1\varphi''_1 + z_1\bar{\varphi}''_1 + \chi''_1 + \bar{\chi}''_1) \\
 P_{1xy} &= -\frac{1}{2}ib_1(-\bar{z}_1\varphi''_1 + z_1\bar{\varphi}''_1 - \chi''_1 + \bar{\chi}''_1) \\
 P_{1xz} &= -\frac{1}{2}ic_1(-\bar{z}_1\varphi''_1 + z_1\bar{\varphi}''_1 - \chi''_1 + \bar{\chi}''_1) \\
 P_{2xx} &= -\frac{1}{2}a_2^2(-2\varphi'_2 - 2\bar{\varphi}'_2 + \bar{z}_2\varphi''_2 + z_2\bar{\varphi}''_2 + \chi''_2 + \bar{\chi}''_2) \\
 P_{2yy} &= \frac{1}{2}(2\varphi'_2 + 2\bar{\varphi}'_2 + \bar{z}_2\varphi''_2 + z_2\bar{\varphi}''_2 + \chi''_2 + \bar{\chi}''_2) \\
 P_{2zz} &= -\frac{1}{2}c_2^2(-2\varphi'_2 - 2\bar{\varphi}'_2 + \bar{z}_2\varphi''_2 + z_2\bar{\varphi}''_2 + \chi''_2 + \bar{\chi}''_2) \\
 P_{2yx} &= \frac{1}{2}ia_2(\bar{z}_2\varphi''_2 - z_2\bar{\varphi}''_2 + \chi''_2 - \bar{\chi}''_2) \\
 P_{2yz} &= \frac{1}{2}ic_2(\bar{z}_2\varphi''_2 - z_2\bar{\varphi}''_2 + \chi''_2 - \bar{\chi}''_2) \\
 P_{3xx} &= -\frac{1}{2}a_3^2(-2\varphi'_3 - 2\bar{\varphi}'_3 + \bar{z}_3\varphi''_3 + z_3\bar{\varphi}''_3 + \chi''_3 + \bar{\chi}''_3) \\
 P_{3yy} &= -\frac{1}{2}b_3^2(-2\varphi'_3 - 2\bar{\varphi}'_3 + \bar{z}_3\varphi''_3 + z_3\bar{\varphi}''_3 + \chi''_3 + \bar{\chi}''_3) \\
 P_{3zz} &= \frac{1}{2}(2\varphi'_3 + 2\bar{\varphi}'_3 + \bar{z}_3\varphi''_3 + z_3\bar{\varphi}''_3 + \chi''_3 + \bar{\chi}''_3) \\
 P_{3xz} &= \frac{1}{2}ia_3(\bar{z}_3\varphi''_3 - z_3\bar{\varphi}''_3 + \chi''_3 - \bar{\chi}''_3) \\
 P_{3yz} &= \frac{1}{2}ib_3(\bar{z}_3\varphi''_3 - z_3\bar{\varphi}''_3 + \chi''_3 - \bar{\chi}''_3) \\
 P_{1xxx} &= \frac{1}{2}(3\varphi'''_1 + 3\bar{\varphi}'''_1 + \bar{z}_1\varphi''''_1 + z_1\bar{\varphi}''''_1 + \chi''''_1 + \bar{\chi}''''_1) \\
 P_{1yyy} &= -\frac{1}{2}ib_1^3(-3\varphi'''_1 + 3\bar{\varphi}'''_1 + \bar{z}_1\varphi''''_1 - z_1\bar{\varphi}''''_1 + \chi''''_1 - \bar{\chi}''''_1) \\
 P_{1zzz} &= -\frac{1}{2}ic_1^3(-3\varphi'''_1 + 3\bar{\varphi}'''_1 + \bar{z}_1\varphi''''_1 - z_1\bar{\varphi}''''_1 + \chi''''_1 - \bar{\chi}''''_1) \\
 P_{1xyy} &= -\frac{1}{2}b_1^2(-\varphi'''_1 - \bar{\varphi}'''_1 + \bar{z}_1\varphi''''_1 + z_1\bar{\varphi}''''_1 + \chi''''_1 + \bar{\chi}''''_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{1xzz} &= -\frac{1}{2}c_1^2(-\varphi_1''-\bar{\varphi}_1''+\bar{z}_1\varphi_1''' + z_1\bar{\varphi}_1''' + \chi_1''' + \bar{\chi}_1''') \\
P_{1xxy} &= \frac{1}{2}ib_1(\varphi_1''-\bar{\varphi}_1'' + \bar{z}_1\varphi_1''' - z_1\bar{\varphi}_1''' + \chi_1''' - \bar{\chi}_1''') \\
