Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN

Argumentos matemáticos de estudiantes universitarios sobre la integral impropia

Tesis
que para obtener el grado de

Doctor en Matemática Educativa

Presenta:
Leobardo Mendo Ostos

Directores Tesis:

Dr. Apolo Castañeda Alonso
Dr. Mario Sánchez Aguilar

México, D.F., Diciembre de 2015

Autorización de uso de obra

Instituto Politécnico Nacional
P r e s e n t e

Bajo protesta de decir verdad el que suscribe ***Leobardo Mendo Ostos*** (se anexa copia simple de identificación oficial), manifiesto ser autor y titular de los derechos morales y patrimoniales de la obra titulada ***Argumentos matemáticos de estudiantes universitarios sobre la integral impropia***, en adelante "La Tesis" y de la cual se adjunta copia, por lo que por medio del presente y con fundamento en el artículo 27 fracción II, inciso b) de la Ley Federal del Derecho de Autor, otorgo a el Instituto Politécnico Nacional, en adelante El IPN, autorización no exclusiva para comunicar y exhibir públicamente total o parcialmente en medios digitales ***televisión***, ***prensa***, ***internet*** "La Tesis" por un periodo de ***10 años*** contado a partir de la fecha de la presente autorización, dicho periodo se renovará automáticamente en caso de no dar aviso a "El IPN" de su terminación.

En virtud de lo anterior, "El IPN" deberá reconocer en todo momento mi calidad de autor de "La Tesis".

Adicionalmente, y en mi calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales de "La Tesis", manifiesto que la misma es original y que la presente autorización no contraviene ninguna otorgada por el suscrito respecto de "La Tesis", por lo que deslindo de toda responsabilidad a El IPN en caso de que el contenido de "La Tesis" o la autorización concedida afecte o viole derechos autorales, industriales, secretos industriales, convenios o contratos de confidencialidad o en general cualquier derecho de propiedad intelectual de terceros y asumo las consecuencias legales y económicas de cualquier demanda o reclamación que puedan derivarse del caso.

México, D.F., 30 de octubre de 2015.

Atentamente

Leobardo Mendo Ostos

SIP-14-BIS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 17:30 horas del día 28 del mes de septiembre del 2015 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA-Legaria para examinar la tesis titulada:

Argumentos matemáticos de estudiantes universitarios sobre la integral impropia

Presentada por el alumno:

Mendo	Ostos	Leobardo
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro: | A | 1 | 0 | 0 | 9 | 0 | 4 |

aspirante de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***APROBAR LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Mario Sánchez Aguilar

Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza

Dr. Avenilde Romo Vázquez

Dr. Daniel Sánchez Guzmán

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. José Antonio Calderón Arenas

CICATA - I.P.N. U. LEGARIA
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Índice

Contenido

Índice de figuras y tablas

Resumen

En el presente trabajo de investigación se muestra evidencias de un análisis de los argumentos matemáticos expuestos por un grupo de estudiantes al resolver una secuencia didáctica sobre la integral impropia en un ambiente de uso de tecnología, con el propósito de identificar las líneas de razonamiento y argumentación y describir su pensamiento matemático. Para el desarrollo de la secuencia se utilizó la metodología ACODESA de Hitt y González-Martín (2015: 202) y en el análisis de los datos se empleó el modelo argumentativo de Toulmin (1958:17), el cual permitió describir la construcción, contenido y estructura de los argumentos los estudiantes al transitar entre diferentes representaciones durante su solución. Los resultados de esta investigación muestran que un ambiente de interacción y debate favorecen la aparición de argumentos y que la tecnología tiene un rol determinante en la conformación de los argumentos matemáticos particularmente para exponer y defender sus analogías.

Abstract

In the present research evidence analysis of mathematical arguments of a group of students to resolve a teaching sequence on the improper integral is shown in an environment of use of technology, with the aim of identifying lines of reasoning and argumentation and describe their mathematical thinking. For the development of the sequence the ACODESA methodology Hitt and Gonzalez-Martin (2015: 202) was used and the data analysis argumentative model of Toulmin (1958: 17) was used, which allowed to describe the construction, content and structure of the arguments the students to move between different representations for their solution. The results of this research show that an environment of interaction and discussion of arguments favor the appearance and technology plays a decisive role in shaping the mathematical arguments particularly to present and defend their analogies.

Glosario

Secuencia didáctica. Es un instrumento metodológico para la enseñanza y aprendizaje y la investigación. Es una herramienta cognitiva para estimular y desarrollar habilidades del pensamiento [como explorar, deducir, conjeturar y justificar]

Situación Problema. Una *situación problema* se refiere a un planteamiento introductorio que está contextualizado y situado. Su planteamiento subyacente en las situaciones problema desde el punto de vista de la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1997). En esta etapa se motiva el pensamiento divergente [generar ideas creativas mediante la exploración de muchas soluciones posibles de forma espontánea] toda vez que favorece en los estudiantes la reflexión sobre diferentes formas de interpretar la situación, promueve la exploración y la formulación de preguntas sobre los posibles resultados de la actividad y puede conducir a un pensamiento convergente [caracterizado por dar respuesta con rapidez, precisión, centrado en el reconocimiento de regularidades y aplicación de técnicas, sin dar lugar a la ambigüedad]. De acuerdo a Hitt (2007) una situación problema debe promover la apertura del pensamiento, lo que fomentará la aparición de representaciones funcionales.

Problema. Se trata de un planteamiento acotado que conduce a debates muy puntuales y respuestas específicas. De acuerdo con Hitt (2007) es un promotor del pensamiento convergente-divergente, además de que produce representaciones que vincula aspectos matemáticos [a través de la articulación entre representaciones] y los procesos operatorios al interior de las representaciones.

Ejemplo-Contraejemplo. Este tipo de actividad se refiere a un planteamiento práctico que sintetiza aspectos discutidos previamente, además de favorecer el desarrollo de habilidades operatorias y de cálculo. Duval y Hitt (2000) consideran que no sólo son importantes las tareas de transformación [dentro de un registro de representación] y conversión entre registros, sino que también es importante la confrontación entre ejemplos y contraejemplos. El uso de ejemplos y contraejemplos no es una actividad ni algorítmica, ni procedimental y se requiere de un pensamiento matemático más flexible y dinámico.

ACODESA. Metodología ACODESA (Aprendizaje en Colaboración, Debate Científico y Auto-Reflexión). Este método de enseñanza es una combinación bien articulada de diversos enfoques. Ciertos aspectos del aprendizaje colaborativo, de debate científico y de la auto-reflexión. Este método de enseñanza se llama ACODESA, que en francés significa "aprendizaje colaborativo, debate científico y autorreflexión".

Aprendizaje colaborativo. El desarrollo de una actividad matemática en un ambiente de aprendizaje cooperativo plantea considerar ayudar a fomentar en los estudiantes el pensamiento reflexivo sobre sus métodos de solución de problemas. Con la intención de lograr que los estudiantes tengan una mejor voluntad para explorar problemas [particularmente para examinar problemas nuevos y no rutinarios] e intentar exteriorizar y explicar las ideas a sus compañeros. En el aprendizaje cooperativo, las actividades están organizadas didácticamente al considerar el salón de clase como un foro abierto al diálogo entre estudiantes y entre estudiantes-profesor.

Actividad matemática. Una actividad matemática está estructurada, planeada por el profesor, el cual le da una intencionalidad y sentido en la clase de matemáticas. Una actividad matemática no sólo se refiere al tipo de actividades escolares como memorizar definiciones, teoremas y reconocer la ocasión para aplicarlos, sino cualquier actividad en la que el estudiante se involucre con el conocimiento matemático para resolver problemas, elaborar procedimientos, comunicar y contrastar sus conclusiones con sus compañeros. El concepto de actividad matemática se fundamenta en la idea de que la actividad del estudiante en la clase conduce a aprender matemáticas.

Hacer matemática. Hacer matemáticas es llevar a cabo una actividad en una situación concreta y viva en un medio (situación problema). Un estudiante hace realmente matemáticas cuando, para construir con sentido un conocimiento matemático, debe actuar contra un “medio” (situación problema) que le provoque un verdadero problema, de tal manera que se implique con todo interés en su resolución. En búsqueda de una solución, produce acciones que conducen a la creación de un “saber-hacer”.

Uso de la tecnología: La importancia del uso de la tecnología en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, ha sido considerada por los investigadores como un medio que permite al estudiante obtener conclusiones y realizar observaciones que en otros ambientes, por ejemplo “lápiz y papel”, serían difíciles de obtener.

Ambiente tecnológico. La experimentación en un ambiente de uso de tecnología permite al estudiante construir conjeturas, transitar de un sistema de representación a otro, reconocer patrones, deducir y analizar comportamientos en gráficas y a partir de ello generar argumentos sobre un objeto matemático en construcción.

Argumento: Son las explicaciones que los estudiantes logran hacer y decir con respecto a la actividad de aprendizaje desde el punto de vista individual y grupal.

Argumentación: Actividad social, intelectual y verbal que sirve para justificar o refutar una opinión. Acción de defender una idea aportando un conjunto de razones y justificaciones válidas que la respalden. En las matemáticas las argumentaciones tienen cabida en la construcción del conocimiento [la construcción del conocimiento está ligado a los procesos cognitivos como la deducción, la reflexión y el planteamiento de conjeturas; así en la medida que el estudiante argumente todos esos procesos e ideas será capaz de construir o resignificar su conocimiento]

Representación matemática. Son producciones constituidas; categoría teórica que incluye los aspectos numérico, algebraico, gráfico y verbal de una idea o noción o procedimiento matemático, además del lenguaje que se utiliza para aludir a dicha noción o procedimiento.

Tránsito entre representaciones. Establecer el tránsito entre representaciones requiere coordinar las experiencias de trabajo en las diferentes situaciones y planteamientos y transferir esta información a los diferentes contextos de representación. A partir de estos referentes, construimos la idea de transitar y articular basado en explorar conceptos, formular sus propias conjeturas, visualizar y extraer datos, aportar justificaciones, entre otros. Es decir, las tareas de conversión entre representaciones y la manipulación coherente de tales representaciones permitirán la construcción del concepto en cuestión. Al transitar entre varios sistemas de representación (algebraica-gráfica-numérica) apoyados de la tecnología, permite dar significado concreto a los conocimientos matemáticos.

Representaciones funcionales. Son representaciones que apoyan el desarrollo del entendimiento de la situación, con el fin de tratar de entender y dar sentido al problema que se presenta. Por ejemplo los esquemas y las anotaciones son casos de representaciones espontáneas que funcionan como mediadores del aprendizaje matemático. Son mecanismos espontáneos importantes en las tareas de reflexión, razonamiento y análisis que nos ayuda a tener un mejor entendimiento del pensamiento y las ideas de los estudiantes.

Conflicto Cognitivo. Un 'conflicto cognitivo' se genera cuando el estudiante evoca al mismo tiempo, dos conocimientos que a su vez son contradictorios, dándose cuenta de éste. Dejar emerger las contradicciones que surjan entre los estudiantes y a ese nivel, promover la reflexión para que ellos mismos se percaten de la contradicción, creando un *conflicto cognitivo* que eventualmente permitirá al alumno, si resuelve el conflicto, sobrepasar el obstáculo. Por lo tanto, debemos construir una situación didáctica como una actividad interesante, en el sentido de generar una reflexión profunda en el estudiante, incluso en algunos casos, esas ideas intuitivas lo lleven a una situación contradictoria. Sin embargo, si el alumno no percibe la contradicción, no existe conflicto cognitivo. Es el descubrimiento de la existencia de una contradicción la que genera el *conflicto cognitivo* y éste, a su vez, es el motor para superar el obstáculo [al superar el obstáculo el estudiante construye un conocimiento nuevo, el que probablemente resolverá el conflicto cognitivo]

Visualización. La visualización matemática es el proceso de formar imágenes y usarlas efectivamente para el descubrimiento y el entendimiento matemático, y considerar lo visual como un preludio hacia la abstracción de conceptos y así permitir al estudiante formar varios modelos de una situación de aprendizaje.

Introducción

El interés que motivó esta investigación provino de la problemática reportada en Bezuidenhout y Oliver (2000: 73); González-Martín y Camacho (2004:75, 2005:82), relativa al fracaso de los estudiantes universitarios en el aprendizaje del concepto de integral impropia. Esta revisión condujo a dos reflexiones sobre el estudio de la integral impropia que justifican el desarrollo de este trabajo. La primera se refiere a la importancia de analizar y reconocer cómo los estudiantes construyen y justifican sus ideas en el estudio de la integral. El segundo aspecto se refiere a la integración de un escenario didáctico experimental que involucre los recursos tecnológicos, el trabajo colaborativo, y el debate, como medio para favorecer la argumentación en el estudio de la matemática (Okada y Simon 1997:110), usando además las características de las herramientas tecnológicas que posibilitan la transferencia entre diferentes sistemas de representación (Duval, 1993:55).

Considerando lo anterior, planteamos la pregunta ¿Cuáles son las características de los argumentos expuestos por los estudiantes al resolver una secuencia didáctica sobre la integral impropia en un ambiente tecnológico?. La investigación tuvo como finalidad identificar los argumentos que exponen los estudiantes, describir su estructura y hacer inferencias sobre sus líneas de razonamiento. Para esto, la resolución de la secuencia didáctica se planteó de forma colectiva a fin de que los estudiantes expusieran sus ideas, generaran debates alrededor de la actividad matemática, dialogaran y mantuvieran comunicación constante. En la secuencia se usó el software de geometría dinámica GeoGebra, como medio para visualizar comportamientos, analizar la variación de las gráficas y agilizar procesos. Desde el plano de la enseñanza este modelo de actividad matemática representó una novedosa experiencia de trabajo, ya que los estudiantes lograron apoyarse de herramientas tecnológicas, realizar sus propias experimentaciones y trabajar de forma colectiva en la solución de una actividad.

La investigación condujo a reflexiones sobre el papel que tiene la herramienta tecnológica en la conformación de los argumentos matemáticos, particularmente en lo que se refiere al soporte de argumentos. También la estrecha relación de la visualización para sostener argumentos, matizar y exponer algunas excepciones de sus argumentos.

Los contenidos de la presente investigación se organizan en seis capítulos, que a continuación se describen brevemente. El primer capítulo denominado *antecedentes de la investigación* se divide en dos partes, en la primera se describen los trabajos de investigación que informan sobre el fracaso de los estudiantes universitarios en el aprendizaje del concepto de integral impropia. En donde se reportan las dificultades, obstáculos y errores que presentan los alumnos universitarios de primer año al aprender los conceptos relativos a la integral impropia. En la segunda parte se desarrolla una revisión bibliográfica respeto al proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida, en donde se hacen visibles las dificultades que tuvieron los estudiantes para comprender el concepto de integral definida, en el cual se hace patente que los estudiantes poseen un manejo mecánico y operativo del concepto al considerar a la integral siempre como un área, por lo que debe tener signo positivo.

En el segundo capítulo se presenta el *problema de investigación;* este capítulo está dividido en tres partes. En la primera se describe el propósito de la investigación [desarrollar e implementar una secuencia didáctica de carácter experimental, dirigida a estudiantes de primer año de universidad para el estudio de la integral impropia, que promueva representaciones espontáneas del tipo verbal y visual, y que favorezca la transición a las representaciones algebraica, gráfica y numérica, en un ambiente de uso de tecnología]. En la segunda parte se define la pregunta que guio la investigación [¿Cuáles son las características de los argumentos expuestos por los estudiantes al resolver una secuencia didáctica sobre la integral impropia en un ambiente tecnológico?]. En la tercera parte se describe la finalidad de la investigación, que consiste en identificar los argumentos que exponen los estudiantes, describir su estructura y hacer inferencias sobre sus líneas de razonamiento.

En el tercer capítulo se presenta el *marco teórico* que fundamenta la investigación, está conformado por ocho secciones: en la primera se considera la relación entre actividad matemática y el aprendizaje de las matemáticas, basada en los puntos de vista de Brousseau (1998). En la segunda se destaca el tema "actividad matemática con uso de la tecnología", desarrollada con base en una revisión bibliográfica, que nos permitió situar las investigaciones relacionadas con un ambiente tecnológico en el salón de clases de matemáticas. En la tercera sección se considera la visualización en el aprendizaje de las matemáticas, reflexionado con los puntos de vista de Eisenberg y Dreyfus, 1991; Hitt, 2003; Arcavi, 2003; entre otros, haciendo hincapié en que la visualización potencializa el proceso de aprendizaje de las matemáticas. En la cuarta sección se considera el tránsito entre representaciones, discutiendo los puntos de vista de Duval y Hitt; que muestran que las tareas de conversión entre representaciones (gráfica, algebraica y numérica) y la manipulación coherente de tales representaciones, permitirán la construcción del concepto en cuestión. En la quinta sección se reflexionó sobre la relación entre actividad matemática-argumentación, diferenciando entre la definición de argumento y el proceso de argumentación; para abordar esta sección, se revisaron investigaciones donde se especifica la importancia que tiene el diseño de las actividades y tareas que demanden a los estudiantes hacer su razonamiento explícito, de tal manera que las tareas, les permitan y los alienten a usar representaciones y justificaciones como medio para que otros puedan ver su razonamiento matemático. Investigaciones que proponen que maestros necesitan establecer normas sociales en el aula y animar a los estudiantes a hacer su razonamiento explícito y desafiar las pretensiones de los demás. En la sexta sección se consideró el modelo de Toulmin (1958) como una herramienta que permitió describir la construcción, contenido y estructura de los argumentos de los estudiantes al transitar entre diferentes representaciones en un ambiente tecnológico, colaborativo y de debate durante la realización de sus tareas. En la séptima sección se tomó en cuenta el modelo de Toulmin en el contexto de un ambiente tecnológico; para abordar esta sección se analizaron investigaciones como las de Hollebrands, Conner y Smith (2010); Smith (2010); Lavy (2006); Maher, Powell, Weber y Lee (2006), las cuales tienen como común denominador el uso de la tecnología y el modelo de argumentación de Toulmin. Dichas investigaciones dan cuenta de la importancia de los ambientes tecnológicos para ayudar a los estudiantes en el desarrollo de argumentos y demostraciones. En la octava sección se consideró la idea de explicar la relación que existe entre argumento y el desarrollo de ideas matemáticas; en esta sección se reflexionó sobre la importancia de la argumentación en la comprensión conceptual de las matemáticas, acción que está relacionada con el desarrollo del pensamiento de los estudiantes derivado durante el trabajo en el desafío y la justificación. Queda claro, que la integración de la tecnología al salón de clases de matemáticas puede ofrecer beneficios considerables, al transitar entre diferentes representaciones: explorar, modelar, experimentar, reflexionar, conjeturar, justificar y argumentar, que son elementos indispensables para la comprensión y aprendizaje de conceptos matemáticos.

En el cuarto capítulo se presenta la *metodología de experimentación*, en el mismo se describe la metodología ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico y autoreflexión) usada en esta investigación y propuesta por Hitt y González-Martín (2015), en la cual establecen momentos específicos para el trabajo individual, el trabajo en equipo y el debate grupal; con este enfoque se asume que el aprendizaje cooperativo, el debate científico y la autoreflexión, son aspectos centrales del quehacer matemático en el aula, por lo que deben favorecerse y motivarse.

En el quinto capítulo se presenta *la experimentación* de la secuencia didáctica en un ambiente tecnológico. En este capítulo se describen las actividades realizadas en la secuencia didáctica enmarcada en la metodología ACODESA. Se detectan y se describen los momentos significativos en el trabajo individual, el trabajo en equipo, el debate, la auto-reflexión y el proceso de institucionalización de saberes. Además, reporta una discusión de las entrevistas semiestructuradas realizadas en pareja, en donde se informa que los resultados indican que la naturaleza del ambiente tecnológico, el diseño de las tareas y el trabajo colaborativo en el aula influyen sobre los argumentos expuestos por los estudiantes mientras realizan sus tareas que les proponen retos y justificaciones.

En el sexto capítulo se presentan las *conclusiones de la investigación,* está conformado por cinco secciones, en la primera sección se presentan las actividades que se realizaron para dar respuesta a la pregunta que guío la investigación. La segunda sección está relacionada con la metodología y el método de recolección de datos de la investigación. En la tercera sección se describen las estrategias para la recolección y análisis de datos. En la cuarta sección se presenta una discusión con relación a las entrevistas en pareja utilizadas para el diseño de experimentos. Por último, en la quinta sección se muestran las consideraciones transcendentes de la investigación, conflictos de interés y logros de la investigación.

Capítulo I

Antecedentes

1.1. Problemática del estudio de la integral impropia

Las observaciones realizadas al trabajo de los estudiantes de ingeniería durante varios años, motivó el desarrollo de este trabajo de investigación, en particular, en lo que se refiere a los planteamientos asociados con la extensión de la integral de Riemann, el encuentro de los estudiantes con el concepto de integral impropia o generalizada, las condiciones para definir la integral de Riemann, el intervalo de integración cerrado o acotado y la función a integrar acotada en el intervalo de integración. Al respecto, los trabajos de González-Martín (2005:83, 2006:421); Bezuidenhout y Oliver (2000); y González-Martín y Camacho (2004:83, 2005:84) reportan dificultades, obstáculos y errores que presentan los alumnos universitarios de primer año, al aprender los conceptos relativos a la integral impropia. De acuerdo a estas investigaciones, algunos de estos problemas son inherentes al propio concepto de la integral impropia y otros vienen relacionados con ausencia de significado de algunos conceptos tales como límites, convergencia, la definición de integral definida, series y sucesiones.

1.2. Enseñanza basada en algoritmos

Estos estudios señalan también que en la enseñanza de la integral impropia no se favorece la coordinación de los contextos de representación gráfico, algebraico y numérico, lo que eventualmente permitiría el tránsito y la transferencia de información entre estos contextos de representación. Habitualmente la enseñanza de este tema se basa en un fuerte trabajo algorítmico en clase que conduce a la memorización de conceptos sin la posibilidad de problematizar su estructura y forma. En este modelo de enseñanza el profesor se limita a exponer los conceptos, explicar procedimientos y resolver problemas, y el estudiante debe *atender a la explicación*, concentrarse para poder repetir los pasos y resolver ejercicios similares. En torno a esta problemática (Camacho y Aguirre, 2001: 260) señalan que al plantear algunas integrales impropias a un grupo de alumnos y profesores, comprueban la existencia de dificultades para calcular sus valores, y varios de ellos presentan dificultades en los cálculos algebraicos. Concluyen que tanto profesores como alumnos tienden a sustituir los valores extremos de la integral y no calculan las integrales utilizando procesos límite, sino generalizando la regla de Barrow y sustituyendo directamente los extremos de la integral en la variable, aun cuando uno de los extremos es infinito.

1.3. Aprendizaje descontextualizado y desvinculado

De acuerdo con González-Martín (2006: 1) las herramientas y conceptos referentes a la integral impropia se aprenden descontextualizados y desvinculados de los contenidos anteriores; los estudiantes se limitan a memorizar un conjunto de criterios y técnicas que, de estar contextualizados, tendrían mucho más significado. Al respecto, Calvo (1997:50) reporta la existencia de dificultades en aquellos planteamientos que involucran otros sistemas de representación diferente al algorítmico, debido a que en las clases de matemáticas usualmente se privilegia este tratamiento. Si bien, los estudiantes de primeros años de universidad poseen un manejo mecánico y operativo del concepto (González-Martín y Camacho, 2005:83) se requiere reflexionar y reconocer el carácter variacional de la integral desde otras experiencias de trabajo y contextos de representación

Capítulo II

Estado del Arte

2.1. Relación entre actividad matemática y aprendizaje de las matemáticas

Actividad matemática es un término general que se refiere a las acciones que realiza el estudiante en la clase de matemáticas encaminadas al desarrollo de conceptos matemáticos. Lo que representa o implica aprender matemáticas, las actividades matemáticas toman forma específica y una intencionalidad determinada. Por ejemplo, Brousseau (1998) explica que el estudiante aprende adaptándose a un medio en el que transita por contradicciones, dificultades, desequilibrios. En este contexto, el saber es fruto de la adaptación y se manifiesta por respuestas nuevas las cuales se pueden interpretar como evidencia del aprendizaje. Brousseau sostiene que las matemáticas no son simplemente un sistema conceptual, lógicamente consistente y productor de demostraciones son, en primer lugar, una actividad que se realiza en una situación y contra un medio (situación problema).

De acuerdo a lo anterior, podemos señalar que una actividad matemática está estructurada, planeada por el profesor, el cual le da una intencionalidad y sentido en la clase de matemáticas. Además de reconocer el enfoque dado a ese conocimiento [... su aplicabilidad y uso].

2.1.1 Sentido e intencionalidad de la actividad matemática

En un ambiente de trabajo escolar donde se desarrolla una actividad matemática la relación entre el sujeto con una actividad, conduce a diferentes manifestaciones o acciones tales como formular enunciados, proposiciones, construir modelos, poner a prueba hipótesis, entre otras.

Una actividad matemática no sólo se refiere al tipo de actividades escolares como memorizar definiciones, teoremas y reconocer la ocasión para aplicarlos, sino cualquier actividad en la que el estudiante se involucre con el conocimiento matemático para resolver problemas, elaborar procedimientos, comunicar y contrastar sus conclusiones con sus compañeros.

El concepto de actividad matemática se fundamenta en la idea de que la actividad del estudiante en la clase conduce a aprender matemáticas. Este enfoque contrasta con la concepción platónica, ampliamente difundida en nuestro ámbito educativo de que la verdad matemática está dada a quien la sabe ver y a quien tiene un poder de abstracción suficiente.

2.1.2 El hacer: actividad matemática

Brousseau (1998) considera que hacer matemáticas no puede reducirse a manejar un sistema lógico conceptual productor de demostraciones. Hacer matemáticas es llevar a cabo una actividad en una situación concreta y viva en un medio (situación problema). En acuerdo con Brousseau al exponer que un estudiante hace realmente matemáticas cuando, para construir con sentido un conocimiento matemático, debe actuar contra un "medio" (situación problema) que le provoque un verdadero problema, de tal manera que se implique con todo interés en su resolución. En búsqueda de una solución, produce acciones que conducen a la creación de un "saber-hacer". En este sentido, el profesor formula planteamientos que orientan el desarrollo de la situación problema propuesta. En ella, los estudiantes hacen lo necesario para resolver la actividad a través del intercambio de opiniones y puntos de vista mediante la creación de un lenguaje (oral o escrito) propio de las matemáticas.

En este escenario, es importante el concepto de *solución*, no sólo porque es lo que responde al problema o planteamiento inicial, sino que determina y orienta las acciones que se deben realizar para alcanzarlo. Construir la solución de la situación problema es parte de la experiencia de hacer matemáticas, ya que en términos de lo que señala Brousseau, ésta pieza se convierte en el "recurso óptimo" que resuelve el planteamiento.

2.1.3 Actividad matemática - aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo en el desarrollo de una actividad matemática es un elemento importante para favorecer la interacción en todas las actividades que realiza el estudiante.

El desarrollo de una actividad matemática en un ambiente de aprendizaje cooperativo plantea ayudar a fomentar en los estudiantes el pensamiento reflexivo sobre sus métodos de solución de problemas. Con la intención de lograr que los estudiantes tengan una mejor voluntad para explorar problemas [particularmente para examinar problemas nuevos y no rutinarios] e intentar exteriorizar y explicar las ideas a sus compañeros.

En el aprendizaje cooperativo, las actividades están organizadas didácticamente al considerar el salón de clase como un foro abierto al diálogo entre estudiantes y entre estudiantes-profesor. En este ambiente los estudiantes participan activamente en situaciones interesantes y demandantes. Algunas veces se le asigna un rol específico a un estudiante dentro del equipo. De esta manera ellos pueden aprender de sus puntos de vista, dar y recibir ayuda de sus compañeros de clase y ayudarse mutuamente para investigar de manera más profunda acerca de lo que están aprendiendo.

Según Hagelgans, Reynolds y Schwingendorf (1995) el aprendizaje colaborativo implica que los estudiantes trabajen en pequeños grupos (3 ó 4), heterogéneos, normalmente asignados para la duración del curso. De tal forma que cada uno de ellos es partícipe del aprendizaje de sus compañeros de equipo y el espíritu cooperativo está presente en cada faceta del curso.

Los autores establecen las siguientes características, para que los grupos sean llamados *grupos de aprendizaje cooperativo.*

1) Cantidad significativa de trabajo en grupo: el curso es estructurado de tal modo que la mayor parte de la clase es destinada para que los estudiantes trabajen en pequeños grupos y logren objetivos comunes. De esta forma, necesitan comunicarse regular y frecuentemente con cada uno de los miembros de equipo. El interactuar implica reflexión acerca de las ideas matemáticas y discusión de acercamientos alternativos para la solución del problema. En el intento de compartir las ideas con los otros miembros de su grupo, los estudiantes podrán clarificar su propio pensamiento con relación a un problema o concepto. Esta discusión como parte de la dinámica misma, posibilita que los alumnos confronten sus concepciones sin que haya una intervención directa del profesor.
2) "Esprit de corps" entre los miembros del grupo: se espera que los estudiantes desarrollen un sentimiento de pertenencia a su equipo.
3) Responsabilidad mutua entre los miembros del grupo: las actividades para el curso son diseñadas con el propósito de que fluya el espíritu cooperativo en una de las facetas.

4) Grupos estables: para promover el desarrollo del “esprit de corps”, los autores piensan que es esencial la asignación de grupos permanentes, de preferencia para todo el semestre o en su defecto en una significativa parte del semestre. Ejercitarse en el trabajo por equipos [aprender cómo manejar la interacción grupal para aprender matemáticas] es un proceso.

Hagelgans et al. (1995, p.31) afirman “*la idea principal que los estudiantes puedan ser guiados a través de un proceso de tres pasos mientras desarrollan su propia comprensión de un concepto matemático”*

1) Actividades informales que introducen un concepto. El conjunto de actividades que ofrece la base para fomentar las conversaciones estructuradas en los estudiantes. Conformando las ideas durante una actividad, con la intención de estar interesados en encontrar la solución para el problema; organizando sus pensamientos y construyendo conceptos mentales.
2) Tareas en el aula de clase que unifiquen los esfuerzos para germinar las ideas desarrolladas en las actividades: después de que los estudiantes intentan desarrollar las actividades durante las sesiones de problemas, los autores recomiendan que la siguiente clase sea dedicada a las tareas y a discutir las actividades entre todos.
3) Los ejercicios, incluyen problemas tradicionales de tarea que requieren de la aplicación o de la extensión del concepto, de tal modo que refuerza el concepto motivo de estudio.

En este sentido Schwingendorf y Wimbish (1992) afirman que la participación en un grupo cooperativo ayuda a fomentar en los estudiantes el pensamiento reflexivo sobre sus métodos de solución de problemas. Los autores aseveran que la interacción social ofrece oportunidades para advertir que otros pueden llegar a diferentes conclusiones. Estas diferencias pueden ocasionar conflictos cognitivos entre los individuos del grupo. Dichas contradicciones sirven para contextualizar las diferencias cognitivas y conducir a la coordinación que puede resolver el conflicto [originando un cambio y el aprendizaje del concepto en juego].

Con referencia al aprendizaje cooperativo expresado por los autores anteriores podemos señalar que, además de desarrollar habilidades sociales y de trabajo en equipo, se deben cumplir con actividades académicas asociadas a la solución de problemas, lo que incluye: hacer análisis, comprobar el nivel de comprensión, construir esquemas, hacer estimaciones, formular y generar preguntas, hacer comparaciones y predicciones, presentar información, hacer razonamientos y justificaciones, resolver cuestionamientos, resumir y pensar creativamente.

2.1.4 Concepto (explícito o implícito) de aprender matemáticas está asociado con la idea de actividad matemática

En torno a esta situación Legrand (1997) considera que enseñar matemáticas consiste en introducir a los estudiantes en una problemática de cuestionamiento, de clarificación de problemas y de verificación de soluciones [actividad matemática]. Aprender matemáticas consiste en adquirir una actitud de plantearse ciertas preguntas, de transformarlas en problemas y dotarse de herramientas de razonamiento que permitan seleccionar las respuestas posibles de aquéllas que sean suficientemente precisas, eficaces y ciertas para ser consideradas como soluciones. En este sentido es importante proponer a los estudiantes situaciones problema como un medio con los cuales el estudiante debe interactuar para poder aprender matemáticas.

Aprender matemáticas está asociado [implícita ó explícitamente] con la idea de actividad matemática. Es decir, los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y el conocimiento previo. Al respecto Dreyfus (1991) expresa *"comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante y es el resultado de una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales"*.

2.2 Actividad matemática con uso de tecnología

2.2.1 Uso de tecnología en el aula para la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas

El uso de la tecnología en el aula puede ayudar al aprendizaje de las matemáticas. Esto es, la posibilidad de ir construyendo un puente entre ideas intuitivas, en algunos casos abstractos y los conceptos formales. Las actividades de aprendizaje con tecnología, no es simplemente leer en la pantalla, es el resultado de una construcción en el proceso de interacción con la máquina (Balacheff, 2000). La importancia del uso de la tecnología en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, ha sido considerada por los investigadores como un medio que permite al estudiante obtener conclusiones y realizar observaciones que en otros ambientes, por ejemplo "lápiz y papel", serían difíciles de obtener. Sin embargo, al usar la tecnología en el proceso de aprendizaje de las matemáticas es importante considerar lo indicado por Artigue (2002) quien recomienda dos principales demandas educativas en el aprendizaje de las matemáticas con el uso de instrumentos tecnológicos:

1) Que sean instrumentos pedagógicos. Es decir, que permitan aprender mejor los contenidos matemáticos que han sido definidos sin tomar en cuenta esta tecnología.

2) Que contrarresten prácticas de enseñanza inadecuada [prácticas de enseñanza orientadas a la exposición excesiva o hacia el aprendizaje de habilidades matemáticas mecanizadas].

Además Artigue (1999) considera que el uso de la tecnología informática [después de haber reflexionado cuidadosamente sobre su uso] puede jugar un importante papel en el desarrollo de una articulación flexible entre los registros algebraico y gráfico y hacer de esta articulación un instrumento eficiente de la actividad matemática. También expone que es importante considerar, la viabilidad de estas nuevas estrategias didácticas de enseñanza requieren cambios importantes en el status del los registros gráficos-algebraicos-numéricos, que han sido promovidos en el desarrollo de la sesiones en el salón de clase en el nivel de ingeniería.

En torno a este tema [uso de la tecnología en el salón de clases] González-Martín (2006) reporta algunas reflexiones respecto a los estudiantes al usar tecnología en el desarrollo de sus actividades matemáticas; a partir de los análisis de los recursos y estrategias básicos que utilizan los estudiantes para abordar una representación concreta del problema [...y hasta qué punto son capaces de realizar la transición de una representación a otra...], se identificaron tres perfiles en los estudiantes participantes:

1) Los que confiaron en el uso de la tecnología como un medio para validar sus trabajos en lápiz-papel, sin incluir la aproximación gráfica;
2) Los que usaron la tecnología para representar gráficamente y calcular las áreas aproximadas;
3) Los que combinaron el trabajo lápiz-papel y la tecnología para resolver los problemas.

Estas investigaciones nos brindan información sobre las alternativas que se obtienen al integrar y usar la tecnología en el salón de clases de matemáticas, y poder considerarla como un instrumento didáctico para que los estudiantes logren crear diferentes representaciones de ciertas tareas [actividades matemáticas] y como un puente para formular sus propias preguntas, experimentar, conjeturar y justificar. Lo que constituye una ventaja significativa en la comprensión y aprendizaje de los conceptos matemáticos en juego.

2.2.2 Implicaciones didácticas del uso de la tecnología en el aula

La introducción de instrumentos tecnológicos en el aula trae consigo transformaciones en la presentación y tratamiento de los saberes matemáticos, estas trasformaciones pueden dotar de significados al concepto matemático y enriquecer su aprendizaje (Balacheff, 1994).

Estos instrumentos tecnológicos pueden ofrecer ventajas si se usan con estrategias pedagógicas y desventajas si se usan sin previo análisis. En torno a esta situación Goldenberg (1987) señaló *"los estudiantes a menudo malinterpretaban lo que veían en las representaciones gráficas de funciones. Dejados solos a experimentar, podrían inducir reglas que son erróneas"*. El comportamiento correcto con el que el estudiante aprende rápidamente a utilizar las tecnologías no se da de forma natural, y menos en los estudiantes con dificultades de conceptualización. Es por eso que en la actualidad existe el desafío al usar la tecnología en el aula como herramienta [instrumento] pedagógica, en especial para los estudiantes menos capaces (González-Martín, 2006).

Al igual que el proceso de enseñanza y el aprendizaje implican procesos complejos, la introducción de la tecnología al salón de clases de matemáticas agrega dificultad a este ambiente. Guin y Trouche (1999) señalan que *"transformar cualquier herramienta tecnológica en un instrumento matemático implica para los estudiantes un complejo proceso de 'instrumentación' que no necesariamente lleva a una mejor comprensión matemática. Se hace necesario un análisis de las restricciones y del potencial del artefacto para señalar el conocimiento matemático implicado en su uso"*

La experimentación adecuada en un ambiente tecnológico permite al estudiante hacer conjeturas, transitar de un sistema de representación a otro, reconocer patrones, deducir y analizar comportamientos en gráficas y a partir de ello generar argumentaciones sobre un objeto matemático en construcción.

Una ventaja importante a considerar en la experimentación en un ambiente tecnológico, son las representaciones (algebraica, numérica y gráfica) de un concepto en construcción son: las tareas que impliquen la utilización de diferentes sistemas de representación y promuevan una articulación coherente entre representaciones.

Las representaciones (gráfico, algebraico y numérico) pueden ayudar a los estudiantes a organizar su pensamiento, hacer sus ideas más concretas y disponibles para la reflexión (NCTM, 2000). Los profesores pueden obtener valiosa información sobre la forma en que los estudiantes interpretan y piensan sobre las matemáticas. Mirando sus representaciones pueden construir un puente entre las representaciones personales de los estudiantes y unas más convencionales.

En este contexto Hitt y Cortés (2009) consideran que en el aprendizaje de las matemáticas, todas las representaciones de un concepto deben ser consideradas al mismo nivel cognitivo; y, una vez que se ha adquirido el concepto, el profesor puede solicitar a los estudiantes una manipulación más depurada sobre los tratamientos algebraicos. Ello sugiere que los estudiantes puedan percibir las matemáticas en una forma de experimentar [al interactuar con la tecnología] que conduce a la necesidad y el deseo de ser más formal en las justificaciones. Es decir, los estudiantes pueden encontrar ideas matemáticas, manipulando el fenómeno y así descubrir posibles relaciones matemáticas fundamentales.

Las implicaciones didácticas del uso de la tecnología en el aula son positivas; sin embargo, hay que considerar que la tecnología no sustituye la labor del docente, ya que a él le corresponde tomar la decisión sobre cuándo y cómo aplicar la tecnología; examinar los procesos seguidos de los alumnos; prestarles ayuda cuando el camino de solución no es el correcto o cuando la observación que realizaron no es del todo adecuada (NCTM, 2000, p.26).

2.2.3 Síntesis de ideas sobre uso de tecnología en el aula

La implementación de la tecnología en el salón de clases exige al profesor planificar cuidadosamente las actividades con las que va a trabajar y estar preparado para resultados inesperados. Si bien, el uso de la tecnología permite explorar situaciones que en el trabajo lápiz y papel parecerían muy complejas [...casi imposibles], ésta no debe usarse como un sustituto de las operaciones fundamentales. El profesor y el alumno deben ser conscientes que la tecnología robustece el trabajo en lápiz y papel y ofrece nuevas posibilidades de exploración de los objetos matemáticos en juego.

Existen trabajos de investigación con propuestas innovadoras en cuanto a la introducción de la tecnología al salón de clase de matemáticas (Buchberger, 2003; Camacho y Depool, 2003; Guzmán, 1991; Guin y Trouche, 1999; Heid, 1988; Kidron, 2001; Kimmis, 2004; Llorens y Santojan, 1997; Soto-Johnson, 19998; Trouche, 2004). Trabajos que proponen un escenario que satisfaga las siguientes características:

- ✓ Que el alumno pueda explorar, plantear conjeturas, y evaluarlas y sintetizar los resultados;
- ✓ Que permita trabajar de manera gráfica y analítica, y muestre así otro enfoque distinto al algorítmico;
- ✓ Que libere al alumno de cálculos, facilitando el trabajo experimental y de ese modo pueda centrar su atención en el porqué de los resultados;
- ✓ Que ayude a enfocar la atención en aspectos más globales, que la resolución de los problemas;
- ✓ Que les haga sentir confianza en los resultados que se obtienen;
- ✓ Que ayude al estudiante a construir su propio conocimiento matemático;
- ✓ Que sea sencillo en el manejo y eficaz;

- ✓ Que favorezca la visualización.

La integración de la tecnología al salón de clases de matemáticas puede ofrecer beneficios considerables, al transitar entre diferentes representaciones, explorar, modelar, experimentar, reflexionar, conjeturar y justificar. Elementos indispensables para la comprensión y aprendizaje de conceptos matemáticos. De modo que, se concibe a un ambiente tecnológico en el salón de clases como una alternativa didáctica que permite realizar observaciones que en otros ambientes, por ejemplo "lápiz y papel" sería difícil de obtener.

Sin duda, el uso de la tecnología en el aula ha generado cambios en la manera de plantear y desarrollar las clases. Al respecto Hitt (2003) señalo *"el avance tecnológico ha influido notablemente en el desarrollo de nociones teóricas que antes se tomaban en cuenta, pero no eran consideradas como cruciales en términos de explicar el aprendizaje de conceptos matemáticos. Actualmente, con la tecnología, es importante el estudio de la diferentes representaciones de los objetos matemáticos en ambientes muy diferentes a los que se seguían en el pasado"*. Hitt propone un uso reflexivo de la tecnología, destacando su papel de herramienta que permite manipular diferentes representaciones y, con ello, favorecer la construcción de los conceptos matemáticos.

2.2.4 Experimentación con la tecnología

Borba y Villarreal (2006) consideran que la experimentación con tecnología no es sinónimo de 'oprimir teclas' de una calculadora graficadora o de una computadora, sino que es un proceso que va más allá de eso. Uno de los principales argumentos en la década de los setentas y ochentas, cuando comenzó la oleada tecnológica de la computación, fue que los estudiantes sólo las usaban para oprimir teclas en lugar de pensar, demostrar y hacer toda clase de procesos cognitivos.

La forma en cómo el estudiante experimenta con la tecnología, le aporta al profesor valiosa información para determinar el tipo de actividades que se pueden plantear, cómo se beben dirigir y los posibles alcances a los que pueden llegar. Un ambiente tecnológico de experimentación provee un rico ambiente para la resolución de problemas complejos que solicitan retos a los estudiantes, y puede ser considerado como un agente didáctico. En donde la representación de un mismo objeto matemático en distintos sistemas de representación y articulación entre presentaciones permite que el encuentro entre el sujeto y el medio sea fructífero, y que el sujeto se apropie del conocimiento de una manera más efectiva.

Ambientes tecnológicos dinámicos.

Smith (2010) en su investigación realiza un estudio en donde hace una comparación de la construcción de los argumentos creados por estudiantes en entornos tecnológicos y no tecnológicos. Los resultados de este estudio indican que los estudiantes en un entorno tecnológico de geometría dinámica durante una unidad didáctica, crean 179 argumentos con diversas estructuras y contenidos, incluyendo las formas en que los estudiantes utilizan la tecnología. Mientras que en un entorno no tecnológico los estudiantes sólo logran construir 88 argumentos con ciertas estructuras y contenidos. Los resultados de este estudio sugieren que los profesores deben diseñar tareas y actividades que utilicen herramientas con capacidades dinámicas, capitalizar en los estudiantes el potencial de las herramientas dinámicas, y solicitar un razonamiento explícito cuando utilizan estas herramientas.

Las investigaciones sobre ambientes tecnológicos dinámicos han sugerido que los estudiantes que trabajan en un ambiente tecnológico dinámico, se apoyan de este medio para el desarrollo de justificaciones y demostraciones formales. Además estos ambientes tecnológicos dinámicos, permiten a los estudiantes construir diagramas precisos e interactuar con los diagramas para abstraer datos. En este contexto, los estudiantes y el profesor podrían iniciar un debate en el aula en la que las normas matemáticas encontradas pueden llegar a ser demostraciones formales.

2.2.5 Ambiente tecnológico

La introducción de la tecnología en el salón de clases ha cambiado la forma en que se lleva a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. A diferencia del enfoque algorítmico que se le ha dado a la enseñanza de esta disciplina, ésta se puede desarrollar ahora en un ambiente de descubrimiento y reflexión. Al incorporar la tecnología al salón de clases, podemos generar un ambiente en el que los estudiantes tengan oportunidades de aprender matemáticas a través de la exploración y dinamismo que nos proporciona este ambiente tecnológico.

