INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

UNIDAD ZACATENCO

DOCTORADO EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA

MÉTODOS PSEUDOANALÍTICOS APLICADOS A MODELOS DE LA TEORÍA DE CAMPOS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA
PRESENTA

ANTONIO CASTAÑEDA SOLIS

DIRECTOR DE TESIS: DR. VLADISLAV KRAVCHENKO CHERKASSKI

MÉXICO, D.F., JUNIO DEL 2006

CGPI-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 14:00 horas del día 27 del mes de abril del 2006 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de SEPI-ESIME-CULH. para examinar la tesis de grado titulada:

"METODOS PSEUDOANALITICOS APLICADOS A MODELOS DE LA TEORIA DE CAMPOS"

Presentada por el alumno:

CASTAÑEDA	SOLIS	ANTONIO
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A0 | 1 | 0 | 3 | 1 | 2 |

Aspirante al grado de:

DOCTOR EN COMUNICACIONES Y ELECTRONICA

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

DR VLADISLAV KRAVCHENKO CHERKASSKI

DR. VLADIMIR RABINOVICH

DR. HECTOR OVIEDO GALDEANO

DR. MIGUEL CRUZ IRISSON

DR RAUL CASTILLO PEREZ

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. HECTOR MANUEL PEREZ MEANA

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

COORDINACIÓN GENERAL DE POSGRADO E
INVESTIGACIÓN

CARTA DE CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México, Distrito Federal el día 15 del mes de Junio del año 2006, el (la) que suscribe Antonio Castañeda Solis alumno (a) del Programa de Doctorado en Comunicaciones y Electrónica con número de registro A010312, adscrito a la SEPI, ESIME Zacatenco, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de tesis bajo la dirección del Dr. Vladislav Kravchenko Cherkasski y cede los derechos del trabajo intitulado "Métodos pseudoanalíticos aplicados a modelos de la teoría de campos", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección acastanedas@ipn.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Antonio Castañeda Solis

Nombre y firma

Contenido

0.1 Resumen

En el presente trabajo se consideran modelos de la teoría de campos electromagnéticos y espinoriales en medios no homogéneos. Para las ecuaciones de Maxwell se obtienen las representaciones integrales de las soluciones para el caso estático y cuando los parámetros del medio dependen exponencialmente de las coordenadas espaciales.

Se establece, además, una relación simple entre la ecuación de Dirac con potenciales electromagnético y escalar en un caso bidimensional y un par de ecuaciones de Vekua. En general, estas ecuaciones de Vekua son bicomplejas.

Un resultado sorprendente es que cuando consideramos la ecuación de Dirac con un potencial escalar, el cual depende de una sola variable con energía y masa fijas, es posible obtener en forma explícita un sistema de soluciones de la ecuación de Dirac tomando como base la teoría de funciones pseudoanalíticas desarrollada en [10] y [55]. En general, esta ecuación no puede ser resuelta en forma explícita. Sin embargo, para tal ecuación de Dirac, se obtuvo un procedimiento relativamente simple para construir en forma explícita un sistema completo de soluciones exactas (dependiendo de dos variables). Estas soluciones generalizan el sistema de potencias $1, z, z^2$,... del análisis complejo y son llamadas potencias formales. Con su ayuda cualquier solución regular de la ecuación de Dirac puede ser representada por su serie de Taylor en potencias formales.

0.2 Abstract

In this work we consider some models from electromagnetic theory in inhomogeneous media. New integral representations for solutions of the Maxwell's equations were obtained in the static case and when the media parameters depends on the spatial coordinates in an exponential way.

We establish a simple relation between the Dirac equation with a scalar and an electromagnetic potential in a two-dimensional case and a pair of decoupled Vekua equations. In general, these Vekua equations are bicomplex.

One of the surprising consequences of the established relation with pseudoanalytic functions consists in the following result. Consider the Dirac equation with a scalar potential depending on one variable with fixed energy and mass. In general, this equation cannot be solved explicitly even if one looks for wavefunctions of one variable. Neverthless, for such Dirac equation, we obtain an algorithmically simple procedure for constructing in explicit form a complete system of exact solutions (depending on two variables). These solutions generalize the sistem of powers $1, z, z^2$,...in complex analysis and are called formal powers. With their aid any regular solution of the Dirac equation can be represented by its Taylor series in formal powers.