P_{1xxz} &= \frac{1}{2}ic_1(\varphi_1''-\bar{\varphi}_1'' + \bar{z}_1\varphi_1''' - z_1\bar{\varphi}_1''' + \chi_1''' - \bar{\chi}_1''') \\
P_{1yzz} &= -\frac{1}{2}ib_1c_1^2(-3\varphi_1''+3\bar{\varphi}_1'' + \bar{z}_1\varphi_1''' - z_1\bar{\varphi}_1''' + \chi_1''' - \bar{\chi}_1''') \\
P_{1yyz} &= -\frac{1}{2}ib_1^2c_1(-3\varphi_1''+3\bar{\varphi}_1'' + \bar{z}_1\varphi_1''' - z_1\bar{\varphi}_1''' + \chi_1''' - \bar{\chi}_1''') \\
P_{1xyz} &= -\frac{1}{2}b_1c_1(-\varphi_1''-\bar{\varphi}_1'' + \bar{z}_1\varphi_1''' + z_1\bar{\varphi}_1''' + \chi_1''' + \bar{\chi}_1''') \\
P_{2xxx} &= -\frac{1}{2}ia_2^3(-3\varphi_2'' + 3\bar{\varphi}_2'' + \bar{z}_2\varphi_2''' - z_2\bar{\varphi}_2''' + \chi_2''' - \bar{\chi}_2''') \\
P_{2yyy} &= \frac{1}{2}(3\varphi_2'' + 3\bar{\varphi}_2'' + \bar{z}_2\varphi_2''' + z_2\bar{\varphi}_2''' + \chi_2''' + \bar{\chi}_2''') \\
P_{2zzz} &= -\frac{1}{2}ic_2^3(-3\varphi_2'' + 3\bar{\varphi}_2'' + \bar{z}_2\varphi_2''' - z_2\bar{\varphi}_2''' + \chi_2''' - \bar{\chi}_2''') \\
P_{2xyy} &= \frac{1}{2}ia_2(\varphi_2''-\bar{\varphi}_2'' + \bar{z}_2\varphi_2''' - z_2\bar{\varphi}_2''' + \chi_2''' - \bar{\chi}_2''') \\
P_{2xzz} &= -\frac{1}{2}ia_2c_2^2(-3\varphi_2''+3\bar{\varphi}_2'' + \bar{z}_2\varphi_2''' - z_2\bar{\varphi}_2''' + \chi_2''' - \bar{\chi}_2''') \\
P_{2xxy} &= -\frac{1}{2}ia_2^2(-\varphi_2''-\bar{\varphi}_2'' + \bar{z}_2\varphi_2''' + z_2\bar{\varphi}_2''' + \chi_2''' + \bar{\chi}_2''') \\
P_{2xxz} &= -\frac{1}{2}ia_2^2c_2(-3\varphi_2''+3\bar{\varphi}_2'' + \bar{z}_2\varphi_2''' - z_2\bar{\varphi}_2''' + \chi_2''' - \bar{\chi}_2''') \\
P_{2yzz} &= -\frac{1}{2}c_2^2(-\varphi_2''-\bar{\varphi}_2'' + \bar{z}_2\varphi_2''' + z_2\bar{\varphi}_2''' + \chi_2''' + \bar{\chi}_2''') \\
P_{2yyz} &= \frac{1}{2}ic_2(\varphi_2''-\bar{\varphi}_2'' + \bar{z}_2\varphi_2''' - z_2\bar{\varphi}_2''' + \chi_2''' - \bar{\chi}_2''') \\
P_{2xyz} &= -\frac{1}{2}a_2c_2(-\varphi_2''-\bar{\varphi}_2'' + \bar{z}_2\varphi_2''' + z_2\bar{\varphi}_2''' + \chi_2''' + \bar{\chi}_2''') \\
P_{3xxx} &= -\frac{1}{2}ia_3^3(-3\varphi_3'' + 3\bar{\varphi}_3'' + \bar{z}_3\varphi_3''' - z_3\bar{\varphi}_3''' + \chi_3''' - \bar{\chi}_3''') \\
P_{3yyy} &= -\frac{1}{2}ib_3^3(-3\varphi_3'' + 3\bar{\varphi}_3'' + \bar{z}_3\varphi_3''' - z_3\bar{\varphi}_3''' + \chi_3''' - \bar{\chi}_3''') \\
P_{3zzz} &= \frac{1}{2}(3\varphi_3'' + 3\bar{\varphi}_3'' + \bar{z}_3\varphi_3''' + z_3\bar{\varphi}_3''' + \chi_3''' + \bar{\chi}_3''')
\end{aligned}$$

8 Referencias

- [1] E. Gdoutos, *Fracture mechanics an introduction*, Doedrecht: Springer, 2005.