Las herramientas tecnológicas permiten establecer nuevas tareas y configuran un ambiente de trabajo escolar experimental. Tal como lo señala Borba y Villarreal (2005); la experimentación en un ambiente de uso de tecnología permite al estudiante construir conjeturas, transitar de un sistema de representación a otro, reconocer patrones, deducir y analizar comportamientos en gráficas y a partir de ello generar argumentos sobre un objeto matemático en construcción. Además, Villarreal y Borba (2010) consideran a un ambiente tecnológico como un constructo teórico 'Humans-with-Media' que está soportado en dos pilares, a saber: que la cognición no es un trabajo individual sino más bien de naturaleza colectiva; y que la cognición incluye herramientas, dispositivos, artefactos y medios con los cuales el conocimiento es producido. Nos queda claro, que la integración de la tecnología al salón de clases de matemáticas puede ofrecer beneficios considerables, al transitar entre diferentes representaciones, explorar, modelar, experimentar, justificar y argumentar; elementos indispensables para la comprensión y aprendizaje de conceptos matemáticos en construcción.

Este tipo de ambientes puede aportar valiosa información para determinar el tipo de actividades que se pueden plantear, cómo se deben abordar y los posibles alcances a los que se pueden llegar con cada una de ellas. En el caso de la presente investigación se diseño una secuencia didáctica en la que se plantearon actividades que marcan diferentes momentos en un ambiente tecnológico al interactuar entre: estudiante-estudiante, estudiante-hoja de trabajo, estudiante-tecnología, estudiante-profesor. Sin embargo la incorporación de un ambiente tecnológico al salón de clases solicita a los docentes desafíos al diseñar actividades que aprovechen sus características con el potencial de apoyar nuevas maneras de enseñanza.

Aspectos particulares de un ambiente tecnológico:

- ✓ Ofrecer la posibilidad de transitar-articular entre representaciones -algebraica-gráfica-numérica- , con el objeto de promover un trabajo experimental,
- ✓ Aportar a las lecciones matemáticas distintos matices y representaciones que puedan ser utilizados para la experimentación, visualización y modelación de un concepto matemático en construcción,
- ✓ Articular el trabajo lápiz-papel-tecnología,
- ✓ Promover un trabajo colaborativo y animado a la discusión de distintas soluciones,

- ✓ Promover un aprendizaje más activo, utilizando aproximaciones experimentales, junto con la posibilidad de ayudar a los estudiantes a construir conexiones entre diferentes representaciones,
- ✓ Promover la interacción entre: estudiante-estudiante, estudiante-profesor, estudiante-hoja de trabajo, estudiante-tecnología,
- ✓ Brinda la oportunidad al estudiante de retroalimentar y externar sus ideas a cerca de sus concepciones y creencias para realizar en caso necesario correcciones instantáneas,
- ✓ Promover un puente entre ideas intuitivas-abstractas-conceptos formales,
- ✓ Abrir una ventana a los procesos del pensamiento de los estudiantes.

2.2.6 La importancia del proceso de argumentación en un ambiente tecnológico

En este contexto, la argumentación es importante, no sólo porque hace viable la observación de las ideas y nociones que el estudiante está concibiendo sobre un saber matemático, sino también, es una forma de generar o construir conocimiento matemático (Inglis y Mejia-Ramos, 2005). Al respecto, Tall (2009) señala que existen aspectos dinámicos de la matemática que se pueden complementar con el uso de software para la producción de efectos visuales de los conceptos del cálculo. Tall explica que el cálculo está compuesto por conceptos dinámicos, por ejemplo: el deseo de cuantificar las cosas que cambian (el concepto de función), la razón en la cual ellas cambian (derivada), la manera en la cual ellas se acumulan (la integral) y las relaciones entre ellas (Teorema fundamental del cálculo y la solución de ecuaciones diferenciales). El uso del software en la enseñanza proporciona representaciones dinámicas de estos conceptos y permite identificar las relaciones conceptuales, lo cual favorece a un ambiente de trabajo experimental donde se puedan realizar exploraciones a las gráficas.

Baccaglini-Frank y Mariotti (2010) describen un modelo de actividad matemática denominada arrastre-conjetura en el contexto del estudio de geometría dinámica. En esta investigación se describen procesos cognitivos que ocurren durante la producción de conjeturas, particularmente describen cómo se desarrollan ideas intuitivas durante la fase de exploración y cómo evolucionan hasta la formulación de conjeturas. Los investigadores explican que la introducción de modalidades de *arrastre* puede fomentar y enriquecer la demostración de una conjetura, donde los argumentos tienen un rol relevante al proporcionar evidencias y aserciones para la construcción de la demostración.

De acuerdo estos autores, la función de *arrastre* se refiere a capacidad del software para realizar movimientos en tiempo real donde se puede tener una experiencia física dinámica, lo que permite al usuario percibir el movimiento como el efecto de una acción (dependencia lógica), y conduce a identificar propiedades y regularidades. El análisis de los cambios observados puede ayudar al estudiante a formular justificaciones matemáticas a través de la inducción y búsqueda de patrones.

2.3 Visualización en el aprendizaje de las matemáticas

El fracaso de los estudiantes en los primeros cursos de cálculo en la universidad, es un hecho innegable que motiva a muchos investigadores en busca de las causas que lo originan. Algunos investigadores como Eisenberg y Dreyfus (1991) creen que una posible causa de este hecho es la falta de conexión entre los aspectos visuales y analíticos de los conceptos y procedimientos matemáticos. Estos investigadores señalan los beneficios de la visualización de los conceptos matemáticos, sin embargo, advierten de una alta demanda de trabajo cognitivo, lo cual desalienta a los estudiantes quienes están más acostumbrados a un trabajo procedimental. Tal como lo explica Vinner (1989), los estudiantes tienen una alta tendencia a pensar algebraicamente más que de manera visual, sin embargo, la visualización es una herramienta poderosa para lograr que los estudiantes desarrollen un entendimiento de los conceptos matemáticos, aunque implique un mayor reto cognitivo.

Arcavi (2003) destaca el papel que desempeña la visión en nuestras vidas, tanto a nivel biológico como socio-cultural, por su labor en los procesos de comunicación. A través de algunos ejemplos, muestra cómo diversos aspectos de visualización ponen de manifiesto su capacidad para convertirse en un poderoso complemento en la enseñanza-aprendizaje de distintos tópicos matemáticos.

Los investigadores antes mencionados consideran que la visualización potencia el proceso de aprendizaje de las matemáticas, ya que brinda la oportunidad de justificar [o demostrar] algunos resultados. Además señalan que el razonamiento visual también se puede considerar formal;

opuesta a la posición platónica conservadora que considera una demostración válida sólo si se puede expresar aritméticamente.

2.3.1 Visualización relacionada con la tecnología

El reciente desarrollo tecnológico ha hecho que resurja el interés por utilizar las técnicas visuales como uno de los principales elementos de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje. La visualización y el uso de múltiples representaciones (algebraica, numérica y grafica) de un objeto matemático son considerados como un fuerte soporte para la formación y compresión de conceptos.

Algunos investigadores como Tall, Artigue, Heid, Scwarz, y Ruthven, (citados en Eisenberg y Dreyfus, 1991) hacen hincapié en la representación analítica y visual de un mismo concepto matemático y, la mayoría de ellos, han desarrollado propuestas curriculares en las que han incorporado el uso de la tecnología para sacarle partido a la facilidad con la que maneja las representaciones gráficas. En torno a este tema Hitt (2003) propone el uso de las nuevas tecnologías para la visualización y así reforzar la manipulación coherente de distintas representaciones del mismo concepto que permitan una sólida construcción del concepto.

La presencia de la tecnología está transformando notablemente la forma de hacer matemática. Gracias a su potencial para permitir el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de objetos matemáticos, creando espacios en los que el estudiante pueda construir conocimiento matemático.

2.3.2 Conceptualización la visualización

Arcavi (2003) señala que "*la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión. Consideramos esta perspectiva para desarrollar la secuencia de actividades, en donde se le ha dado relevancia al tratamiento gráfico, el análisis visual, la extracción de propiedades sobre relaciones gráficas*".

Hitt (1995) menciona que *"la visualización hace posible crear ricas imágenes mentales que el individuo pueda manipular en su mente, ensayando diferentes representaciones del concepto y, si es necesario, usar el papel o la computadora para expresar la idea matemática en cuestión"*. Para realizar la labor de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico y verbal. La visualización no podemos entenderla como un simple acto de ver, sino como una habilidad para representar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. La visualización matemática es el proceso de formarse imágenes mentales, con lápiz y papel o con ayuda de la tecnología, y usar tales imágenes en forma efectiva para descubrir conceptos matemáticos e interpretarnos.

En esencia, se ha enfatizado en el papel que juega la visualización en la adquisición de los conceptos matemáticos, se puede percibir una cierta tendencia hacia el papel de la visualización en el quehacer matemático. Además, la visualización y la experimentación de los sistemas de representación 'algebraica-numérica-gráfica' han cambiado aspectos fundamentales en el proceso de aprendizaje del cálculo en la universidad. Cabe aclarar que la disponibilidad de la tecnología, ayuda a comprender con claridad los conceptos que sustentan las imágenes que aparecen en la pantalla.

2.3.3 La Visualización en los cursos de Cálculo

En este sentido Artigue (1991) afirma que la introducción al cálculo presenta dificultades a los estudiantes debido a diferentes factores: el nivel altamente sofisticado de la estructura de sus fundamentos, la existencia de obstáculos como son la noción de infinito o la conceptualización de los reales, dificultades de formalización ya que el tratamiento formal del cálculo introduce definiciones que entran en conflicto con las concepciones espontáneas del estudiante y el uso de cuantificaciones que no operan en la misma dirección que el pensamiento intuitivo. Frente a esos conflictos la enseñanza tradicional se refugia en una algebrización del cálculo: manipulación de fórmulas más que de funciones, énfasis en el cálculo de derivadas más que en la teoría de aproximaciones lineales, cálculo de primitivas más que en la búsqueda de significado de la integración, aprendizaje de recetas para solucionar ecuaciones diferenciales más que desarrollar aproximaciones numéricas o gráficas de esas soluciones. Ante esta problemática Artigue señala algunas ventajas de la utilización de la tecnología en la clase de cálculo siempre que sea acompañada de un contexto de enseñanza-aprendizaje coherente. La computadora permite establecer imágenes visuales de los fundamentos del cálculo que enriquecen el repertorio de imágenes mentales dando al mismo tiempo una imagen de la matemática como una actividad científica constructivista.

2.3.4 Visualización y gráficas-integrales (relación con la matemática)

En su investigación Mundy (1987) reporta que los estudiantes frecuentemente tienen solamente una comprensión mecánica de los conceptos básicos de cálculo debido a que no han alcanzado una comprensión visual de las nociones básicas subyacentes. En particular, Mundy pidió calcular la integral $\int_{-3}^{3} |x+2| dx$ a un conjunto de 973 estudiantes de un curso de Cálculo, y sólo el 5.4% de los participantes respondió correctamente la cuestión. Mundy concluyó que los estudiantes no tenían una comprensión visual de que las integrales de funciones positivas pueden ser pensadas en términos de área bajo una curva.

Balacheff (1994) expone que la visualización en matemáticas juega un papel fundamental. No sólo se usa de forma natural para la representación gráfica de funciones o el trazado de figuras en geometría; es útil para mostrar algunos razonamientos bajo la forma de gráficas de inferencia.

González-Martín (2006) considera que la visualización juega un papel fundamental en la actividad matemática y es un proceso mediante el cual las representaciones mentales pueden hacer presentes. Por ejemplo podemos mencionar que un acercamiento gráfico que se basa en procesos de visualización, dichos procesos demandan un gran esfuerzo cognitivo, pero generan razonamiento por medio de elementos visuales que ayuda a un mejor entendimiento matemático estimulando el proceso de descubrimiento matemático. La habilidad para trazar por sí mismo gráficos simples que representan una situación matemática y la habilidad para interpretar esos gráficos y usar esa información a la hora de resolver problemas, resultan fundamentales para el aprendizaje del cálculo.

2.4 Tránsito entre representaciones

Duval (1993, 2000) expone que la construcción de un concepto matemático no se puede lograr si sólo se trabaja con un registro de representación, se deben promover tareas que favorezcan la conversión entre al menos dos de sus distintas representaciones, que permitan establecer una base cognitiva para propiciar el aprendizaje. Cada registro de representación resalta características y propiedades determinadas del objeto matemático, y su contenido depende más del registro de representación que del objeto representado, por lo que se hace necesaria una interacción entre las diferentes representaciones del objeto matemático para establecer un dominio conceptual más amplio. Hitt (2003) considera que las representaciones de un concepto matemático, solo son una parte del mismo, por lo tanto, el tratamiento de las diferentes representaciones del concepto es lo que nos permitirá su construcción. Es decir, las tareas de conversión entre representaciones y la manipulación coherente de tales representaciones permitirán la construcción del concepto en cuestión.

Establecer el tránsito entre representaciones requiere coordinar las experiencias de trabajo en las diferentes situaciones y planteamientos y transferir esta información a los diferentes contextos de representación. A partir de estos referentes, construimos la idea de transitar y articular basado en explorar conceptos, formular sus propias conjeturas, visualizar y extraer datos, aportar justificaciones, entre otros.

2.4.1. Tránsito, transferencia.

Las representaciones son un elemento esencial para apoyar la comprensión del estudiante sobre los conceptos y relaciones matemáticas. Al transitar entre varios sistemas de representación (algebraica-gráfica-numérica) apoyados de la tecnología, permite dar significado concreto a los conocimientos matemáticos. En este sentido Hitt considera que en aprendizaje de las matemáticas, todas las representaciones -algebraica, gráfica, numérica y verbal- de un concepto deben ser consideradas al mismo nivel cognitivo; y una vez que se ha adquirido el concepto, el profesor puede solicitar a los estudiantes una manipulación más depurada sobre los tratamientos algebraicos.

2.4.2. Sistemas de representación - gráfico, algebraico, numérico-

Hitt (2003) argumenta que "*sabemos que las representaciones de un concepto matemático, solo representan una parte del mismo, por lo tanto, el tratamiento de la diferentes representaciones del concepto es lo que nos permitirá su construcción. Es decir, las tareas de conversión entre representaciones y la manipulación coherente de tales representaciones permitirán una sólida construcción del concepto en cuestión*". En este sentido Hitt manifiesta que para el uso reflexivo de la tecnología, es necesario implementar en el aula de matemáticas tareas en las que la actividad matemática demande el uso coherente de diferentes representaciones. Desde este punto de vista, la tecnología servirá como herramienta fructífera para la construcción de conceptos matemáticos más profundos que reflejen en procesos exitosos por parte de los estudiantes en la resolución de problemas.

Duval (1998) indica *que en la construcción de los conceptos matemáticos cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación.* En torno a esto Dreyfus (1991) Considera que para tener éxito en matemática es importante poseer representaciones mentales de un concepto que incluyan varios aspectos de dicho concepto (gráfico, numérico, algebraico) relacionados entre sí y que permitan flexibilidad en el pensamiento a partir de la convocatoria de los diferentes aspectos del concepto dependiendo del contexto.

2.5. Relación entre actividad matemática y argumentación (actividad matemática generadora de argumentos)

El desarrollo de habilidades de los estudiantes para construir argumentos utilizando un razonamiento sólido, es uno de los objetivos fundamentales de la educación en todo plan de estudios (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas 'NCTM', 2000). Los argumentos son las explicaciones que los estudiantes logran hacer y decir con respecto a la actividad de aprendizaje desde el punto de vista individual y grupal.

2.5.1 El argumento y la argumentación

Smith (2010) expresa que un argumento matemático puede definirse como una secuencia de instrucciones matemáticas que tiene como objetivo convencer, mientras que la argumentación puede ser considerada como un proceso en el que un discurso lógico matemático se desarrolla. Otro punto de vista, Krummheuer (1995) considera que la argumentación es el proceso y el argumento es el producto. Además, las explicaciones dadas en el proceso de argumentación podrían ayudar al desarrollo de habilidades de generalización (Crowley y Siegler, 1999).

El aprendizaje cooperativo fomenta la necesidad de la argumentación (Okada y Simon, 1997). Este tipo de aprendizaje crea situaciones en las que el estudiante tiene que aclarar su/sus ideas a los miembros de sus grupo de trabajo. Este acto de aclaración a veces incluye la capacidad de persuadir a su/sus colegas con la corrección de su/sus declaraciones. Por lo tanto, el análisis de argumentos puede dar una idea de cómo los estudiantes están pensando, razonando, entendiendo y haciendo matemáticas.

Los profesores tienen que diseñar actividades y tareas que demande a los estudiantes hacer su razonamiento explícito, que incluya los modos en que utilizan las herramientas y el razonamiento que conecta el uso de la herramienta a sus pretensiones. Estas investigaciones sugieren que las tareas se diseñen para permitir y alentar a los estudiantes a usar representaciones y justificaciones, como medio para que otros puedan ver su razonamiento matemático. Los maestros también necesitan establecer normas sociales en el aula y animar a los estudiantes a hacer su razonamiento explícito y desafiar las pretensiones de los demás.

2.6 Modelo de Toulmin

Toulmin (1958) formuló un modelo para analizar los argumentos reconociendo la necesidad de analizar condiciones normativas de la argumentación en lenguaje natural, destacando un interés filosófico de la argumentación como práctica. Alvarado y González (2009) explican que este modelo es aplicable a todo tipo de argumentaciones y en particular a esquemas de prueba tanto intuitivos y transformacionales como axiomáticos. De acuerdo con Toulmin (1958) es en la lógica donde se debe buscar un modelo normativo para la argumentación, sin embargo, a Toulmin le inquietaba en menor medida la validez lógica de un argumento y le preocupaba más su estructura y contenido semántico, por lo que Inglis y Mejia-Ramos (2005) señalan que esta manera de analizar argumentos ha llegado a conocerse como lógica informal. El modelo de Toulmin está conformado por seis tipos de declaraciones cada una de las cuales cumple un papel diferente en el argumento (Inglis y Mejia-Ramos, 2005). La aserción es la tesis que defiende quien argumenta. La evidencia es la información en la cual se basa la aserción. La garantía justifica la conexión entre evidencia y aserción haciendo referencia, por ejemplo, a una regla, una definición, o por medio de una analogía. La garantía es apoyada por el soporte a través de una nueva evidencia; este modelo de visualiza en la figura 2.1.

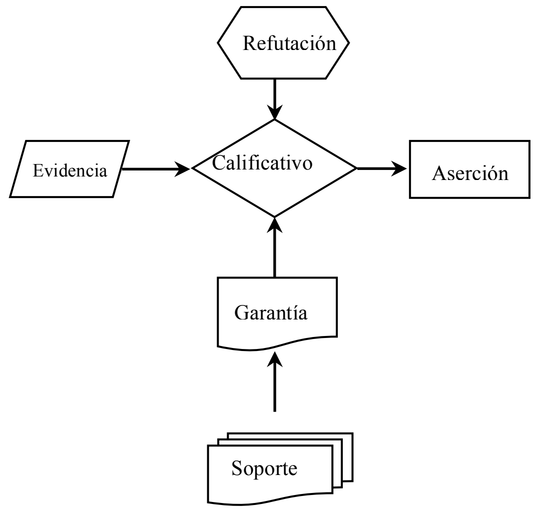


Figura 2. 3. Modelo argumentativo de Toulmin (1958)

En su modelo, Toulmin acepta que una garantía acompañada de un calificativo modal no absoluto, puede ser propuesta simplemente para reducir el nivel de incertidumbre con respecto a una aserción. El calificativo modal especifica la fuerza de la aserción, expresando el grado de confianza de la tesis, y la refutación presenta las excepciones de la aserción, aquellas condiciones bajo las cuales no es posible sostener la tesis del argumento. El modelo de Toulmin opera de la siguiente manera: a partir de una evidencia (datos) se formula una aserción (proposición). Una garantía conecta los datos con la aserción y se ofrece un cimiento teórico, práctico o experimental: el respaldo. Los calificadores modales (grado de confianza): probablemente, seguramente, sin duda, tal vez indican el modo en que se interprete la aserción como verdadera, contingente o probable. Finalmente, se considera sus posibles reservas u objeciones (limitaciones, excepciones,...)

2.6.1 El modelo argumentativo de Stephen Toulmin (1958).

En contextos diversos de conversación, como el cotidiano, el académico, el laboral y en incontables situaciones, debemos defender una apreciación, una descripción o, en el mayor de los casos, una opinión, a través de pruebas y razones que demuestren o justifiquen lo que decimos y hacemos. A esta actividad humana se le denomina argumentar. Argumentación implica razonamiento. Aristóteles fue uno de los primeros en describir la existencia de una lógica argumentativa, de naturaleza inductiva en los discursos sociales, diferente a la silogística y valorada en la actualidad en función de parámetros como coherencia y adecuación. Una línea de argumentación inductiva permite inferir a partir de una evidencia particular con el fin de derivar unas conclusiones. Aristóteles, sin obviar otras partes del proceso argumentativo inducido, considera que dos son necesarias, la premisa y la prueba.

2.6.2 La argumentación inductiva de S. Toulmin.

La argumentación inductiva se fundamenta a partir de observaciones o evidencias específicas, de las cuales se deriva una conclusión, reafirmación o prueba con la que se aspira convencer al lector u oyente. Asociar una aserción 'garantía' con una conclusión no siempre resulta convincente. Conclusión 'proposición que se pretende probar y que se deduce de las premisas'.

Nacido en 1922, Stephen Toulmin fue un matemático, con PHD en Cambridge. Su trabajo más ampliamente citado es *The Uses of Argument* (1958), en el cual establece un modelo de argumentación que consta de seis partes a través de las cuales pueden ser analizados los argumentos retóricos. Toulmin (1958); Toulmin, Rieke y Janik (1979), conciben a la retórica epistémicamente como una forma de conocimiento que genera conocimiento, acuerdos y cambios conceptuales, señalan que la creación de nuevos paradigmas no surge de revoluciones que ignoran las antiguas creencias y concepciones.

Toulmin (1958) diseña un modelo para el análisis argumental, que desborda la perspectiva tradicional de la lógica aristotélica, aquella que concibe las argumentaciones como la adecuación de tres premisas, de tres entradas: premisa mayor, premisa menor, conclusión. Por el contrario, a Toulmin le interesa trabajar con un modelo que registre los modos prácticos en que se llevan a cabo cotidianamente las argumentaciones, las discusiones argumentativas. La propuesta de Toulmin reformula el silogismo tradicional de tres entradas (premisa mayor, premisa menor, conclusión), por considerarlo ligado a un trabajo del lógico teórico, muy poco relacionado con la práctica del razonamiento justificatorio de las aserciones que realmente tienen lugar.

Toulmin cree que las argumentaciones cotidianas no siguen el clásico modelo riguroso del silogismo y crea uno para analizar cualquier tipo de argumentación en el marco de los discursos sociales. Así también, considera que un argumento es una estructura compleja de datos que involucra un movimiento que parte de una evidencia 'datos' y llega al establecimiento de una aserción ‘pretensión’. El movimiento de la evidencia a la aserción es la mayor prueba de que la línea argumental se ha realizado con efectividad. La garantía permite la conexión. Este modelo establece las reglas que se precisan en cualquier disciplina o espacio abierto a la discusión para construir una argumentación. El proceso de la evidencia a la proposición debe contener ciertos elementos necesarios que nos van a permitir decidir si la línea argumental resulta convincente.

2.6.3 ¿Qué significa argumentar?

Toulmin-Rieke-Janik (1984) señalan que es la constatación de que uno de nuestros modos de comportamiento lo constituye la práctica de razonar, de dar razones a otros a favor de lo que hacemos, pensamos o decimos. Aunque exista una gran variedad de usos del lenguaje, es posible distinguir entre un uso instrumental y un uso argumentativo. El primero tiene lugar cuando las emisiones lingüísticas consiguen directamente sus propósitos sin necesidad de dar razones adicionales; por ejemplo cuando se da una orden, se pide algo, etcétera. El uso argumentativo, por el contrario, supone que las emisiones lingüísticas fracasan o tiene éxito, según que puedan apoyarse en razones, argumentos o pruebas.

Las situaciones y problemas con respecto a los cuales se argumenta pueden ser muy distintos y, en consecuencia, el razonamiento cambia en relación con las situaciones. Sin embargo, es posible algunas cuestiones que son comunes: una de estas cuestiones es la de cuál es la estructura de los argumentos, esto es, de qué elementos se componen los argumentos, qué funciones cumplen dichos elementos y cómo se relacionan entre sí; otra es la fuerza de los argumentos, esto es, la cuestión de con qué intensidad y bajo qué circunstancias el material presentado en la argumentación suministra un apoyo en relación con la pretensión que se utiliza en la argumentación. En estas dos cuestiones conviene, sin embargo, precisar el alcance de los términos básicos que se utilizarán. Así, el término argumentación se usa para referirse “a la actividad total de plantear pretensiones, ponerlas en cuestión, respaldarlas produciendo razones, criticando esas razones, criticando esas críticas, etcétera.”

Otro ejemplo que se modela con el Modelo de Toulmin es el propuesto por Gowers (2006). Este señala: ¿cuánto sietes hay en π?. Aserción: hay un millón de sietes consecutivos en algún lugar de la expansión decimal de π.Gouwers, concluye que es muy probable (Q) que π sea normal (C), dado que los primeros millones de sus dígitos pasan varias pruebas estadísticas de normalidad (D). Esto es justificado notando que si una muestra grande de una cadena infinita de dígitos pasa varios tests de normalidad, esa cadena es probablemente normal (W). Podríamos inferir que esta última sentencia es respaldada por propiedades de esas pruebas estadísticas (B). Finalmente, en la calificación de la aserción como probable está implícita la consideración de la posibilidad, por pequeña que sea, de que π no pase dichas estadísticas al considerar suficientes dígitos de su expansión decimal (R).

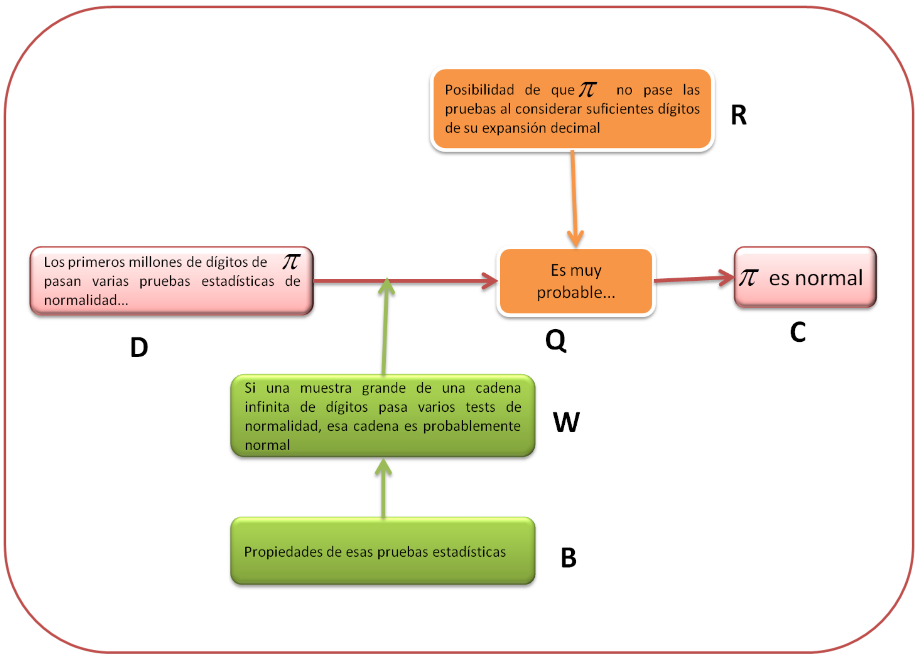


Figura 2. 4. Modelo de Toulmin (1958) modela una pretensión "se dice que un número es normal si sus dígitos muestran una distribución aleatoria"2

Usando el Modelo de Toulmin (1958) podemos modelar un argumento mediante la identificación de sus diferentes tipos de estados. Afirmamos que una persona que evalúa cómo persuadió, es por este argumento, el cual puede centrarse en diferentes partes y aspectos del argumento:

i) Los datos del argumento dado, y su grado/es digno de confianza,

ii) La probabilidad de su conclusión,

iii) La resistencia de la orden (y su respaldo asociado),

iv) El calificativo modal dado (y su réplica asociada),

v) El contexto particular en el que el argumento dado puede tener lugar.

El modelo argumentativo de Toulmin (1958) se relaciona con las reglas de una argumentación en pasos que pueden ser precisados en cualquier tipo de disciplina o espacio abierto a la disertación, al debate. Mediante este modelo, los docentes pueden motivar a los estudiantes a encontrar la evidencia que fundamenta una aserción. Se aprende que la excelencia de una argumentación depende de un conjunto de relaciones que pueden ser precisadas y examinadas y que el lenguaje de la razón está presente en todo tipo de discurso.

El esquema de Toulmin tiene seis tipos de categorías 'instrucciones', cada uno de las cuales tiene un diferente papel en una discusión. La pretensión **(Claim)** es la afirmación de que el argumentador desea convencer a su público. Los datos **(Data)** son los cimientos sobre los que se basa el argumento, las pruebas pertinentes para la reclamación. La Garantía **(Warrant)** justifica la conexión entre los datos y la conclusión, por ejemplo, apelando a una regla, una definición, o al hacer una analogía. La garantía se apoya en el respaldo **(Backing)**, que presenta más pruebas. El calificativo modal **(Q)** -a partir de ahora calificador- califica a la conclusión de que expresa grados de confianza, y la refutación **(Rebuttals)** potencialmente refuta la conclusión indicando las condiciones en las que no se sostienen 'excepciones'. Es importante destacar que, en cualquier argumento dado, no todas estas afirmaciones necesariamente se verbalizan explícitamente. Estos seis componentes de un argumento están unidos entre sí en la estructura mostrada en el esquema 2.

Esquema 2. Modelo de Toulmin (1958) que modela un argumento general. El argumento sería el siguiente: "D, y desde W (dado B), podemos concluir Q, C, a menos que R".

El modelo contiene seis pasos los cuales se denominan ‘categorías’, debido a que no siempre se explicitan todas en el texto argumentativo; muchas están implícitas. En el siguiente cuadro se presentan los términos de Toulmin (1958) y de Toulmin, Rieke, y Janik (1984).

En resumen, el esquema opera de la siguiente manera: a partir de una evidencia (datos) se formula una aserción (proposición). Una garantía conecta los datos con la aserción y se ofrece su cimiento teórico, práctico o experimental: el respaldo. Los calificadores modales (ciertamente, sin duda) indican el modo en que se interpreta la aserción como verdadera, contingente o probable. Finalmente, se consideran sus posibles reservas u objeciones. A continuación se describen y ejemplifican cada una de estas categorías.

2.6.4 Análisis de las categorías:

Aserción (hipótesis o tesis):

Aserción (Claim): es la tesis que se va a defender, el asunto a debatir, a demostrar o a sostener en forma oral o escrita. Expresa la conclusión a la que se quiere arribar con la argumentación, el punto de vista que la persona quiere mantener, la proposición que se aspira que otro acepte. Indica la posición sobre determinado asunto o materia. Es el propósito que está detrás de toda argumentación, su punto crucial o esencia. Representa la conclusión que se invoca. Una aserción es una propuesta que el argumentador quiere que sea aceptada, aun cuando exprese un juicio que desafía la creencia u opinión ya instalada. Por ello, es imprescindible que siempre esté acompañada de una buena razón (evidencia).

Evidencia (Ground, Data): Una aserción sostiene el punto de vista que un investigador trata de defender sobre un tema específico. La razón por la cual ella se mantiene está en la evidencia, constituida por los datos o hechos de un caso.

La evidencia aporta la razón ‘información’ en la que la aserción se basa. La evidencia está formada por hechos o condiciones que son observables. Puede ser una creencia o una premisa ‘conclusión’ aceptada como verdadera dentro de una comunidad, mas no una opinión. Es el argumento que se ofrece para soportar la aserción ‘premisa o tesis’. Es la prueba. Existen diversos tipos de evidencias: estadísticas, citas, reportes, evidencias físicas.

La evidencia es significativa porque establece la base de toda la argumentación. En un salón de clase el hecho de que los alumnos muestren pocas habilidades para responder preguntas en forma oral puede inducir a que un docente exprese las siguientes aserciones que podrían servir de punto de partida para un trabajo de investigación:

- Los alumnos requieren entrenamiento para el diálogo,
- La activación de los conocimientos previos incentiva la interacción oral.

Garantía (Warrant): ¿Y si alguien preguntara...? ¿Por qué de esos datos se extrae tal conclusión 'aserción'?. Porque existe una garantía que autoriza el paso de los datos a la conclusión basada en un principio o una ley. Como se observa, la aserción y la evidencia no son suficientes para establecer una argumentación sólida. Faltan otros elementos que indiquen cómo a partir de una evidencia se obtiene una aserción (Toulmin, 1958). Tal elemento es la garantía, parte esencial del argumento, que permite evaluar si la aserción se basa en la evidencia, siendo el puente del cual ambas dependen. La garantía implica verificar que las bases de la argumentación sean las apropiadas. Por ser la garantía una categoría de la argumentación que establece la relación entre la evidencia y la aserción, expresa el momento en el que la audiencia puede discutir de la conclusión a la cual se quiere arribar: la garantía establece cómo los datos sirven de soporte legítimo a la aserción.

Para Toulmin, Rieke y Janik (1984) la diferencia entre evidencia y garantía 'hechos y reglas' es sólo funcional. La aserción no se presenta derivada de una garantía, sino de una evidencia 'datos'. La garantía no es una premisa implícita, sino más bien actúa como un supuesto implícito que, en la forma de una regla, sirve tanto a la presente argumentación como a otra para inferir una aserción a partir de ciertos datos. Obliga a que el oyente reconozca la razón para que una aserción derive de una evidencia. Su función es de conexión entre la evidencia y la aserción. La conexión es mental, implica una rápida reflexión. Hay garantías que son específicas para un campo particular de conocimiento, conformadas por un conjunto de leyes, principios, estatutos, fórmulas. Así pues, una garantía se expresa mediante una regla o ley que autorice el paso de una evidencia a una aserción.

Respaldo o apoyo (backing):

La misma garantía también necesita de un respaldo o apoyo que puede ser un estudio científico, un código, una estadística, o una creencia firmemente arraigada dentro de una comunidad. El respaldo es similar a la evidencia en el sentido de que se expresa por medio de estadísticas, testimonios o ejemplos. Sin embargo, se distingue en que el respaldo apoya a la garantía, mientras que la evidencia apoya a la aserción.

El respaldo aporta más ejemplos, hechos y datos que ayudan a probar la validez de la cuestión que se defiende. El respaldo autoriza la garantía y brinda motivos para la validez de un argumento. Asume la forma de una declaración categórica de un hecho. Ayuda a que la audiencia comprenda las razones usadas en la garantía. La estadística, los ejemplos y los testimonios sirven de respaldo y generalmente aparecen combinados.

Calificativo Modal (Modal Qualifier):

El calificativo modal especifica el grado de certeza, la fuerza de la aserción, los términos y las condiciones que la limitan. Es la concesión que se les hace a los otros. Expresa el medio lingüístico mediante el cual la persona revela el mundo en el que debe interpretarse su enunciado. En efecto, la certeza con la cual se sostienen los argumentos varía en grado y fuerza, de allí que se hable de conclusiones probables, posibles o presumibles. La función del calificativo modal es establecer la probabilidad. Los argumentos cotidianos no pueden ser conceptualizados como correctos o incorrectos, pues tal calificación depende del punto de vista que asuma el oyente o lector. De aquí la importancia del calificador modal a través del cual se expresa la manera en que el hablante manifiesta la probabilidad de sus aserción a la audiencia. Algunos calificativos modales son: quizá, seguramente, sin duda, probablemente, usualmente, tal vez.

La mayoría de los razonamientos se relacionan con la probabilidad, pues casi siempre hay excepciones, incluso hasta en una ley científica. Por el hecho de que la fuerza del razonamiento práctico es relativa, el modificador representa la verbalización de tal fuerza y establece la seguridad que tiene el autor de la generalidad de su aserción.

Reserva (Rebuttal):

Al proyectar un trabajo o al reportarlo, el investigador debe anticiparse a objeciones que la audiencia le pueda formular. Debe prever las debilidades y transformarlas en asunto de su indagación, con lo cual crecerían significativamente las posibilidades del desarrollo argumental de la causa (aserción) que se trata de instaurar. La reserva o refutación es la excepción de la aserción (conclusión) presentada.

En el modelo de Toulmin que se ha expuesto, los argumentos no se consideran universalmente verdaderos, por ello estos elementos son claves. Demuestran cómo una aserción puede ser fortalecida por medio de sus limitaciones.

2.6.5 Usos del modelo de Toulmin en la práctica escolar.

El modelo de Toulmin, adaptado a la práctica escolar, permite reflexionar con el alumnado sobre la estructura del texto argumentativo y aclarar sus partes, destacando la importancia de las relaciones lógicas que debe haber entre ellas. Es decir, posibilita una meta-reflexión sobre las características de una argumentación científica, profundizando sobre cómo se establecen las coordinaciones y las subordinaciones, sobre el uso de los diferentes tipos de conectores (adversativos, causales, consecutivos...), sobre la no-linealidad de los razonamientos, etc.

Cabe mencionar que este modelo es aplicable a todo tipo de argumentaciones y en particular a esquemas de prueba 'intuitivos y axiomáticos'. En este sentido Inglis (2007) analizan diferentes argumentaciones matemáticas que incluyen razonamiento informal y formal. En suma, el modelo de Toulmin se ha utilizado en diversas investigaciones para:

1) Analizar y documentar los procesos del aprendizaje en el aula: Yackel (2001), Yackel y Rasmussen (2002), Krummheuer (1995).
2) Crear un contexto que permita utilizar la argumentación en el aula: Sardà y Sanmartí (2000).
3) Comparar y analizar desde un punto de vista cognitivo diferentes estructuras relativas a la argumentación y la demostración: Pedemonte (2005; 2007).

4) Para analizar los distintos tipos de persuasión en la evaluación de argumentos en matemáticas por parte de estudiantes y matemáticos, destacando el papel del calificador modal y las objeciones: Inglis y Mejía-Ramos (2005), Inglis (2007).
5) Lavy (2006) en su investigación utilizo el modelo de Toulmin para caracterizar los tipos de argumentos presentados por los estudiantes durante sus exploraciones en un ambiente tecnológico.
6) Smith (2010) utilizó el modelo de Toulmin para analizar la estructura y el contenido de los argumentos de los estudiantes en un ambiente tecnológico y no tecnológico. Los investigadores pueden ser capaces de utilizar el modelo de Toulmin para analizar las tareas examinando la estructura y contenido de los argumentos que crean en respuesta a ciertas tareas. Por ejemplo, los investigadores pueden ser capaces de determinar el desafío cognitivo de una tarea al ver la complejidad del argumento creado por el estudiante al dar respuesta a la tarea.
7) Investigaciones como las de Hollebrands, Conner, y Smith (2010); Lavy (2006); Maher, Powell, Weber y Lee (2006); Stephan y Rasmussen (2002) han utilizado el modelo de Toulmin para analizar la naturaleza del contenido y/o estructura de los argumentos presentados por los estudiantes mientras trabajan en una tarea en un ambiente tecnológico.

En el campo de la educación matemática, muchos investigadores han aplicado el esquema de Toulmin para analizar los argumentos construidos por los estudiantes. Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007) sostiene que sin el uso del esquema completo de Toulmin puede ser difícil para modelar con precisión la gama completa de argumentación matemática. Inglis, Mejia-Ramos, y Simpson (en prensa) argumentaron que únicamente utilizando el esquema de Toulmin en su totalidad (en particular, haciendo uso del calificativo modal y la refutación), es posible modelar fielmente todo el rango de argumentación en matemáticas. Al usar el esquema completo, el investigador puede estudiar la construcción y la evaluación de argumentos en matemáticas de una manera más legítima y profunda de lo que permiten perspectivas existentes.

Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007) aplican el modelo de Toulmin para analizar argumentos construidos por los estudiantes para reducir el nivel de incertidumbre asociado a una conjetura, además analizan los tipos de persuasión en la evaluación de argumentos. Basándonos en estos antecedentes, la actividad didáctica planteada en esta investigación será el escenario para analizar los argumentos expuestos por los estudiantes durante la resolución de las actividades matemáticas. De Gamboa, Planas y Edo (2010) señalan además la importancia de realizar estudios sobre el conocimiento de la argumentación matemática para resolver problemáticas relativas a la construcción práctica entre distintos tipos de razonamiento, concretamente entre argumentación y explicación, dificultad para plantear preguntas que requieran argumentación y la confusión teórica entre distintos tipos de razonamiento, concretamente entre explicación, argumentación y demostración. Así, el diseño didáctico queda fundamentado por la actividad matemática, la interacción tecnológica, el trabajo colaborativo, el debate y la auto-reflexión y el modelo de argumentación de Toulmin. La actividad del estudiante dentro de la secuencia didáctica se orientará para favorecer el tránsito entre representaciones (algebraica-numérica-grafica) en un contexto de experimentación y un trabajo coordinado entre papel-lápiz-tecnología. Además se utiliza el modelo de Toulmin (1958) como un instrumento para analizar el "contenido y estructura" de los argumentos expuestos por los estudiantes.

2.6.6 Aspectos funcionales de la argumentación en el salón de clases.

La argumentación es entendida como una característica específica de la interacción social, ya sea en un grupo pequeño o en colaboración con toda clase de actividades, mientras que la aplicación de un método de razonamiento comprensible para la resolución de problemas (Krummheuer, 1995). Las matemáticas en el aula es una situación social y de acuerdo con Krummheuer, hay una estrecha relación entre la parte activa en los eventos en clase y el desarrollo del concepto matemático.

El aprendizaje cooperativo fomenta la necesidad de la argumentación (Okada y Simon, 1997). Este tipo de aprendizaje crea situaciones en las que el alumno tiene que aclarar sus ideas a los miembros de su grupo de trabajo. El acto de aclaración a veces incluye la capacidad de persuadir a sus colegas con la corrección de sus expresiones. Según Balacheff (1990) el acto de dar una explicación o argumentación para una solución no es un comportamiento común entre los alumnos, sino que debe ser construido como parte del 'contrato didáctico' en el aula de matemáticas. El proceso de construcción de argumentaciones en el aula es un diálogo, no un monólogo, ya que el argumento se construye a través de la cooperación de ideas de varios alumnos.

Según Wood (1999) considera que la argumentación es el intercambio discursivo entre los participantes con el propósito de convencer a los demás a través del uso de ciertos modos de pensamiento. La argumentación es vista como un proceso interactivo de saber cómo y cuándo participar en ese intercambio. El supuesto básico detrás de la argumentación, el alumno será capaz de explicar, explorar, planificar y poner en práctica sus ideas, centrándose en el proceso más que en los resultados (Orsolini, 1993).

2.6.7 Consideraciones para usar el modelo de Toulmin (1958).

Usar el modelo con la terminología completa permite caracterizar los argumentos presentados por los estudiantes durante sus exploraciones. En esta investigación se usa en modelo de Toulmin (1958) como un instrumento de análisis de datos, aplicando todos sus elementos con el objeto de analizar la naturaleza de los argumentos presentados por los estudiantes, en un ambiente tecnológico interactivo mientras dan solución a un ejercicio 'no tradicional' que solicita retos, justificaciones y argumentaciones. En este sentido Lavy (2006) considera que la importancia de la argumentación en la comprensión conceptual en las matemáticas está relacionada con el desarrollo del pensamiento de los estudiantes que se produce durante el trabajo en el desafío y la justificación.

2.7 Modelo de Toulmin en un contexto de uso de tecnología

Las investigaciones de Hollebrands, Conner y Smith (2010); Smith (2010); Lavy (2006); Maher, Powell, Weber y Lee (2006) tienen como común denominador el uso de la tecnología y la argumentación. Dichas investigaciones nos dan cuenta de la importancia de los ambientes tecnológicos dinámicos para ayudar a los estudiantes en el desarrollo de argumentos y demostraciones. Así también, utilizan el modelo de Toulmin (1958) para analizar el contenido y la estructura de los argumentos, incluyendo la forma en que los estudiantes utilizan las herramientas (tecnológicas y no tecnológicas). Los alcances de la tecnología para recopilar fácilmente este tipo de datos pueden contribuir a la capacidad de los estudiantes para establecer certeza o conciliar un desafío.

2.8 Relación entre argumento y desarrollo de ideas matemáticas

El desarrollo de habilidades de los estudiantes para construir argumentos utilizando un razonamiento sólido, es uno de los objetivos fundamentales de la educación en todo plan de estudios (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas 'NCTM', 2000).