0.3 Objetivos

1. Presentar la reformulación del sistema de Maxwell en forma cuaterniónica en el caso de los medios no homogéneos

2. Obtención de las representaciones integrales de las soluciones del sistema de Maxwell en el caso estático en ausencia de fuentes y cuando los parámetros materiales se representan en forma exponencial.

3. Establecer una relación entre la ecuación de Dirac con potenciales electromagnético y escalar en un caso bidimensional y un par de ecuaciones de Vekua.

4. Aplicación de la teoría de funciones pseudoanalíticas en la construcción de un sistema completo localmente de soluciones en forma explícita para la ecuación de Schrödinger.

0.4 Justificación

Como es bien sabido el estudio del sistema de Maxwell es fundamental en el área de Ingeniería de Telecomunicaciones. El estudio de los conceptos de propagación de ondas electromagnéticas se ha visto incrementado exponenciálmente debido a la aparición de nuevas tecnologías y aplicaciones tales como las redes inalámbricas de áreas local y metropolitana así como la diversificación de los servicios de telefonía celular. Adicionálmente podemos citar la gran preocupación que ha generado la seguridad de la información que fluye en medios alámbricos donde el movimiento de la misma en forma de señales eléctricas provoca la emisión de ondas electromagnéticas mismas que pueden ser captadas e intepretadas por equipos y personas para los cuales no está destinada dicha informacion.

La gran mayoría de los trabajos y estudios de los aspectos de propagación se llevan a cabo utilizando herramientas clasicas como el análisis vectorial y el análisis complejo. Cuando se utilizan dichas herramientas aplicadas a modelos matemáticos en los cuales se consideran medios anisotrópicos y no homogéneos la complejidad de los métodos para la obtención de soluciones se incrementa grandemente.

La aplicación del análisis cuaterniónico a modelos complejos del sistema de Maxwell ha demostrado tener múltiples ventajas sobre los métodos tradicionales tanto en la obtención analítica de soluciones como en la solución numérica, entre ellas podemos citar la obtención de resultados nuevos en forma relativamente sencilla comparando con las dificultades encontradas utilizando los métodos clásicos. Es por eso que en esta tesis se utiliza el análisis cuaterniónico para el estudio de los aspectos de propagación del campo electromagnético en condiciones muy particulares descritas en el extenso del trabajo. Un ejemplo de esto es la reformulación del sistema de Maxwell presentada el cual se reduce a una ecuación de Dirac para la cual se obtienen las representaciones integrales de las soluciones en forma explícita.

Una herramienta muy importante en la aplicación del análisis cuaterniónico es el operador de Moisil-Theodoresco el cual ha sido utilizado en gran cantidad de trabajos y nos permite establecer relaciones directas entre distintas ecuaciones tan importantes como la ecuación de Dirac, la ecuación de Schrödinger y el sistema de Maxwell. Cabe mencionar que la ecuación de Schrödinger aparece muy frecuentemente en problemas de propagación de ondas electromagnéticas y acústicas en medios estratificados.

Capítulo 1

Introducción

Uno de los campos más dinámicos de la tecnología actual es el de las comunicaciones y perteneciendo a éste, el de las comunicaciones móviles. Entre los aspectos más importantes en el desarrollo de los sistemas de comunicación modernos se encuentran los correspondientes a la propagación de las ondas electromagnéticas en los distintos tipos de medios. Tales aspectos de propagación son completamente representados por las ecuaciones de Maxwell.

El álgebra de cuaterniones fue aplicada al estudio de las ecuaciones de Maxwell ya desde los trabajos del mismo Maxwell. Por lo tanto no resulta extraño que una gran parte de los trabajos científicos modernos utilicen éste tipo de técnicas en la resolución del sistema de Maxwell obteniéndose resultados sorprendentes en algunos casos. Se hace necesario mencionar, además, que las soluciones exactas para el sistema de Maxwell en medios no homogéneos se conocen solamente en algunos casos particulares.