- [2] E. Gdoutos, *Problems of mixed mode crack propagation*, The Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1984.
- [3] A. Balankin, «Mecánica de la fractura: pasado, presente y futuro,» de *Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, Ciudad de México, 2000.
- [4] L. Ceriolo y A. Di Tomaso, «Fracture mechanics of brittle materials: a historical point of view,» de *PhD symposium in civil engineering*, Budapest, 1998.
- [5] R. Razvan, «Some remarks on the history of fracture mechanics,» de *International conference on applied mathematics, simulation, modelling, circuits, systems and signals*, Atenas, 2009.
- [6] J. Eischen, «Fatigue and fracture mechanics short course notes,» NC State University, Raleigh, 2007.
- [7] O. Masateru, *Fracture and society*, Tokyo: Ohmsha, 1992.
- [8] Bergman, Bo; de Maré, Jaques; Lorén, Sara; Svensson, Thomas, *Robust design methodology for reliability*, Chichester: John Wile & Sons, 2009.
- [9] C. Inglis, «Stresses in a plate due to the presecnce of cracks and sharp corners,» *Proceedings of the Institution of Naval Architecs*, vol. 55, pp. 219-241, 1913.
- [10] A. Griffith, «The phenomena of ruptutre and flow in solids,» *Philosophical transactions of the royal society of London*, vol. 221, pp. 163-197, 1920.
- [11] N. Muskhelishcilli, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Dordrecht: Springer-Science+Business media, 1977.
- [12] N. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Groningen: Woltesr-Noordhoff publishing, 1958.
- [13] H. Westergaard, «Bearing pressures and cracks,» *Journal of applied mechanics*, pp. 49-53, 1939.
- [14] KFHP, «Kaiser Permanente,» Multimedia Communications Southern California, 28 Enero 2016. [En línea]. Available: <http://kaiserpermanentehistory.org/tag/ship-fracture/>. [Último acceso: 6 Septiembre 2017].
- [15] S. Yerima, «On the contribution of G.R. Irwin to fracture mechanics,» *Materials science*, vol. 31, nº 5, pp. 617-623, 1996.

- [16] H. Rossmannith, Fracture research in retrospect, Rotterdam: CRC Press, 1997.
- [17] K. Bertram Broberg, Cracks and fracture, Cambridge: Academic Press, 1999.
- [18] L. Malíkova y V. Veselý, «Williams expansion terms and their importance for accurate stress field description in specimens with a crack,» *Transactions of the VSB*, vol. 59, nº 2, pp. 109-114, 2013.
- [19] B. Cotterell, Fracture and Life, London: Imperial college press, 2010.
- [20] D. Dugdale, «Yielding of steel sheets containing slits,» *Journal of the mechanics and physics of solids*, vol. 8, nº 2, pp. 100-104, 1960.
- [21] R. Clough, «The finite element method in plane stress analysis,» de *A.S.C.E. Conference on electronics computation*, Pittsburgh, 1960.
- [22] A. Wells, «Crack opening displacements from elastic-plastic analyses of externally notched tension bars,» *Engineering fracture mechanics*, vol. 1, pp. 399-410, 1969.
- [23] J. Rice, «A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks,» *Journal of applied mechanics*, vol. 35, pp. 379-386, 1968.
- [24] B. Budiansky y J. Rice, «Conservation laws and energy-release rate,» *Journal of applied mechanics*, vol. 40, pp. 201-203, 1973.
- [25] J. Knowles y E. Sternberg, «On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics,» *Archive for rotational mechanics and analysis*, vol. 44, nº 3, pp. 187-211, 1972.
- [26] Y. Chen, Advances in conservation laws and energy release rates, Dordrecht: Springer science+business media, 2002.
- [27] W. Brocks y K. Schwalbe, «Experimental and numerical fracture mechanics-an individually dyed history,» de *Recent trends in fracture and damage mechanics*, Springer international publishing AG Switzerland, 2016, pp. 23-57.
- [28] M. Kassir y G. Sih, «Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loading,» *Journal of applied mechanics*, vol. 33, pp. 601-611, 1966.
- [29] G. Sih y B. Cha, «A fracture criterion for three-dimensional crack problems,» *Engineering fracture mechanics*, vol. 6, pp. 699-723, 1974.