La argumentación en matemáticas es esencial, pues de esta manera el estudiante da señal de su aprendizaje como resultado del análisis, reconocimiento de patrones, deducciones, conjeturas, etc. Por medio de la argumentación el estudiante puede justificar y validad, ya sea una demostración o propiedad que esté desarrollando un significando a un concepto matemático.

La argumentación es central en el pensamiento y construcción del conocimiento (Kuhn, 1992). La importancia de la argumentación a la comprensión conceptual de las matemáticas está relacionada con el desarrollo del pensamiento de los estudiantes que se produce durante el trabajo en el desafío y la justificación. En este sentido la argumentación es entendida como una característica específica de la interacción social, ya sea en un grupo pequeño o en colaboración con toda clase de actividades, mientras que la aplicación de un método de razonamiento comprensible para la resolución de problemas (Krummheuer, 1995)

2.8.1 Construcción de argumentos en un contexto de uso de tecnología y aprendizaje de las matemáticas

Lavy (2006) indica que el contenido de los argumentos que crean los estudiantes mientras trabajan en un entorno tecnológico están estrechamente relacionadas con una configuración específica... los estudiantes trabajaron en actividades en un entorno tecnológico interactivo. Lavy en su investigación observó diferencias en las formas cuando las imágenes de la pantalla forman parte de los datos de un argumento y los que formaban parte del razonamiento de los argumentos. ... cuando una imagen de la pantalla es parte de los datos, se puede decir que es una parte integral del conocimiento externo para el estudiante y el objetivo es que durante el proceso de exploración, el estudiante va a interiorizar este conocimiento. Después que los estudiantes han formulado una reclamación, y en el proceso de razonamiento utilizado en ejemplos concretos... se podría decir que estos ejemplos ya no eran conocimiento externo para los estudiantes, sino que fueron internalizados en el contexto de un ambiente tecnológico...

Las investigaciones anteriores ha mostrado con insistencia que el aprendizaje es más significativo cuando el estudiante construye su propio conocimiento. Estas construcciones por parte del estudiante pueden ser inducidas por la tecnología ya sea mediante el uso de software que permitan manipular visualmente ideas matemáticas y reflexionar sobre ellas, o mediante la posibilidad de dar una existencia menos abstracta a ciertas ideas matemáticas para las que no se disponen de soportes físicos adecuados y que así se pueden manipular y tratar como objetos, o más allá del contexto visual, mediante la programación de construcciones matemáticas en un lenguaje computacional que actúe paralelamente a la construcción de los procesos matemáticos subyacentes. (Dubinsky y Tall, 1991).

La implementación de la tecnología en el salón de clases exige al profesor planificar cuidadosamente las actividades con las que va a trabajar y estar preparado para resultados inesperados. Si bien, el uso de la tecnología permite explorar situaciones que en el trabajo -lápiz y papel- sería tedioso y difíciles de obtener; además es importante considerar que la tecnología no debe usarse como un sustituto de las operaciones fundamentales. En este sentido es importante considerar que el estudiante debe ser capaz de cuestionar y refutar un resultado que obtenga al trabajar con la tecnología, basado en sus conocimientos matemáticos. El profesor y el alumno deben ser consientes que la tecnología refuerza el trabajo en lápiz y papel y ofrece nuevas posibilidades de exploración de las ideas matemáticas. A medida que el uso de la tecnología aumenta en las aulas, los profesores y los investigadores necesitan entender cómo los argumentos de los estudiantes cambian en presencia de la tecnología. Los resultados de los análisis de las diferencias entre el contenido y la estructura de los argumentos construidos por los estudiantes en presencia de la tecnología y sin tecnología. Los profesores y los investigadores pueden obtener una mejor comprensión de la relación entre los usos de una herramienta y los argumentos que los estudiantes construyen a partir de estos usos, el cual informará a las tareas y actividades que los profesores deben seleccionar.

Nos queda claro, que la integración de la tecnología al salón de clases de matemáticas puede ofrecer beneficios considerables, al transitar entre diferentes representaciones, explorar, modelar, experimentar, reflexionar, conjeturar, justificar y argumentar; elementos indispensables para la comprensión y aprendizaje de conceptos matemáticos.

Capítulo III

Problema de Investigación

3.1 Problemáticas reportadas respecto al aprendizaje del concepto de Integral definida.

De acuerdo con Ímaz y Moreno (2009), el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo es un proceso cognitivo articulado alrededor de dos ideas centrales: *variación y acumulación.* En torno a este proceso, Salinas y Alanís (2009) lo describen como un proceso inmerso en un paradigma tradicional enmarcado en la representación algebraica, donde se conduce a la ejercitación del estudiante para realizar procedimientos rutinarios y resolver problemas; en este contexto se privilegia una enseñanza centrada en actividades algorítmicas y algebraicas, donde los estudiantes están habituados a realizar mecánicamente rutinas sin significado real obteniendo como resultando, un aprendizaje carente de comprensión y sin significado. En este contexto Orton (1983) reportó que los estudiantes participantes en su investigación tenían un buen dominio de álgebra algorítmica que se veía reflejado en el desarrollo de cálculos de derivadas e integrales, pero presentaban dificultades en la parte conceptual de los procesos límite relativos a las nociones de derivada e integral. También Artigue (1999) señala que muchos estudiantes exteriorizan que el cálculo funciona mejor si es tratado mecánicamente en lugar de intentar comprenderlo, lo que constituye uno de los efectos de una instrucción centrada en los procedimientos más que en la compresión y sentido de los conceptos.

Como antecedente para definir el problema de investigación, se consideró a la integral definida como un concepto fundamental en proceso cognitivo del análisis matemático. Este concepto está relacionado con la determinación de magnitudes físicas y geométricas [área, volumen, centro de masa, distancia recorrida, velocidad de flujo, entre otros...]. Previo a su introducción en un curso, se desarrollan tópicos de cálculo diferencial e integral, como: funciones, límites, continuidad, derivabilidad, integral indefinida y sus aplicaciones, entre otros.

Son varios los trabajos que describen las dificultades de los estudiantes en asociar significados a la integral, que van más allá de la mera manipulación algorítmica. Por ejemplo Mundy (1987), Llorens y Santoja (1997) y González-Martín y Camacho (2005), en sus estudios ponen de manifiesto que los estudiantes en los primeros semestres de universidad, poseen un manejo mecánico y operativo del concepto. Otras investigaciones como las de Camacho, Depool y Santos-Trigo (2010), Camacho y Depool (1993) y Camacho y González-Martín (2005), señalan que la comprensión de la integral definida encierra múltiples objetos, no sólo es su definición formal, teniendo en cuenta la importancia de diferenciar el objeto matemático de integral definida de su representación así como de relacionar la noción de sucesión y de límite con la de suma de Riemann, para potenciar una comprensión que trascienda de la pura manipulación algorítmica y procedimental, y así considerar el desarrollo de la comprensión de la integral definida como un concepto dinámico que va incorporando nuevos nociones. Para Orton (1983), Eisenberg y Dreyfus (1991), es importante comprender la integral como el límite de unas sumas y no como la diferencia de los valores que toma una primitiva en los extremos de los intervalos. Por ejemplo Tall (1993) considera que el cálculo representa la primera vez en que el estudiante se enfrenta con el concepto de límite y los procesos infinitos, involucrando en ello cálculos que no son realizados por aritmética simple o por álgebra; sino que, sólo pueden ser realizados mediante razonamientos indirectos.

El concepto de integral definida es fundamental para la matemática superior, por lo tanto resulta de interés analizar su comprensión. El aprendizaje del concepto de integral definida, de acuerdo a la experiencia docente y con los resultados obtenidos en las investigaciones ya citadas, muestra que existen diversos problemas con el aprendizaje del cálculo en general y en lo particular, en cursos de cálculo integral con los estudiantes universitarios. Estas investigaciones hacen visible las dificultades que tuvieron los estudiantes para comprender el concepto de integral definida y el manejo deficiente de algunos de estos conceptos [función, límite, continuidad, derivada, integral]. Además expresan que los estudiantes poseen un manejo mecánico y operativo del concepto al considerar a la integral siempre como un área, por lo que debe tener signo positivo; situación que les hace recurrir al uso sistemático de algoritmos y a la eventual pérdida de significados. Esta acción que manifiestan los estudiantes mediante la utilización procedimientos mecánicos, algorítmicos y memorísticos, lo que conduce a un conocimiento fragmentado que no favorece las conexiones con otros conocimientos previos y con sus representaciones. Este escenario, da como resultado algunas problemáticas al momento de interpretar las áreas bajo la curva, sobre todo cuando la gráfica de la función pasa de ser positiva a negativa o presenta discontinuidades; en otros casos asocian la integral sólo al concepto de área, pero aislada de otros contextos.

3.2. Propósito de la investigación

El propósito de esta investigación es desarrollar e implementar una secuencia didáctica de carácter experimental dirigida a estudiantes de primer año de universidad para el estudio de la integral impropia, que promueva representaciones espontáneas del tipo verbal y visual, y que favorezca la transición a las representaciones algebraica, gráfica, numérica en un ambiente de uso de tecnología. Se pondrá especial atención en los argumentos que exponen los estudiantes durante la solución de la actividad en el contexto de trabajo colectivo, observando lo realizado en papel y computadora, así como el tránsito entre representaciones algebraica, gráfica y numérica, esto permitirá identificar líneas de razonamiento que serán de utilidad para reorientar las actividades en clase y favorecer el aprendizaje.

Considerando lo anterior, planteamos la pregunta ¿Cuáles son las características de los argumentos expuestos por los estudiantes al resolver una secuencia didáctica sobre la integral impropia en un ambiente tecnológico?

La investigación tiene como finalidad identificar los argumentos que exponen los estudiantes, describir su estructura y hacer inferencias sobre sus líneas de razonamiento. Para ello, la resolución de la secuencia didáctica se planteó de forma colectiva a fin de que los estudiantes expusieran sus ideas, generaran debates alrededor de la actividad matemática, dialogaran y mantuvieran comunicación constante. En el diseño se consideró el uso de un software de geometría dinámica (GeoGebra) como medio para agilizar procesos, visualizar comportamientos y analizar la variación de las gráficas. Desde el punto de vista didáctico y considerando el perfil académico de los estudiantes, esto representó una nueva experiencia en el estudio de las matemáticas, ya que los mismos pudieron apoyarse en herramientas tecnológicas, realizar sus propias experimentaciones y trabajar de forma colectiva en la solución de una actividad.

La investigación condujo a reflexiones sobre el papel que tiene la herramienta tecnológica en la conformación de los argumentos matemáticos, particularmente en lo que se refiere al soporte de argumentos. También se reflexiona sobre la estrecha relación de la visualización para sostener argumentos, matizar y exponer algunas excepciones.

Capítulo IV

Marco Teórico

Para realizar esta investigación se integraron tres enfoques teóricos; ACODESA (Hitt, 2007:70), tránsito entre representaciones (Duval, 1993:175) y la argumentación (Inglis y Mejia-Ramos, 2005:330). La secuencia didáctica se construyó empleando la metodología ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico y autoreflexión) que proponen Hitt y González-Martín (2015:202). Esta metodología, que tiene un propósito didáctico, la empleamos para desarrollar la secuencia didáctica para el estudio de la integral impropia, considerando las oportunidades que brinda al coordinar el trabajo individual, trabajo en equipo y debate grupal. Además, este enfoque asume que el aprendizaje cooperativo, debate científico y auto-reflexión son aspectos centrales del quehacer matemático en el aula, por lo que deben favorecerse y motivarse. Estas características conforman un escenario de trabajo escolar favorable para el estudio de los argumentos, debido a los estudiantes tiene espacios para exponer y debatir sus ideas.

4.1. ACODESA

La metodología ACODESA contempla tres etapas; situación problema, problema y ejemplos-contraejemplos, con 5 fases cada una, que corresponden a tareas específicas y a formas de interacción: trabajo individual, trabajo en equipo, debate, autoreflexión y institucionalización de saberes.

La primera etapa se denominada *situación problema*, donde se incluye un planteamiento introductorio contextualizado y situado a la actividad. Su fundamento subyacente en las situaciones problema desde el punto de vista de la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1988:318). En esta etapa se motiva el pensamiento divergente, es decir, generar ideas creativas mediante la exploración de muchas soluciones posibles de manera espontánea. Se favorece en los estudiantes la reflexión sobre diferentes formas de interpretar la situación, se promueve la exploración y la formulación de preguntas sobre los posibles resultados de la actividad y puede conducir a un pensamiento convergente, caracterizado por dar respuesta con rapidez, precisión, centrado en el reconocimiento de regularidades y aplicación de técnicas, sin dar lugar a la ambigüedad. De acuerdo a Hitt (2007:70) una situación problema debe promover la apertura del pensamiento, lo que fomentará la aparición de representaciones funcionales. La segunda etapa denominada *problema*, incorpora un planteamiento acotado que conduce a debates muy puntuales y respuestas específicas. De acuerdo con Hitt (2007:81) esta etapa promueve también el pensamiento convergente-divergente*,* además de que produce representaciones que vincula aspectos matemáticos, a través de la articulación entre representaciones y los procesos operatorios al interior de esas representaciones. La tercera etapa denominada *ejemplos-contraejemplos* se caracteriza por un planteamiento práctico que sintetiza aspectos discutidos previamente, además de favorecer el desarrollo de habilidades operatorias y de cálculo. Duval (2000:63) consideran que no sólo son importantes las tareas de transformación y conversión entre registros, sino que también es importante la confrontación entre ejemplos y contraejemplos.

Cada etapa se desarrolla en 5 fases que corresponden a diferentes tipo de actividad. La primera, *trabajo individual,* donde los estudiantes comienzan la construcción de representaciones funcionales para hacer frente a una tarea determinada y producir representaciones externas (verbales y esquemas). Segunda, trabajo en equipo (aprendizaje colaborativo), los estudiantes se agrupan en equipos para trabajar en las mismas tareas planteadas que se aborda por separado (proceso de discusión y validación, refinamiento de las representaciones funcionales). El refinamiento de las representaciones externas se produce durante esta etapa a través de los debates al interior del equipo, donde cada miembro aporta sus ideas para resolver la problemática. Tercera, *debate grupal*, es un proceso de discusión y validación del refinamiento de las representaciones funcionales. Tiene como objetivo integrar a los estudiantes en un proceso activo de cuestionamientos sobre los conceptos en juego y construcción crítica de reflexiones. Los equipos dan a conocer los resultados obtenidos y analizan las relaciones que guardan las representaciones externas que les ayudaron a comunicar la situación del problema. El profesor juega el papel de promotor de la exposición de las ideas al problema, estimulando la participación de los alumnos impulsando a establecer hipótesis y justificaciones, hasta llegar a generalizaciones. Cuarta, *autoreflexión* (proceso de reconstrucción de tareas) el objetivo es promover una reflexión de lo realizado en las etapas previas, donde el estudiante reconstruya, de forma individual, la solución de una tarea, justifique y valide sus conjeturas. En esta fase los estudiantes regresan individualmente a la tarea, que es un proceso de reconstrucción de hechos y autoreflexión. Quinta, *proceso de institucionalización de saberes*, el profesor inicia un proceso de integración y sistematización de saberes, utilizando las representaciones de los estudiantes y complementándolas con las representaciones institucionales (gráfico, algebraico, numérico). En la *Figura 1* se muestra un esquema de la organización de las fases de la metodología ACODESA.

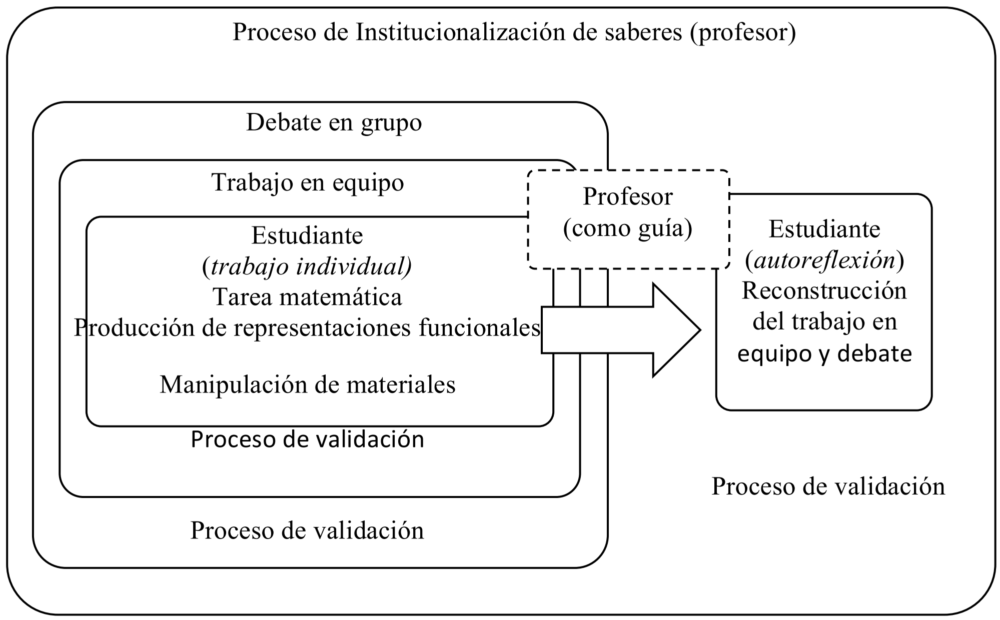


Figura 4. 5. Organización de las diferentes etapas de la metodología ACODESA

De acuerdo con Hitt (2011:726) y Hitt y González-Martín (2015:207) el propósito que subyace en la actividad didáctica en ACODESA, es ayudar a los estudiantes a que expongan sus representaciones funcionales (bosquejos, notas, dibujos) y transiten a las representaciones institucionales (gráficas, numéricas y algebraicas) a través de una interacción continua entre ambas, en un ambiente de trabajo colaborativo, donde se guarde equilibrio entre las actividades realizadas a lápiz y papel con las realizadas con tecnología, de tal forma que promueva el debate científico y autorreflexión para favorecer el aprendizaje.

4.2. Aspectos importantes a considerar en el diseño de una secuencia de aprendizaje en un ambiente tecnológico usando la metodología ACODESA

4.2.1. Modelación matemática.

Hitt y Cortés (2009) reconocen que la modelación matemática es uno de los temas más difíciles de adquirir en el aprendizaje de las matemáticas, ya que dada una situación [un contexto físico], se requiere de diferentes tipos de habilidades y conocimientos para poder llegar a su modelación desde el punto de vista de las matemáticas. En referencia a la modelación matemática Confrey y Maloney (2007) exponen que la modelación matemática es el proceso de encontrarse con una situación indeterminada, problematizarla y traerla a investigación, razonamiento y estructuras matemáticas para llevar a transformar la situación. El proceso de modelación produce un resultado [un modelo] el cual es una descripción o una representación de una situación. *En el esquema 2* de visualiza el proceso de modelación matemática.

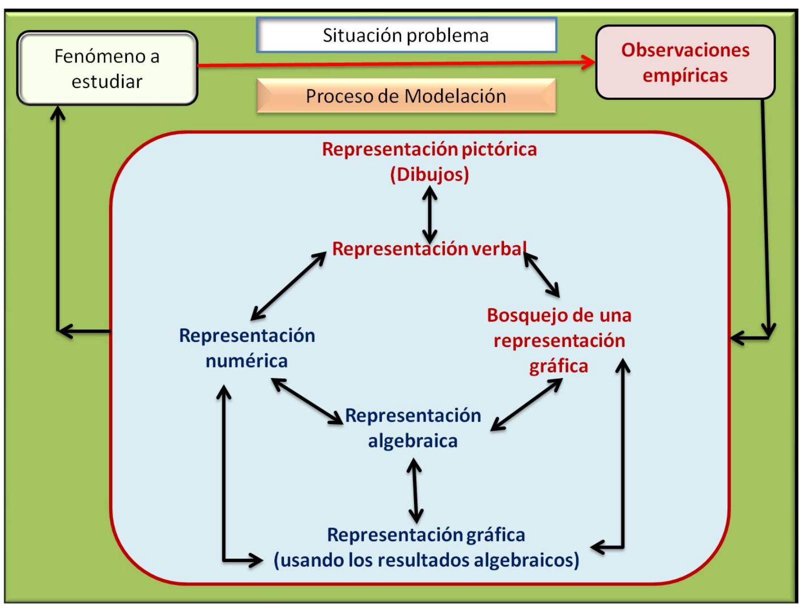


Figura 4. 6. Proceso de modelación matemática

Respecto a este proceso de modelación matemática, hemos considerado lo planteado por Katja (2005) en donde nos proporciona un mejor acercamiento al proceso de modelación matemática en cinco pasos:

1. Definir un modelo real: simplificarlo, estructurarlo, idealizando la situación original;
2. Transformar el modelo real en un modelo matemático: por medio de la matemátización;
3. Tratar matemáticamente el modelo;
4. Interpretar los resultados obtenidos a partir del modelo matemático;
5. Validar el modelo construido a la luz de soluciones obtenidas y de la matematización.

4.2.2. Las representaciones funcionales en la construcción de conceptos matemáticos.

El uso de representaciones funcionales en el proceso de modelado, y su evolución en un entorno de aprendizaje basado en una perspectiva post-sociocultural Vygotskiana parece jugar un papel crucial en el proceso de construcción de un concepto matemático (Hitt y González-Martín). En la enseñanza tradicional 'cotidiana', los profesores tienden a presentar e imponer representaciones institucionales de inmediato. Los profesores que imparten sus cátedras tipo 'magistral' presentan directamente las matemáticas desde un punto de vista institucional sin proporcionar oportunidades para las representaciones funcionales que surjan de los alumnos. Sin embargo, desde este punto de vista constructivista solo, se está centrando en el aprendizaje individual, las representaciones funcionales de los estudiantes no tendrían la capacidad de evolucionar lo suficiente para lograr un enlace con las representaciones institucionales.

Duval (1993, 1995) desarrolló un marco teórico para la construcción de conceptos matemáticos relacionados con los registros de representación conjunta. Según Duval, un concepto matemático no se desarrollará con un enfoque centrado en una sola representación, ya que esta representación no puede expresar todas las características del concepto en juego. Por lo tanto la *conversión-articulación* entre representaciones debe ser un elemento de las tareas encomendadas a los alumnos. Desde este enfoque teórico de Duval, un concepto se va construyendo mediante tareas que impliquen el uso de diferentes sistemas de representación y promuevan la articulación coherente entre representaciones.

Hitt (2003) realizó una crítica a las ideas teóricas de Duval. Él manifiesta que de manera implícita Duval se centra en la construcción de conceptos, en donde las representaciones institucionales [las que utilizan los profesores, los libros de texto o las que aparecen en la pantalla de la computadora] son preponderantes en la construcción de estos conceptos y no toma en consideración, explícitamente, las representaciones no institucionalizadas. Hitt afirma que en el proceso de construcción de los conceptos, las representaciones producidas por los estudiantes, están lejos de ser aquellas que son las esperadas por el profesor [representaciones institucionales] y que estas representaciones semióticas espontáneas desempeñan un papel crucial en la construcción del conocimiento. Por lo tanto Hitt considera esencial el papel de las representaciones semióticas no oficiales [representaciones funcionales] en la construcción del conocimiento.

Tomando en consideración los aspectos antes mencionados sobre los registros de representación, y a su vez la importancia de tomar en cuenta las representaciones espontáneas de los estudiantes, así como los obstáculos epistemológicos, Hitt (2003) determina que la construcción de un concepto puede seguir una estructura como se visualiza en el esquema *3.*

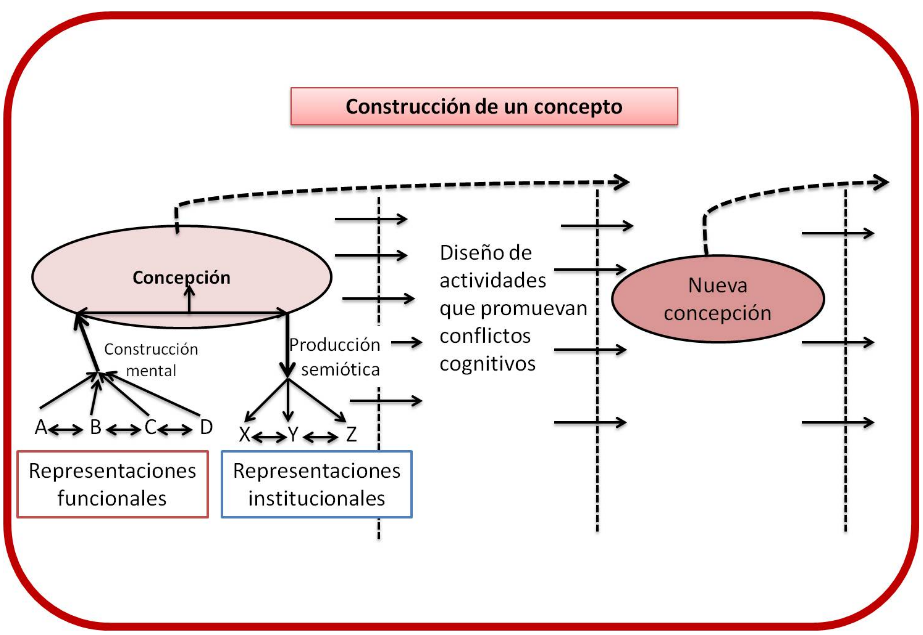


Figura 4. 7. Construcción de un concepto

Los aportes teóricos de Duval y Hitt nos indican que para la construcción de conceptos es necesario contemplar tareas de conversión entre representaciones y situaciones que propicien la utilización de representaciones espontáneas en la resolución de problemas; y éstas deben servir para promover *conflictos cognitivos* en los estudiantes. Un 'conflicto cognitivo' se genera cuando el estudiante evoca al mismo tiempo, dos conocimientos que a su vez son contradictorios, dándose cuenta de éste.

4.2.3. Conflicto cognitivo:

Respecto a este tema Sierpinska (1988) diseño situaciones didácticas que coadyuven a los estudiantes a vencer obstáculos epistemológicos relacionados con límites. Ella manifiesta que en la que en la construcción de este concepto surgen obstáculos inevitables. Sugiere que para que éstos sean eliminados, es necesario crear un *conflicto cognitivo*. Dejar emerger las contradicciones que surjan entre los estudiantes y a ese nivel, promover la reflexión para que ellos mismos se percaten de la contradicción, creando un *conflicto cognitivo* que eventualmente permitirá al alumno, si resuelve el conflicto, sobrepasar el obstáculo. Sierpinska parte de la hipótesis de que para que un obstáculo sea eliminado, es necesario crear un *conflicto cognitivo.* Por lo tanto, la situación didáctica, en sus dos dimensiones, cognitiva y social, debían inducir a los alumnos a tal objetivo. En términos operativos lo que considera Sierpinska es que debemos construir una actividad interesante en el sentido de generar una reflexión profunda en el estudiante, incluso en algunos casos, esas ideas intuitivas lo lleven a una situación contradictoria.

Sin embargo, si el alumno no percibe la contradicción, no existe conflicto cognitivo. Es el descubrimiento de la existencia de una contradicción la que genera el *conflicto cognitivo* y éste, a su vez, es el motor para superar el obstáculo [al superar el obstáculo el estudiante construye un conocimiento nuevo, el que probablemente resolverá el conflicto cognitivo]

4.2.4. Intención de considerar un conflicto cognitivo en el diseño de la secuencia didáctica.

La intención de considerar un *conflicto cognitivo* en el desarrollo de las actividades en un ambiente tecnológico- colaborativo es la de generar una discusión entre los estudiantes, para que ellos, a su vez, enfrenten el conflicto y sobrepasen el obstáculo, que impide la construcción adecuada del concepto en juego [que en este caso es el concepto de integral impropia]. El propósito principal en el diseño de las actividades fue implementarlas en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión que creara un conflicto cognitivo (desequilibrio cognitivo) en el estudiante y permitiera una discusión y a su vez una reflexión que germinara en un cambio de pensamiento [un aprendizaje del concepto en juego]

4.2.5. Argumentos

Douek (2007:169) define a la argumentación como el acto de formar razones, hacer inducciones, sacar conclusiones y aplicarlas al caso en discusión. En este sentido la argumentación, se considera como el proceso de producir un discurso lógicamente conectado sobre un tema, y un argumento como el producto de este proceso. En torno a este tema Goizueta y Planas (2013:63) sintetizan que un argumento es una razón o razones ofrecidas a favor o en contra de una proposición, mientras que una argumentación es el acto de producir razones.

Al respecto, Inglis, *et al.,* (2007:2) consideran al modelo de Toulmin (1958:15) como medio para analizar aspectos estructurales del proceso de argumentación en matemáticas. Toulmin (1958:15) formuló un modelo para estudiar los argumentos reconociendo la necesidad de analizar condiciones normativas de la argumentación en lenguaje natural. Alvarado y González (2010:78) explican que este modelo es aplicable a todo tipo de argumentaciones y en particular a esquemas de prueba, tanto intuitivos y transformacionales como axiomáticos. De acuerdo con Toulmin (1958:173) es en la lógica donde se debe buscar un modelo normativo para la argumentación, sin embargo, a Toulmin le inquietaba en menor medida la validez lógica de un argumento y le preocupaba más su estructura y contenido semántico, por lo que Inglis y Mejia-Ramos (2005:329) señalan que esta manera de analizar argumentos ha llegado a conocerse como lógica informal.

El modelo de Toulmin está conformado por seis tipos de declaraciones cada una de las cuales cumple un papel diferente en el argumento (Inglis y Mejia-Ramos, 2005:329). La *conclusión* es la tesis que defiende quien argumenta. El *dato* es la información en la cual se basa la conclusión. La *garantía* justifica la conexión entre el dato y conclusión haciendo referencia, por ejemplo, a una regla, una definición, o a través de una analogía. La garantía es apoyada por el soporte a través de un nuevo dato.

En su modelo, Toulmin acepta que una *garantía* acompañada de un *calificativo modal* no absoluto, puede ser propuesta simplemente para reducir el nivel de incertidumbre con respecto a una *conclusión*. El *calificativo modal* especifica la fuerza de la *conclusión*, expresando el grado de confianza de la tesis, y la *refutación* presenta las excepciones de la *conclusión*, aquellas condiciones bajo las cuales no es posible sostener la tesis del argumento. El modelo de Toulmin opera de la siguiente manera: a partir de un *dato* se formula una *conclusión* (proposición), una garantía conecta los datos con la *conclusión* y se ofrece un cimiento teórico, práctico o experimental: el respaldo. Los *calificadores modales* (grado de confianza): probablemente, seguramente, sin duda, tal vez, indican el modo en que se interprete la conclusión como verdadera, contingente o probable. Finalmente, en la *refutación* se considera sus posibles reservas u objeciones (limitaciones, excepciones, etcétera).

De Gamboa, et al., (2010:36) señalan la importancia de realizar estudios sobre el conocimiento de la argumentación matemática para resolver problemáticas relativas a la construcción práctica entre distintos tipos de razonamiento, concretamente entre argumentación y explicación, dificultad para plantear preguntas que requieran argumentación y la confusión teórica entre distintos tipos de razonamiento, concretamente entre explicación, argumentación y demostración.

4.2.6 Ambiente tecnológico

Se incorporó al diseño didáctico el uso de un software de geometría dinámica (GeoGebra) con el propósito de que los estudiantes se involucraran en un análisis visual de las gráficas, al explorar formas, observar representaciones dinámicas, analizar comportamientos gráficos y establecer relaciones entre las diferentes representaciones, en un ambiente de trabajo experimental donde se favorece la manipulación de gráficas al variar parámetros y coeficientes.

Las herramientas tecnológicas permiten establecer nuevas tareas y configuran un ambiente de trabajo escolar experimental. Tal como lo señala Borba y Villarreal (2005:71); la experimentación en un ambiente de uso de tecnología permite al estudiante construir conjeturas, transitar de un sistema de representación a otro, reconocer patrones, deducir y analizar comportamientos en gráficas y a partir de ello generar argumentos sobre un objeto matemático en construcción. En este contexto, la argumentación es importante, no sólo porque hace viable la observación de las ideas y nociones que el estudiante está concibiendo sobre un saber matemático, sino también, es una forma de generar o desarrollar ideas matemáticas (Inglis y Mejia-Ramos, 2005:335). Al respecto, Tall (2009:224) señala que existen aspectos dinámicos de la matemática que se pueden complementar con el uso de software para la producción de efectos visuales de los conceptos del cálculo. Tall explica que el cálculo está compuesto por conceptos dinámicos, por ejemplo: el deseo de cuantificar las cosas que cambian (el concepto de función), la razón en la cual ellas cambian (derivada), la manera en la cual ellas se acumulan (la integral) y las relaciones entre ellas (Teorema fundamental del cálculo y la solución de ecuaciones diferenciales). El uso del software en la enseñanza proporciona representaciones dinámicas de estos conceptos y permite identificar las relaciones conceptuales, lo cual favorece a un ambiente de trabajo experimental donde se puedan realizar exploraciones a las gráficas.

En torno al tema de uso de tecnología en la enseñanza Arcavi y Hadas (2000:25) afirman que los ambientes computacionales permite a los estudiantes construir figuras y visualizar ciertas propiedades, además que les permite transformar esas construcciones en tiempo real. Esta característica dinámica contribuye *con la formación de hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una instancia particular, para estudiar variaciones, invariantes visuales, y posteriormente promover bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones* (pág. 26).

Baccaglini-Frank y Mariotti (2010:231) describen un modelo de actividad matemática denominada *arrastre-conjetura* en el contexto del estudio de geometría dinámica. Esta se refiere a capacidad del software para realizar movimientos en tiempo real donde se puede tener una experiencia física dinámica, lo que permite al usuario percibir el movimiento como el efecto de una acción (dependencia lógica), y conduce a identificar propiedades y regularidades. El análisis de los cambios observados puede ayudar al estudiante a formular justificaciones matemáticas a través de la inducción y búsqueda de patrones.

Estos investigadores destacan los procesos cognitivos que ocurren durante la producción de conjeturas, particularmente describen cómo se desarrollan las ideas intuitivas durante la fase de exploración y cómo evolucionan hasta la formulación de argumentos. Los investigadores explican que la introducción de modalidades de *arrastre* puede fomentar y enriquecer la demostración de una conjetura, donde los argumentos tienen un rol relevante al proporcionar *datos* y *conclusiones* para la construcción de la demostración.

4.2.7. Actividades que integran la tecnología que propician un pensamiento divergente y posteriormente convergente.

Al respecto Arcavi y Hadas (2002) indican en un contexto de resolución de problemas, nos proponen la integración de la tecnología en actividades de corte geométrico. Ellos muestran cómo a partir de una situación simple, se puede provocar la reflexión. En este sentido proponen algunas características sobre lo que sebe promover una actividad utilizando tecnología:

Visualización. La visualización generalmente se refiere a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual...

Experimentación. El juego con los entornos dinámicos permite a los estudiantes, además de visualizar, aprender a experimentar, y a "apreciar la disponibilidad de muchos ejemplos...,a buscar casos extremos, ejemplos negativos y evidencia no estereotipada..."

Sorpresa. Es improbable que los estudiantes dirijan de entrada exitosamente su propia experimentación. Deberían diseñarse actividades curriculares, como problemas situados, de tal manera que los tipos de preguntas que se les hacen a los estudiantes jueguen papeles significativos en cuanto a profundidad e intensidad de una experiencia de aprendizaje.

Retroalimentación. El tipo de sorpresas descritas en el párrafo anterior se dan por una disparidad entre la expectación declarada de una cierta acción y el resultado de la misma. La retroalimentación es proporcionada por el entorno mismo, que reacciona como si fuera requerido para ello.

Necesidad de argumentar y prueba. Después de la sorpresa muchos estudiantes pudieran requerir una prueba.

Este acercamiento, centrado en el desarrollo de estrategias propias a la resolución de problemas, promueve en principio, un pensamiento divergente, y enseguida un pensamiento convergente.

Con este acercamiento:

- La actividad matemática y el ambiente tecnológico deben estar bien seleccionados para provocar un pensamiento divergente,

- La actividad debe ser diseñada de manera a promover en el estudiante el uso y análisis de diferentes representaciones,
- El diseño de la actividad debe propiciar el pensamiento convergente,
- Las actividades están diseñadas para promover un equilibrio entre lápiz-papel-tecnología instrumentada.

Ambiente tecnológico como mediador en la construcción de argumentos matemáticos

La secuencia didáctica planteada en esta investigación servirá como escenario para analizar los argumentos expuestos por los estudiantes durante la resolución de las actividades matemáticas, considerando la interacción tecnológica, el trabajo colaborativo, el debate y la auto-reflexión y el modelo de argumentación de Toulmin. La actividad del estudiante se orientará a favorecer el tránsito entre representaciones (algebraica, numérica y grafica) en un contexto de experimentación y un trabajo coordinado entre papel, lápiz y tecnología. Además se utilizará el modelo de Toulmin (1958) como un instrumento para analizar el contenido y estructura de los argumentos expuestos por los estudiantes. En el esquema *4.4* se describe el modelo en el que se ubica el ambiente tecnológico colaborativo como mediador en la construcción de argumentos.

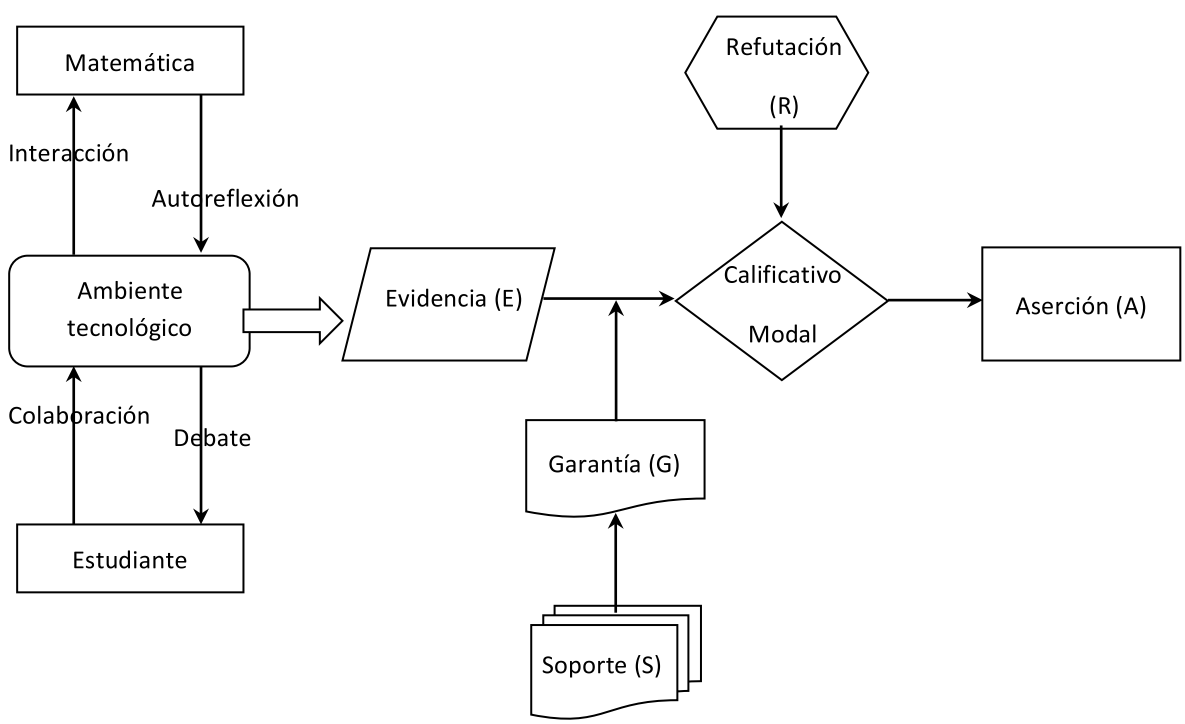


Figura 4. 8. El ambiente tecnológico como mediador en la construcción de argumentos matemáticos

Tránsito entre representaciones

Duval (2000:60) expone que la construcción de un concepto matemático no se puede lograr si sólo se trabaja con un registro de representación, se deben promover tareas que favorezcan la conversión entre al menos dos de sus distintas representaciones, que permitan establecer una base cognitiva para propiciar el aprendizaje. Cada registro de representación resalta características y propiedades determinadas del objeto matemático, y su contenido depende más del registro de representación que del objeto representado, por lo que se hace necesaria una interacción entre las diferentes representaciones del objeto matemático para establecer un dominio conceptual más amplio. Hitt (2003:258) considera que las representaciones de un concepto matemático, solo son una parte del mismo, por lo tanto, el tratamiento de las diferentes representaciones del concepto es lo que nos permitirá su construcción. Es decir, las tareas de conversión entre representaciones y la manipulación coherente de tales representaciones permitirán la construcción del concepto en cuestión.

Establecer el tránsito entre representaciones requiere coordinar las experiencias de trabajo en las diferentes situaciones y planteamientos y transferir esta información a los diferentes contextos de representación. A partir de estos referentes, construimos la idea de transitar y articular basado en explorar conceptos, formular sus propias conjeturas, visualizar y extraer datos, aportar justificaciones, entre otros.

Capítulo V

Metodología y experimentación

La secuencia didáctica planteada en esta investigación servirá como escenario para analizar los argumentos expuestos por los estudiantes durante la resolución de las actividades matemáticas, considerando la interacción tecnológica, el trabajo colaborativo, el debate y la auto-reflexión y el modelo de argumentación de Toulmin. La actividad del estudiante se orientará a favorecer el tránsito entre representaciones (algebraica, numérica y grafica) en un contexto de experimentación y un trabajo coordinado entre papel, lápiz y tecnología. Además se utilizará el modelo de Toulmin como un instrumento de recolección y análisis de datos del contenido y estructura de los argumentos expuestos por los estudiantes.

5.1. Diseño y experimentación de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica se implementó en el Instituto Tecnológico Superior de Tantoyuca, Veracruz-México, participaron 24 estudiantes del segundo semestre de la carrera de Ingeniería Industrial. De acuerdo con la metodología ACODESA (Hitt y González-Martín 2015:206) se formularon tres etapas, en las dos primeras se establecieron 5 fases de forma secuencial y con tiempos predeterminados (trabajo individual, trabajo en equipo, debate, auto-reflexión, proceso de institucionalización), en el desarrollo de la tercera etapa no se consideraron tiempos predeterminados.

Etapa 1: Situación problema contextual

Situación problema de la industria petroquímica

Se requiere construir una base de concreto hidráulico reforzado de sección transversal, tipo parabólico, como se observa en la Figura 5. La construcción servirá de base para instalar un recipiente que se usará como depósito para un hidrocarburo. Las dimensiones de la base se especifican en la Figura 5

Se solicita calcular:

a. ¿Cuál es el costo total de las bases?, considerando que se requieren tres bases para posicionar el depósito y el costo del concreto hidráulico es de \$1450 por m^2 con un espesor uniforme de 1.50 m
b. Se requiere fabricar un depósito con una base de acuerdo a la forma de la sección transversal de la *Figura 5* y con una longitud de 20 m ¿cuánto material en m^2 se necesita para fabricarlo? considerando que el costo del acero para su construcción tiene un costo de \$445 por m^2 ¿Cuál será el costo total del material para la fabricación del depósito?
c. ¿Cuál es el volumen máximo de capacidad? considera que por razones de seguridad el depósito solo debe llenarse al 80% de su capacidad total.

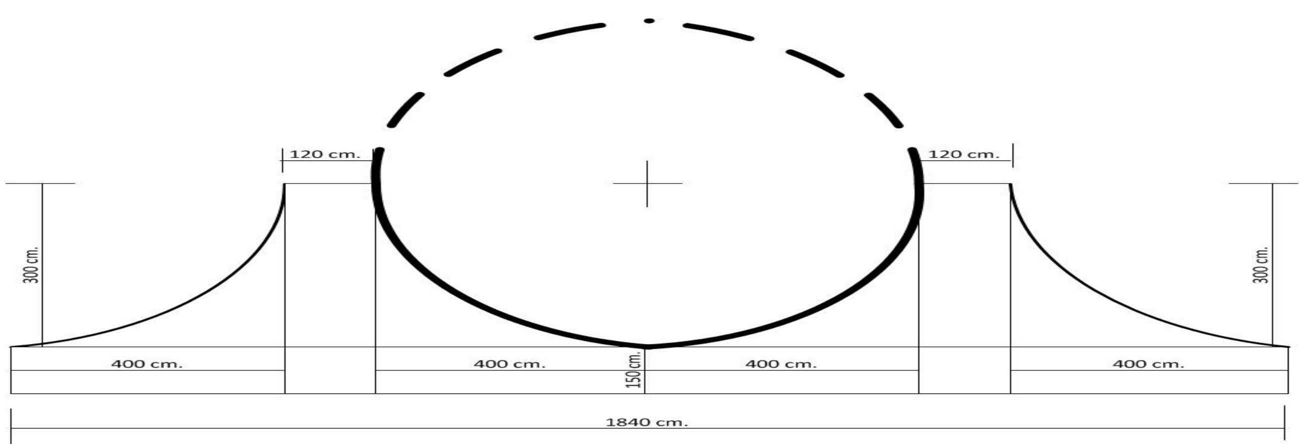


Figura 5. 2. Vista de la sección transversal tipo parabólico de la base

.