En [29] fue observado que las ecuaciones de Maxwell en medios no homogéneos escritas en forma de una ecuación cuaterniónica tienen una gran similitud con la ecuación de Vekua del análisis complejo la cual describe las así llamadas funciones pseudoanalíticas.

En la primera parte del trabajo se consideran las ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico en el caso estático en la forma

$$
\begin{aligned}
div(\varepsilon \mathbf{E}) &= \rho, \\
rot\mathbf{E} &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

donde

ε es la permitividad del medio

$\mathbf{E}$ es un vector real representando al campo eléctrico

ρ es la densidad volumétrica de carga

Mediante una transformación introducida en [32] es posible escribir el sistema (1.1) en forma cuaterniónica como

$$(D + M^{\overrightarrow{\varepsilon}})\overrightarrow{\mathcal{E}} = -\frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{1.2}$$

donde

$$\overrightarrow{\varepsilon} = \frac{grad\ \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}},$$

El sistema (1.1) y la ecuación (1.2) son equivalentes, cualquier solución de (1.2) con la ayuda de la transformación $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \sqrt{\varepsilon}\mathbf{E}$ puede ser convertida en una solución de (1.1) y viceversa. En el caso en que la permitividad del medio se comporta como una función exponencial se obtienen en forma explícita las representaciones integrales.

No menos interesante es la relación establecida entre la ecuación de Dirac con potenciales escalar y electromagnético en el caso bidimensional y un par de ecuaciones de Vekua desacopladas. En general, estas ecuaciones de Vekua son bicomplejas.

Un resultado sorprendente es que cuando consideramos la ecuación de Dirac con un potencial escalar el cual depende de una sola variable con energía y masa fijas es posible obtener en forma explícita un sistema de soluciones de la ecuación de Dirac tomando como base la teoría de funciones pseudoanalíticas desarrollada en [10] y [55]. En general, esta ecuación no puede ser resuelta en forma explícita. Sin embargo, para tal ecuación de Dirac, se obtuvo un procedimiento relativamente simple para construir en forma explícita un sistema completo de soluciones exactas (dependiendo de dos variables). Estas soluciones generalizan el sistema de potencias $1, z, z^2$,... del análisis complejo y son llamadas potencias formales. Con su ayuda cualquier solución regular de la ecuación de Dirac puede ser representada por su serie de Taylor en potencias formales.

En el capítulo 2 se introducen las notaciones del álgebra cuaterniónica que serán utilizadas en todo el trabajo. En el capítulo 3 se introducen las funciones analíticas generalizadas o simplemente funciones pseudoanalíticas. Adicionalmente se muestran algunos hechos importantes relacionados con éste tipo de funciones en el caso complejo tales como el principio de similitud para la llamada ecuación de Vekua, los pares generadores de Bers y las secuencias generadoras que nos permiten obtener la serie de Taylor en potencias formales. En el capítulo 4 se introducen las ecuaciones de Maxwell y se obtiene la representación cuaterniónica de ellas tanto para medios homogéneos como para medios no homogéneos. Para este último tipo de medios se hace la observación de que el sistema de Maxwell obtenido es una generalización de la ya mencionada ecuación de Vekua. Por último, en este capítulo, se introduce el operador D_α . En el capítulo 5 se analiza el caso estático del sistema de Maxwell y se obtienen las representaciones integrales de las soluciones. Utilizando este mismo operador se obtiene una factorización del operador de Schrödinger y se presentan en el capítulo 6 las representaciones integrales para el caso cuando la permitividad del medio se comporta como una función exponencial. En el capítulo 7 se obtiene la representación cuaterniónica del operador de Dirac y se consideran sus soluciones para el caso cuando se tiene una energía w dada y los potenciales son independientes del tiempo. Se introducen, además, una relación entre las ecuaciones de Vekua bicomplejas y la ecuación de Dirac bidimensional así como la generalización de varios resultados de la teoría de funciones pseudoanalíticas presentados en el capítulo 3 pero ahora considerando el caso bidimensional. Como resultado se obtiene un sistema completo de soluciones para la ecuación de Dirac con potencial escalar unidimensional.