- [30] J. Rice, «Some remarks on elastic crack-tip stress fields,» *International journal of solids and structures*, vol. 8, nº 6, pp. 751-758, 1972.
- [31] J. Rice, «Weight function theory for three-dimensional elastic crack analysis,» de *Fracture Mechanics: perspectives and directions*, Philadelphia, 1989.

- [32] H. Bui, *Fracture mechanics inverse problems and solutions*, Dordrecht: Springer, 2006.
- [33] F. Erdogan, «On the stress distribution in plates with collinear cuts under arbitrary loads,» de *4th U.S. national congress of applied mechanics*, 1962.
- [34] F. Lange, «Interaction between overlapping parallel cracks,» *International journal of fracture mechanics*, vol. 4, pp. 287-294, 1968.
- [35] T. Anderson, *Fracture mechanics: fundamentals and applications*, Boca Raton: CRC Press, 2005.
- [36] S. Timoshenko, *History of strength of materials*, New York: Dover publications, 1983.
- [37] J. Lu, *Complex variable methods in plane elasticity*, Singapur: World Scientific Publishing, 1995.
- [38] R. Range, *Holomorphic functions and Integral representations in Several Complex Variables*, New York: Springer-Verlag, 1998.
- [39] G. Henkin y J. Leiterer, *Theory of Functions on Complex Manifolds*, Boston: Birkhäuser, 1984.
- [40] H. Boas, «Lecture notes on several complex variables,» Texas A&M University, College Station, 2011.
- [41] L. Aizenberg y A. Yuzhakov, «Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis,» American Mathematical Society, Providence, 1983.
- [42] F. Pham, *Singularities of integrals*, Londres: Springer-Verlag, 2011.
- [43] S. Timoshenko y J. Goodier, *Theory of Elasticity*, New York: McGraw-Hill, 1951.
- [44] M. H. Sadd, *Elasticity: Theory, applications and numerics*, Oxford: Elsevier, 2005.
- [45] J. Barber, *Elasticity*, New York: Springer Science, 2010.
- [46] T. Myint-U, *Partial differential equations of mathematical Physics*, New York: Elsevier, 1973.
- [47] E. Whittaker y G. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [48] A. Selvadurai, *Partial differential equations in Mechanics*, New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [49] E. Whittaker, «On the Partial Differential Equations of Mathematical Physics,» *Mathematische Annalen*, vol. 57, pp. 333-355, 1903.
- [50] R. Piltner, «The use of complex valued functions for the solution of three-dimensional elasticity problems,» *Journal of Elasticity*, vol. 18, pp. 191-225, 1987.

- [51] R. Piltner, «The application of a complex 3-dimensional elasticity solution representation for the analysis of a thick rectangular plate,» *Acta Mechanica*, vol. 75, pp. 77-91, 1988.
- [52] R. Piltner, «On the representation of three-dimensional elasticity solutions with the aid of complex valued functions,» *Journal of Elasticity*, vol. 22, pp. 45-55, 1989.
- [53] R. Bahagarva, «Methods of solution of the biharmonic equation,» *Proceedings of the national institute of science of India*, vol. 31, nº 6, pp. 571-583, 1965.
- [54] S. Tameroglu, «General solution of the biharmonic equation and generalized Levy's method for plates,» *Journal of Structural Mechanics*, vol. 14, pp. 33-51, 2007.
- [55] A. Karageorghis y G. Fairweather, «The method of fundamental solutions for the numerical solution of the biharmonic equation,» *Journal of Computational Physics*, vol. 69, pp. 434-459, 1987.
- [56] A. Atangana y A. Kihcman, «Analytical solutions of boundary values problem of 2d and 3d Poisson and biharmonic equations by homotopy decomposition method,» *Abstract and applied analysis*, vol. 2013, 2013.
- [57] D. Weisz-Patrault, S. Bock y K. Gurlbeck, «Three-dimensional elasticity based on quaternion-valued potential,» *International Journals of Solids and Structures*, vol. 51, pp. 3422-3430, 2014.
- [58] R. Fosdick, «On the complete representation of biharmonic functions,» *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 19, nº 1, pp. 243-250, 1970.
- [59] B. Yun, «An alternative complex variable method in plane elasticity,» *Journal of the Korean society for industrial and applied mathematics*, vol. 1, nº 1, pp. 65-73, 1997.
- [60] M. Doschoris, «Towards a generalization of the separation of variables technique,» *Methods and applications of analysis*, vol. 19, nº 4, pp. 381-402, 2012.