Intención matemática del problema

a. Elaborar un dibujo a escala, con el propósito de representar la situación problema, considerando las especificaciones dadas. Con la intención de encontrar las áreas aproximadas de las secciones (regulares e irregulares),

b. Recuperar conocimientos previos, específicamente la ecuación canónica de la parábola con vértice en el origen y respecto al eje vertical. Al aplicar esta ecuación se busca obtener el modelo matemático (función) que representa la situación problema,

c. Aplicar los métodos de aproximación conocidos (sumas de Riemann y regla Trapezoidal) para calcular áreas de las figuras irregulares (amorfas).
   - Sumas de Riemann: $R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i$
   - Regla Trapezoidal: $I = \frac{\Delta x}{2}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)]$
   - Donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

d. Aplicar el teorema de Integral de Riemann [$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i$] y el análisis de los límites de la secuencia numérica para el desarrollo de una comprensión del teorema fundamental del cálculo de Barrow. Que solicita condiciones [Sea f continua sobre el intervalo de análisis $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo],

e. Usar el teorema fundamental del cálculo de Barrow para calcular el área exacta $A = \int_a^b f(x)dx$ (donde f es una función definida sobre un intervalo cerrado *[a,b]* y $f(x) \geq 0$),

f. Comparar los resultados obtenidos en las tablas de análisis numérico a lápiz y papel usando los métodos de aproximación (sumas de Riemann y regla Trapezoidal). Reflexionar y conjeturar los resultados obtenidos ,

g. Usar el GeoGebra para visualizar y cotejar los resultados de las actividades anteriores [los métodos de aproximación (sumas de Riemann y regla Trapezoidal) y demostrar algebraicamente los resultados usando los teoremas de Riemann y Barrow]. Usar los datos obtenidos a papel, lápiz y tecnología para completar la siguiente tabla.

n	Sumas de Riemann (papel-lápiz) $R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i$	Regla Trapezoidal (papel-lápiz) $I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$	Geogebra (suma de rectángulos)	Geogebra (suma de trapecios)
6				
...				
10				
...				
15				
...				
20				
...				
∞				

Tabla 5. 1 Tabla de Análisis Numérico

h. Usar las condiciones de la situación problema, para calcular áreas entre dos curvas. En este caso, se usa el teorema de cálculo de área acotada por dos curvas. Sean f y g funciones continúas sobre un intervalo [a, b], entonces el área A de la región acotada por sus gráficas sobre el intervalo está dada por: $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$,

i. Usar el teorema para calcular la longitud de curvatura como un dato para calcular el área total solicitada. Sea $f(x)$ una función que es continua sobre un intervalo [a, b], Entonces la longitud de curva L sobre el intervalo está dada por:$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dx$,

j. Construir una maqueta a escala considerando los datos obtenidos en los incisos anteriores.

Intención didáctica

Esta etapa los estudiantes deben formular una primera aproximación de la representación gráfica del modelo matemático de la situación, usando diversos recursos; reglas, compas, calculadora, plumones, papel, juego de escuadras, entre otros. Apoyados con el software de geometría dinámica los estudiantes realizarán comparaciones de entre las representaciones obtenidas (funcionales e institucionales) a fin de contrastar características y discutir diferencias. En esta etapa los estudiantes formularán predicciones sobre el comportamiento de la función desde el punto de vista gráfico.

Etapa 2: Problemas (Integral Impropia–Probabilidad)

En esta etapa se plantearon 10 problemas contextuales (ingeniería industrial) relacionados con el tema de la distribución normal (campana de Gauss) y cálculo de probabilidades. En el problema 1 se solicitó el análisis del comportamiento de la función *distribución normal* en un intervalo dado para la media (μ) y desviación estándar (σ); demostrar las probabilidades del Teorema de Chebyshev usando los datos de la distribución normal estándar en un intervalo dado; calcular la probabilidad acumulada y justificar los resultados usando las tablas de distribución normal. En los problemas del 2 al 10 se solicitó el cálculo de probabilidades usando las propiedades de la integral impropia para probabilidad y las tablas de distribución normal para comprobar y justificar los resultados.

Intención matemática

a. Acercamiento a los conocimientos previos: función, generalización del teorema fundamental del cálculo (integral impropia), propiedades de la distribución normal,
b. Visualizar los efectos de las variaciones de la media (μ) y la desviación estándar (σ) sobre la curva de la distribución normal,
c. Construir una tabla de probabilidades usando la función de la distribución normal estándar que compruebe las probabilidades del teorema de Chebyshev. Donde los parámetros son $\mu = 0$, $\sigma = 1$, la función distribución normal estándar es:

   $N(0,1) = f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, Sea la expresión: $P(A \leq X \leq B) = \int_A^B f(x)dx$, para un radio de 3 sigma.

d. Comparar los resultados obtenidos al usar las condiciones de la integral impropia para cálculo de probabilidad acumulada contra los valores de la tabla de distribución normal. Considera las condiciones de la Integral Impropia para probabilidad:
   - $P(X \leq A) = \lim_{X\to-\infty} \int_X^A f(x)dx$
   - $P(X \geq B) = \lim_{X\to+\infty} \int_B^X f(x)dx$
   - $P(-\infty \leq X \leq +\infty) = \lim_{X\to-\infty} \int_X^A f(x)dx + \lim_{X\to+\infty} \int_A^X f(x)dx$

Intención didáctica

En esta etapa los estudiantes se enfrentan a problemas que conduzcan a debates muy puntuales y respuestas específicas, a presentar conjeturas y justificaciones a través de la articulación entre representaciones basado en un trabajo equilibrado entre papel, lápiz y tecnología.

Etapa 3: Ejemplos-contraejemplos: la generalización del teorema fundamental del cálculo (integral impropia).

En el ejercicio 1 (ejemplo) se plantean cinco integrales impropias para ser evaluadas en un intervalo dado y se solicitó justificar la convergencia o divergencia. Los estudiantes usarán el GeoGebra con la función *deslizador*, el cual es un control establecido de forma remota, pero dentro del área de trabajo, que permite *mover* o *deslizar* un punto sobre una figura, visualizándose una animación.

En el ejercicio 2 (contraejemplos), se proponen 6 contraejemplos donde se solicitan justificaciones, esto con la intención que los estudiantes apliquen las propiedades de la integral impropia tipo I y II (intervalos infinitos e integrandos discontinuos *funciones discontinuas*). Se solicita a los estudiantes analizar las características de las funciones para aplicar según sea el caso la propiedad que corresponda; para realizar estas actividades los estudiantes necesitan transitar entre representaciones (gráfica, numérica y algebraica) con la intención de encontrar datos que justifiquen los resultados obtenidos.

Intención matemática

Usar lar propiedades de la integral impropia para los casos de intervalos infinitos y para funciones discontinuas para resolver los ejercicios planteados.

Intención didáctica

Los estudiantes deben confrontar ejemplos y contraejemplos relacionados con el concepto de integral impropia tipo I y II y la regla de Barrow con el propósito de justificar la convergencia o divergencia de las integrales impropias, trabajando en diferentes registros de representación y articulando las tareas papel, lápiz y tecnología. Los estudiantes en cada caso tienen que explorar, experimentar usando la función *deslizador* del software GeoGebra para justificar los resultados.

Capítulo VI

Análisis de los datos

Análisis de las respuestas de los estudiantes en el desarrollo de las etapas.

Etapa 1.

En esta etapa de detectaron momentos en donde los estudiantes trabajaron en un ambiente colaborativo y debate. Interactuando entre estudiantes, estudiante-ambiente tecnológico, estudiante-hoja de trabajo, estudiante-profesor. Además, para justificar se apoyaron de sus notas a papel-lápiz-tecnología al transitar entre representaciones [algebraica-numérica-gráfica] usando de manera equilibrada en la realización de sus tareas papel- lápiz- tecnología.

En el proceso de la modelación matemática los estudiantes usaron los conocimientos previos para definir un modelo real (usando sus esquemas e idealizando la situación física planteada). Por momentos los estudiantes adquirieron un rol específico dentro del equipo. De esta manera ellos se retroalimentaron, compartiendo sus puntos de vista y ayudando a sus compañeros de clase.

En esta etapa se propuso una situación problema que solicita de retos, justificaciones y la necesidad de conocimientos previos. Actividad que induce a los estudiantes a un proceso de modelación matemática con la intención de encontrar una función que represente la situación problema. Acción que requiere el uso de herramientas de trabajo por ejemplo: reglas, compas, calculadora, plumones, papel, juego de escuadras, alcalímetro, otros... Estas tareas se realizaron con la intención de elaborar bosquejos como una primera aproximación a la representación gráfica de la situación.

A continuación se describen momentos substanciales que se identificaron en esta etapa; acciones que muestran cómo los estudiantes desarrollaron sus trabajos en un ambiente *tecnológico-colaborativo.* Tareas que se desarrollaron al transitar entre representaciones *'gráfica, numérica y algebraica'* y un trabajo equilibrado 'papel-lápiz-tecnología'; con el propósito de construir conjeturas y demostrar justificaciones.

En la figura 1 se exponen evidencias como en un trabajo colaborativo los equipos prepararon sus dibujos a diferentes escalas y posteriormente los expusieron al grupo para compartir y debatir sus conjeturas. Narrando cómo llegaron al cálculo de las áreas aproximadas con el propósito de llegar a consensos que permitan construir argumentos que justifiquen sus respuestas. A lo largo del debate, la colaboración, la justificación y la toma de decisiones fueron alentadas entre los estudiantes.

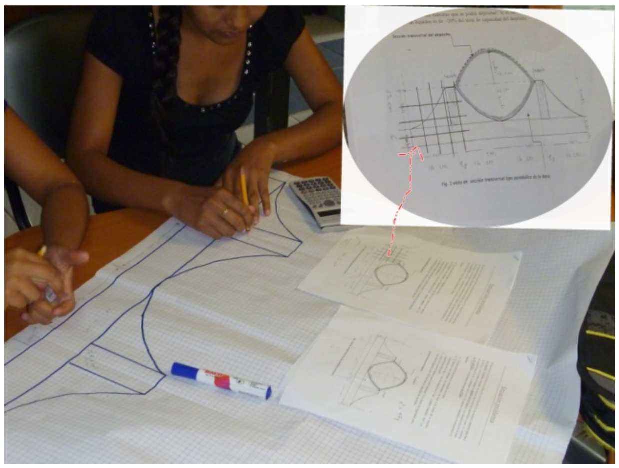


Figura x

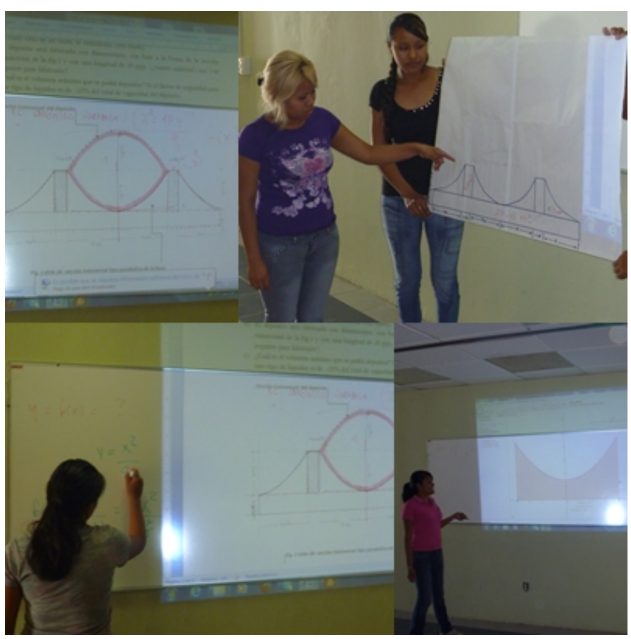
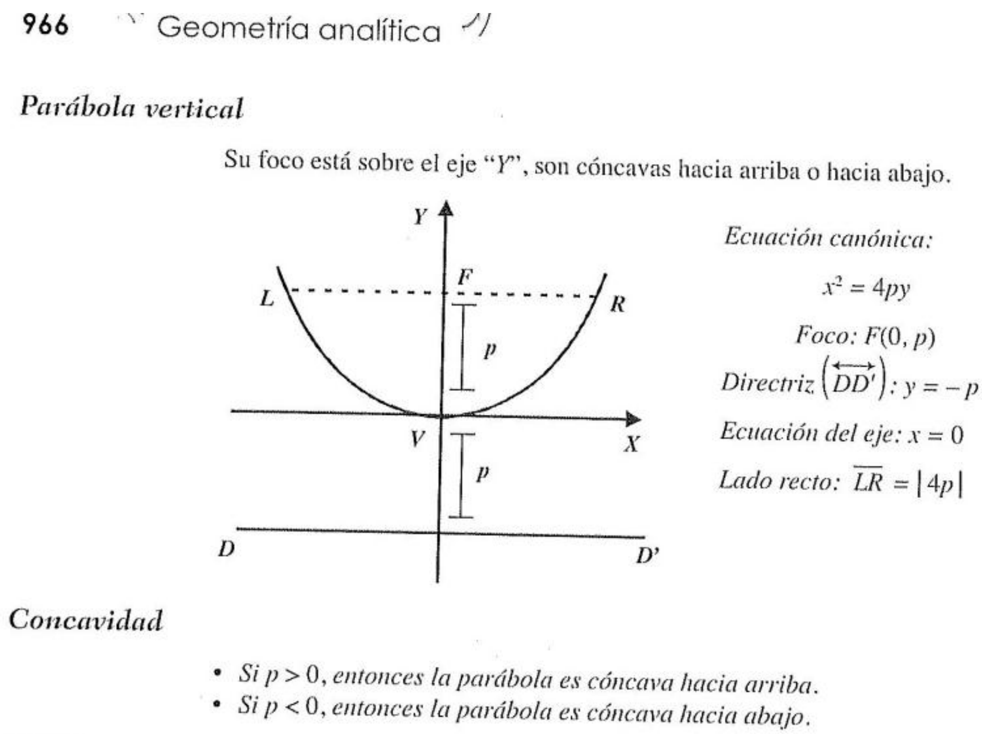


Figura 6. 1. Trabajo colaborativo y debate

En la figura 6.1 como los estudiantes haciendo uso de los conocimientos previos; en este caso de geometría analítica *'la ecuación canónica de la parábola'.* Conocimientos que ayudaron a plantear el modelo que representaría la situación problema.


966 Geometría analítica

Parábola vertical

Su foco está sobre el eje "Y", son cóncavas hacia arriba o hacia abajo.

Ecuación canónica:

$x^2 = 4py$

Foco: $F(0, p)$

Directriz $\left(\overleftrightarrow{DD'}\right)$: $y = -p$

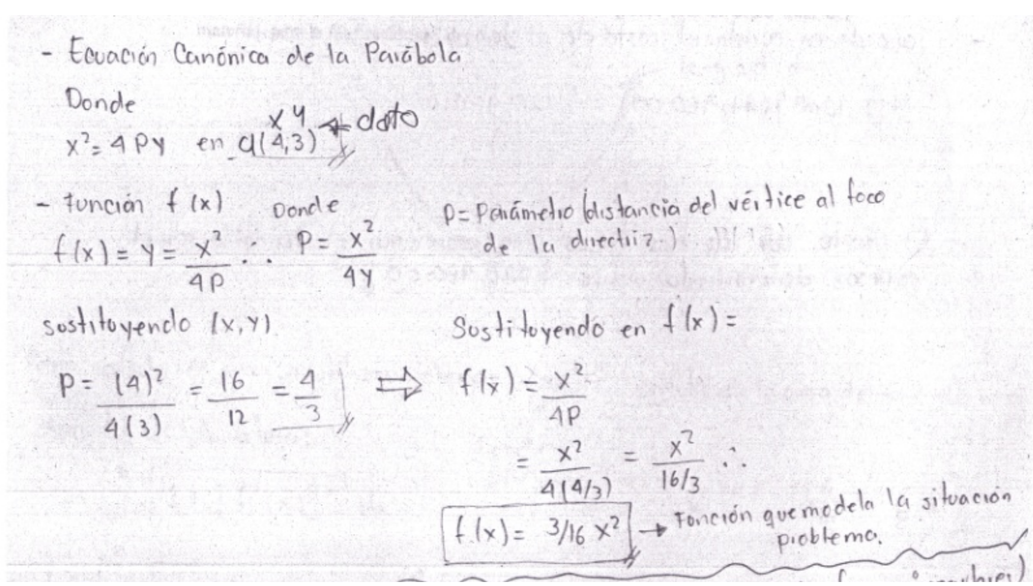
Ecuación del eje: $x = 0$

Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$

Concavidad

- *Si* $p > 0$, *entonces la parábola es cóncava hacia arriba.*
- *Si* $p < 0$, *entonces la parábola es cóncava hacia abajo.*

Figura xx


- Ecuación Canónica de la Parábola

Donde

$x^2 = 4py$ en $a(4,3)$ ← dato

- función $f(x)$ Donde

$f(x) = y = \frac{x^2}{4p}$ ∴ $p = \frac{x^2}{4y}$

p = Parámetro (distancia del vértice al foco de la directriz)

sostituyendo (x, y)

$p = \frac{(4)^2}{4(3)} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ ⟹

Sostituyendo en $f(x) =$

$f(x) = \frac{x^2}{4p}$

$= \frac{x^2}{4(4/3)} = \frac{x^2}{16/3}$ ∴

$\boxed{f(x) = 3/16\, x^2}$ → Función que modela la situación problema.

Figura 6. 2. Conocimientos previos

En la figura 6.3 se muestran como los estudiantes usan la tecnología para visualizar la curva que representa la función modelo y la cotejan contra el dibujo de la sección transversal de la situación problema. En la figura se visualiza que la función encontrada corresponde a la curva de la sección transversal del problema. Acción que ayuda a experimentar o predecir algunos datos requeridos para la investigación.

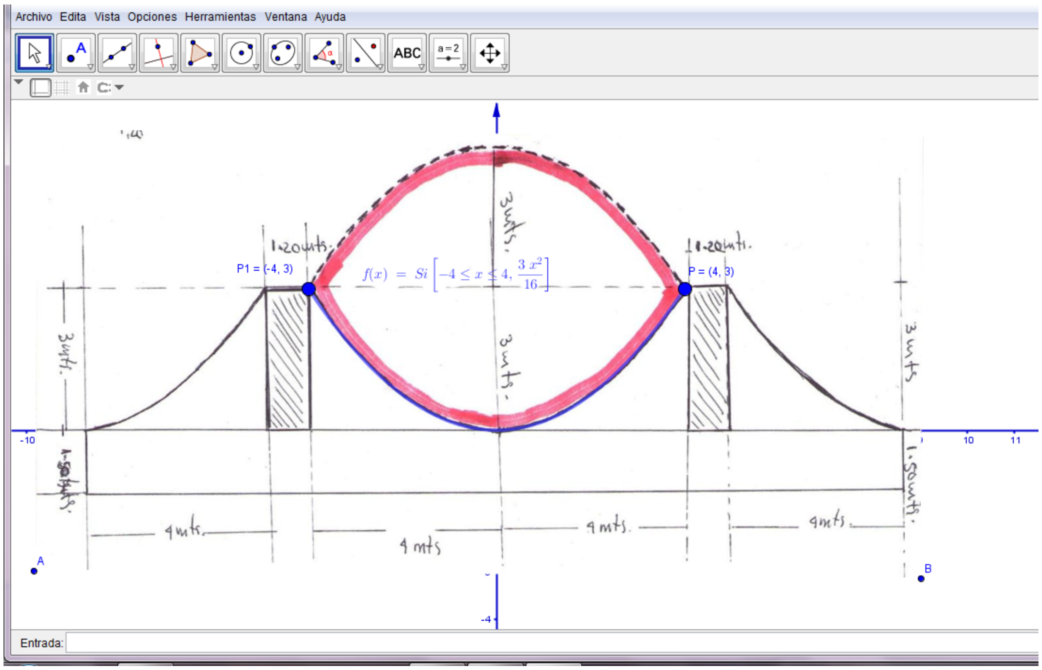
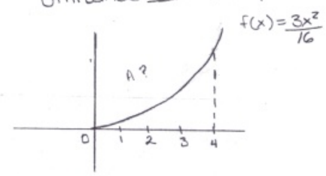


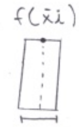
Figura 6. 3. Uso de la tecnología Vs dibujo

En la figura 6.4 se muestran evidencias de las tareas a *'papel-lápiz'* de los estudiantes al usar métodos de aproximación conocidos en este caso *'las sumas de Riemann y la regla trapezoidal'* con el objeto de obtener el área aproximada de la sección transversal. También se identifica que elaboran una tabla 1 que muestra un análisis numérico de datos obtenidos al usar papel y lápiz con los métodos antes mencionados y la tecnología con los métodos de suma de rectángulos y suma de trapecios. Además usan sus notas a *'papel-lápiz'* para comprobar algebraicamente los resultados usando la integral de Riemann y el teorema de Barrow. Al usar las sumas de Riemann, analizando un intervalo acotado y aumentando el número de rectángulos para mejorar la aproximación. Esto con la intención de desarrollar la noción de límite [...que si n tiende un numero infinitamente grande como se quiera, se obtendrá el valor real del área]. Tareas que son demostradas al usar la regla de Barrow.

Método de las sumas de Riemann el Área de la región limitada por la curva $f(x) = \frac{3x^2}{16}$ y el intervalo $[\overset{a}{0}, \overset{b}{4})$

Utilizando 6, 10, 15 particiones





$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}i) . \Delta xi = \sum_{i=1}^{6} f(\bar{x}i)\Delta xi$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Análisis numérico para $n=6$

x_i	$\bar{x}_i$	$f(\bar{x}_i)$
0	0	0
2/3	1/3	1/48
4/3	1	3/16
2	5/3	25/48
8/3	7/3	49/48
10/3	3	27/16
4	11/3	121/48
Σ	___	143/24

$$\therefore R_p = \sum_{i=1}^{6} f(\bar{x}i)\Delta xi$$

$$\therefore R_p = \left(\frac{143}{24}\right)\left(\frac{2}{3}\right) =$$

$$R_p = 3.97222 \text{ US}^2$$

Figura x

Método de la "Regla Trapezoidal"

Forma general de la Ecuación sea $f(x) = \frac{3x^2}{16}$

$$I = \frac{\Delta xi}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \quad [\underset{a}{0}, \underset{b}{4}]$$

Para $n = 6, 10, \ldots$

$$\Delta xi = \frac{b-a}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

X_i	$f(x_i)$	
0	0	$\leftarrow f(a)$
2/3	1/12	$\Sigma f(x_i) = 55/12$
4/3	1/13	
2	3/4	
8/3	4/3	
10/3	25/12	
4	3	$\leftarrow f(b)$

$$\therefore I = \frac{2/3}{2} \cdot \left[0 + 2(55/12) + 3\right]$$

$$I = \frac{1}{3}\left[73/6\right] = 73/18 = 4.05556 \text{ us}^2$$

Figura x

Demostración Algebraica

$f(x) = \frac{3x^2}{16}$ $\quad [0, 4]$ (a, b)

La integral de Riemann $\cong$ La integral de Barrow

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \cong \int_a^b f(x)dx$$

Donde : x_k^* = punto fronterizo derecho de cada subintervalo

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$

$x_k^* = a + k\Delta x = 0 + k\frac{4}{n}$

$x_k^* = \frac{4k}{n}$

Sust. en $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{4k}{n}\right)\frac{4}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{3}{16}\left(\frac{4k}{n}\right)^2 \cdot \frac{4}{n}\right]$$

$$\frac{3}{16}\left(\frac{16k^2}{n^2}\right) \cdot \frac{4}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{12k^2}{n^3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{12}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Aplicando propiedad de Sumatoria

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{12}{n^3}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(4 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}\right)$$

$\therefore A = 4us^2$

Nota: La integral de Barrow

$$\int_0^4 \frac{3x^2}{16}dx = \frac{3}{16}\frac{x^3}{3} = \left.\frac{x^3}{16}\right]_0^4$$

$\therefore$ sust. límites $= \frac{4^3}{16} - \frac{0^3}{16}$

$\therefore A = 4us^2$

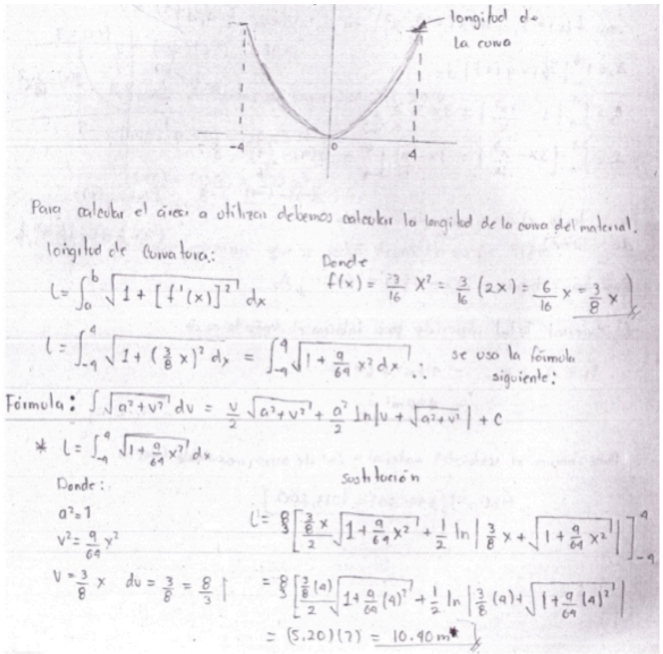
Figura 6. 4. Tareas a papel-lápiz

En la tabla 1 se muestra el análisis numérico realizado al transitar entre diferentes representaciones y un trabajo articulado papel-lápiz y tecnología. Con la intención de obtener los datos necesarios para construir y demostrar conjeturas respecto al área bajo la curva.

n	Método de suma de Riemann	Método de la regla Trapezoidal	Geogebra suma de Rectangulos	Geogebra suma de trapecios	Conclusión
6	3.97222	4.05556	4.3148	4.0556	Se observan los datos obtenidos por diferentes métodos convergen a 4 y se demuestra usando los teoremas de Riemann y Barrow
10	3.99	4.02	3.8712	4.0200	
15			3.8118	4.0089	
20			3.8202	4.0050	
100			3.9450	4.0002	
∞	$\cong 4$	$\cong 4$	$\cong 4$	$\cong 4$	

Tabla 6.5 1. Análisis Numérico

En la figura 6.6 se muestran los cálculos y el uso de teoremas para encontrar la longitud de curvatura y área entre curvas como datos para realizar las cotizaciones requeridas para los incisos b y c.



longitud de la curva

-4 0 4

Para calcular el área a utilizar debemos calcular la longitud de la curva del material.

longitud de curvatura:

$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

Donde $f(x) = \frac{3}{16}x^2 = \frac{3}{16}(2x) = \frac{6}{16}x = \frac{3}{8}x$

$L = \int_{-4}^{4} \sqrt{1 + (\frac{3}{8}x)^2}\, dx = \int_{-4}^{4} \sqrt{1 + \frac{9}{64}x^2}\, dx$ se uso la fórmula siguiente:

Fórmula: $\int \sqrt{a^2+v^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2+v^2} + \frac{a^2}{2}\ln|v + \sqrt{a^2+v^2}| + C$

* $L = \int_{-4}^{4} \sqrt{1 + \frac{9}{64}x^2}\, dx$

Donde:

$a^2 = 1$

$v^2 = \frac{9}{64}x^2$

$v = \frac{3}{8}x \quad dv = \frac{3}{8} = \frac{8}{3}$

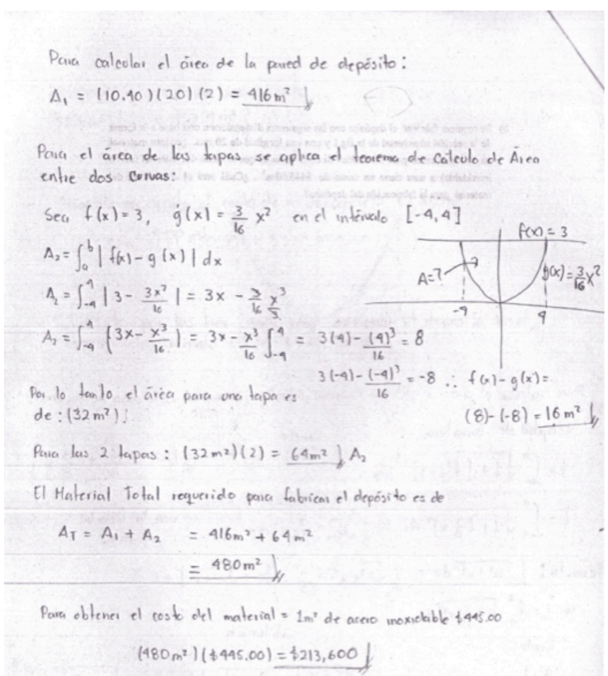
sustitución

$L = \frac{8}{3}\left[\frac{\frac{3}{8}x}{2}\sqrt{1+\frac{9}{64}x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3}{8}x + \sqrt{1+\frac{9}{64}x^2}\right|\right]_{-4}^{4}$

$= \frac{8}{3}\left[\frac{\frac{3}{8}(4)}{2}\sqrt{1+\frac{9}{64}(4)^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3}{8}(4) + \sqrt{1+\frac{9}{64}(4)^2}\right|\right]$

$= (5.20)(2) = 10.40\,m$

Figura x



Para calcular el área de la pared de depósito:

$A_1 = (10.40)(20)(2) = 416\,m^2$

Para el área de las tapas se aplica el teorema de Cálculo de Área entre dos curvas:

Sea $f(x) = 3$, $g(x) = \frac{3}{16}x^2$ en el intervalo $[-4, 4]$

$A_2 = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$

$A_2 = \int_{-4}^{4} |3 - \frac{3x^2}{16}| = 3x - \frac{3}{16}\frac{x^3}{3}$

$A_2 = \int_{-4}^{4} (3x - \frac{x^3}{16}) = 3x - \frac{x^3}{16}\Big|_{-4}^{4} = 3(4) - \frac{(4)^3}{16} = 8$

$3(-4) - \frac{(-4)^3}{16} = -8 \therefore f(x) - g(x) =$

$(8) - (-8) = 16\,m^2$

$f(x) = 3$

$A = ?$

$g(x) = \frac{3}{16}x^2$

-4 4

Por lo tanto el área para una tapa es de: $(32\,m^2)$

Para las 2 tapas: $(32\,m^2)(2) = 64\,m^2$ A_2

El Material Total requerido para fabricar el depósito es de

$A_T = A_1 + A_2 = 416\,m^2 + 64\,m^2$

$= 480\,m^2$

Para obtener el costo del material = $1\,m^2$ de acero inoxidable \$445.00

$(480\,m^2)(\$445.00) = \$213,600$

Figura 6. 5. Longitud de curvatura y área entre curvas

Conclusiones de la etapa 1.

Los objetivos generales de esta etapa hacen referencia al ambiente *'tecnológico-colaborativo'*; que solicita un trabajo equilibrado y articulado 'papel-lápiz-tecnología'. En esta etapa se desarrolla una sesión de introductoria con la intención de llegar a un común acuerdo *'didáctico'*, una especie de *'contrato didáctico'* en el salón de clases como lo menciona (Balacheff, 1990). En donde se exponen las características de la secuencia didáctica en un ambiente tecnológico-colaborativo; en donde se solicita transitar entre representaciones *'gráfica, numérica y algebraica'*. También se indican los tiempos que se usaran para los diferentes momentos de trabajo: individual, en equipo, debate grupal y autoreflexión. Se destaca la importancia de transitar y articular entre representaciones *'gráfica, numérica y algebraica'*. Cabe señalar, que este tipo de actividades no son comunes para los estudiantes si no que se requiere en común un 'acuerdo didáctico' para trabajar en este tipo de ambientes. Al respecto Balacheff (1990) describe que el acto de dar una explicación o argumentación para una solución no es un comportamiento común entre los alumnos, sino que debe ser construido como parte del contrato didáctico en el aula de matemáticas.

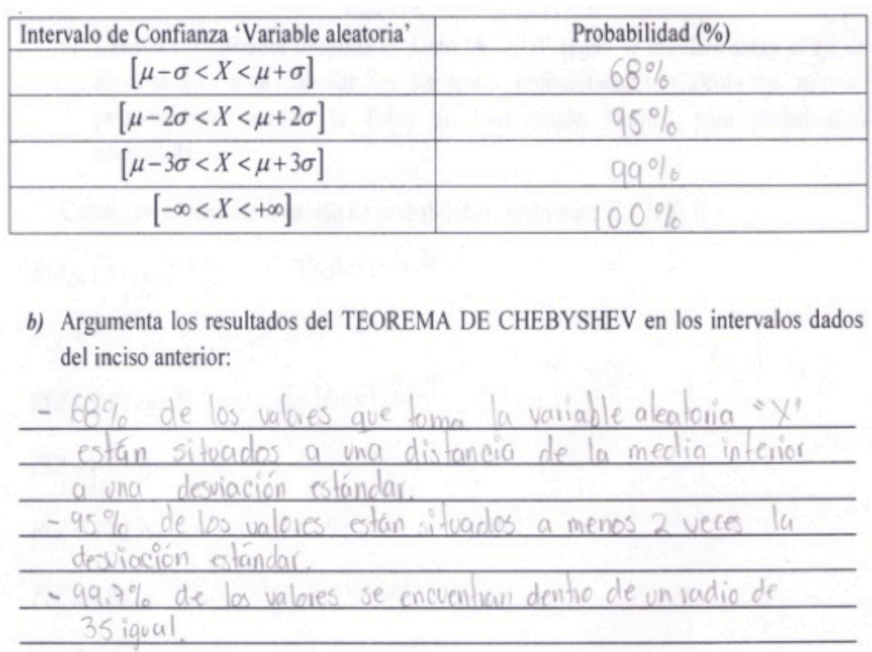
Etapa 2.

En esta etapa los estudiantes se enfrentaron a problemas con un enfoque contextual a la ingeniería industrial con relación al tema de cálculo de probabilidades. Se destaca el trabajo colaborativo y debate al dar solución a los problemas. La importancia de los conocimientos previos (propiedades de la Integral Impropia-Distribución Normal) como parte fundamental para comprender los requerimientos de los problemas a resolver, en donde cada problema solicitaba un reto diferente.

En esta etapa fue fundamental el ambiente tecnológico al usar el deslizador para visualizar para extraer los datos necesarios para construir conjeturas y justificaciones.

Etapa 2. Problemas integral impropia - probabilidad

En un primer momento como se observa en la figura 1, la intención es usar la tecnología, en este caso un applet con geogebra para visualizar y obtener los datos necesarios para construir una tabla1 de probabilidades usando la función de la distribución normal estándar que compruebe las probabilidades del teorema de Chebyshev. En donde las condiciones iniciales dadas fueron los parámetros: $\mu = 0$, $\sigma = 1$ y la función distribución normal estándar: $N(0,1) = f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, Sea la expresión: $P(A \leq X \leq B) = \int_A^B f(x)dx$, para un radio de 3 sigma.



Intervalo de Confianza 'Variable aleatoria'	Probabilidad (%)
$[\mu - \sigma < X < \mu + \sigma]$	68%
$[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma]$	95%
$[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma]$	99%
$[-\infty < X < +\infty]$	100%

b) **Argumenta los resultados del TEOREMA DE CHEBYSHEV en los intervalos dados del inciso anterior:**

- 68% de los valores que toma la variable aleatoria "X" están situados a una distancia de la media inferior a una desviación estándar.
- 95% de los valores están situados a menos 2 veces la desviación estándar.
- 99.7% de los valores se encuentran dentro de un radio de 3S igual.

Figura x

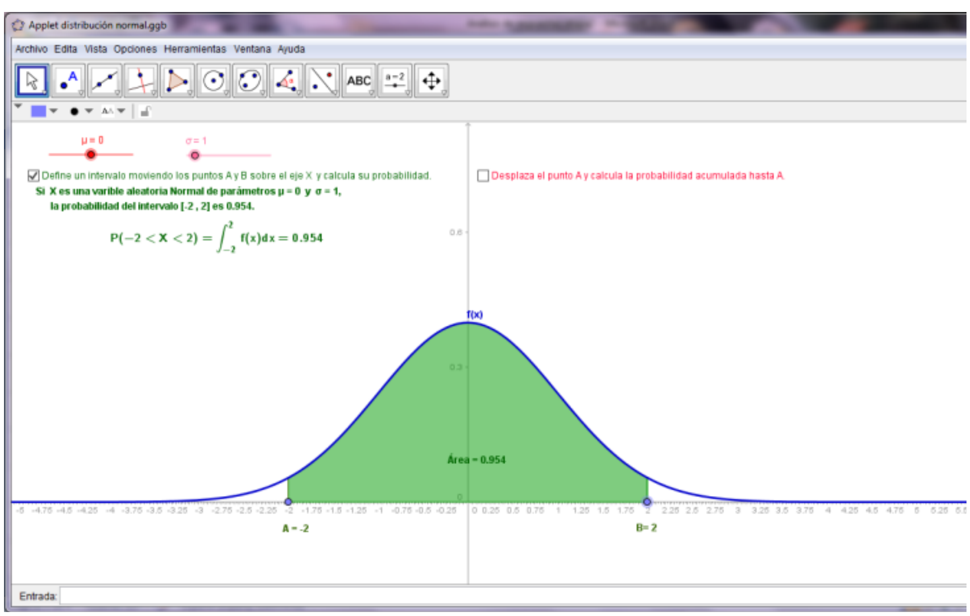


Figura 6. 6. Uso de la tecnología

Problema 6: **El contenido de unas cajas de cereal indica 500g. La máquina que llena las cajas produce pesos que tienen una distribución normal con desviación estándar de 12g.**

a) Si el peso objetivo es 500g, ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina produzca una caja con menos de 480g. de cereal?

$$P(X<480) = P(x<A) = \lim_{x\to -\infty} \int_x^A f(x)dx = 0.0428 = \underline{\underline{5\%}}$$

Para justificar lo anterior: (utilizando la tabla de distribución Normal. $z_0 = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$P(z<480) = 1 - P(z<480)$$

$$z_0 = \frac{480-500}{12} = \frac{-20}{12} = -1.666 \to z = 0.9515$$

$$P(z<480) = 1 - 0.9515$$

$$= 0.0485 \simeq \underline{5\%}$$

b) Suponga que una ley establece que no más de 5% de las cajas de cereal de un fabricante puede contener menos del peso establecido de 500g. ¿En qué peso objetivo debe fijar el fabricante su máquina de llenado?

$$P(X<K) = 5\% = P(x<480.3) = 0.0503 = \underline{\underline{5\%}}$$

Por lo tanto el fabricante debe fijar la máquina de llenado en 480.3g.

Para justificar lo anterior

Fórmula: $z_0 = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$P(z<K) = 5\%$$

$$x = 480.3 \text{ (Media)}$$

$$z = \frac{(480.3)-(500)}{12} = -1.64$$

Buscar valor en la tabla:

$$z = 0.9495$$

$$P(z<k) = 1 - 0.9495 = 0.0505 = \underline{5\%}$$

Figura x

Problema 3: **para cierto tipo de baterías, la función de densidad de probabilidad de modo que '*x*' horas es la vida de una batería elegida al azar está dada por.** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}e^{-x/60} & si\, x \geq 0 \\ 0 & si\, x < 0 \end{cases}$ **Condiciones. Desarrolla algebraicamente la solución para justificar los resultados.**

Calcule la probabilidad de que la vida de una batería elegida al azar:

a) Esté entre 15 y 25 horas:

$$P(15 \leq X \leq 25) = \int_{15}^{25} f(x)dx = 0.1196 \simeq \underline{\underline{12\%}} \text{ de probabilidad}$$

Justificación:

$$P(15,25) = \int_{15}^{25} \frac{1}{60} e^{\frac{x}{60}} dx = -\int_{15}^{25} e^{-\frac{x}{60}} \left(-\frac{1}{60}\right) dx$$

$$= -e^{-\frac{x}{60}} \Big|_{15}^{25} = -e^{-25/60} = 0.12 = \underline{\underline{12\%}} \text{ de probabilidad}$$

b) Sea por lo menos 50 horas:

$$P(X \geq 50) = \lim_{b\to +\infty} \int_{50}^{b} f(x)dx = 0.4346 = \underline{43\% \text{ de probabilidad}}$$

$$P(50,\infty) = \lim_{b\to +\infty} \int_{50}^{b} \frac{1}{60} e^{-\frac{x}{60}} dv = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{\frac{-x}{60}} \Big|_{50}^{b}\right) = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{\frac{-b}{60}} + e^{\frac{-50}{60}}\right)$$

$$= 0 + e^{\frac{-50}{60}}$$

$$= 0.435 \therefore \underline{43\% \text{ probabilidad}}$$

c) No más de 50 horas:

$P(X \leq 50) =$

$$P(x \leq 50) \lim_{a\to 0} \int_0^{50} f(x)dx = 0.5654 = 57\% \text{ de probabilidad.}$$

$$P(0 \leq 50) = \lim_{a\to 0} \int_a^{50} \frac{1}{60} e^{-\frac{x}{60}} dx$$

$$= \lim_{a\to 0} \left[-e^{-\frac{x}{60}}\right]_a^{50} = -e^{\frac{-50}{60}} + \frac{a}{60}$$

$$= -0.4346 + 1 = 0.5654 \simeq 57\% \text{ de probabilidad.}$$

Figura x

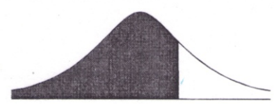
Un segundo momento se analizan las tareas realizadas en los problemas 3 y 6, en donde se observa que los estudiantes transitan entre representaciones *‘gráfica, numérica y algebraica’* con la intención de ligar aspectos matemáticos que conduzcan a presentar conjeturas y justificaciones. Estas tareas se realizan a través de las articulaciones entre representaciones y un trabajo equilibrado entre papel-lápiz y tecnología. Además, para demostrar sus conjeturas, comparan los resultados obtenidos al usar las condiciones de la integral impropia para cálculo de probabilidad acumulada contra los valores de la tabla de distribución normal y para demostrar algebraicamente sus resultados usan teoremas conocidos. En la figura 2 se visualizan el desarrollo de las actividades a papel-lápiz y en la tabla 2 la distribución normal.

Tabla de la distribución normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada

μ = Media

σ = Desviación típica

$$P(Z \le z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$



Tipificación: $z_0 = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	**0,0**
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	**0,1**
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	**0,2**
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	**0,3**
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	**0,4**
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	**0,5**
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	**0,6**
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	**0,7**
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	**0,8**
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	**0,9**
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	**1,0**
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	**1,1**
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	**1,2**
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	**1,3**
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	**1,4**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	**1,5**
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	**1,6**
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	**1,7**
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	**1,8**
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	**1,9**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	**2,0**
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	**2,1**
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	**2,2**
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	**2,3**
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	**2,4**
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	**2,5**
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	**2,6**
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	**2,7**
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	**2,8**
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	**2,9**
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	**3,0**
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	**3,1**
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	**3,2**
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	**3,3**
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	**3,4**
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	**3,5**
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	**3,6**
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	**3,7**
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	**3,8**
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	**3,9**

Tabla 6.5 2. Distribución normal

Conclusiones de la etapa 2.