Capítulo 2

Álgebra de cuaterniones

Denotemos por $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ el álgebra de cuaterniones complejos ($=$ bicuaterniones). Los elementos de $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ son representados en la forma

$$q = \sum_{k=0}^{3} q_k e_k,$$

donde $\{q_k\} \subset \mathbb{C}$, e_0 es la unidad y $\{e_k | k = 1, 2, 3\}$ son las unidades cuaterniónicas estándar, las cuales tienen las propiedades siguientes:

$$e_k^2 = -1, \qquad k = 1, 2, 3$$

$$e_0^2 = e_0 = -e_k^2, \qquad k = 1, 2, 3$$

$$e_0 e_k = e_k e_0 = e_{k,} \qquad k = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} e_1 e_2 &= -e_2 e_1 = e_3, \\ e_2 e_3 &= -e_3 e_2 = e_1, \\ e_3 e_1 &= -e_1 e_3 = e_2. \end{aligned}$$

Denotemos la unidad imaginaria en $\mathbb{C}$ por i como es usual. Por definición i conmuta con e_k, $k = \overline{0, 3}$.

Utilizaremos, además, la representación vectorial de $q \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$:

$$q = Sc(q) + Vec(q),$$

donde $Sc(q) := q_0$ y $Vec(q) := \overrightarrow{q} = \sum_{k=1}^{3} q_k e_k$.

Un cuaternión complejo de la forma $q = \overrightarrow{q}$ es llamado puramente vectorial. Los cuaterniones complejos puramente vectoriales son identificados con los vectores en $\mathbb{C}^3$. Si reemplazamos $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ por $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ estamos referenciando al conjunto de cuaterniones reales.

En el conjunto $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ se definen dos tipos de conjugación. Para $q \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, la conjugación compleja usual se define por

$$q^* = \operatorname{Re} q - i \operatorname{Im} q = \sum_{k=0}^{3} \operatorname{Re}(q_k) e_k - i \sum_{k=0}^{3} \operatorname{Im}(q_k) e_k,$$

y la conjugación cuaterniónica es definida como

$$\overline{q} = q_0 - \overrightarrow{q}.$$

Nota 1 *A lo largo del texto se utilizan tanto la conjugación compleja como la conjugación cuaterniónica y se representan utilizando la misma notación, ya que si los números bicomplejos se consideran parte de $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ prácticamente estamos hablando de la misma operación. En algunas secciones, con la finalidad de evitar cualquier confusión, se utiliza el símbolo $*$ para denotar la conjugación compleja.*

Por M^p denotamos al operador de multiplicación por p desde la derecha, esto es

$$M^p q = q \cdot p.$$

Denotemos por $\mathcal{G}$ al conjunto de divisores de cero de $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Si se desea consultar algunas descripciones de $\mathcal{G}$ ver [27]. En este trabajo utilizaremos la siguiente. Sea $0 \neq q \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, entonces

$$q \in \mathcal{G} \Leftrightarrow q_0^2 = \overrightarrow{q}^2. \tag{2.1}$$

Consideraremos las funciones diferenciables f dependientes de $x = (x_1, x_2, x_3)$ valuadas en los cuaterniones complejos en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. En el conjunto $C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$, el bien conocido, operador de Moisil-Theodoresco D es definido por la expresión

$$Df = \sum_{k=1}^{3} e_k \partial_k f,$$

donde $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, e_k son las unidades cuaterniónicas imaginarias.

Este operador se conoce también como operador de Dirac aunque fue introducido por W.R. Hamilton mismo y ha sido estudiado en un gran número de trabajos (ver [45], [46], [17], [21], [22], y [29]).

La ecuación $Df = 0$ es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} div \overrightarrow{f} &= 0, \\ grad\ f_0 + rot \overrightarrow{f} &= 0, \end{aligned}$$

donde la primera ecuación es la parte escalar del bicuaternión Df y la segunda ecuación representa su parte vectorial.