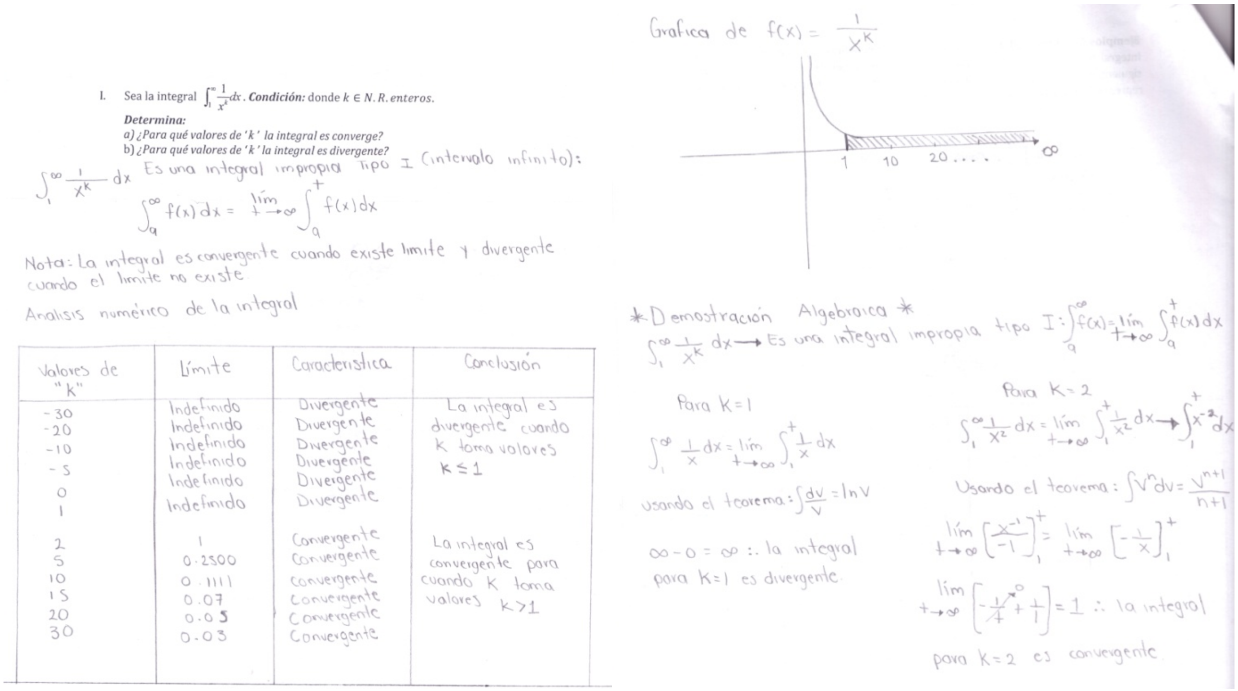
En esta etapa se plantearon problemas relacionados con tópicos de ingeniería industrial, por ejemplo: distribución normal 'campana de Gauss' y cálculo de probabilidades. La solución a los problemas solicita tareas para el cálculo de probabilidades usando las propiedades y teoremas de la integral impropia y el uso de tablas de distribución normal para cotejar los resultados.

Es importante resaltar el acercamiento a los conocimientos previos (propiedades del teorema Barrow, propiedades de la integral impropia, propiedades de la distribución normal de probabilidad (media, desviación estándar) , uso de tabla de distribución normal. Así también, el de promover la interacción en el ambiente tecnológico colaborativo, el transito-articulación entre representaciones 'gráfica-numérica-algebraica-verbal' y el desarrollo equilibrado de tareas entre papel-lápiz-tecnología.

Etapa 3. La generalización del teorema de Barrow 'integral impropia'.

En esta etapa se destacan los retos al enfrentarse los estudiantes a ejemplos-contraejemplos no tradicionales que solicitan un reto y justificaciones, en torno al concepto en juego [la integral impropia]. Es importante matizar que para abordar esta etapa por parte de los estudiantes fue necesario que tuvieran habilidades en el uso de la tecnología (uso del deslizador) para visualizar y poder obtener los datos necesarios para evaluar la convergencia o divergencia de la integral impropia planteada.

En un primer momento el estudiante se enfrentan a un ejemplo que se podría definir con características de tipo abierto ya que solicita demostrar la convergencia o divergencia de una integral impropia. En este ejemplo el estudiante usando la tecnología construye una tabla de convergencias y divergencias con la intención de construir conjeturas. Para demostrar estas conjeturas usa las propiedades de la integral impropia y teoremas conocidos para justificar algebraicamente los resultados. En la figura 1 se muestra el desarrollo de las actividades. Se detecto que los estudiantes utilizan la tecnología con la función del deslizador para *'explorar y recolectar datos'* con la intención de validar, refutar y justificar sus respuestas.



I. Sea la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k} dx$. ***Condición:*** donde $k \in N.R.$ *enteros.*

Determina:

a) ¿Para qué valores de 'k' la integral es converge?

b) ¿Para qué valores de 'k' la integral es divergente?

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k} dx$ Es una integral impropia tipo I (intervalo infinito):

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^{t} f(x)\,dx$$

Nota: La integral es convergente cuando existe limite y divergente cuando el limite no existe.

Analisis numérico de la integral

Valores de "K"	Límite	Característica	Conclusión
-30	Indefinido	Divergente	La integral es divergente cuando K toma valores $K \leq 1$
-20	Indefinido	Divergente	
-10	Indefinido	Divergente	
-5	Indefinido	Divergente	
0	Indefinido	Divergente	
1	Indefinido	Divergente	
2	1	Convergente	La integral es convergente para cuando K toma valores $K > 1$
5	0.2500	Convergente	
10	0.1111	Convergente	
15	0.07	Convergente	
20	0.05	Convergente	
30	0.03	Convergente	

Grafica de $f(x) = \frac{1}{x^K}$

1 10 20 . . . . ∞

Demostración Algebraica

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^K} dx \rightarrow$ Es una integral impropia tipo I: $\int_a^{\infty} f(x) = \lim_{t \to \infty} \int_a^{t} f(x)\,dx$

Para $K=1$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} \frac{1}{x} dx$$

usando el teorema: $\int \frac{dv}{v} = \ln v$

$\infty - 0 = \infty$ ∴ la integral para $K=1$ es divergente

Para $K=2$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2} dx \rightarrow \int_1^{t} x^{-2} dx$$

Usando el teorema: $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}$

$$\lim_{t \to \infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^{t} = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{t}$$

$$\lim_{t \to \infty} \left[-\cancel{\frac{1}{t}}^{0} + \frac{1}{1}\right] = 1$$ ∴ la integral para $K=2$ es convergente

Figura 6. 7. Ejemplo 1

En un segundo momento se enfrenta a un ejemplo con características de tipo abierto ya que solicitan experimentar para poder determinar el valor del límite inferior de la integral impropia para que cumpla con la condición solicitada. Se observa que los estudiantes usan la tecnología la función del *'deslizador'* para construir una tabla de valores que lo auxilie a conjeturar. Para demostrar estas conjeturas usa las propiedades de la integral impropia y teoremas conocidos para justificar algebraicamente los resultados. En la figura 2 se muestra el desarrollo de las actividades.

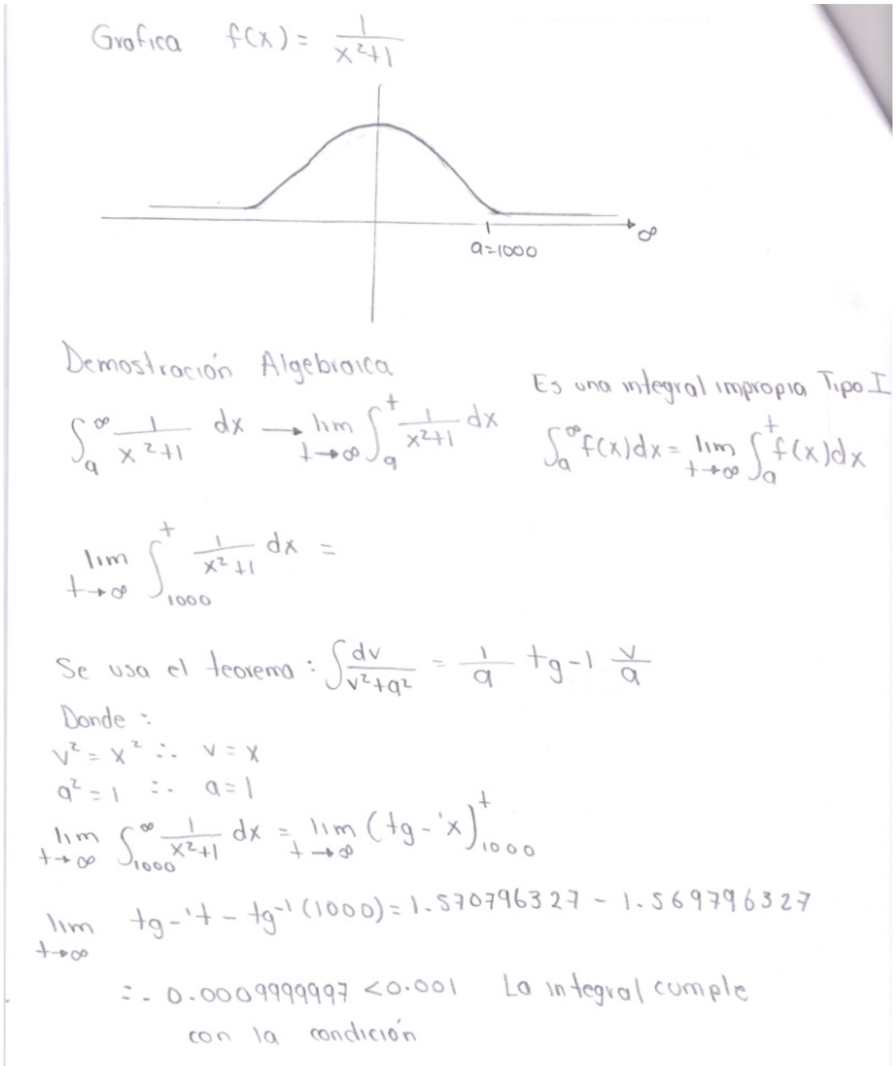


Figura 6. 8. Ejemplo 2

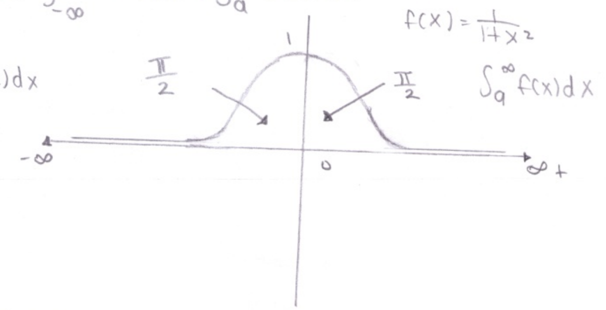
En un tercer momento los estudiantes se enfrentan a un ejemplo que solicita demostrar que una integral impropia con límites infinitos es convergente. Para tal caso el estudiante uso la tecnología para visualizar y construir conjeturas. Para demostrar algebraicamente uso las propiedades de la integral impropia tipo I y un teorema conocido. En la figura 3 se muestran las evidencias al respecto.

V. Demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\pi \therefore$ es convergente

Es una integral impropia tipo I

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

Grafica : $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$



Demostración Algebraica

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_t^0 \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^0\frac{1}{1+x^2}dx = \begin{cases}\text{Donde :}\\ a^2=1,\ a=1\\ v^2=x^2,\ v=x\end{cases} \longrightarrow \lim_{t\to-\infty} tg^{-1}x\Big]_t^0$$

Se usa teorema : $\int\frac{dv}{a^2+v^2} = \frac{1}{a}tg^{-1}\frac{v}{a}$

$$=\lim_{t\to-\infty}[tg^{-1}(0)-tg^{-1}(-\infty)] = 0-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

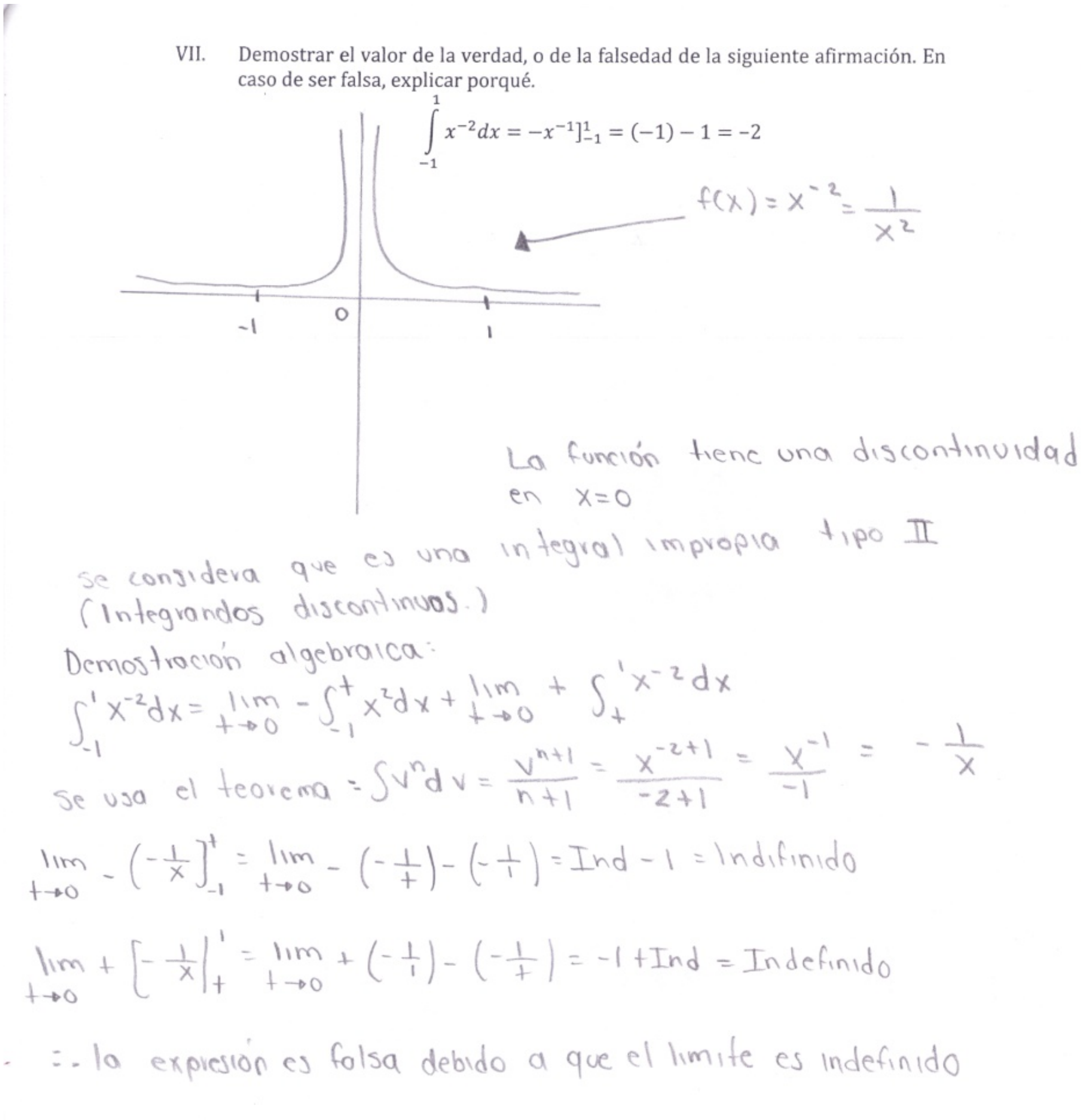
$$=\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty} tg^{-1}x\Big]_0^t$$

$$=\lim_{t\to\infty}[tg^{-1}(\infty)-tg^{-1}(0)] = \frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

$\therefore\ \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$ $\therefore$ la integral es convergente

Figura 6. 9. Ejemplo 3

En un cuarto momento el estudiante se enfrentó a un ejemplo que solicita demostrar la verdad o la falsedad de una expresión y explicar el porqué. Para tal caso se observó que el estudiante uso la tecnología para visualizar la curva que representa la situación, en donde detecto que la función es discontinua y por lo tanto debe ser abordada considerando la noción de los limites laterales. Para demostrar sus conjeturas el estudiante se apoyó de las propiedades de la integral impropia tipo II y uso teorema conocido. En la figura 4 se observan los trabajos desarrollados articulando la tecnología y papel-lápiz.


VII. Demostrar el valor de la verdad, o de la falsedad de la siguiente afirmación. En caso de ser falsa, explicar porqué.

$$\int_{-1}^{1} x^{-2}dx = -x^{-1}]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$$

La función tiene una discontinuidad en $x=0$

se considera que es una integral impropia tipo II
(Integrandos discontinuos.)

Demostración algebraica:

$$\int_{-1}^{1} x^{-2}dx = \lim_{t\to 0} - \int_{-1}^{t} x^{2}dx + \lim_{t\to 0} + \int_{t}^{1} x^{-2}dx$$

Se usa el teorema $= \int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$

$$\lim_{t\to 0} - \left(-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{t} = \lim_{t\to 0} - \left(-\frac{1}{t}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = \text{Ind} - 1 = \text{Indifinido}$$

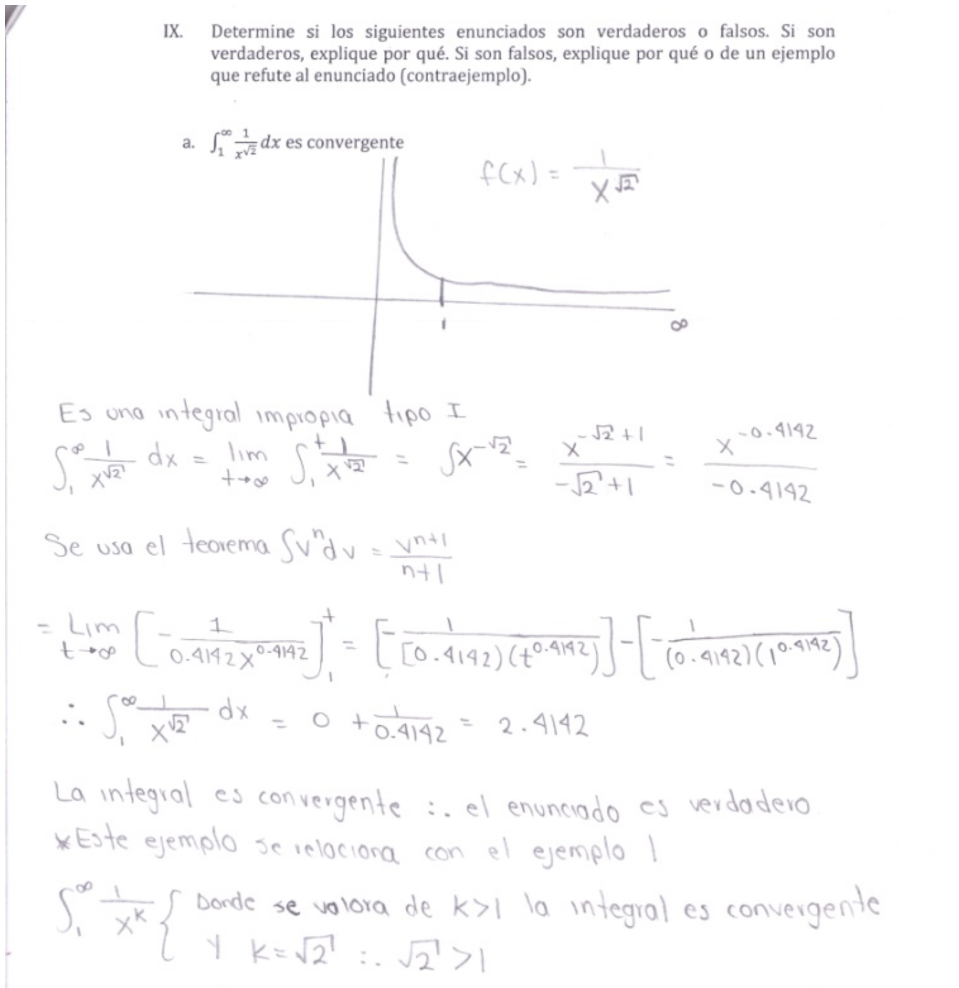
$$\lim_{t\to 0} + \left[-\frac{1}{x}\right|_{t}^{1} = \lim_{t\to 0} + \left(-\frac{1}{1}\right) - \left(-\frac{1}{t}\right) = -1 + \text{Ind} = \text{Indefinido}$$

$\therefore$ la expresión es falsa debido a que el límite es indefinido

Figura 6. 10. Contraejemplo 1

En un quinto momento el estudiante se enfrenta a contraejemplos en donde tiene que determinar si las expresiones son verdaderas o falsas y explicar el porqué. Para el contraejemplo del inciso ‘a’ el estudiante uso la tecnología para visualizar la gráfica e identifico el tipo de la integral impropia. Para demostrar algebraicamente uso un teorema conocido para comprobar que la expresión era verdadera. En este caso el estudiante uso de contraejemplo en ejercicio 1 para dar evidencia a la demostración de su conjetura.

Para el contraejemplo del inciso ‘b’ se solicita evaluar una expresión y justificar con un contraejemplo si es verdadera o falsa. Para tal caso se observa que el estudiante tomo como contraejemplo el ejemplo V; con la intención de refutar la expresión algebraica.



IX. Determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Si son verdaderos, explique por qué. Si son falsos, explique por qué o de un ejemplo que refute al enunciado (contraejemplo).

a. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}dx$ es convergente

$f(x) = \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}$

Es una integral impropia tipo I

$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^{\sqrt{2}}} = \int x^{-\sqrt{2}} = \frac{x^{-\sqrt{2}+1}}{-\sqrt{2}+1} = \frac{x^{-0.4142}}{-0.4142}$

Se usa el teorema $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}$

$= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{0.4142\,x^{0.4142}}\right]_1^t = \left[-\frac{1}{(0.4142)(t^{0.4142})}\right] - \left[-\frac{1}{(0.4142)(1^{0.4142})}\right]$

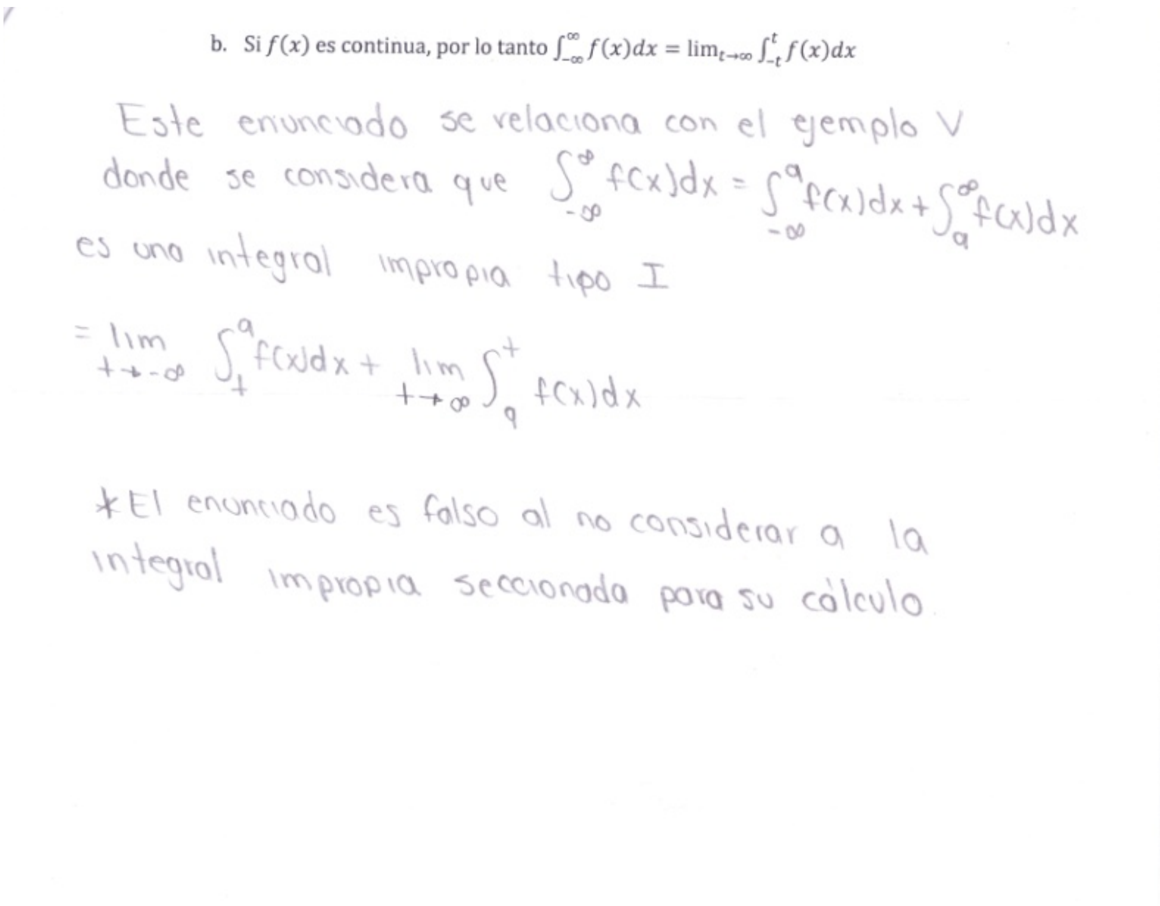
$\therefore \int_1^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}dx = 0 + \frac{1}{0.4142} = 2.4142$

La integral es convergente $\therefore$ el enunciado es verdadero

*Este ejemplo se relaciona con el ejemplo 1

$\int_1^\infty \frac{1}{x^k}$ { Donde se valora de $k>1$ la integral es convergente y $k=\sqrt{2}$ $\therefore \sqrt{2}>1$

Figura 6. 11. Contraejemplo 2



b. Si $f(x)$ es continua, por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx$

Este enunciado se relaciona con el ejemplo V donde se considera que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$ es una integral impropia tipo I

$$= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)dx + \lim_{t\to\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx$$

*El enunciado es falso al no considerar a la integral impropia seccionada para su cálculo.

Figura 6. 12. Contraejemplo 3

Conclusiones de la etapa 3.

La intención de esta etapa fue diseñada con el fin de generar la exploración, el planteamiento de conjeturas y la búsqueda de contraejemplos. Se usaron ejemplos abiertos a diferencia de ejemplos concretos; con la intención de usar la tecnología para explorar, experimentar y recolectar los datos necesarios para construir conjeturas para demostrar justificaciones. También se solicita a los estudiantes transitar-articular representaciones *'gráfica, numérica y algebraica'* con la finalidad de demostrar sus conjeturas y usar sus notas a papel y lápiz para demostrar algebraicamente usando propiedades y teoremas a ejemplos concretos...

En esta etapa se proponen ejemplos-contraejemplos como promotor de un pensamiento convergente. Este enfoque nos permite fortalecer la construcción del conocimiento. El uso de ejemplos y contraejemplos no es ni algorítmica, ni procedimental y se requiere de un pensamiento matemático más flexible y dinámico. En este sentido Watson y Mason (2002) afirman que el aprendizaje de las Matemáticas se produce, principalmente, a través de la confrontación con ejemplos, más que a través de definiciones formales y técnicas [de hecho, afirman, es a través de los ejemplos que las definiciones cobran algún sentido, ya que las palabras técnicas matemáticas describen clases de objetos o relaciones con los que el aprendiz debe familiarizarse].

Los ejemplos y contraejemplos propuestos fueron seleccionados con un enfoque ‘no rutinario´ o ‘no habituales’. El uso de los contraejemplos de diseñaron con la propósito de impugnar alguna expresión algebraica o para demostrar alguna conjetura. Todos estos ejemplos y contraejemplos han sido estructurados didácticamente con el designio de que los estudiantes reflexionen sobre los aspectos teóricos del concepto en juego ‘integral impropia’. También se pueden aprovechar estos problemas, ejemplos y contraejemplos para plantear directamente a los estudiantes algunas cuestiones que hayan quedado inconclusas.

Conclusiones generales de las primeras tres etapas.

Los equipos prepararon sus dibujos a diferentes escalas y los explicaron cómo calcularon las áreas aproximadas. Se analizaron los dibujos creados por los equipos y después de que los estudiantes analizaron los dibujos, debatieron cuales eran los que más se aproximaban a la realidad. A lo largo de la actividad, la colaboración, la justificación y la toma de decisiones fueron alentadas. Estudiantes y profesor atendieron con atención las ideas expuestas durante el debate.

El significado del concepto de límite, la comprensión de concepto de integral impropia y la noción de convergencia o divergencia. Situaciones que aparecen como un obstáculo de forma natural en el cálculo de integrales impropias, por el que se concibe que un área finita debe pertenecer a figurar cerradas y acotadas (Wallis y Hobbes). La propuesta es presentar la integral impropia destacando su naturaleza de generalización de la integral definida. La aproximación se introduce al considerar a la integral impropia desde el problema de generalización de la integral de Riemann; que consiste en el estudio de qué sucede al extender las técnicas del cálculo de áreas conocidas al caso de figuras infinitas.

La exploración y la búsqueda de conjeturas y pruebas son esenciales para que los estudiantes logren darle sentido a la demostración matemática y puedan potenciar su competencia demostrativa y argumentativa. Los razonamientos consisten en la recolección de datos al interactuar con la tecnología y visualizar las imágenes de la pantalla y las consideraciones matemáticas, relativas a las propiedades y teoremas de la integral impropia.

Discusión de los resultados de las primeras tres etapas respecto a las fases propuestas en la metodología ACODESA.

En la primera fase de la solución del problema contextual los estudiantes resolvieron la actividad empleando diversos recursos. La mayoría realizó trazos sobre el diagrama proporcionado, hicieron cálculos y emplearon el GeoGebra para explorar las gráficas de parábolas que se ajustaran a las condiciones del problema. Usaron sus conocimientos previos, por ejemplo la ecuación canónica de la parábola, métodos conocidos para calcular áreas de figuras irregulares, teorema de la suma de Riemann, entre otros.

En la segunda fase los estudiantes se reunieron para trabajar en equipo, donde se retomó lo realizado en la primera fase y se realizaron debates al interior de cada equipo para establecer una solución colectiva al planteamiento. En la tercera fase se realizó un debate grupal para consensar una respuesta común. En esta fase apareció el proceso de modelación matemática, al integrar conocimientos previos, sus primeras aproximaciones al volumen del contenedor, sus dibujos, diagramas, cálculos, representaciones gráficas (bosquejos, notas) y representaciones institucionales (gráficas, algebraicas y numéricas) con el propósito de definir un modelo que simplificara y resolviera la situación real. En la cuarta fase, se realizó una reconstrucción individual de las tareas realizadas, integrando los planteamientos iniciales, sus primeros cálculos, las representaciones (exploraciones gráficas) y las conclusiones del debate realizado en la fase anterior (trabajo colaborativo y debate). En esta fase, los estudiantes interactuaron con el GeoGebra para visualizar y extraer los datos necesarios para justificar y demostrar sus conjeturas. Esta actividad se realizó usando la función de *deslizador* del GeoGebra. Al finalizar esta fase los estudiantes entregaron sus hojas de trabajo individual al profesor.

La quinta fase, consistió en la institucionalización de los contenidos matemáticos involucrados en las actividades. En esta fase, el profesor coordinó la organización de ideas desarrolladas por los estudiantes, los conceptos matemáticos involucrados utilizando representaciones institucionales (gráficas, numéricas y algebraicas) y ligándolas con las representaciones funcionales (bosquejos, anotaciones, representaciones espontaneas) utilizadas durante el desarrollo de la actividad.

Tal como lo señala Borba y Villarreal (2005:65), la experimentación en un ambiente de uso de tecnología permite al estudiante construir conjeturas, transitar de un sistema de representación a otro, reconocer patrones, deducir y analizar comportamientos en gráficas y a partir de ello generar argumentos sobre un objeto matemático en construcción. Concluimos entonces que la experimentación en un ambiente de uso de tecnología, colaboración, debate y autoreflexión, permitió al estudiante construir conjeturas y a partir de ello, generar argumentos. Dicha situación se consideró como un proceso de argumentación, no sólo porque hace viable la observación de las ideas que el estudiante está concibiendo sobre un saber matemático, sino también porque es una forma de construir conocimiento matemático.

Etapa 4. Entrevista semiestructurada

Del grupo de 24 estudiantes que participaron en la secuencia didáctica, se eligieron cuatro que mostraron disposición y voluntad de participar en la etapa de entrevista semiestructurada; los cuatro estudiantes se organizaron en dos equipos (mujer y hombre), el entrevistador (investigador) tuvo la función de coordinar la entrevista. En la entrevista se les presentó una consigna para ser resuelta de forma colaborativa durante 60 minutos previos al diálogo entre el entrevistador y los estudiantes.

El propósito de la entrevista fue identificar las características de los argumentos expuestos por los estudiantes al realizar sus tareas en un ambiente tecnológico. Como instrumento para la recolección y el análisis de los datos se empleó el modelo argumentativo de Toulmin con el propósito de describir la construcción, contenido y estructura de los argumentos de los estudiantes al transitar entre diferentes representaciones durante el desarrollo de sus actividades a *papel-lápiz y tecnología.*

La entrevista se estructuró con cuestionamientos flexibles alrededor de *un ejercicio no rutinario* (contraejemplo) el cual implica retos y exponer justificaciones en torno a la integral impropia. La intención de la entrevista fue que los estudiantes verbalizaran sus ideas respecto a los seis elementos del modelo (conclusión, datos, garantía, respaldo, calificativo modal y refutaciones). Se focalizó con especial atención en el uso del *calificativo modal y refutación* para investigar la fortaleza de los argumentos expuestos.

Se planteó al estudiante, demuestre que si a > -1 y b> a +1, entonces la siguiente integral es convergente. Sea la integral: $\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^b}$

El entrevistador inició con una conjetura: cumpliendo con las condiciones: a > -1 y b > a +1; ¿es convergente la integral? si es así, ¿Cuáles son los valores que pueden tomar a y b?

Entrevista pareja 1: Arel-Jos

Conclusión

Jos: usando el geogebra nos dimos cuenta que para valores $a \geq 0$ y $b \geq 1.1$ la integral es convergente,

Arel: usamos el geogebra y le dimos valores a a y b, obviamente sincronizados a partir $a \geq 0$ y observamos que la integral es convergente,

Datos

Entrevistador: ¿cómo validan que efectivamente estos valores que toman a y b confirman la convergencia de la integral impropia?

Jos: cuando evaluamos la integral en el intervalo dado, se observa en el geogebra que desde cero hasta un número infinitamente grande, y usando las condiciones: $a \geq 0$ y $b \geq 1.1$ el resultado es finito por lo tanto la integral converge. Se puede ver que cuando la zona bajo la curva cambia de color indica que es un límite finito y por lo tanto la integral es convergente, [Los estudiantes se apoyaron de sus notas a papel y lápiz, usando la *tabla de convergencias* construida con la información obtenida al interactuar con el uso del deslizador]

Garantía

Entrevistador: ¿existen algunas reglas o condiciones que hayan considerado para fundamentar que se trata de una integral impropia y para justificar la convergencia?, Arel: aplicamos la integral impropia tipo I y usamos las condiciones del ejercicio a > -1 y b > a +1. Observamos en el geogebra que cuando el límite es finito indica la convergencia de la integral,

Respaldo

Entrevistador: ¿existe algún sustento en que se basan para justificar la convergencia de la integral impropia?,

Arel: usamos la definición de la integral impropia tipo I, [si la$\int_a^t f(x)\,dx$ existe para todo número $t \geq a$ por lo tanto $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$] siempre que existe el límite (como un número finito) la integral impropia es convergente y observamos en el geogebra que en el momento cuando la zona bajo la curva cambia de color, indica que el límite es finito, y por lo tanto se considera la convergencia, [Se detecto que al exponer sus garantías y respaldo se apoyaron de sus notas a papel y lápiz para identificar las propiedades de la integral impropia tipo I y usaron el geogebra para visualizar y justificar sus respuestas]

Calificativo Modal

Entrevistador: ¿están seguros qué para todos los valores de $a \geq 0$ y $b \geq 1.1$ la integral impropia siempre es convergente?,

Jos: bueno... si

Arel: en realidad... no,

Entrevistador: ok... vamos a darle un valor cualquiera que cumpla con las condiciones expuestas

$a \geq 0$ y $b \geq 1.1$ para demostrar la convergencia de la integral,

Jos: si claro... lo podemos experimentar con el geogebra... oh! se visualiza que no cumple para todos los valores con la convergencia,

Entrevistador: ok...por lo tanto... podemos replantear... ¿Qué valores puede tomar a y b para cumplir con la convergencia de la integral impropia?, Arel: no podemos definir con precisión qué valores puede tomar *a* y *b* para cumplir con la convergencia...

Jos: no estamos seguros, ya que nos faltó experimentar con los deslizadores con *a* y *b* para poder obtener los datos y demostrar la convergencia... [Se observó que al exponer el calificativo modal para dar certeza a las justificaciones se apoyaron en todo momento del geogebra]

Refutación

Entrevistador: ¿ok... entonces existen algunas excepciones que no cumplen con la convergencia de la integral impropia?

Arel: si

Entrevistador: ¿cuáles son?

Jos: se nos complica contestar, porque no vinculamos las variables *a* y *b* con el deslizador y poder experimentar con los valores que no cumplen. No estamos seguros...

Arel: nos falto experimentar usando los deslizadores de *a* y *b* para obtener datos que justifiquen la convergencia... [Se observó que no lograron obtener información para justificar algunas excepciones usando el GeoGebra. Además, no lograron articular los datos obtenidos con papel, lápiz y tecnología]

Entrevista pareja 2: Celes-Dani

Conclusión

Celes: se puede demostrar que la integral impropia es convergente cuando $a = 0$, $b = 2$ y converge a un límite 1.57, se puede observar en el GeoGebra y comprobar el resultado integrando,

Datos

Entrevistador: ¿cómo validan que efectivamente estos valores que toman a y b confirman la convergencia de la integral impropia?,

Celes: usamos las condiciones a > -1 y $b > a$ +1**,** y experimentamos a y b con el deslizador, elaboramos una tabla de convergencias para ordenar los datos obtenidos, cuando visualizamos que la sección bajo la curva cambia de color,

Dani: comparamos los valores obtenidos al visualizar y los obtenidos al integrar para los valores de a = 0, b = 2 y corroboramos que son iguales a un límite 1.57,

Garantía

Entrevistador: ¿existen algunas reglas o condiciones que hayan considerado para fundamentar que se trata de una integral impropia y para justificar la convergencia?,

Arel: Aplicamos la integral impropia tipo I y usamos las condiciones del ejercicio a > -1 y $b > a$ +1,

Dani: consideramos que es una integral impropia tipo I,

Respaldo

Entrevistador: ¿Existe algún sustento en que se basan para justificar la convergencia de la integral impropia?,

Dani: aplicando el teorema de integración [$\int \left(\frac{dv}{a^2+v^2}\right) = \frac{1}{a} tg^{-1}\left(\frac{v}{a}\right)$] para los valores de a = 0 y b = 2 al dar solución a la integral $\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b} dx$ comprobamos que algebraicamente el resultado es un límite de 1.57, [Al exponer la garantía y respaldo se apoyaron de sus notas de papel y lápiz y de su formulario de integrales para cotejar con los resultados al transitar entre diferentes representaciones usando el Geogebra]

Calificativo Modal

Entrevistador: ¿están seguros que para los valores dados de a = 0 y b = 2 la integral impropia siempre es convergente?, Celes: si estamos seguros, ya que comparamos los resultados que observamos en el GeoGebra y los que obtuvimos al resolver la integral impropia y coinciden,

Refutación

Entrevistador: ¿existen algunas excepciones para comprobar la convergencia de la integral impropia?

Celes: si existen excepciones, para cuando *a* toma valores menores que cero y fraccionarios la integral impropia es divergente y cuando toma valores mayores iguales que cero y números pares la integral es convergente,

Dani: construimos una tabla de convergencias usando los deslizadores de *a* y *b* para analizar los resultados de la integral y detectar algunas excepciones de la convergencia de la integral.

Resultados

En la entrevista a la pareja 1 se observó que al exponer sus *conclusiones* se apoyaron del GeoGebra, para transitar entre representaciones gráfica, numérica y algebraica con la intención de extraer datos que garantizaran sus justificaciones. Además usaron sus notas de papel y lápiz para reforzar su *dato* (tabla de convergencias). Al exponer los *datos* para respaldar su *conclusión*, los estudiantes usaron las condiciones dadas del ejercicio con el GeoGebra, esto con la intención de visualizar y obtener los *datos* que argumentaran su *conclusión*. Además, señalaron que cuando la sección bajo la curva cambia de color, indica que es un límite finito y por lo tanto la integral converge. Los estudiantes presentaron sus analogías *garantía* y *sustento* mediante el uso de las propiedades de la integral impropia tipo I y los datos obtenidos al articular sus tareas con papel, lápiz y tecnología.

Al exponer el *calificativo modal* mostraron algunos desacuerdos entre ellos, y explicaron que tenían dudas para justificar con precisión los intervalos que podrían tomar *a* y *b* para asegurar la convergencia de la integral impropia. Al expresar la *refutación* externaron que, no lograron obtener los datos que probaran en que intervalos la integral impropia era convergente. El esquema de argumentación expuesto por los estudiantes, nos muestra algunas debilidades en su argumentación, ya que al momento de expresar el *calificativo modal* y la *refutación,* mostraron dudas (desconfianza) y no lograron presentar excepciones o limitaciones de los argumentos. En la *Figura 5* se observa el esquema del proceso de argumentación que construyeron los estudiantes de la pareja 1.

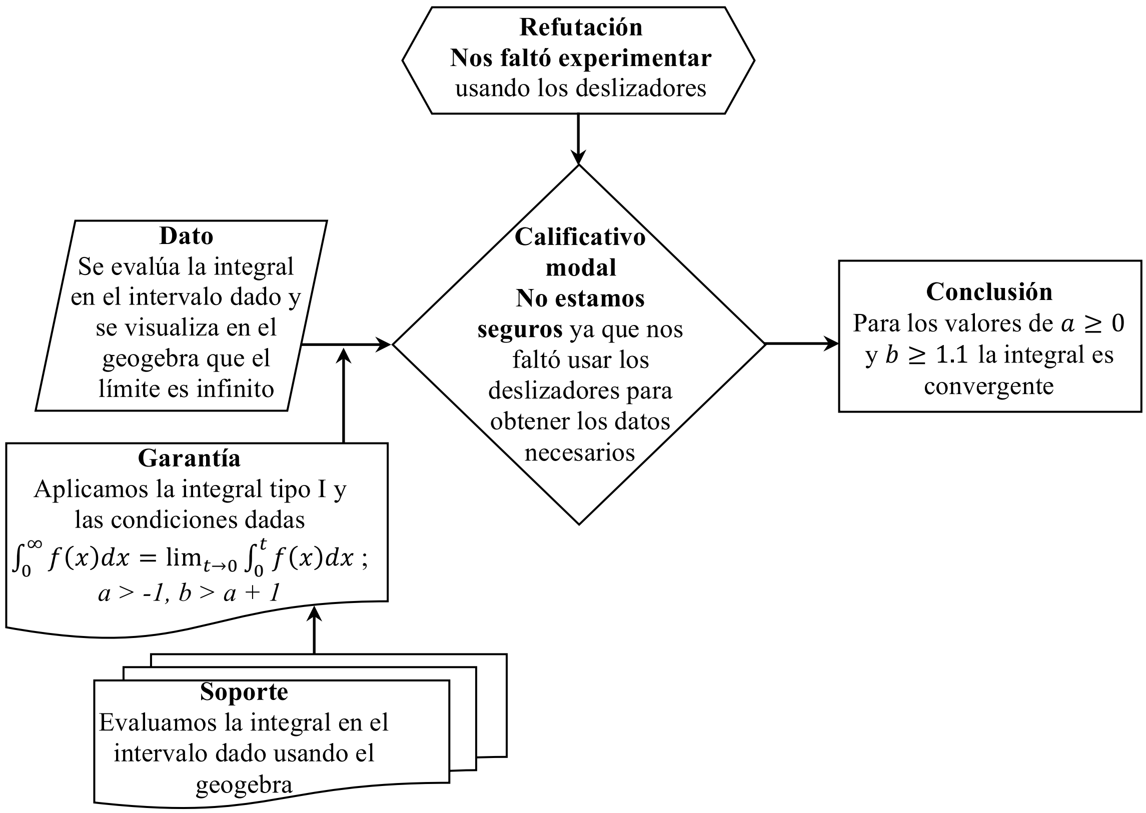


Figura 6. 13. Proceso de argumentación de pareja 1

En la entrevista a la pareja 2, se pudo observar que al momento de expresar el *calificativo modal* y la *refutación* demostraron certeza (sin duda alguna) en las excepciones cuando la integral impropia era convergente y divergente. Al exponer sus *conclusiones* se observó que se apoyaron del GeoGebra, al transitar entre las representaciones gráfica, numérica y algebraica extrayendo los *datos* para garantizar sus justificaciones. Además, usaron sus notas en papel y lápiz para cotejar los datos obtenidos con la tecnología y reforzar sus *conclusiones*. Al exponer los *datos* para respaldar su *conclusión*, los estudiantes usaron las condiciones dadas del ejercicio e interactuaron usando la función deslizador del GeoGebra para visualizar y obtener los *datos* que argumentara su aserción; mostrando que cuando la sección bajo la curva cambia de color, indica que es un límite finito y por lo tanto la integral converge.