Capítulo 3

Funciones analíticas generalizadas (Pseudoanalíticas)

Las funciones pseudoanalíticas son, en principio, soluciones de las ecuaciones generalizadas de Cauchy-Riemann. Tales funciones fueron consideradas por Picard [49], [50] y por Beltrami [2], [3], pero los primeros resultados significativos fueron obtenidos por Carleman [13] en 1933.

Este capítulo está basado, principalmente, en las ideas introducidas en [55] y [10].

Consideremos, primeramente, el siguiente sistema de ecuaciones escrito en forma canónica

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + au + bv = f, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + cu + dv = g. \tag{3.2}$$

donde a, b, c, d, f, g son funciones analíticas de las variables x, y.

Lema 2 *Introduciendo la función compleja*

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

podemos escribir el sistema de ecuaciones (3.1)-(3.2) como una ecuación diferencial de la forma

$$\partial_{\overline{z}} w + Aw + B\overline{w} = F, \tag{3.3}$$

donde

$$\begin{aligned}
\partial_{\overline{z}} &= \left(\partial_x + i\partial_y\right), \\
A &= \frac{1}{2}\left(a + d + ic - ib\right), \\
B &= \frac{1}{2}\left(a - d + ic + ib\right), \\
F &= \left(f + ig\right).
\end{aligned}$$

Prueba. Sustituyendo $w(z)$ por sus componentes $u(x,y)$, $v(x,y)$ y los valores correspondientes de $A, B,$ y F en la ecuación (3.3) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u + iv\right) + i\frac{\partial}{\partial y}\left(u + iv\right) + \frac{1}{2}\left(a + d + ic - ib\right)\left(u + iv\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(a - d + ic + ib\right)\left(u - iv\right) = \left(f + ig\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + au + bv + i\left(cu + dv\right) = \left(f + ig\right),$$

separando la ecuación para las partes real e imaginaria obtenemos el sistema (3.1)-(3.2) y con ello, la comprobación de (2). ■

En el sentido clásico por una solución del sistema de ecuaciones (3.1)-(3.2) entendemos funciones reales contínuamente diferenciables $u(x,y), v(x,y)$ de variables reales x e y las cuales satisfacen este sistema en cualquier parte de un dominio Ω. Tales soluciones, sin embargo, no siempre existen.

Si w satisface la ecuación (3.3) en la vecindad de cada punto del dominio Ω en $\mathbb{R}^2$ excepto, quizás, en puntos de un conjunto Ω_w discreto en Ω, se dice que w es una solución generalizada de la ecuación (3.3) en el dominio Ω. El conjunto Ω_w el cual tiene únicamente puntos aislados, en general depende de la elección de w. Este conjunto es llamado el conjunto de singularidades de la solución generalizada $w(z)$ con respecto al dominio Ω. Si Ω_w es un conjunto vacío se dice que w es una solución regular de la ecuación (3.3) en el dominio Ω.

Si $F \equiv 0$ tenemos la ecuación homogénea

$$\partial_{\bar{z}} w + Aw + B\overline{w} = 0, \tag{3.4}$$

equivalente al sistema homogeneo de ecuaciones reales de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + au + bv &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + cu + dv &= 0. \end{aligned}$$

Las soluciones generalizadas de una ecuación de la forma (3.4) son llamadas funciones analíticas generalizadas [55, p. 133] y las soluciones regulares de dicha ecuación son conocidas como funciones pseudoanalíticas [10, p. 6]. Una ecuación de la forma (3.4) es llamada ecuación de Cauchy-Riemann generalizada [55] o también ecuación de Vekua.

3.1 Principio de similitud para la ecuación de Vekua

Los resultados presentados en esta sección implican la existencia de relaciones profundas entre las clases de soluciones de la ecuación de Vekua y las clases de funciones analíticas en z.