Los estudiantes presentaron sus analogías: *garantía* y *sustento* al usar las propiedades de la integral impropia tipo I y los datos obtenidos al articular sus tareas en papel, lápiz y tecnología. Para respaldar la *garantía* usaron sus notas a papel y lápiz, en particular un formulario de integrales, identificando el teorema adecuado e integraron usando los valores para a y b, que fueron obtenidos de la tabla de convergencias construida al interactuar con el deslizador; y demostraron algebraicamente la convergencia de la integral, comparando los resultados con los obtenidos al transitar entre representaciones usando la tecnología. Al exponer el *calificativo modal* mostraron seguridad en sus argumentos. Se observó que interactuaron con el GeoGebra para visualizar usando el deslizador y las condiciones del ejercicio con la intención de obtener los datos que aseguraran con precisión los intervalos que podrían tomar a y b para demostrar la convergencia de la integral impropia. Así también, se apoyaron de sus notas a papel y lápiz con la intención de despejar las dudas y reforzar la justificación de convergencia de la integral impropia. Al expresar la *refutación* externaron que existen algunas excepciones para los valores que puede tomar $a < 0$ que demuestran que la integral es divergente. Para argumentar sus excepciones usaron la función del deslizador y sus notas papel y lápiz. En la *Figura 6* se observa el esquema del proceso de argumentación que construyeron los estudiantes de la pareja 2.

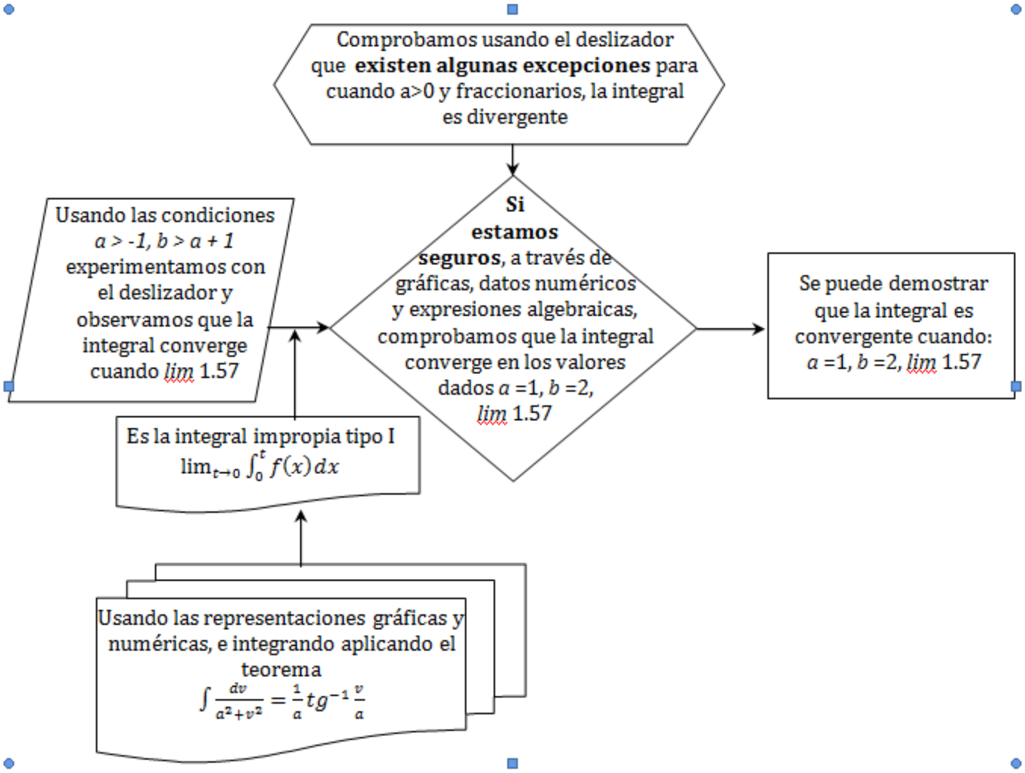


Figura 6. 14. Proceso de argumentación pareja 2

Discusión de resultados en las entrevistas en pareja [Arel-Jos y Celes-Dani]

En relación a la pareja 2, los argumentos construidos mostraron un esquema argumentativo fundamentado. En el instante de presentar el *calificativo modal* y la *refutación* expresaron certeza y manifestaron particularidades; por ejemplo los intervalos donde la integral es convergente y divergente. Cuando se les cuestionó sobre las justificaciones expuestas, se apoyaron del recurso tecnológico usando la función deslizador (del GeoGebra) con el propósito de variar parámetros, analizar los comportamientos y transitar y articular entre representaciones, con la intención de extraer los datos que aportarán sustento a las justificaciones.

Cuando se les solicitó información adicional que mostraran excepciones o limitantes a sus argumentos, expusieron una tabla de convergencias, construida a papel y lápiz con los datos obtenidos al visualizar el comportamiento de la integral en los momentos de variar los parámetros especificados en el ejercicio usando el deslizador. Al exponer sus analogías, presentaron la solución algebraica de la integral indicando el teorema usado para demostrar la convergencia.

Respecto a la pareja 1 se observó que en todo momento trabajaron juntos, en la fase colaborativa usaron una sola computadora y ambos una hoja de trabajo. Las argumentaciones expuestas presentan algunas debilidades; debido a que el *calificativo modal* reveló desacuerdos e inseguridad al indicar que tenían dudas para justificar con precisión los intervalos que podrían tomar a y b para asegurar la convergencia de la integral. Además, al momento de manifestar la *refutación* no lograron mostrar excepciones o limitaciones a sus argumentos. Se detectó que no lograron obtener los datos para establecer en que intervalos la integral era convergente. Además se observó que al usar el GeoGebra con la intención de sincronizar la función deslizador con las condiciones dadas del ejercicio, lo hicieron de manera incorrecta; esto les dificultó extraer los datos necesarios para aseverar sus justificaciones. Además, al momento de exponer sus analogías del trabajo realizado en papel, lápiz y tecnología no lograron demostrar la convergencia.

Los resultados de esta investigación condujeron a reflexiones sobre el papel que tiene el ambiente tecnológico enmarcado en un trabajo articulado: individual, colaborativo, debate y autoreflexión, en la conformación de los argumentos matemáticos, particularmente en lo que se refiere al soporte de argumentos; por ejemplo la pareja 2 construyó un esquema argumentativo muy fundamentado a diferencia de la pareja 1 que no logró construir una fundamentación a sus argumentos. Es importante matizar, la estrecha relación de la visualización para sostener argumentos y exponer algunas excepciones de sus argumentos. Por ejemplo, al variar parámetros usando la función deslizador, fue necesario analizar el comportamiento (visualizar) para extraer datos y desarrollar ideas.

Tal como lo señalan Baccaglini y Mariotti (2010:231), al describir un modelo de actividad matemática denominada *arrastre-conjetura* en un contexto de uso de tecnología se describen procesos cognitivos que ocurren durante la producción de conjeturas, particularmente describen cómo se desarrollan ideas intuitivas durante la fase de exploración y cómo evolucionan hasta la formulación de conjeturas. Por ejemplo, al usar la función *deslizador*, los estudiantes construyeron una tabla de convergencia que propició el transito y articulación entre representaciones, esto permitió obtener los datos y exponer analogías para garantizar las justificaciones. El análisis de los cambios observados ayudó a los estudiantes a formular justificaciones matemáticas a través de la inducción y búsqueda de patrones.

Concluimos que la actividad matemática en un ambiente de trabajo individual, colaborativo, debate, y autoreflexión favorece un contexto de trabajo matemático en el que los estudiantes exponen sus ideas y razonamientos y desafían las afirmaciones de los demás integrantes para lograr el objetivo de búsqueda de consensos. Los estudiantes y el profesor podrían iniciar un debate en el aula en la que las conjeturas y justificaciones encontradas podrían llegar a ser demostraciones formales. Este modelo de trabajo, se fortalece cuando los estudiantes realizan una transferencia de información entre las representaciones matemáticas, ya que se ven motivados a justificar sus hallazgos y establecer conexiones de ideas.

Coincidimos con la señalado en Hollebrands, Conner y Smith (2010:347); Lavy (2006:156) que señalan que este tipo de diseños en ambientes tecnológico dinámicos, permite a los estudiantes explorar los conceptos, formular sus propias conjeturas, probar las conjeturas y discutirlas en un ambiente de clase general. Este modelo de trabajo se fortalece cuando los estudiantes realizan una transferencia de información entre las representaciones matemáticas, ya que se ven motivados a justificar sus hallazgos y establecer conexiones de ideas. De acuerdo con Balacheff (1990:262) el acto de dar una explicación o argumentación para una solución no es un comportamiento habitual entre los alumnos, sino que debe ser construido como parte del *contrato didáctico* en el aula de matemáticas.

Capítulo VII

Conclusiones

La pregunta que guío la presente investigación fue ¿Cuáles son las características de los argumentos expuestos por los estudiantes al resolver una secuencia didáctica sobre la integral impropia en un ambiente tecnológico? La investigación asumió como finalidad identificar los argumentos que exponen los estudiantes, describir su estructura y hacer inferencias sobre sus líneas de razonamiento. Para ello, la resolución de la secuencia didáctica se planteó de forma colectiva a fin de que los estudiantes expusieran sus ideas, generaran debates alrededor de la actividad matemática, dialogaran y mantuvieran comunicación constante. En el diseño se consideró el uso de un software graficador, como medio para agilizar procesos, visualizar comportamientos y analizar la variación de las gráficas. Desde el punto de vista didáctico y considerando el perfil académico de los estudiantes, esto representó una nueva experiencia en el estudio de las matemáticas, ya que los estudiantes pudieron apoyarse en herramientas tecnológicas, realizar sus propias experimentaciones y trabajar de forma colectiva en la solución de una actividad. Estas acciones produjeron reflexiones sobre el papel que tiene la herramienta tecnológica en la conformación de los argumentos matemáticos, particularmente en lo que se refiere al soporte de argumentos. También se reflexionó sobre la estrecha relación de la visualización para sostener argumentos, matizar y exponer algunas excepciones.

Aportaciones de la metodología usada

La secuencia didáctica se construyó empleando la metodología ACODESA, la cual establece momentos específicos para el trabajo individual, trabajo en equipo y debate grupal. En este enfoque se asume que el aprendizaje cooperativo, el debate científico y la autoreflexión, son aspectos centrales del quehacer matemático en el aula, por lo que deben favorecerse y motivarse. En el diseño de las actividades se consideró fundamental generar contextos de interacción social y de colaboración, con el objetivo de favorecer conjeturas, argumentaciones y mecanismos de validación; aspectos todos ellos necesarios para desarrollar en el aula el proceso formal de una demostración matemática. Se consideró entonces que la intención de las actividades implementadas con la metodología ACODESA fue crear un ambiente de aprendizaje colaborativo, que guardó equilibrio en las actividades en papel y uso de tecnología, promoviendo a su vez el debate científico y la autorreflexión, que condujeron a un desequilibrio cognitivo en el estudiante, generando discusiones y reflexiones, que favorecieron el aprendizaje.

Principales aportaciones de la secuencia didáctica

Una de las principales aportaciones de la secuencia didáctica se relaciona con la importancia que plantea al trabajo individual inmerso en un proceso de aprendizaje sociocultural, además del enfoque clásico de solicitar a los estudiantes trabajar en equipo, seguido de una discusión grupal. En la secuencia didáctica, el uso y manipulación de materiales y un trabajo articulado 'papel-lápiz-tecnología' es sumamente importante. Esta secuencia propone un método de enseñanza específico, lo que da una gran importancia a la evolución de las representaciones funcionales a las institucionales. Se determinó que la actividad matemática en un ambiente de trabajo individual-colaborativo-debate-autoreflexión, favorece un contexto de trabajo matemático en el que los estudiantes exponen su forma de pensar y su razonamiento, desafiando las afirmaciones de los demás compañeros del equipo, para lograr el objetivo de búsqueda de consensos. Se coincide con lo señalado en Hollebrands, Conner y Smith (2010), y Lavy (2006), quienes señalan que este tipo de diseños en *ambientes tecnológico dinámicos,* permiten a los estudiantes explorar los conceptos, formular sus propias conjeturas, probarlas y discutirlas, en un ambiente de clase general.

Conflictos que surgieron en el desarrollo de la secuencia didáctica

Para realizar esta investigación fue necesario acondicionar un espacio físico (mesas de trabajo redondas con instalaciones eléctricas, sillas, pintarrones, data show, plumones, entre otros...). Se requirió pilotear al grupo durante el semestre próximo anterior al del diseño de experimento, en lo concerniente al ambiente tecnológico y trabajo colaborativo. Fue necesario afinar constantemente la secuencia didáctica para definir la intención didáctica de las tareas [situación del problema contextual, problemas relacionados con la ingeniería y ejemplos-contraejemplos]. Es importante resaltar la intención didáctica de las actividades en la secuencia didáctica; se diseñaron situaciones en las que los estudiantes tienen que aclarar sus ideas a los miembros del equipo o grupo de trabajo, incluyendo la capacidad de persuadir a sus compañeros con la corrección de sus declaraciones. Otro aspecto importantes de destacar, fueron las dificultades que presentaron los estudiantes al transitar coherentemente entre las representaciones *algebraica, numérica y gráfica,* situación que se presentó debido a la falta de habilidades para trabajar en este tipo de ambientes.

Al aplicar la metodología ACODESA fue necesario precisar los tiempos e intención de cada etapa. Con respecto a la entrevista semiestructurada por parejas, fue necesario en algunos casos, durante el desarrollo de la misma, replantear las preguntas con motivo de que los estudiantes manifestaran sus opiniones 'réplicas'. Es importante matizar que en algunas ocasiones el entrevistador reclamó aclaraciones cuando la justificación no era convincente, incitando al estudiante a explicitar el calificativo modal (Q) y la refutación (R) con el objeto de convencer y fundamentar sus justificaciones.

Ventajas del uso de la tecnología en el desarrollo de la secuencia didáctica

El software de geometría dinámica (GeoGebra) usado en el desarrollo de la secuencia didáctica se caracteriza por tener elementos como el *deslizador,* que permite a los usuarios interactuar dinámicamente y observar cómo otros elementos responden a las condiciones alteradas. Las formas en que los estudiantes emplean la función del 'deslizador' en la resolución de problemas abiertos al abordar una tarea, permite descubrir, hacer conjeturas y en un momento dado validarlas. En su investigación Hollegrands, Conner y Smith (2010), reportan que los estudiantes utilizan generalmente la tecnología para generar nuevos datos a través de la interacción al utilizar el deslizador. Este tipo de ambiente tecnológico, permite a los estudiantes construir diagramas e interactuar con los mismos para abstraer datos. Por ejemplo, cuando los estudiantes no estaban seguros de la validez de sus justificaciones o réplicas, utilizaban la tecnología para verificar o asegurar sus argumentos. Los alcances de la tecnología para recopilar fácilmente este tipo de datos, contribuye a la capacidad de los estudiantes para establecer certezas o concretar un desafío. En general los estudiantes usaban la tecnología para obtener nuevos datos a través del deslizador y poder visualizar sus conjeturas, con la intención de completar las tareas en sus hojas de trabajo, o para obtener datos adicionales con el propósito de persuadir a sus compañeros.

Consideraciones importantes respecto al método de recolección y análisis de datos

Con el fin de triangular la información obtenida en esta investigación, se utilizaron diferentes instrumentos de recolección y análisis de datos. Con relación al método de recolección de datos en esta investigación se utilizó la entrevista semiestructurada basada en el modelo argumentativo de Toulmin (1958), audio-grabación, fotografías de los momentos específicos en la realización de las tareas, momentos al interactuar con la tecnología para transitar entre representaciones (gráfica-numérica-algebraica) y las notas en las hojas de trabajo al articular tareas en 'papel-lápiz-tecnología'. Para el análisis de los datos se empleó el modelo argumentativo de Toulmin (1958) como un instrumento para analizar el "contenido y estructura" de los argumentos expuestos por los estudiantes; el cual permitió describir la construcción del contenido y la estructura de los argumentos presentados por los estudiantes al transitar entre diferentes representaciones durante el proceso de solución de un ejercicio no tradicional, que solicita retos y justificaciones [contraejemplo]. Se focalizó con especial atención en los argumentos que expusieron durante la resolución de la actividad en un ambiente de trabajo colectivo. En este sentido, el diseño didáctico quedó fundamentado por la actividad matemática, la interacción tecnológica, el trabajo colaborativo, el debate, la autoreflexión y el modelo de argumentación de Toulmin.

Discusión

Durante el desarrollo de la secuencia didáctica se identificaron momentos substanciales, que revelan como emergen los procesos de argumentación al trabajar en este tipo de ambientes.

En un *primer momento* al resolver la situación problema contextual, fue necesario recolectar información con la intención de bosquejar y plantear la solución, también se tuvo la necesidad de articular tareas entre *papel-lápiz-tecnología,* con la propósito de construir esquemas y conjeturas que permitieran argumentar respuestas. En un *segundo momento* se generó un ambiente de trabajo colaborativo, que incluyó el debate y la autoreflexión, acciones que fueron fundamentales para convertir el salón de clase en un foro abierto al diálogo entre estudiantes y profesor; en donde el intercambio de información se desarrolló en un ambiente de cooperación y trabajo en equipo. *En un tercer momento* aparece el proceso de *modelación matemática*, situación en donde los estudiantes requirieron de conocimientos previos, y de transitar entre sus representaciones funcionales [dibujos, esquemas y notas] a las representaciones institucionales [gráficas algebraicas y numéricas], con la finalidad de definir un modelo que simplificara e idealizara la situación real. En un c*uarto momento* se considerara al *ambiente tecnológico,* en donde se brindó el enlace de retroalimentación en el momento. Todos en el aula, tanto alumnos y profesor, lograron representar a través del uso de la tecnología, lo que un estudiante estaba visualizando-reflexionando; esto aconteció cuando el estudiante tomo un rol de guía y expuso sus conjeturas al grupo para compartir sus puntos de vista. Tal acción se puede considerar como un apoyo para el profesor; por ejemplo, para afinar algunas situaciones didácticas o en su caso algunas correcciones de planteamientos erróneos o dudas. El *quinto momento* se presentó cuando los estudiantes interactuaron con la tecnología, buscando visualizar y extraer los datos necesarios para justificar y demostrar sus conjeturas; esta actividad aparece al usar el deslizador, en donde fue necesario experimentar y extraer datos para justificar las conjeturas. En un *sexto momento* aparecieron los conflictos cognitivos, situación que se presentó al enfrentarse a los contraejemplos, en donde emergieron contradicciones entre estudiantes [dichas contradicciones provinieron de la reflexión y crearon un conflicto cognitivo]. La articulación entre los trabajos '*papel-lápiz-tecnología'* y el ambiente '*tecnológico-colaborativo-debate'*, permitió resolver el conflicto y obtener los datos necesarios para argumentar las conjeturas; con estas acciones, lograron superar el obstáculo cognitivo, construyendo de esta forma un conocimiento nuevo.

Podemos afirmar entonces que la experimentación en un ambiente de uso de tecnología-colaborativo-debate-autoreflexión, permitió al estudiante construir conjeturas, transitar de un sistema de representación a otro, reconocer patrones, deducir y analizar comportamientos en gráficas; y a partir de ello, generar argumentos sobre un objeto matemático en construcción. Dicha situación se consideró como un proceso de argumentación, no sólo porque hace viable la observación de las ideas y nociones que el estudiante está concibiendo sobre un saber matemático, sino también porque es una forma de generar o construir conocimiento matemático.

Discusión sobre las entrevistas en pareja [Arel-Jos y Celes-Dani]

Se propuso una etapa adicional en la que se aplicó una entrevista semiestructurada la cual fue aplicada en parejas, con el propósito de profundizar en las características de los argumentos expuestos por los estudiantes sobre integral impropia. La guía de la entrevista se estructuró considerando el modelo de argumentación de Toulmin (1958), la intención fue que los estudiantes verbalizaran sus ideas respecto a los seis elementos del modelo (aserción, datos, garantía, respaldo, calificativo modal y refutaciones). Se focalizó en el uso del calificativo modal y refutación para investigar la fortaleza de los argumentos expuestos.

Respecto a la *pareja 1* se observó que en todo momento trabajaron juntos, en la fase colaborativa usaron una sola computadora y ambos una hoja de trabajo. Las argumentaciones expuestas presentan algunas debilidades; debido a que el *calificativo modal* reveló desacuerdos e inseguridad al indicar que tenían dudas para justificar con precisión los intervalos que podrían tomar a y b para asegurar la convergencia de la integral. Además, al momento de manifestar la *refutación* no lograron mostrar excepciones o limitaciones a sus argumentos. Se detectó que no lograron obtener los datos para establecer en qué intervalos la integral era convergente. Además se observó que al usar el geogebra con la intención de sincronizar la función deslizador con las condiciones dadas del ejercicio, lo hicieron de manera incorrecta; esto les dificultó extraer los datos necesarios para aseverar sus justificaciones. Además, al momento de exponer sus analogías del trabajo realizado en papel, lápiz y tecnología no lograron demostrar la convergencia.

En relación a la *pareja 2,* los argumentos construidos mostraron un esquema argumentativo fundamentado. En el instante de presentar el *calificativo modal* y la *refutación* expresaron certeza y manifestaron particularidades en los intervalos donde la integral es convergente y divergente. Cuando se les cuestionó sobre las justificaciones expuestas, se apoyaron del recurso tecnológico usando la función deslizador (del geogebra) con el propósito de variar parámetros, analizar los comportamientos, transitar y articular entre representaciones, con la intención de extraer los datos que aportarán sustento a las justificaciones.

Cuando se les solicitó información adicional que mostraran excepciones o limitantes a sus argumentos, expusieron una tabla de convergencias, construida a papel y lápiz con los datos obtenidos al visualizar el comportamiento de la integral en los momentos de variar los parámetros especificados en el ejercicio usando el deslizador. Al exponer sus analogías, presentaron la solución algebraica de la integral indicando el teorema usado para demostrar la convergencia.

Los resultados de esta investigación condujeron a reflexiones sobre el papel que tiene el ambiente tecnológico enmarcado en un trabajo articulado: individual, colaborativo, debate y autoreflexión, en la conformación de los argumentos matemáticos, particularmente en lo que se refiere al soporte de argumentos; por ejemplo la pareja 2 construyó un esquema argumentativo muy fundamentado a diferencia de la pareja 1 que no logró construir una fundamentación a sus argumentos. Es importante matizar, la estrecha relación de la visualización para sostener argumentos y exponer algunas excepciones a los mismos. Por ejemplo, al usar la función del deslizador, se favoreció la manipulación de gráficas y el análisis visual; esto permitió que los estudiantes realizaran exploraciones [por ejemplo, al variar parámetros y coeficientes, al analizar comportamientos gráficos y establecer relaciones entre las diferentes representaciones]. Estas acciones favorecieron la extracción de datos para justificar conjeturas y desarrollar ideas.

Se concluyó que la actividad matemática en un ambiente de trabajo individual, colaborativo, debate, y autoreflexión favorece un contexto de trabajo matemático en donde los estudiantes exponen sus ideas y razonamientos, desafiando las afirmaciones de los demás integrantes del equipo para lograr el objetivo de búsqueda de consensos. Contexto en donde los estudiantes y el profesor, podrían iniciar un debate en el aula en el que las conjeturas y justificaciones encontradas se conviertan en demostraciones formales. Este modelo de trabajo se fortalece cuando los estudiantes realizan una transferencia de información entre las representaciones matemáticas, ya que se ven motivados a justificar sus hallazgos y establecer conexiones de ideas.

Contribuciones de la investigación

El diseño de la secuencia didáctica en un ambiente tecnológico ayudó a los estudiantes a explorar los conceptos, formular y probar conjeturas, a realizar discusiones en un ambiente colaborativo y de debate, además de superar obstáculos cognitivos. En este contexto, se sugiere que los profesores tienen que diseñar actividades y tareas que demanden a los estudiantes hacer su razonamiento explícito, que incluyan los modos en que utilizan las herramientas y la lógica que conecta el uso de las mismas a sus pretensiones.

Los resultados de esta investigación insinúan que se deben diseñar tareas en donde se transite entre las representaciones gráfica, numérica y algebraica, mediante un trabajo equilibrado-articulado entre 'papel-lápiz-tecnología', con la intención de abstraer datos y alentar a los estudiantes a exponer su forma de pensar como un medio para que otros puedan ver su razonamiento matemático. Los profesores también necesitan establecer normas sociales en el aula y animar a los estudiantes a desafiar las pretensiones de los demás, mediante un ambiente que propicie un debate en donde las conjeturas y justificaciones encontradas podrían llegar a ser demostraciones formales.

Conclusiones

En este estudio se analizó el contenido y la estructura de los argumentos de los estudiantes. Los resultados indican que la naturaleza del ambiente tecnológico, el diseño de las tareas, y trabajo colaborativo en el aula influyen en los argumentos de los estudiantes mientras realizan sus tareas no rutinarias que les proponen retos y justificaciones.

Un hallazgo importante de este trabajo, es que los estudiantes que usan activamente la tecnología para extraer datos adicionales por lo general mediante la función *deslizador,* con el propósito de construir conjeturas y justificaciones para debatir alguna reclamación. En algunos casos, los estudiantes utilizan hechos conocidos, tales como definiciones y teoremas como datos adicionales para verificar o refutar una afirmación. El uso de definiciones y teoremas como datos adicionales indican que los estudiantes reconocen y son capaces de utilizar estas ideas matemáticas para hacer debates y resolver problemas. Además, en la recopilación de datos, los estudiantes usan la tecnología para transitar entre representaciones algebraica, numérica y gráfica para asegurar sus pretensiones y justificaciones.

Este tipo de diseños permite a los estudiantes explorar los conceptos, formular sus propias conjeturas, probar las conjeturas y discutirlas en un ambiente de clase general. Los resultados indican que la naturaleza dinámica de la herramienta, el diseño de las tareas, influye en los argumentos que exponen los estudiantes mientras trabajaban en entornos tecnológicos. El aprendizaje cooperativo fomenta la necesidad de la argumentación (Okada y Simon, 1997:110). Este tipo de aprendizaje crea situaciones en las que los estudiantes tienen que aclarar sus ideas a los miembros de su grupo de trabajo. Este acto de aclaración incluye la capacidad de persuadir a sus colegas con la corrección de sus declaraciones. Participar en discusiones en las que se debaten las ideas matemáticas, ofrece a los estudiantes, poderosas oportunidades para el aprendizaje de las matemáticas.

Concluimos que este ambiente tecnológico y colaborativo nos brinda la oportunidad de retroalimentar en el instante, por ejemplo, cuando un estudiante toma el rol de estudiante guía (Hitt y González-Martín, 2015:206) y expone sus conjeturas al grupo al momento de interactuar con la tecnología; compartiendo sus puntos de vista a sus compañeros de clase. Esta acción, puede apoyar al profesor a buscar estrategias didácticas en caso necesario para corregir algunos planteamientos erróneos o algunas dudas.

Referencias

ALVARADO, Angelina y GONZÁLEZ, Ma. Teresa (2010), "La implicación lógica en el proceso de la demostración matemática: estudio de un caso", *Enseñanza de las ciencias*, 28(1), pp. 73-84.

ARCAVI, Abraham y HADAS, Nurit (2000), "Computer mediated learning: An example of an approach", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, pp.25-45.

BALACHEFF, Nicolas (1990, "Towards a problematique for research on mathematics teaching", *Journal for Research in Mathematics Education,* 21(4), pp. 258-272.

BACCAGLINI-FRANK, Anna y MARIOTTI, Maria Alessandra (2010). "Generating Conjectures in Dynamic Geometry: the Maintaining Dragging Model", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), pp. 225-253.

BORBA, Marcelo y VILLARREAL, Monica (2005), *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking.* USA: Springer.

BEZUIDENHOUT, Jan y OLIVER, Alwyn (2000). "Student's conceptions of the integral". En *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME24),* vol. 2, Hiroshima, Japón, pp. 73-80.

BROUSSEAU, Guy. (1988), "Le contrat didactique: Le milieu", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (3), pp. 309-336.

CALVO, Cecilia. (1997). *Bases para una propuesta didáctica sobre integrales*, Tesis inédita de Maestría, Departament de Didáctica de la Matemática i les Ciénces Experimentals. Universitat Autónoma de Barcelona.

CAMACHO, Alberto y AGUIRRE, Mónica (2001), "Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar", *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 4 (3), pp. 237-265.

DE GAMBOA, Genaro, PLANAS, Nuria y EDO, Mequè (2010), "Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones", *SUMA - Revista sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas*, 64, pp. 35-44.

DOUEK, Nadia (2007), "Some remarks about argumentation and proof", En P. Boero (Ed.). *Theorems in School: From history, epistemology and cognition to classroom practice,* Rotterdam: Sense Publishers, pp. 163-181.

DUVAL, Raymond (1993), "Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento", En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp.173-201.

DUVAL, Raymond (2000), "Basic Issues for Research in Mathematics Education, Conferencia Plenaria", En *Proceedings of the* 24_{th} *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME24),* vol. 1, Hiroshima, Japón, pp. 55-69.

GOIZUETA, Manuel y PLANAS, Nuria. (2013), "Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas", *Enseñanza de las Ciencias,* 31(1), pp. 61-78.

GONZÁLEZ-MARTÍN, Alejandro S. (2005), "Use of examples and counterexamples in University teaching". The Improper Integral. En *Proceedings of the 27th Annual Meeting* of *PME-NA,* Virginia (USA), pp. 1-7

GONZÁLEZ-MARTÍN, Alejandro S. (2006), *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje,* Tesis doctoral inédita, Universidad de la Laguna, España.

GONZÁLEZ-MARTÍN, Alejandro S. y CAMACHO, Matías (2004), "What is firts-year mathematics students' actual understanding about improper integration?", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 35(1*),* pp. 73-89.

GONZÁLEZ-MARTÍN, Alejandro. S. y CAMACHO, Matías (2005), "Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores", *Enseñanza de las Ciencias,* 23(1), pp. 81-96.

HITT, Fernando (2003), "Le caractère fonctionnel des representations", *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, *8*, pp. 255-271.

HITT, Fernando (2007), "Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d´une méthode d´apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d´auto-réflexion". En Baron M., Guin D. y Trouche L. (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l´apprentissage: conception et usages, regards croisés* (Col. Systémes de formation et d´enseignement), pp. 1-25.

HITT, Fernando (2011), “Construction of mathematical knowledge using graphic calculators (CAS) in the mathematics classroom”, *International Journal Of Mathematical Education In Science & Technology*, 42(6), pp. 723-735.

HITT, Fernando Y GONZÁLEZ-MARTÍN, Alejandro S. (2015), “Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method”, *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), pp. 201–219.

HOLLEBRANDS, Karen F., CONNER, Anna Marie, y SMITH, Ryan C. (2010), “The nature of arguments provided by college geometry students with access to technology while solving problems”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), pp. 324–350.

INGLIS, Matthew, MEJÍA-RAMOS, Juan Pablo y SIMPSON, Adrian (2007), “Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification”, *Educational Studies in Mathematics,* 66(1), pp. 3-21.

INGLIS, Matthew y MEJÍA-RAMOS, Juan Pablo (2005), “La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas”, *Revista EMA,* 10 (3), pp. 328-353.

LAVY, Ilana. (2006), “A case study of different types of arguments emerging from explorations in an interactive computerized environment”, *Journal of Mathematical Behavior,* 25*,* 153-169.

OKADA, Takeshi y SIMON, Herbert A. (1997), “Collaborative discovery in a scientific domain”, *Cognitive Science,* 21(2), pp. 109-146.

TALL, David (2009), “Cognitive and social development of proof through embodiment, symbolism & formalism”, En F-L. Lin, F-J. Hsieh. G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Volume 2*, Taipei, Taiwan, pp. 220-225.

TOULMIN, Stephen (1958), *The uses of argument,* New York: Cambridge University Press.

Anexo 1. Solución (algebraica, numérica y gráfica) de la secuencia didáctica en un ambiente tecnológico-colaborativo

Etapa 1: Situación problema contextual (*Situación problema de la industria petroquímica)*

a) ¿Cuál es el costo total de las bases?, si se requieren tres bases para posicionar el depósito; considerar que el costo del concreto hidráulico recomendado es de $\$1,450.00\, m^2$ con un espesor uniforme de $1.50 mts$.

Para calcular las áreas irregulares (amorfas) se usa el Teorema fundamental del Cálculo integral usando las condiciones Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces la integral definida de f de "a" a "b" se denota por $\int_a^b f(x)dx$.

Por tal motivo se requiere encontrar el modelo matemático (función) que represente la situación problema. Con base a los datos que presenta la situación problema [usando la vista de la sección transversal tipo parabólico de la base], se relaciona el caso con el tema de Geometría Analítica, específicamente la ecuación canónica de la parábola con vértice en el origen y respecto al eje vertical.

La ecuación canónica de la parábola con vértice en el origen y eje vertical: $x^2 = 4py......ec.1$

Donde $p : parámetro$ (distancia del vértice al foco o a la directriz)

Despejando la ec.1 en función de "x" tenemos que:

$$y = \frac{x^2}{4p}....ec.2$$

Despejando $"p"$ para encontrar su valor

$$p = \frac{x^2}{4y}......ec.3$$

Considerando el dato de la situación las coordenadas son $P(4,3)$ y sustituyendo en la ec.3

$$p=\frac{x^2}{4y}=\frac{4^2}{4(3)}=\frac{4}{3}$$

Sustituyendo "p" en la ec.2

$$y=\frac{x^2}{4p}=\frac{x^2}{4\left(\frac{4}{3}\right)}=\frac{x^2}{\frac{16}{3}}=\frac{3x^2}{16}$$

Por lo tanto la función modelo que representa la curva de la sección transversal de la base de la situación problema es: $f(x)=\frac{3x^2}{16}$

Para comprobar lo antes dicho se usa la tecnología (GeoGebra) para visualizar si efectivamente la curva de la situación problema coincide con la curva del modelo encontrado. En la *figura 6* se visualiza que el modelo encontrado coincide con el dibujo dado de la situación problema.

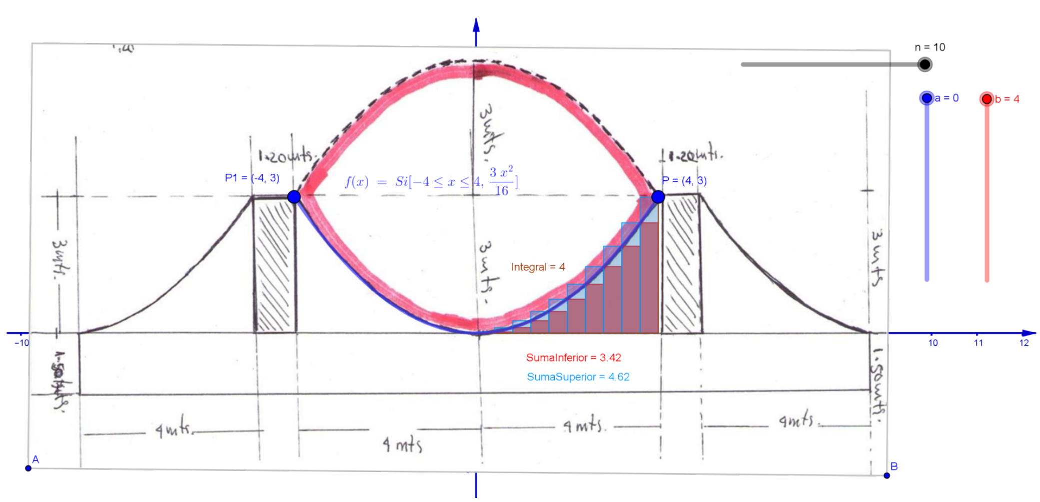


Figura 6. Modelo de la situación problema.

Para calcular las áreas irregulares (amorfas) se usa el Teorema fundamental del Cálculo integral usando las condiciones Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces la integral definida de f de “a” a “b” se denota por $\int_a^b f(x)dx$.

Sea $f(x)=\frac{3x^2}{16}$

$$A_1=\int_0^4 \frac{3x^2}{16}dx=\frac{3}{16}\int_0^4 x^2dx=\frac{3}{16}\left(\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\left(\frac{x^3}{16}\right]_0^4=4m^2$$

Se suman las áreas amorfas: $A_{amorfas(1)}=a_1+a_2+a_3+a_4=16m^2$

$$A_2=(18.40)(1.50)=27.60m^2$$
$$A_3=(1.20)(3)=7.2m^2$$

Área total de concreto para fabricar una base: $A_{Total}=A_1+A_2+A_3=16+27.6+7.2=50.8m^2$

Considerando que son 3 bases: $(50.8)(3)=152.4m^2$

Por lo tanto el costo total de las tres bases es: $(152.4)(1450)=\$220980$

b) Se requiere fabricar el depósito con las siguientes dimensiones: con base a la forma de la sección transversal de la *figura 5* y con una longitud de 20 mts. ¿cuánto material en m^2 se necesita para fabricarlo? Si consideramos que el costo del material (acero inoxidable) a usar tiene un costo de $\$445.00m^2$. ¿Cuál será el costo total del material para la fabricación del depósito?

Para calcular el área de las paredes del depósito se considera el perímetro de la curva de la función modelo que representa la situación: $f(x)=\frac{3}{16}x^2$ en el intervalo de $[-4,4]$ así también la longitud $l=20m$.

El teorema para calcular la longitud de curvatura. Sea $f(x)$ una función para la cual $f(x)$ es continua sobre un intervalo $[a,b]$. Entonces la longitud de curva L sobre el intervalo está dada por: $L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$

$$L=\int_{-4}^{4}\sqrt{1+\left(\frac{3}{8}x\right)^2}dx=\int_{-4}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{64}x^2}dx$$

Para integrar $\int\sqrt{1+\frac{9}{64}x^2}dx$ se usa el teorema:

$$\int\sqrt{a^2+v^2}dv=\frac{v}{2}\sqrt{a^2+v^2}+\frac{a^2}{2}\ln(v+\sqrt{a^2+v^2})+c$$

$L=\int_{-4}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{64}x^2}dx=10.40m$ de longitud de la curva. En la *figura 7* se visualiza la longitud de la curva de la sección transversal.

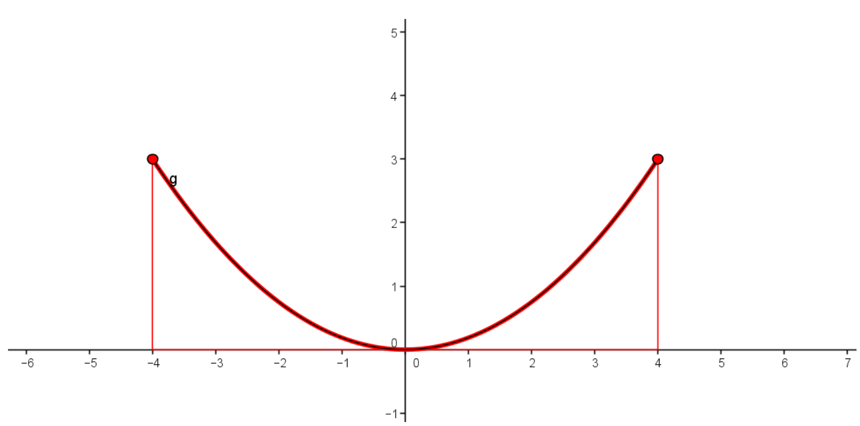


Figura 7. Longitud de la curva de la sección transversal

Para calcular el área de las paredes del depósito se considera lo siguiente:

$A_1 = (10.40)(20)(2) = 416m^2$

Para calcular el área de las tapas:

Área de las tapas de sección transversal tipo parabólico en base al la situación problema. Considerando que las funciones y el intervalo son:

$f(x) = 3$, $g(x) = \frac{3}{16}x^2$, $[-4,4]$. En este caso para calcular el área se usa el teorema de cálculo de área acotada por dos gráficas. Sean "f y g" funciones continúas sobre un intervalo $[a,b]$, entonces el área A de la región acotada por sus gráficas sobre el intervalo está dada por: $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

$A = \int_{-4}^{4} (3 - \frac{3x^2}{16}) dx = 16m^2$ En la *figura 8* se visualiza el área de la sección transversal que representa la tapa del depósito.

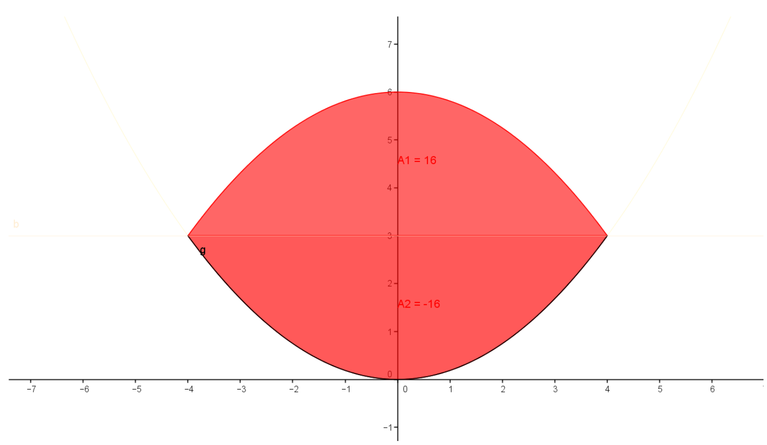


Figura 8. Área de la sección transversal de tapa del depósito.

Área de tapas: $A_2 = (32)(2) = 64m^2$

Material requerido para fabricar el depósito

$A_{Tolal} = A_1 + A_2 = 416 + 64 = 480m^2$

El costo total del material para la fabricación del depósito es de: $(480)(445) = \$213600$

c) ¿Cuál es el volumen máximo que se podrá depositar? Si el factor de seguridad para este tipo de hidrocarburo es de menos el 20% del total de capacidad del depósito.

Volumen que puede almacenar de depósito: $V = (A_{\sec.transv.})(l) = (32)(20) = 640m^3$

El volumen máximo de hidrocarburo que se puede depositar considerando la norma de seguridad es de: $V_{máx} = 512m^3$

Etapa 2: Problemas (Integral Impropia–Probabilidad)

Problema 1. Apoyado con la tecnología, visualiza-conjetura-justifica las siguientes actividades.

Actividad 1: Analiza el comportamiento de la familia de funciones de la distribución normal (campana de Gauss). Sea $f(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x-\mu}{2\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ para los parámetros: media $\mu = [-4, 4]$ y desviación estándar $\sigma = [0.1, 10]$

a) posiciona el deslizador de la desviación estándar en $\sigma = 1$ e interactúa con el deslizador de la media (μ) visualiza-conjetura los cambios de la curva y anótalos. *¿Qué observas? ; ¿Cambia la forma de la curva? ; ¿Qué representa el parámetro de la media?*

Justificación de la actividad: se puede visualizar en la *figura 9* el efecto de las variaciones de la media y la desviación típica sobre la curva de la distribución normal. Se visualiza que la curva se desplaza sobre el eje x sin cambiar su forma; considerando que la distribución normal es simétrica respecto de su media, tiene la forma de campana y tiene un máximo en el centro de la distribución.

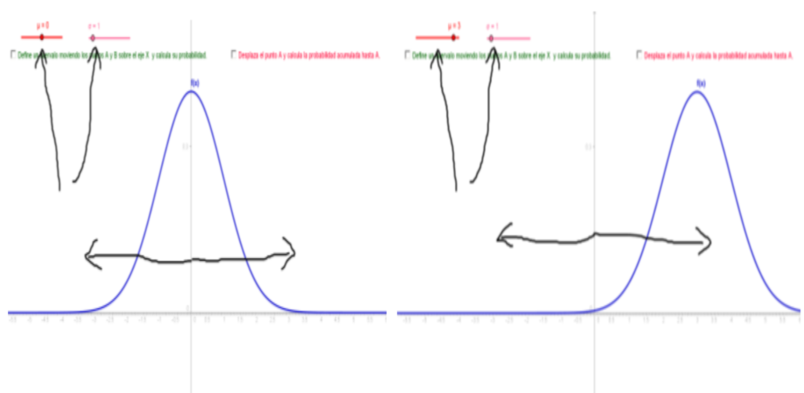
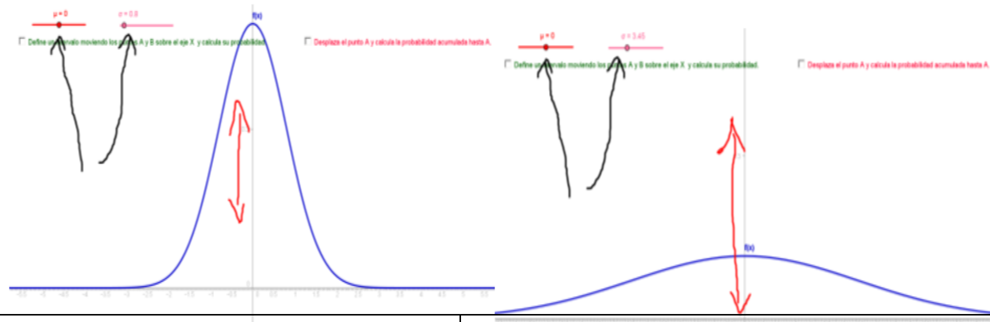


Figura 9. Efecto de la variación de la media y la desviación estándar en la distribución normal

b) posiciona el deslizador de la media $\mu = 0$ e interactúa con el deslizador de la desviación estándar sobre el intervalo dado $\sigma = [0.1, 10]$. Visualiza-justifica los cambios de la curva y anótalos. *¿Qué ocurre a la media, cuando la desviación aumenta? ; ¿Qué representa el parámetro desviación típica poblacional? ; ¿Cambia en este caso la forma de la curva?*

Justificación de la actividad: se puede visualizar en la *figura 10* que la curva de la distribución normal al cambia su forma de campana, ya que al aumentar el valor de la desviación estándar se aplana la curva hasta tomar la forma de una recta paralela al eje x. En este caso se considera que mientras mayor es la dispersión de población.