Sea $\Phi(z)$ una función analítica univaluada en z en un dominio Ω. Dentro del dominio bajo consideración la función podría tener un conjunto discreto de puntos singulares aislados. El conjunto de tales funciones será denotado como $\mathcal{U}_o^*(\Omega)$. Si f

y $g \in \mathcal{U}_o^*$, entonces

$$f \pm g, \qquad fg, \qquad \frac{f}{g}, \qquad f(g(z)) \in \mathcal{U}_o^*, .g \neq 0$$

Teorema 3 *[55] Sea $w(z)$ una solución generalizada de la ecuación $\partial_{\overline{z}} w + Aw + B\overline{w} = 0$ en un dominio Ω y sea*

$$g(z) = \{ \begin{matrix} A(z) + B(z)\frac{\overline{w(z)}}{w(z)}, & si & w(z) \neq 0, & z \in \Omega, \\ \\ A(z) + B(z), & si & w(z) = 0, & z \in \Omega, \end{matrix}$$

entonces la función

$$\Phi(z) = w(z)e^{-h(z)}, \tag{3.5}$$

donde

$$h(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{g(\zeta)\, d\xi d\eta}{\zeta - z} \equiv -T_{\Omega} g,$$

pertenece a la clase $\mathcal{U}_o^*(\Omega)$. En particular, si w es una solución regular de la ecuación de Vekua en el dominio Ω, entonces Φ es analítica en Ω, esto es, satisface la ecuación

$$\partial_{\overline{z}} \Phi = 0,$$

y $h(z)$ es uniformemente continua para todos los valores de z.

Prueba. Sea $\Phi = we^{-h}$ una solución de $\partial_{\overline{z}} \Phi = 0$, esto implica que

$$(\partial_{\overline{z}} w)e^{-h} - (\partial_{\overline{z}} h)e^{-h} w = 0,$$

y

$$(Aw + B\overline{w})e^{-h} + (\partial_{\overline{z}} h)we^{-h} = 0,$$

entonces

$$\partial_{\overline{z}} h = -\left(A + B\frac{\overline{w}}{w}\right),$$

y

$$h = -T\left(A + B\frac{\overline{w}}{w}\right).$$

■

La ecuación (3.5) muestra que el conjunto de puntos para los que $w(z) = 0$ coincide con el conjunto de ceros de la función analítica $\Phi(z)$. De igual manera, el conjunto de puntos singulares de $w(z)$ coincide con el conjunto de puntos singulares de $\Phi(z)$. Se sigue que, si w no se vuelve cero en todo el dominio considerado sus ceros y polos se encuentran aislados. Si $w(z)$ no se desvanece idénticamente la ecuación (3.5) puede ser escrita en la forma $w(z) = \Phi(z)e^{h(z)}$.

Teorema 4 *[55] (Principio de similitud) Sea Ω un dominio acotado. Cada función pseudoanalítica $w(z)$ definida en Ω posee una función analítica similar $\Phi(z)$ .Cada función analítica $\Phi(z)$ posee una función pseudoanalítica similar $w(z)$. Si una de las funciones está dada, la otra puede ser elegida en la forma*

$$w(z) = \Phi(z)e^{h(z)} \tag{3.6}$$

donde, $w(z)$ es una solución de $\partial_{\overline{z}}w + Aw + B\overline{w} = 0$.

Prueba. Este hecho es fácilmente comprobado multiplicando (3.6) por $e^{-h(z)}$ desde el lado derecho. ■

3.2 Pares generadores, derivada y antiderivada

Definición 5 *[10] Dos funciones complejas $F(z)$ y $G(z)$ con primeras derivadas reales y continuas en el sentido de Hölder que satisfacen, en cada subconjunto compacto de un dominio Ω, la condición*

$$\operatorname{Im}\{\overline{F}(z)G(z)\} > 0$$

son llamadas un par generador.

Entonces cada función compleja $w(z)$, $z \in \Omega$ admite la representación única

$$w(z) = \lambda(z)F(z) + \mu(z)G(z), \tag{3.7}$$

con λ y μ reales.

Resulta conveniente asociar con la función w la función

$$\omega\,(z) = \lambda(z) + i\mu(z).$$

La correspondencia entre w y ω es uno a uno.

Esta definición nos permite asignar el papel de 1 e i a dos funciones complejas arbitrarias $F(z)$ y $G(z)$ e introducir el concepto de una $(F, G)-$ derivada en la forma siguiente.