Intervalo de Confianza 'Variable aleatoria'	Probabilidad (%)

Figura 10. Efecto de la variación de la media y la desviación estándar en la distribución normal

Actividad 2: apoyado con la tecnología, *'visualiza-justifica'* lo siguiente:

La probabilidad en un intervalo $\left[A,B\right]$ sobre el eje x. Si 'X' es una variable aleatoria normal de parámetros $\mu=0,\sigma=1$; Donde la distribución normal estándar esa representada por: $N(0,1)=f(x)=\dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ Sea la expresión: $P(A\leq X\leq B)=\int_A^B f(x)dx$.

$[\mu-\sigma<X<\mu+\sigma]$	68%
$[\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma]$	95%
$[\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma]$	99%
$[-\infty<X<+\infty]$	100%

a) comprueba las probabilidades del 'TEOREMA DE CHEBYSHEV'. Considera la función $f(x)$ de la distribución normal estándar.

Justificación de la actividad se puede visualizar en la *figura 11*, usando los deslizadores de la media y la desviación estándar y comprobar los resultados del TEOREMA DE CHEBYSHEV en los intervalos:

El 68% (aproximadamente) de los valores que tome la variable aleatoria 'X' estarán situados a una distancia de la media inferior a una desviación estándar. Análogamente, el 95% de los valores estarán situados a menos de 2 veces la desviación estándar, y un 99.7% de dichos valores se encontraran dentro de un radio de 3 sigma.

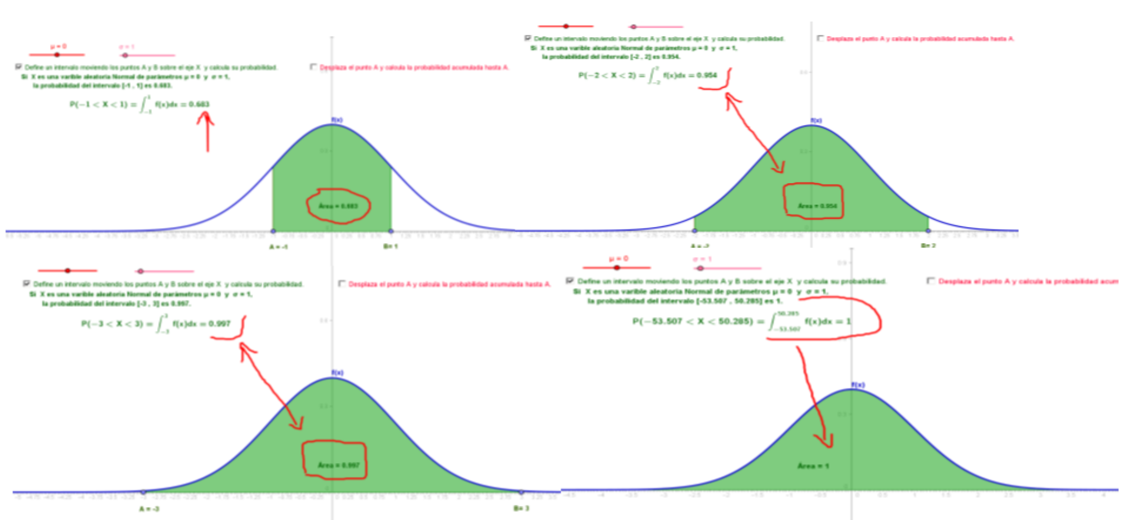


Figura 11. Visualización del TEOREMA DE CHEBYSHEV

Actividad 3: apoyado con la tecnología visualiza-conjetura-justifica la probabilidad acumulada. Si 'X' es una variable aleatoria normal de parámetros $\mu = 0, \sigma = 1$. Conjuntamente, coteja los resultados obtenidos al usar la tecnología contra las Tablas de Distribución Normal para probabilidad acumulada.

Considera las condiciones de la Integral Impropia para cálculo de probabilidades:

- $P(X \le A) = \lim_{X \to -\infty} \int_X^A f(x)dx$
- $P(X \ge B) = \lim_{X \to +\infty} \int_B^X f(x)dx$
- $P(-\infty \le X \le +\infty) = \lim_{X \to -\infty} \int_X^A f(x)dx + \lim_{X \to +\infty} \int_A^X f(x)dx$

A. Usando los deslizadores desplaza el punto 'A' o 'B' según se requiera sobre el eje de abscisas (x) para calcular las siguientes probabilidades. Además calcula las mismas probabilidades usando la Tabla de Distribución Normal para probabilidad acumulada y compara los resultados. Para realizar los cálculos usa la condición: $Z : N(0,1)$

Cálculo de probabilidades usando la tecnología [GeoGebra]

1. $P(Z \le 1.15)$ =0.8749=87 % de probabilidad

2. $P(Z \le 0) =$ 0.50=50% de probabilidad

3. $P(Z \le 2.25) = 0.9878 = 99\%$ de probabilidad

4. $P(Z \le -1.15) = 1 - P(z \ge 1.15) = 1 - 0.8749 = 0.1251 \approx 13\%$ Probabilidad

5. $P(Z \le -2.25) = 1 - P(z \ge 2.25) = 1 - 0.9878 = 0.0122 \approx 1.22\%$ Probabilidad

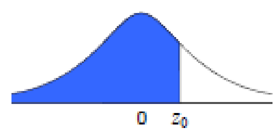
6. $P(Z \ge 1.86) = 0.9686 \approx 97\%$ Probabilidad

Tabla de la distribución normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada

μ = Media

σ = Desviación típica

$$P(Z \le z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz$$



Tipificación: $z_0 = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	3,0
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	3,1
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	3,2
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	3,3
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	3,4
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	3,5
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	3,6
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	3,7
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	3,8
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	3,9

Tabla de distribución normal N(0,1) para probabilidad acumulada

B. Justifica los siguientes cuestionamientos usando la tecnología:

1) *¿Cómo son las probabilidades acumuladas para cualquier valor negativo?*

- ***Justificación:*** Como se puede visualizar en la figura 12, mientras menor sea el valor de la variable aleatoria Z la probabilidad disminuye.

2) *¿Y para los valores positivos?*

- ***Justificación:*** Como se puede visualizar, mientras mayor sea el valor de la variable aleatoria Z la probabilidad aumenta.

3) ¿Cuándo toma el valor de cero?

- ***Justificación:*** La probabilidad es de un 50% de observar un dado mayor que su media y un 50% de probabilidad de observar un dato menor.

Figura 12. Visualización de probabilidades

C. Encuentra el valor de "k" para la probabilidad dada usando los deslizadores para justificar el resultado.

$$P(Z \le k) = 0 \; = P(Z \le -3.90) = 0\%$$

$$P(Z \le k) = 0.67 = P(Z \le 0.44) = 67\%$$

$$P(Z \ge k) = 0.1 = 1 - P(Z \le 1.2814) = 10\%$$

$$P(X \ge k) = 0.67 \; = P(X \ge 5.62) = 0.67 \approx 67\%$$

$$P(X \le k) = 0.50 = P(X \le 6.5) = 0.50 \approx 50\%$$

D. Calcula las probabilidades en el intervalo dado

$P(0.18 \le Z \le 1.29) = 0.331 \approx 33\%$

$P(-0.56 \le Z \le 1.9) = 0.683 \approx 68\%$

E. Supón que $X : N(6.5, 2)$ usa los deslizadores de 'μ' y 'σ' hasta conseguir los parámetros dados, para calcular las probabilidades. En la figura 13 se visualiza las probabilidades encontradas.

$P(X \le 8) = 0.7735 \approx 77\%$

$P(X \ge 8) = 1 - P(X \le 8) = 1 - 0.7735 = 0.2265 \approx 23\%$

$P(5.5 \le X \le 7.5) = 0.383 \approx 38\%$

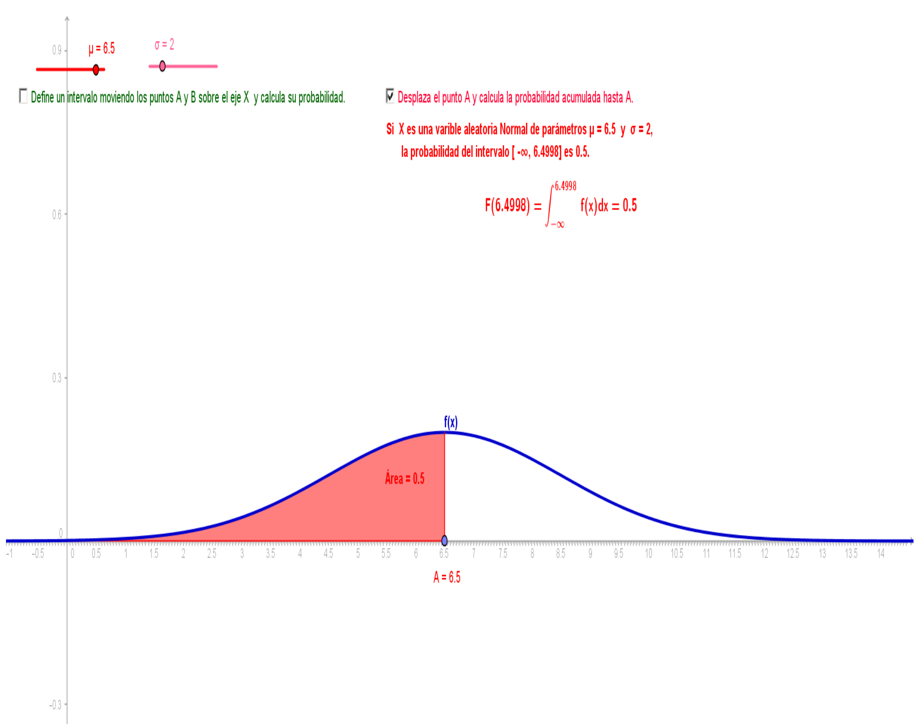


Figura 13. Visualización de las probabilidades

Anexo 2. Problemas contextuales [con relación a la ingeniería industrial]

Instrucciones: Apoyado con la tecnología, las propiedades de la Integral Impropia y la Distribución Normal. Visualiza-Conjetura-Justifica los resultados de los siguientes problemas.

Problema 2: El peso de los estudiantes universitarios de una zona específica sigue una distribución aproximadamente normal, con una media (μ) de 140 libras y una desviación estándar (σ) de 20 libras. Justifica los resultados usando la Tabla de Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

a) ***Determinar la probabilidad de que un estudiante tenga un peso menor o igual a 150 libras:*** $P(X \leq 150) = P(X \leq A) = \underset{X \to -\infty}{Lím} \int_{X}^{A} f(x)dx = \int_{-\infty}^{150} f(x)dx = 0.6915 \approx 69\%$

Para justificar el resultado se usa la tabla de la Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada

Para determinar el valor de $Z_0 = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{150-140}{20} = 0.50$

Se busca en la tabla de Distribución Normal: $Z_0 = 0.50 = 0.6915 \approx 69\%$ Probabilidad y se visualiza en la figura 14.

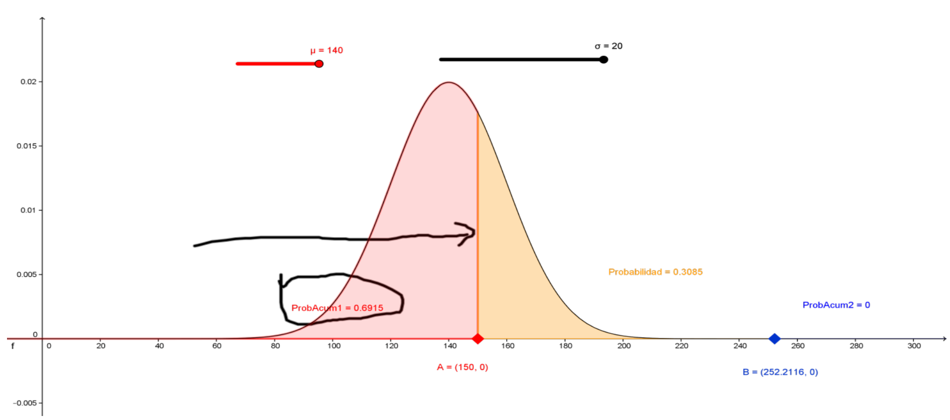


Figura 14. Visualización del cálculo de probabilidad

b) *Si consideramos la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, tenga un peso mayor o igual a 150 libras:*

$$P(X \geq 150) = P(X \geq B) = \lim_{X \to \infty} \int_{B}^{X} f(x)dx = 0.3085 \approx 31\% \text{ Probabilidad}$$

Para justificar el resultado se usa la tabla de la Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

$P(Z \geq 150) = 1 - P(Z \leq B) = 1 - 0.6915 = 0.3085 \approx 31\%$ y se visualiza en la figura 15.

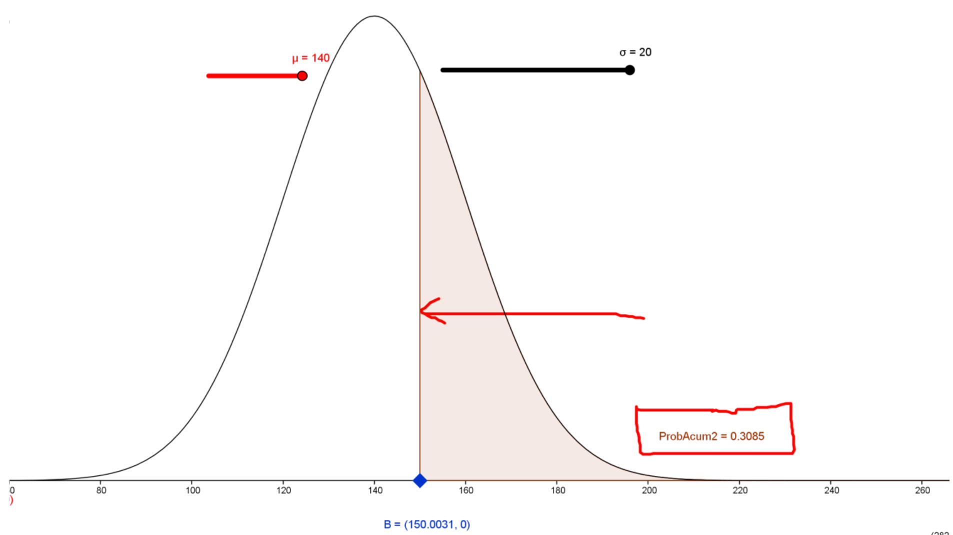


Figura 15. Visualización del cálculo de probabilidad

c) ***Determinar la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, tenga un peso menor o igual a 115 libras:***

$$P(X \leq 115) = P(X \leq A) = \underset{X \to -\infty}{Lím} \int_{X}^{A} f(x)dx = \int_{-\infty}^{115} f(x)dx = 0.1056 \approx 11\% \text{ Probabilidad}$$

Para justificar el resultado se usa la tabla de la Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

Determinar el valor de $Z_0 = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{115-140}{20} = -1.25$

$$P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a)$$
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{115-140}{20} = -1.25$$
$$de Tabla : Z = -1.25 = 0.8944$$
$$\therefore P(Z \leq 115) = 1 - P(Z \leq 115) = 1 - 0.8944 = 0.1056 \approx 11\%$$

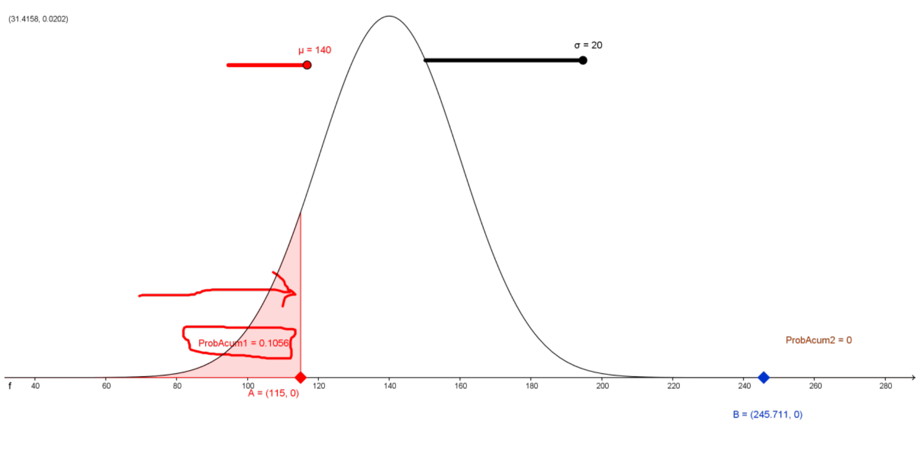


Figura 16. Visualización del cálculo de probabilidad

d) ***Si consideramos la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, tenga un peso entre 115 y 150 libras:***

$$P(A \le X \le B) = P(115 \le X \le 150) = \int_{115}^{150} f(x)dx = 0.5858 \approx 59\% \text{Probabilidad}$$

Para justificar el resultado se usa la tabla de la Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

$$P(-a \le Z \le b) = P(Z \le b) - (1 - P(Z \le -a))$$
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{115-140}{20} = -1.25$$
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{150-140}{20} = 0.50$$
$$de Tabla: Z = -1.25 = 0.8944; Z = 0.50 = 0.6915$$
$$\therefore P(115 \le Z \le 150) = P(Z \le 150) - (1 - P(Z \le 115))$$
$$= 0.8944 - (1 - 0.6915) = 0.5859 \approx 59\%$$

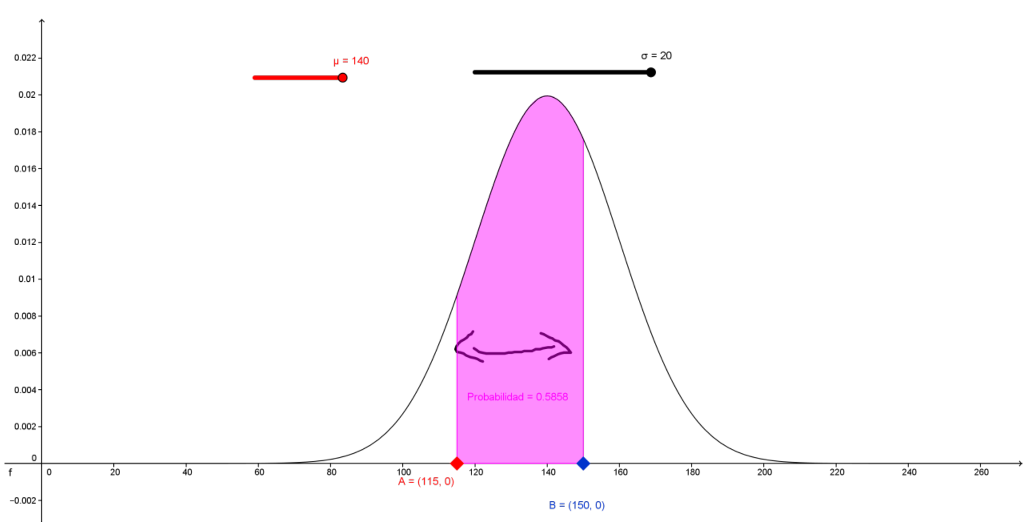


Figura 17. Visualización del cálculo de probabilidad

e) Si consideramos la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, tenga un peso entre 150 y 160 libras:

$$P(A \le X \le B) = P(150 \le X \le 160) = \int_{150}^{160} f(x)dx = 0.1499 \approx 15\% \text{ Probabilidad}$$

Para justificar el resultado se usa la tabla de la Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

$$P(a \le Z \le b) = P(Z \le b) - P(Z \le a)$$
$$Donde:$$
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{150-140}{20} = 0.50$$
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{160-140}{20} = 1.0$$
$$de Tabla: Z = 0.50 = 0.6915; Z = 1.0 = 0.8413$$
$$= 0.8413 - 0.6915 = 0.1498 \approx 15\%$$

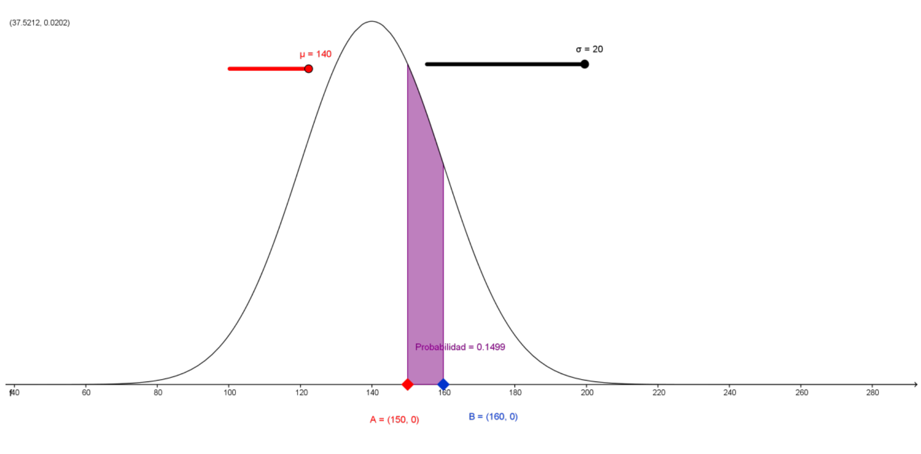


Figura 18. Visualización del cálculo de probabilidad

Problema 3: para cierto tipo de baterías, la función de densidad de probabilidad de modo que ‘ x ’ horas es la vida de una batería elegida al azar está dada por. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{60}e^{-x/60} & si\, x\geq 0\\ 0 & si\, x<0\end{cases}$ Condiciones. Desarrolla algebraicamente la solución para justificar los resultados.

Calcule la probabilidad de que la vida de una batería elegida al azar:

a) ***Esté entre 15 y 25 horas:***

$P(15\leq X\leq 25)=\int_{15}^{25} f(x)dx=0.1196\approx 12\%$ Probabilidad, se puede visualizar en la *figura 19*

Justificación algebraica:

$$P(15,25)=\int_{15}^{25}\frac{1}{60}e^{-\frac{x}{60}}dx=-\int_{15}^{25}e^{-\frac{x}{60}}\left(-\frac{1}{60}\right)dx$$

$$\left(-e^{-\frac{x}{60}}\right]_{15}^{25}=-e^{-\frac{25}{60}}+e^{-\frac{15}{60}}=0.12\approx 12\%$$

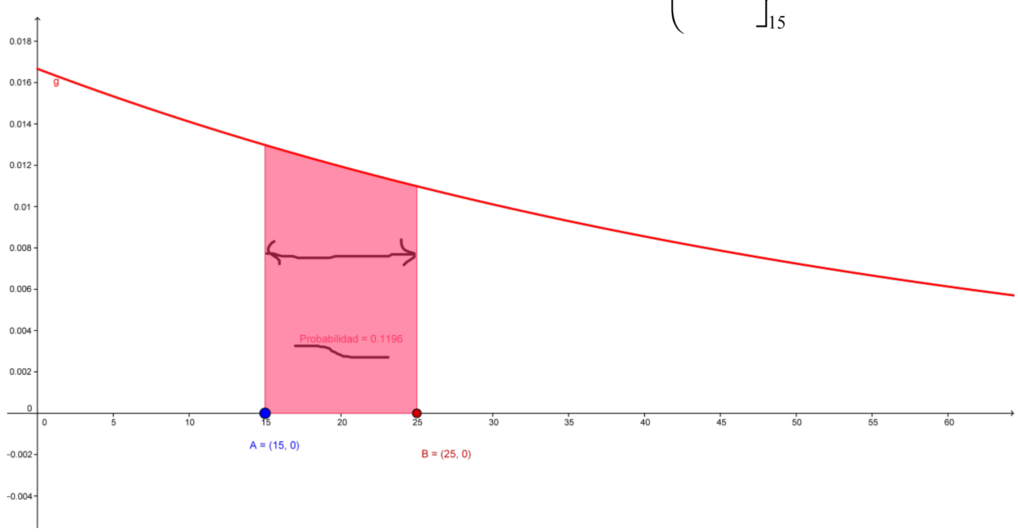


Figura 19. Visualización del cálculo de probabilidad

b) Sea por lo menos 50 horas:

$P(X \geq 50) = \underset{b \to \infty +}{Lím} \int_{50}^{b} f(x)dx = 0.4346 \approx 43\%$ Probabilidad; como se visualiza en la *figura 20*

Justificación algebraica:

$$P(50, \infty) = \underset{b \to \infty +}{Lím} \int_{50}^{b} \frac{1}{60} e^{-\frac{x}{60}} dx$$

$$= \underset{b \to \infty}{Lím} \left[-e^{-\frac{x}{60}} \right]_{50}^{b} = \underset{b \to \infty}{Lím} \left(-e^{-\frac{b}{60}} + e^{-\frac{50}{60}} \right) = 0 + e^{-\frac{50}{60}} = 0.435 \approx 43\%$$

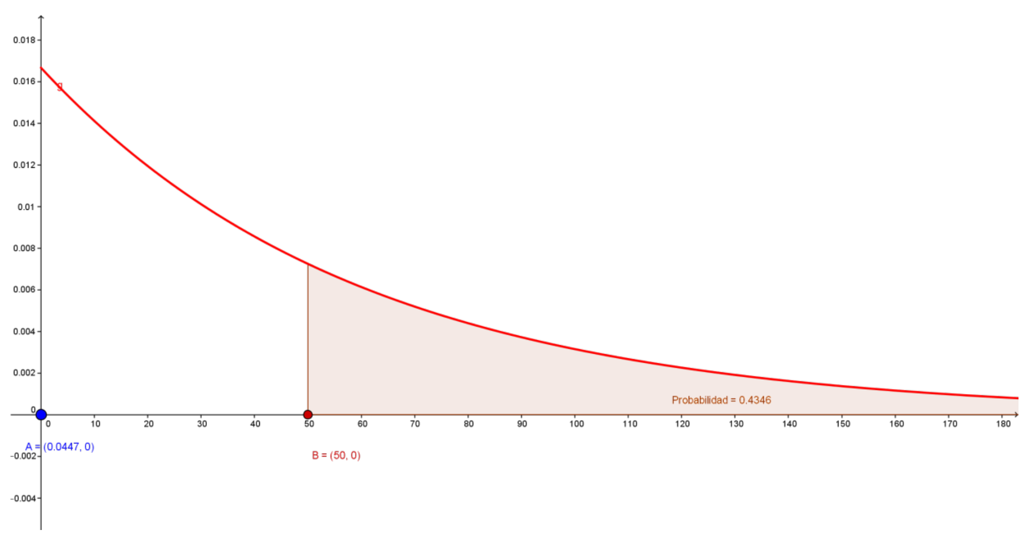


Figura 20. Visualización del cálculo de probabilidad

c) No más de 50 horas:

$P(X \leq 50) = \underset{a \to 0}{Lím} \int_{0}^{50} f(x)dx = 0.5654 \approx 57\%$ Probabilidad; como se visualiza en la *figura 21*

Justificación algebraica:

Se aplica las condiciones de la función

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{60} e^{-x/60} & si\, x \geq 0 \\ 0 & si\, x < 0 \end{Bmatrix}$$

$$P(0 \leq 50) = \underset{a \to 0}{Lím} \int_{a}^{50} \frac{1}{60} e^{-\frac{x}{60}} dx$$

$$= \underset{a \to 0}{Lím} \left[-e^{-\frac{x}{60}} \right]_{a}^{50} = -e^{-\frac{50}{60}} + e^{-\frac{a}{60}} = -0.4346 + 1 = 0.5654 \approx 57\%$$

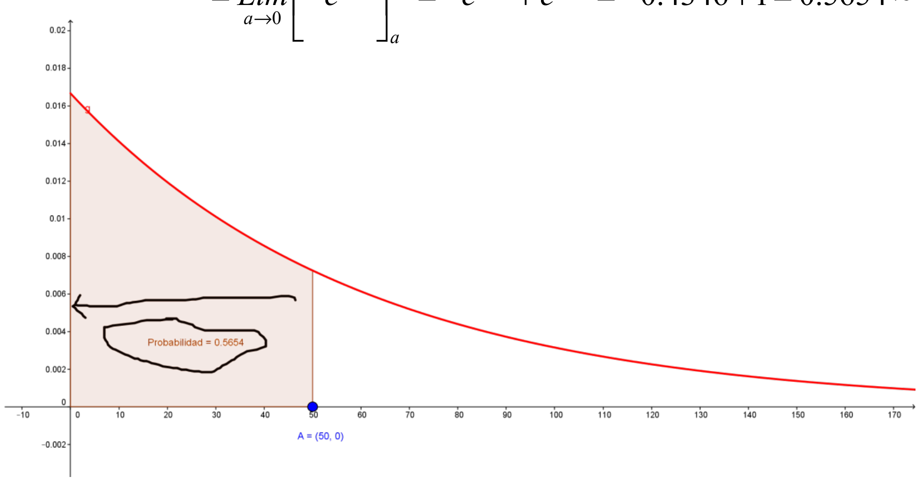


Figura 21. Visualización del cálculo de probabilidad

d) Por lo menos 75 horas.

$P(X \geq 75) = \underset{b\to\infty}{Lím} \int_{75}^{b} f(x)dx = 0.2865 \approx 29\%$ Probabilidad; como se visualiza en la *figura 22*

Justificación algebraica:

$$P(75, \infty+) = \underset{b\to\infty}{Lím} \int_{75}^{\infty} \frac{1}{60} e^{-\frac{x}{60}} dx$$

$$\underset{b\to\infty}{Lím} \left[-e^{-\frac{x}{60}} \right]_{75}^{b} = -e^{-\frac{b}{60}} + e^{-\frac{75}{60}} = 0 + 0.2865 = 0.2865 \approx 29\%$$

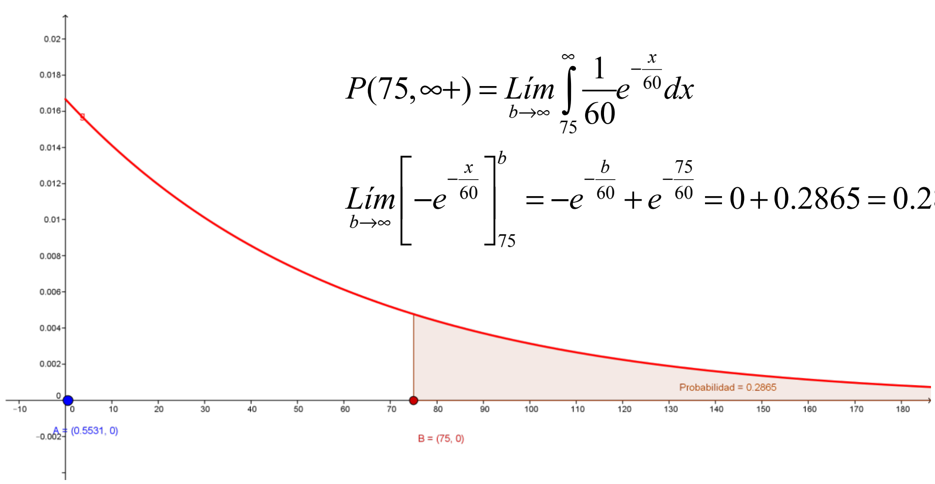


Figura 22. Visualización del cálculo de probabilidad

Problema 4: las puntuaciones del cociente intelectual (CI) tienen una distribución normal con una media (μ)=100 y desviación estándar (σ)= 15. Justifica los resultados usando la Tabla de Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene una puntuación de 'CI' entre 85 y 115?

$P(85 \leq X \leq 115) = \int_a^b f(x)dx = 0.6827 \approx 68\%$ Probabilidad; como se visualiza en la *figura 23*

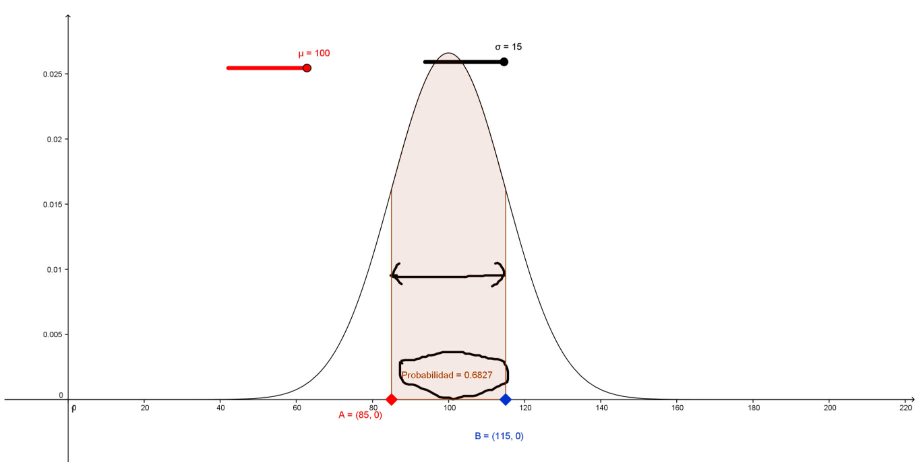


Figura 23. Visualización del cálculo de probabilidad

Justificación: el resultado se usa la tabla de la Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

$$P(-a \le Z \le b) = P(Z \le b) - (1 - P(Z \le -a)$$
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{85-100}{15} = -1$$
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{115-100}{15} = 1$$
$$Tabla: Z = -1 = 0.8413;\ Z = 1 = 0.8413$$
$$P(-a \le Z \le b) = 0.8413 - (1 - 0.8413) = 0.6826$$

Por tanto el 68% de la población tiene una puntuación de "CI" entre el 85 y 115.

b) ¿Qué porcentaje de la población tiene un 'CI' arriba de 140?

$P(X > 140) = P\left(X > B\right) = \underset{X \to \infty}{Lím} \int_{B}^{X} f(x)dx = 0.0038 \approx 0.4\%$; se visualiza en la *figura 24*

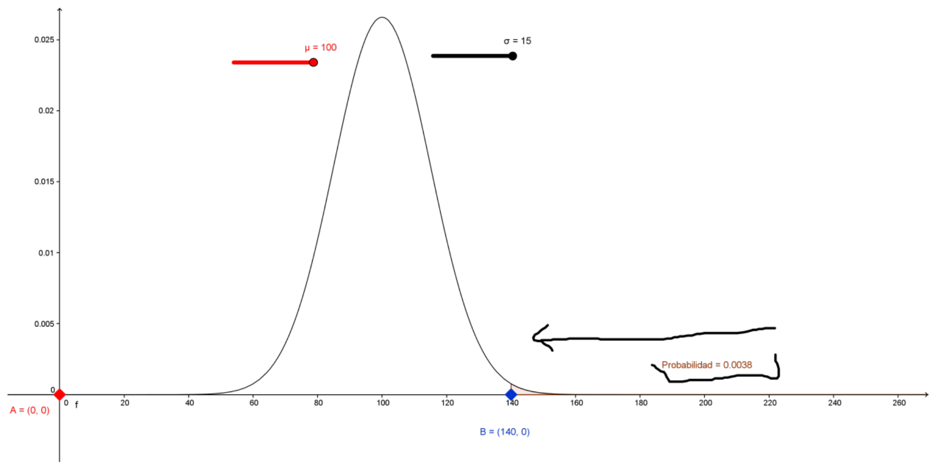


Figura 24. Visualización del cálculo de probabilidad

Justificación: el resultado se usa la tabla de la Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

$$P(Z > 140) = 1 - P(Z < B)$$
$$Z = \frac{140 - 100}{15} = 2.6666$$
$$Z = 0.9961$$
$$P(Z > 140) = 1 - 0.9961 = 0.0039 \approx 0.4\%$$

Cerca del 0.4% de la población tiene un “CI” de más de 140 puntos.

Problema 5: El “proyecto basura” en la universidad de Arizona informa que la cantidad de papel que se desecha en los hogares por semana tiene una distribución normal con media de $\mu = 9.4\,lb.$ y desviación estándar $\sigma = 4.2\,lb$. Justifica los resultados usando la Tabla de Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

a) ¿Qué porcentaje de los hogares tira por lo menos 10 Lb. de papel a la semana?

$P(X > 10) = P(X > B) = \underset{X\to\infty}{Lím} \int_{B}^{X} f(x)dx = 0.4432 \approx 44\%$, se visualiza en la *figura 25*

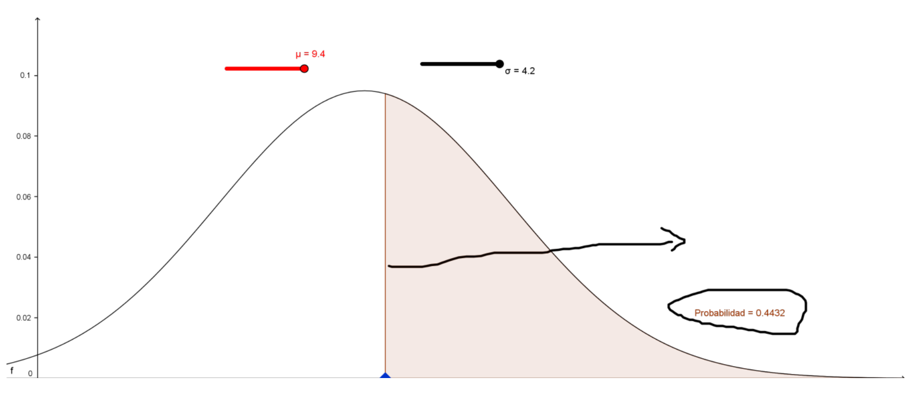


Figura 25. Visualización del cálculo de probabilidad

Justificación: el resultado se usa la tabla de la Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

$$P(Z>10)=1-P(Z<B)$$
$$Z=\frac{10-9.4}{4.2}=0.1429$$
$$Tabla: Z=0.5557$$
$$P(Z>10)=1-0.5557=0.4443\approx 44\%$$

Problema 6: El contenido de unas cajas de cereal indica 500g. La máquina que llena las cajas produce pesos que tienen una distribución normal con desviación estándar de 12g. Justifica los resultados usando la Tabla de Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

a) Si el peso objetivo es 500g, ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina produzca una caja con menos de 480g. de cereal?

$P(X<480)=P(X<A)=\underset{X\to-\infty}{Lím}\int_X^A f(x)dx=0.0478\approx 5\%$, se visualiza en la figura 26.

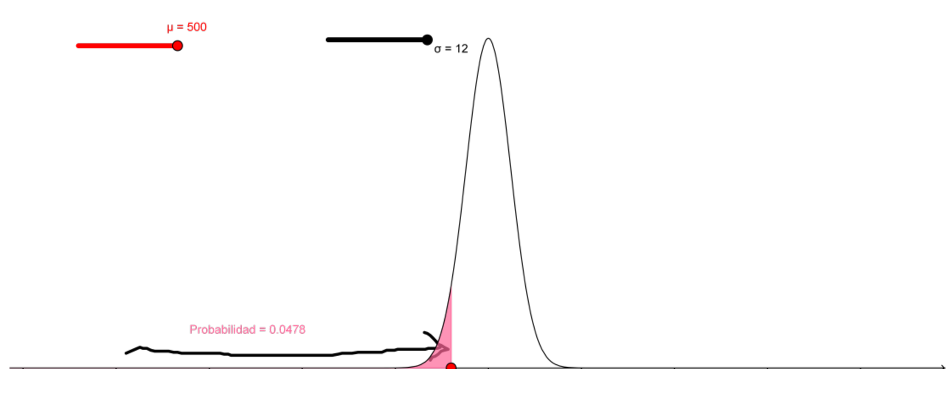


Figura 26. Visualización del cálculo de probabilidad

Justificación: el resultado se usa la tabla de la Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

$$P(Z<480)=1-P(Z<480)$$
$$Z=\frac{480-500}{12}=\frac{-20}{12}=-1.6666$$
$$Tabla:Z=0.9515$$
$$P(Z<480)=1-0.9515=0.0485\approx 5\%$$

b) Suponga que una ley establece que no más de 5% de las cajas de cereal de un fabricante puede contener menos del peso establecido de 500g. ¿En qué peso objetivo debe fijar el fabricante su máquina de llenado?

$P(X<K)=5\%=P(X<480.3)=0.0503\approx 5\%$ Por lo tanto el fabricante debe fijar la máquina de llenado en 480.3 g

Justificación: el resultado se usa la tabla de la Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

$$P(Z<K)=5\%$$
$$X=480.3$$
$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{480.3-500}{12}=-1.64$$
$$Tabla: Z=0.9495$$
$$P(Z<K)=1-0.9495=0.0505\approx 5\%$$

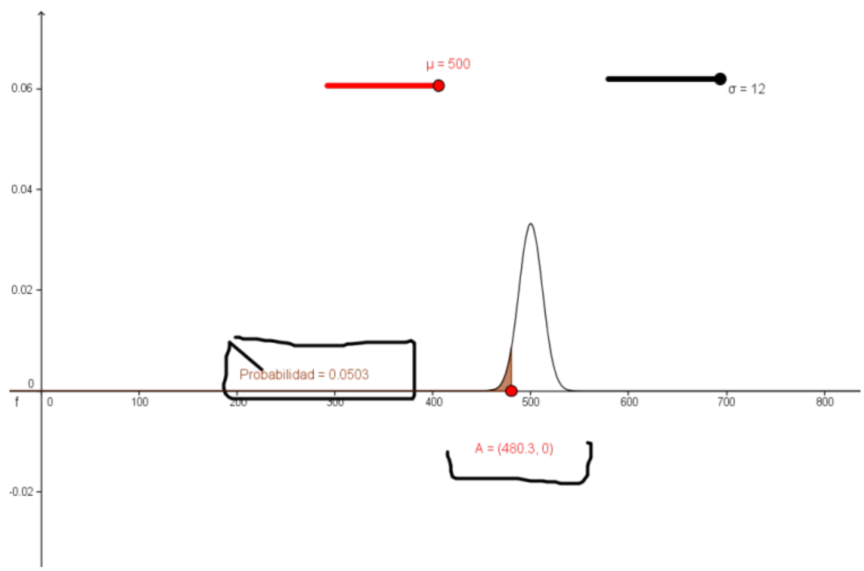


Figura 27. Visualización del cálculo de probabilidad

Problema *7*: Las magnitudes de la rapidez de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 100 km/h usualmente están distribuidos con una media de 112 km/h y una desviación estándar de 8 km/h. Justifica los resultados usando la Tabla de Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo elegido al azar esté viajando con una velocidad dispuesta por ley?

$P(X \leq 100) = P(X \leq A) = \underset{X \to -\infty}{Lím} \int_X^A f(x)dx = \int_{-\infty}^{100} f(x)dx = 0.0668 \approx 7\%$, en la figura 28 se visualiza el resultado.

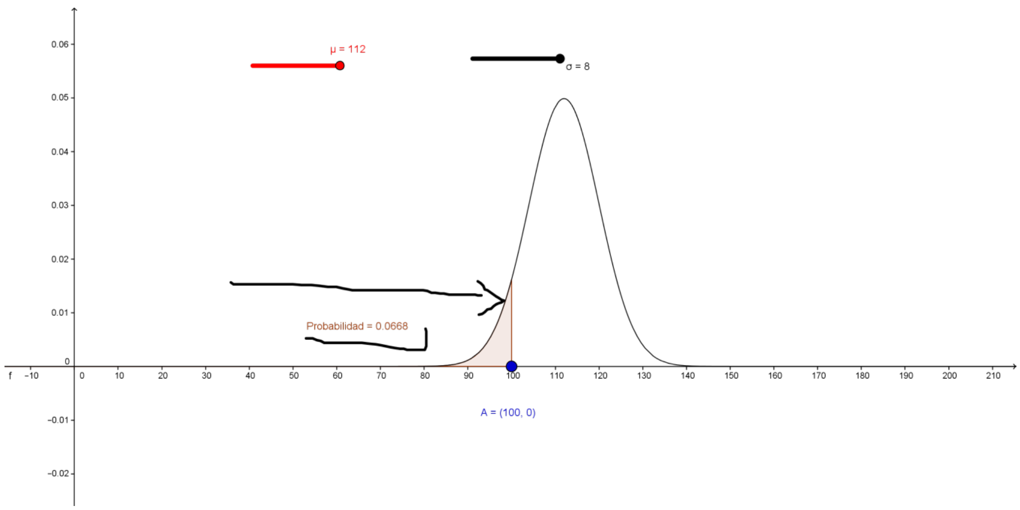


Figura 28. Visualización del cálculo de probabilidad

Justificación: el resultado se usa la tabla de la Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

$$P(Z \le -a) = 1 - P(Z \le -a)$$
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{100-112}{8} = \frac{-12}{8} = 1.5$$
$$Tabla: Z = 0.9332$$
$$P(Z \le 100) = 1 - 0.9332 = 0.0668 \approx 7\%$$

b) Si los policías están instruidos para infraccionar a los automovilistas que conduzcan a 125 km/hr o más, que porcentaje de automovilistas están señalados.

$$P(X \ge 125) = P(X \ge B) = \underset{X\to\infty}{Lím}\int_B^X f(x)dx = 0.0521 \approx 5\%$$

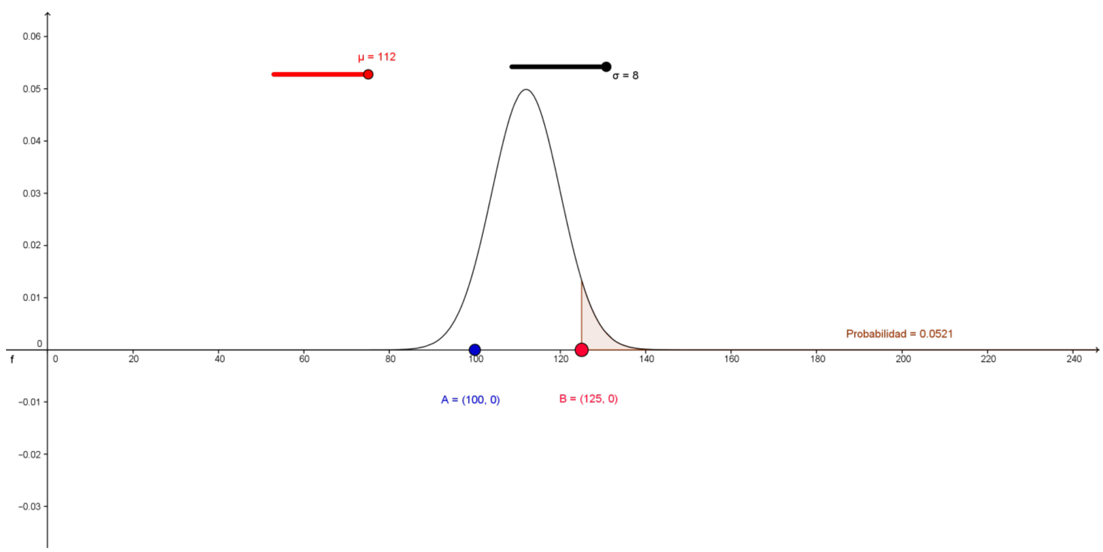


Figura 29. Visualización del cálculo de probabilidad

Justificación: el resultado se usa la tabla de la Distribución Normal $N(0,1)$ para probabilidad acumulada.

$$P(Z \geq B) = 1 - P(Z \geq B)$$
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{125 - 112}{8} = \frac{13}{8} = 1.625$$
$$Tabla : Z = 0.9474$$
$$P(Z \geq 125) = 1 - 0.9474 = 0.0526 \approx 5\%$$

Problema 8: Para un cierto tipo de lámparas, la función de densidad de probabilidad de que x horas sea la vida de una lámpara elegida al azar está dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{40}e^{-\frac{x}{40}}, si\ x\geq 0\\ 0 \qquad\quad , si\ x<0\end{cases}$$

Desarrolla algebraicamente la solución para justificar los resultados.

Determine la probabilidad de que la vida de una lámpara elegida al azar:

a) Esté entre 40 y 60 horas:

$$P(40\leq X\leq 60)=\int_A^B f(x)dx=\int_{40}^{60} f(x)dx=0.14\approx 14\%$$

Justificación algebraica:

$$P(40,60)=\int_{40}^{60}\frac{1}{40}e^{-\frac{x}{40}}dx=\int_{40}^{60}e^{-\frac{x}{40}}\left(-\frac{1}{40}\right)dx=\left(-e^{-\frac{x}{40}}\right]_{40}^{60}$$

$$=-e^{-\frac{60}{40}}+e^{-\frac{40}{40}}=-0.2231+0.3679=0.1447492\approx 14\%$$

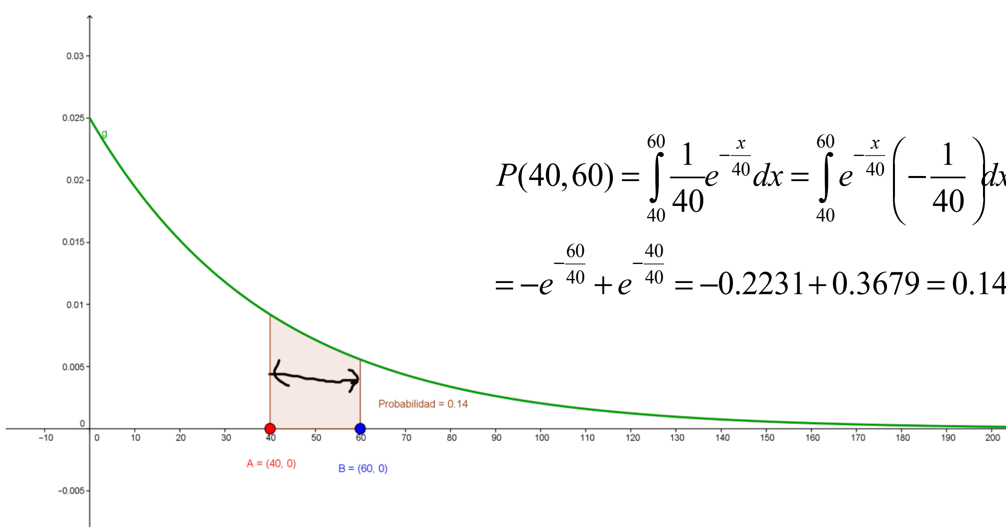
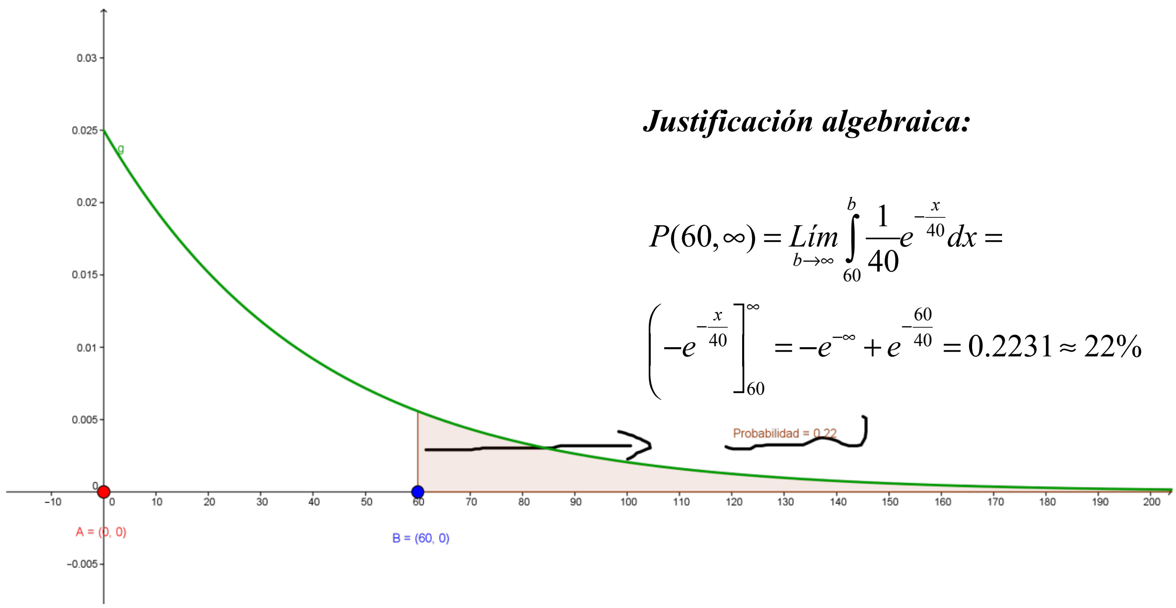


Figura 30. Visualización del cálculo de probabilidad

b) Sea por lo menos 60 horas.

$$P(X \geq 60) = P(X \geq B) = \underset{X \to \infty}{Lím} \int_{B}^{x} f(x)dx = 0.22 \approx 22\%$$



Justificación algebraica:

$$P(60, \infty) = \underset{b \to \infty}{Lím} \int_{60}^{b} \frac{1}{40} e^{-\frac{x}{40}} dx =$$

$$\left(-e^{-\frac{x}{40}} \right]_{60}^{\infty} = -e^{-\infty} + e^{-\frac{60}{40}} = 0.2231 \approx 22\%$$

Figura 31. Visualización del cálculo de probabilidad

Problema 9: En una cierta ciudad, la función de densidad de probabilidad de que 'x' minutos sea la duración de una llamada telefónica elegida al azar está dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}, si\ x\geq 0\\ 0 \quad\quad , si\ x<0\end{cases}$$

Determine la probabilidad de que una llamada telefónica seleccionada al azar dure:

a) Entre 1 y 2 minutos

$$P(1\leq X\leq 2)=\int_A^B f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx=0.2\approx 20\%$$

Justificación algebraica:

$$P(1,2)=\int_1^2 \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}dx=\left(-e^{-\frac{x}{3}}\right]_1^2=-e^{-\frac{2}{3}}+e^{-\frac{1}{3}}$$
$$=-0.5134+0.7165=0.2031\approx 20\%$$

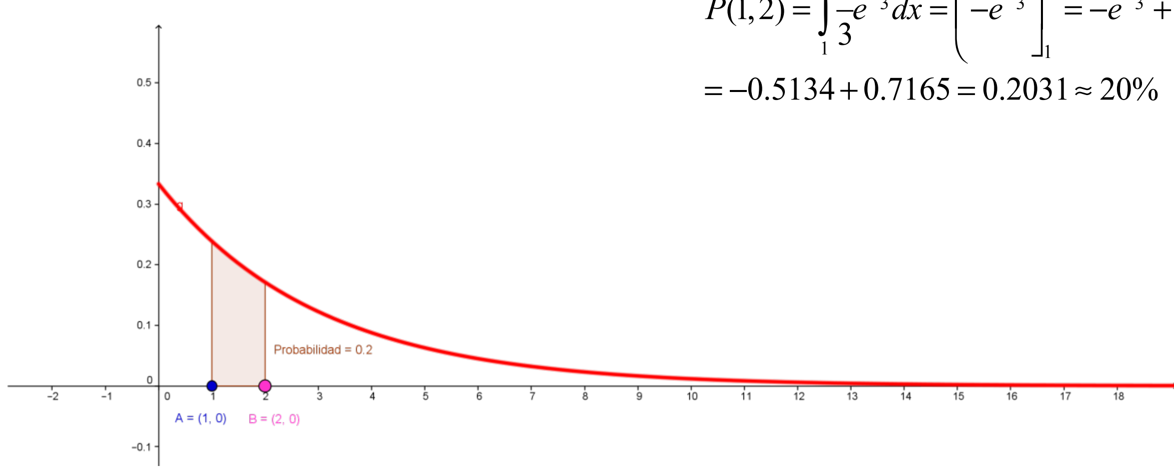


Figura 32. Visualización del cálculo de probabilidad

b) Por lo menos 5 min.

$$P(X \geq 5) = P(X \geq B) = \underset{X \to \infty}{Lím} \int_{B}^{X} f(x)dx = 0.1889 \approx 19\%$$

Justificación algebraica:

$$P(5,\infty) = \underset{b \to \infty}{Lím} \int_{5}^{b} \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} dx = \left(-e^{-\frac{x}{3}} \right]_{5}^{\infty} =$$

$$-e^{-\frac{\infty}{3}} + e^{-\frac{5}{3}} = 0 + 0.1888 \approx 19\%$$

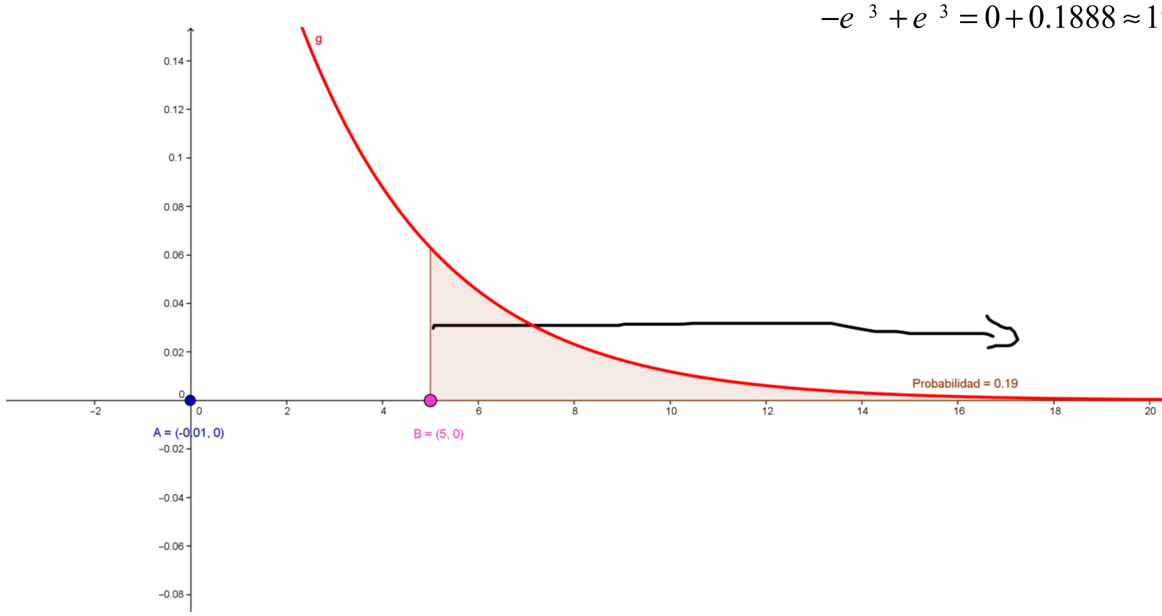


Figura 33. Visualización del cálculo de probabilidad

Anexo 3. La generalización del Teorema Barrow [La Integral Impropia]

Ejemplos-Contraejemplos.

Propiedades de la integral impropia.

Integrales Impropias: al definir la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ se trató de una función f definida en un intervalo finito $[a,b]$ y se supuso que f no tiene una discontinuidad infinita. La integral impropia amplía (generaliza) el concepto de una integral definida para el caso donde el intervalo es infinito y también el caso donde f tiene una discontinuidad infinita en $[a,b]$.

Intervalos infinitos. Definición de una integral impropia Tipo I

a) Si la $\int_a^t f(x)dx$ existe para todo número $t \geq a$, por lo tanto

$$\int_a^\infty f(x)dx = \underset{t\to\infty}{Lím}\int_a^t f(x)dx$$

Siempre que exista el límite (como un número finito).

b) Si existe para todo número $t \leq b$, después

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \underset{t\to-\infty}{Lím}\int_t^b f(x)dx$$

Siempre que exista el límite (como un número finito)

Las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)dx$ *y* $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ *se llaman convergentes si el límite correspondiente existe y divergentes si el límite no existe.*

c) Si tanto $\int_a^{\infty} f(x)dx$ como $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ son convergentes, entonces se define

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

Integrandos discontinuos. Definición de una integral impropia de tipo II

Suponga que f es una función continua positiva definida en un intervalo finito $[a,b)$ pero tiene una asíntota vertical en b. Sea S la región no acotada bajo la gráfica de f y arriba del eje x entre a y b

a) Si f es continua en $[a,b)$ y es discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \underset{t\to b^-}{Lím}\int_a^t f(x)dx$$

Si este límite existe (como un número finito).

b) Si f es continua $(a,b]$ en y es discontinua en a ,entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \underset{t\to a^+}{Lím}\int_t^b f(x)dx$$

Si este límite existe (como un número finito).

La integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ *se llama convergente si existe el límite correspondiente y divergente si no existe el límite.*

c) Si f tiene una discontinuidad en c, donde $a < c < b$, como $\int_a^c f(x)dx$ y $\int_c^b f(x)dx$ son convergentes, después se define

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ejemplos-Contraejemplos: Usa la tecnología (GeoGebra), las propiedades de la Integral Impropia [Tipo: I y II] para evaluar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales. Para justificar tus conjeturas transita-articula entre representaciones (gráfica-algebraica-numérica).

I. Sea la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k} dx$. ***Condición:*** donde $k \in N.R.enteros.$

Determina:

a) ¿Para qué valores de ‘k’ la integral es convergente?

b) *¿Para qué valores de ‘k’ la integral es divergente?*.

Analogía: es una integral impropia tipo I (intervalo infinito)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^k} dx$$

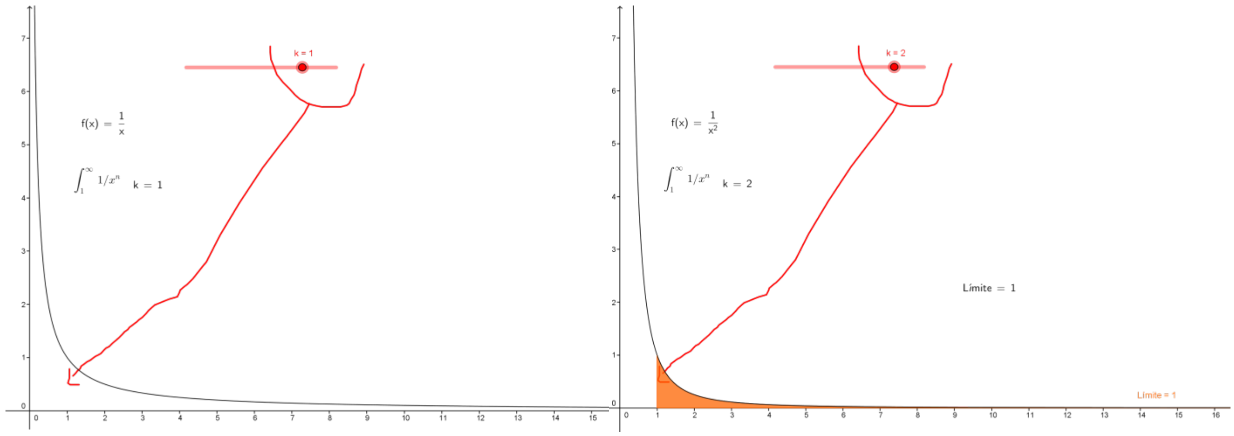


Figura 34 visualización de convergencia-divergencia

Análisis numérico de la integral impropia [datos obtenidos usar el deslizador]

<table>
<tr><th>Integral Impropia</th><th>k</th><th>Límite</th><th>Característica</th><td rowspan="5">Conclusión: apoyado en los datos obtenidos a usar el deslizador y visualizando, la integral:

a) Converge para valores de $k > 1$
b) Diverge para valores de $k \leq 1$</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>-1</td><td>indefinido</td><td>divergente</td></tr>
<tr><td>1</td><td>indefinido</td><td>divergente</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>indefinido</td><td>divergente</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>convergente</td></tr>
</table>

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x^k} dx$	-10	indefinido	divergente	
	10	0.11	convergente	
	-20	indefinido	divergente	
	20	0.05	convergente	
	-30	indefinido	divergente	
	30	0.03	convergente	
	-50	indefinido	divergente	
	50	0.02	convergente	

Tabla de valores numéricos (convergencias-divergencias)

II. Sea la integral $\int_2^{\infty} \frac{k}{(x-1)^k} dx$. ***Condición:*** donde $k \in N.R.enteros.$

Analogía: es una integral impropia tipo I (intervalo infinito)

$$\int_{2}^{\infty} \frac{k}{(x-1)^{k}} dx = \underset{t\to\infty}{Lím} \int_{2}^{t} \frac{k}{(x-1)^{k}}\, dx$$

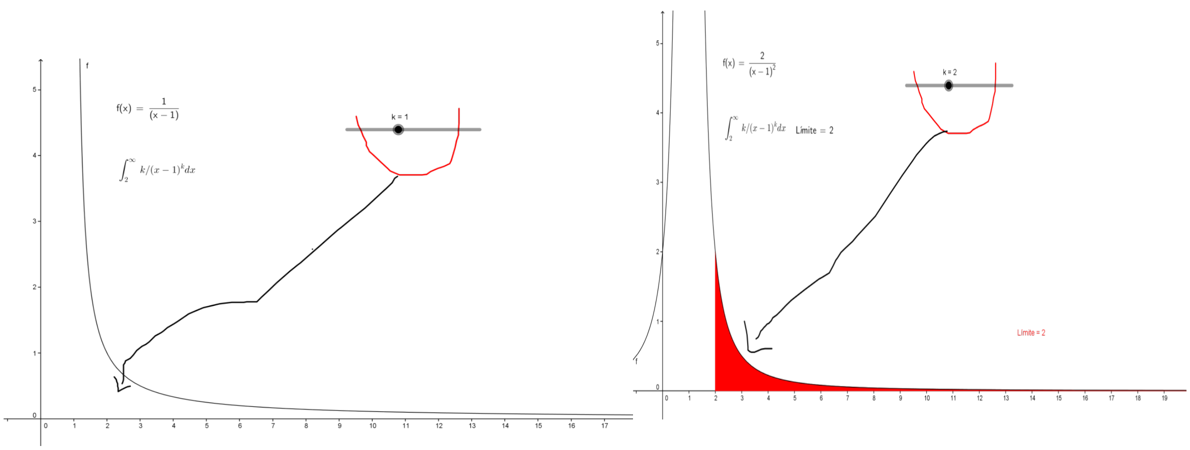


Figura 35 visualización de convergencia-divergencia

<table>
<tr><th>Integral Impropia</th><th>k</th><th>Límite</th><th>Característica</th><th>Conclusiones</th></tr>
<tr><td rowspan="12">$\int_{2}^{\infty} \frac{k}{(x-1)^k}\,dx = \underset{t\to\infty}{Lím} \int_{2}^{t} \frac{k}{(x-1)^k}\,dx$</td><td>1</td><td>indefinido</td><td>divergente</td><td rowspan="12">Apoyado en los datos obtenidos a usar el deslizador y visualizando, la integral:
a) Converge para valores de $k \geq 2$
b) Diverge para valores de $k < 2$</td></tr>
<tr><td>-5</td><td>indefinido</td><td>divergente</td></tr>
<tr><td>-10</td><td>indefinido</td><td>divergente</td></tr>
<tr><td>-20</td><td>indefinido</td><td>divergente</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>convergente</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1.11</td><td>convergente</td></tr>
<tr><td>20</td><td>1.05</td><td>convergente</td></tr>
<tr><td>30</td><td>1.03</td><td>convergente</td></tr>
<tr><td>50</td><td>1.02</td><td>convergente</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla de valores de convergencias-divergencias

III. Demostrar que la integral: $\int_0^{\infty} e^{-px} dx \begin{cases} converge\ si\ p > 0 \\ diverge\ si\ p \leq 0 \end{cases}$

IV. Determine cuán grande tiene que ser el número ´a´ para que $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx < 0.001$

V. Demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi \therefore$ es convergente

1) Sea la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$ (convergente). Demostrar el resultado transitando entre representaciones (gráfica, algebraica y numérica).

Analogía

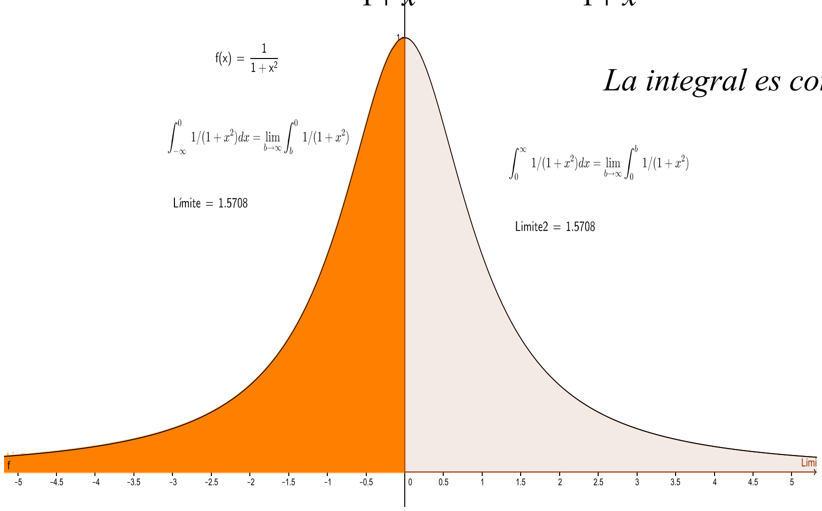
Es una integral impropia tipo I: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$

Algebraica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \underset{a\to-\infty}{Lím}\int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \underset{a\to-\infty}{Lím}\left(\tan^{-1}(x)\right]_{a}^{0} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \underset{b\to\infty}{Lím}\int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx = \underset{b\to\infty}{Lím}\left(\tan^{-1}(x)\right]_{0}^{b} = \frac{\pi}{2}$$



La integral es convergente

Figura 39 visualización de convergencia-divergencia

VI. Demostrar si es verdadero o falso el siguiente cálculo $\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = ln|x-1|_0^3 = ln2 - ln1 = ln2$

VII. Demostrar el valor de la verdad, o de la falsedad de la siguiente afirmación. En caso de ser falsa, explicar porqué o mostrar un contraejemplo.

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^{1} x^{-2} dx = -x^{-1}]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$

VIII. ¿Encuentras algún error en el siguiente razonamiento algebraico?

$$\int_2^5 \frac{dx}{(x-4)^2} = \frac{-1}{x-4}\Big]_2^5 = \left(\frac{-1}{5-4}\right) - \left(\frac{-1}{2-4}\right) = -1 + \frac{1}{-2} = -1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

X. Determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Si son verdaderos, explique por qué. Si son falsos, explique por qué o de un ejemplo que refute a los enunciados (contraejemplos).

a. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\sqrt{2}}} dx$ es convergente

b. Si $f(x)$ es continua, por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)dx$

Anexo 4. SESIÓN 4: Entrevista semiestructurada

Objetivos de la Sesión:

- ✓ Aplicar una entrevista semi-estructurada en donde el foco será investigar las características de los argumentos declarados por los estudiantes en un ambiente tecnológico interactivo (¿en qué momento usa tecnología?; ¿para qué la usa?; ¿cómo la usa?). Se realiza la entrevista 'semi-estructurada' se apertura con una conjetura en relación a un ejercicio no rutinario que solicita retos y justificaciones,
- ✓ Promover el aprendizaje individual-colaborativo-debate científico-autoreflexión,
- ✓ Aplicar el Modelo de Toulmin (2003) con todos sus elementos, con el objeto de modelar fielmente todo el rango de argumentación (Conclusión, Datos, Garantía, Sustento, Calificativo Modal, Refutación),

Instrucciones: Apoyado en la tecnología, articula las representaciones (gráfica-numérica-algebraica) para argumentar tus resultados. Usa el deslizador para conjeturar-justificar.

Actividad: Demuestre que si: $a > -1$ y $b > a+1$, entonces la siguiente integral es convergente.

Sea la integral: $\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^b} dx$

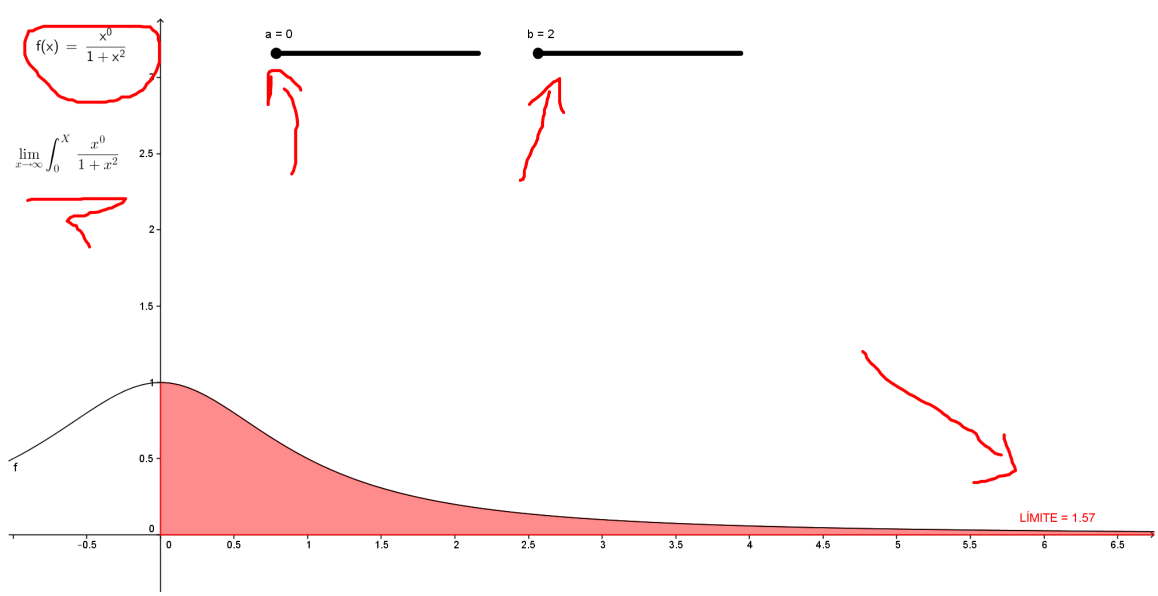
Integral impropia Tipo I: Si la $\int_a^t f(x)dx$ existe para todo número $t \geq a$, por lo tanto:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \underset{t\to\infty}{Lím} \int_0^t f(x)dx = \underset{t\to\infty}{Lím} \int_0^t \frac{x^a}{1+x^b} dx$$

Interactuando con la tecnología (usando el deslizador del GeoGebra) se puede visualizar 'conjeturar-justificar' que cumpliendo con las condiciones $a > -1$ y $b > a+1$ la integral impropia es convergente. Articulando las representaciones (Algebraica-Gráfica-Numérica) se puede demostrar que: cuando $a = 0, b = 2$ la integral converge a un límite de 1.5708

Expresión	Condiciones		Integral	Límite
	$a > -1$	$b > a+1$		
	0	**2**	**Converge**	**1.5708**
	2	4	Converge	1.11
	6	8	Converge	1.03
	10	12	Converge	1.01

$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b}dx$	12	14	Converge	1.01
	20	22	Converge	1
	40	42	Converge	1
	60	62	Converge	1
	100	102	Converge	1
	102	104	Converge	1
	104	106	Converge	1.02
	106	108	Converge	1
	108	110	Converge	0.93



Se analiza la expresión dada y se puede demostrar algebraicamente para valores de $a=0, b=2$ se cumple con las condiciones $a>-1$ y $b>a+1$, se sustituyen los valores en la expresión

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b}dx=\int_0^\infty \frac{x^0}{1+x^2}dx=\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$$

$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \underset{t\to\infty}{Lím}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx$ Aplica el teorema de integración:

$$\int \frac{dv}{a^2+v^2}=\frac{1}{a}tg^{-1}\left(\frac{v}{a}\right)$$

$Donde:$

$a^2=1$

$a=1$

$v^2=x^2$

$v=x$

$dv=dx$

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\left(tg^{-1}(x)\right]_0^t = tg^{-1}(\infty)-tg^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}\approx 1.5708$$

Por lo tanto el Límite existe y la integral es convergente.

Anexo 5. Evidencias fotográficas de los momentos de experimentación de las cuatro etapas...

Primera etapa. ***Primera etapa:*** se propuso una situación problema contextual que solicita retos y justificaciones.

Sesión 1. Se apertura explicando la dinámica de las actividades a realizar por parte del profesor, y se entrega a cada estudiante las hojas de trabajo.

Episodio 1: 60 minutos.

Fase 1:(Trabajo individual). Tiene por objetivo que los alumnos reflexionen sobre la situación o problema a resolver y escriban sus ideas intuitivas o representaciones externas (verbales y diagramas). En la *figura 1* se visualizan los estudiantes realizando sus tareas de manera individual.

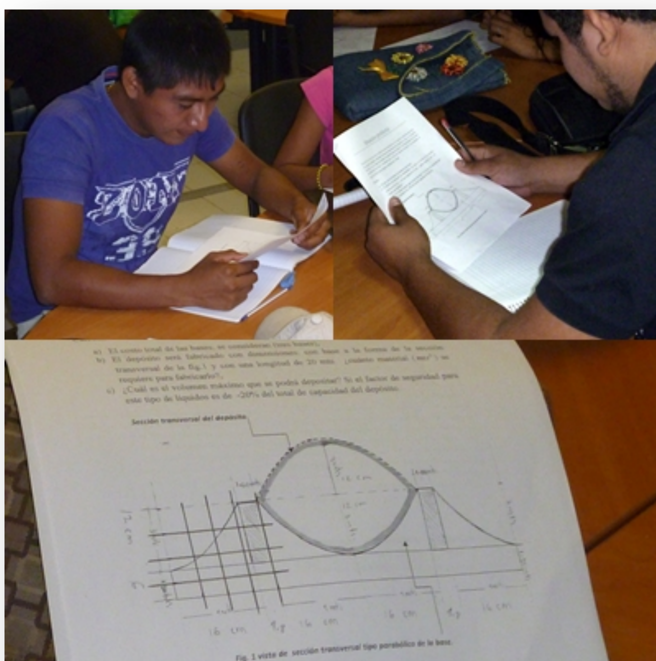


Figura 1. Trabajo individual

Episodio 2: 120 minutos.

Fase 2 (Trabajo en equipo) Trabajo en equipo sobre una misma situación, proceso de discusión y validación [refinamiento de las representaciones funcionales]. En la *figura 2* se visualizan los estudiantes realizando sus tareas en equipo.

Figura 2. Trabajo en equipo

Episodio 3: 90 minutos.

Fase 3 (Debate grupal) [la discusión podría generar un debate científico] Durante esta etapa, toda la clase discute las diferentes formas de representación para resolver la tarea en cuestión, utilizando de nuevo, principalmente, los procesos de argumentación y de validación. El refinamiento de las representaciones se produce durante esta etapa en la que pueden aparecer algunas conjeturas. En la *figura 3* se visualizan momentos con los estudiantes realizando sus tareas en un ambiente colaborativo de discusión grupal.

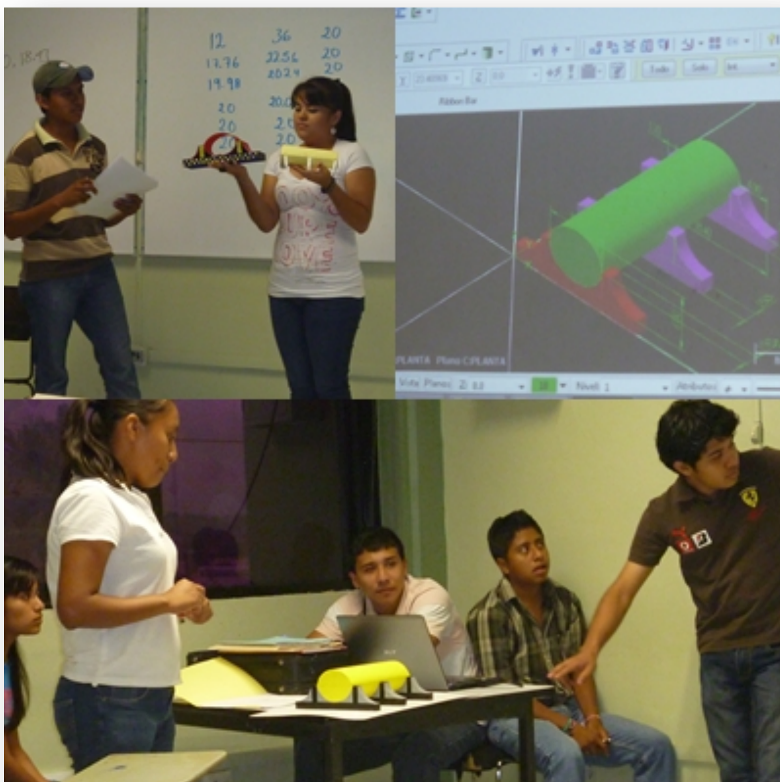


Figura 3. Debate grupal - debate científico

Episodio 4: 60 minutos.

Fase 4 (Auto-reflexión) [estudiantes regresan individualmente a la tarea, que es un proceso de reconstrucción]. En esta fase los alumnos trabajan individualmente sobre la misma actividad. Esto permite a los estudiantes individualmente reconstruir la solución de la tarea, y también reforzar la estabilidad del conocimiento discutido durante el debate. En la *figura 4* se visualizan momentos con los estudiantes realizando sus tareas en un ambiente de auto-reflexión.

Figura 4. Auto-reflexión

Episodio 5: 60 minutos.

Fase 5 (Proceso de Institucionalización de saberes). El profesor introduce el tema, teniendo en cuenta los resultados de los estudiantes y el uso de las representaciones institucionales. En la etapa de institucionalización de saberes, el profesor una vez realizado el análisis de las producciones de los estudiantes en la etapa de auto-reflexión al término de las actividades, inicia un proceso de institucionalización, utilizando las representaciones de los estudiantes y complementándolas con las representaciones institucionales, sin olvidar la importancia de enfatizar los procesos y resultados que los estudiantes lograron al transitar-articular entre representaciones [gráfica-algebraica-numérica-verbal]. En la *figura 5* se visualizan momentos del proceso de institucionalización de saberes.

Figura 5. Proceso de institucionalización de saberes

Segunda etapa:

Sesión 2: Problemas integral impropia - probabilidad

Segunda etapa: Se proponen problemas contextuales, situación que obliga a producir representaciones que permitan ligar aspectos matemáticos no en forma directa sino a través del tránsito-articulación entre representaciones [gráfica-algebraica-numérica]. En esta etapa, es importante generar datos y encontrar un modelo matemático [función] que permita explicar el fenómeno a partir del modelo matemático. A partir de los datos tomados de la vida real, debemos tratar de encontrar un modelo matemático que nos permita explicar el fenómeno, e incluso predecir lo que podría suceder en algún momento dado.

Episodio 1: 60 minutos.

Fase1. Trabajo individual. Esta fase de trabajo individual tiene como objetivo que los alumnos reflexionen sobre el problema a resolver y puedan escribir sus ideas intuitivas para darle solución, para cuando se reúnan en equipos, aporten ideas a la actividad planteada. En la *figura 6* se visualizan los estudiantes realizando sus tareas de manera individual.

Figura 6. Trabajo individual

Episodio 2: 120 minutos.

Fase 2 (trabajo en equipo). En esta fase surge un aprendizaje colaborativo, se refiere a la actividad de pequeños grupos desarrollada en el salón de clase. En la *figura 7* se visualizan los estudiantes realizando sus tareas en equipo.

Figura 7. Trabajo en equipo

Episodio 3: 90 minutos.

Fase 3. Debate (la discusión podría generar un debate científico). Durante esta etapa, toda la clase discute las diferentes formas de representación para resolver la tarea en cuestión, utilizando de nuevo, principalmente, los procesos de argumentación y de validación. En la *figura 8* se visualizan momentos con los estudiantes realizando sus tareas en un ambiente de discusión y retroalimentación.

Figura 8. Debate científico

Episodio 4: 60 minutos.

Fase 4. Autoreflexión (estudiantes regresan individualmente a la tarea, que es un proceso de reconstrucción). Esta etapa permite a los estudiantes individualmente reconstruir la solución de la tarea, y también reforzar la estabilidad del conocimiento discutido durante el debate. En la *figura 9* se visualizan momentos con los estudiantes realizando sus tareas en un ambiente de autoreflexión.

Figura 9. Autoreflexión

Episodio 5: 60 minutos.

Fase 5. Proceso de Institucionalización. El profesor introduce el tema, teniendo en cuenta los resultados de los estudiantes y el uso de las representaciones institucionales. En la *figura 10* se visualizan momentos del proceso de institucionalización de saberes.

Figura 10. Proceso de Institucionalización de saberes

Tercera etapa.

Sesión 3. Ejemplos-contraejemplos [la generalización del teorema fundamental del cálculo (integral impropia].

Tercera etapa: Se proponen ejemplos-contraejemplos como promotor de un pensamiento convergente. Este enfoque nos permite fortalecer la construcción del conocimiento. Podemos decir entonces que cuando un enunciado matemático es un procedimiento ya establecido por una persona, podemos clarificar esta declaración como un ejercicio. El uso de ejemplos y contraejemplos no es ni algorítmica, ni procedimental y se requiere de un pensamiento matemático más flexible y dinámico. En este sentido Watson y Mason (2002) afirman que el aprendizaje de las Matemáticas se produce, principalmente, a través de la confrontación con ejemplos, más que a través de definiciones formales y técnicas [de hecho, afirman, es a través de los ejemplos que las definiciones cobran algún sentido, ya que las palabras técnicas matemáticas describen clases de objetos o relaciones con los que el aprendiz debe familiarizarse].

Episodio 1: 60 minutos.

Trabajo en equipo: En esta fase surge un aprendizaje colaborativo, se refiere a la actividad de pequeños grupos desarrollada en el salón de clase. En la *figura 11* se visualizan los estudiantes realizando sus tareas en equipo-trabajo colaborativo.

Figura 11. Trabajo en equipo

Episodio 2: 90 minutos.

Debate grupal (la discusión podría generar un debate científico). En la *figura 12* se visualizan momentos con los estudiantes realizando sus tareas en un ambiente de discusión.

Fig. 12 Debate

Episodio 3: 60 minutos.

Proceso de Institucionalización. En la *figura 13* se visualizan momentos del proceso de institucionalización de saberes.

Figura 13. Proceso de Institucionalización de saberes

Cuarta etapa

Fase de entrevista

Sesión 4: entrevista semiestructurada

Intención de la sesión:

- ✓ Aplicar una entrevista semiestructurada donde el objeto de estudio fue investigar ¿Cuáles son las características de los argumentos expuestos por los estudiantes mientras realizan sus tareas en un ambiente tecnológico? al dar solución a un ejercicio no rutinario que solicita retos y justificaciones en torno al concepto de integral impropia,
- ✓ Recolectar datos: audio-grabación, la pantalla de la computadora al interactuar con la tecnología, hojas de trabajo, observaciones de campo, combinación de observaciones,
- ✓ Usar el modelo de Toulmin (1958) con todos sus elementos (Conclusión, Datos, Garantía, Sustento, Calificativo Modal, Refutación) con el objeto de modelar fielmente todo el rango de argumentación...

Episodio 1: 30 min.

Trabajo individual: el trabajo individual tiene como objeto que los alumnos reflexionen sobre el ejercicio resolver y puedan escribir sus ideas intuitivas para darle solución, En la *figura 14* se visualizan las parejas [1 y 2] realizando sus tareas de manera individual con respecto a un ejercicio no rutinario que solicita retos y justificaciones en relación a la demostración de la convergencia de la integral impropia.

Pareja 1[Arel-Jos]

Pareja 2 [Celes-Dani]

Figura 14. Trabajo individual

Episodio 2: trabajo colaborativo en pareja (60 min)

Se refiere a la actividad en pareja, donde cada pareja intercambian información y trabajan en una tarea hasta que la han entendido y terminado, de esta manera ellos pueden aprender de sus puntos de vista, dar y recibir ayuda de su compañero y ayudarse mutuamente para investigar de forma más profunda acerca de lo que están aprendiendo. En la *figura 15* se visualizan los estudiantes realizando sus tareas en pareja en trabajo colaborativo.

Pareja 1[Arel-Jos] Pareja 2 [Celes-Dani]

Figura 15. Trabajo colaborativo

Episodio 3: Entrevista en pareja

Se aplicó una entrevista semiestructurada en pareja (mujer-hombre) en la que la intención del estudio fue que los estudiantes verbalizaban explícitamente los seis componentes del modelo de argumentación de Toulmin (1958) con el objeto de investigar la fuerza de los argumentos expuestos.

Para la apertura al debate el profesor expuso una conjetura, respecto a un ejercicio no rutinario que solicita retos y justificaciones. El debate se realizó entre la pareja-profesor; es importante señalar que antes de iniciar con la entrevista las parejas realizaron tareas con el ejercicio no rutinario durante aproximadamente 90 minutos (trabajo individual-colaborativo).

El profesor por momentos solicito a los estudiantes hacer explícitas sus ideas. En algunos casos el entrevistador (profesor) reclamo aclaraciones cuando la justificación no era muy clara (explicita), reclamando aclaraciones correspondientes. Se focalizo con especial atención, el uso del calificativo modal (Q) y refutación (R) con el objeto de investigar la fuerza del argumento expuesto. En la *figura 16* se visualizan los momentos de la entrevista con un guión flexible realizada a las parejas 1 y 2.

Pareja [Arel-Jos] Pareja 2 [Celes-Dani]

Figura 16. Entrevista en pareja