Definición 6 *[10] Decimos que una función compleja $w(z)$ posee, en el punto $z = z_0$ $\in \Omega$, $(F, G)-$ derivada $\dot{w}(z_0)$ si el límite*

$$\dot{w}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{w(z) - \lambda(z_0)F(z) - \mu(z_0)G(z)}{z - z_0},$$

existe y es finito.

La función $w(z)$ es llamada pseudoanalítica del primer tipo en Ω (simplemente pseudoanalítica si no hay riesgo de confusión) con respecto al par generador (F, G) si $\dot{w}(z)$ existe en todos los puntos del dominio Ω. La función

$$\omega\,(z) = \lambda(z) + i\mu(z).$$

es entonces llamada pseudoanalítica del segundo tipo.

Los generadores, los cuales juegan el papel de constantes tienen $(F,G)-$ derivadas. Se deduce que la existencia de $\dot{w}(z_0)$ en todos los puntos del dominio bajo consideración implica no solo la existencia si no también la continuidad de las derivadas w_x, w_y, y las relaciones

$$\begin{aligned} \lambda_{\overline{z}}F + \mu_{\overline{z}}G &= 0, \\ \lambda_{z}F + \mu_{z}G &= \dot{w}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde

$$\begin{aligned} \partial_z &= (\partial_x - i\partial_y)\,, \\ \partial_{\overline{z}} &= (\partial_x + i\partial_y)\,. \end{aligned}$$

Inversamente, si w_x y w_y existen y son continuas, la ecuación (3.8) garantiza la pseudoanaliticidad de la función (3.7).

Las siguientes expresiones son llamadas coeficientes característicos del par generador (F,G) [10, p. 5]

$$a_{(F,G)} = -\frac{\overline{F}G_{\overline{z}} - F_{\overline{z}}\overline{G}}{F\overline{G} - \overline{F}G},$$

$$b_{(F,G)} = \frac{FG_{\overline{z}} - F_{\overline{z}}G}{F\overline{G} - \overline{F}G}.$$

Junto con el par generador (F,G) consideremos su par generador adjunto $(F,G)^* = (F^*,G^*)$ definido por las fórmulas

$$F^* = -\frac{2\overline{F}}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \qquad G^* = \frac{2\overline{G}}{F\overline{G} - \overline{F}G}. \tag{3.9}$$

Definición 7 *[10] Sea $W(z)$ una función contínua definida en una curva Γ. La (F,G) integral de W en Γ es, por definición*

$$\int_\Gamma W d_{(F,G)}z = \frac{1}{2}\left(F(z_1)\operatorname{Re}\int_\Gamma G^* W dz + G(z_1)\operatorname{Re}\int_\Gamma F^* W dz\right). \tag{3.10}$$

donde Γ es una curva rectificable corriendo desde z_0 a z_1.

Si $W = \lambda F + \mu G$ es una función $(F,G)-$pseudoanalítica donde λ y μ son funciones reales entonces,

$$\int_{z_0}^{z} \dot{W} d_{(F,G)} z = W(z) - \lambda(z_0)F(z) - \mu(z_0)G(z),$$

y como $\dot{F} \equiv \dot{G} \equiv 0$, esta integral es independiente de la trayectoria y representa la $(F,G)-$ antiderivada de $\dot{W}$.

3.3 Secuencias generadoras y series de Taylor en potencias formales

Teorema 8 *[10] Sea (F,G) un par generador en un dominio Ω. Existen en Ω dos*

pares generadores (F_1,G_1) y (F_{-1},G_{-1}), llamados sucesor y predecesor de (F,G), respectivamente, tales que

(i) Las (F,G) derivadas de funciones (F,G) pseudoanalíticas son funciones (F_1,G_1) pseudoanaliticas,

(ii) Funciones (F,G) pseudoanalíticas son (F_{-1},G_{-1}) derivadas de funciones (F_{-1},G_{-1}) pseudoanalíticas.

El teorema anterior implica que cada par generador dado (F,G) puede estar incorporado dentro de una secuencia de pares generadores

$$..., (F_{-1},G_{-1}), (F_0,G_0), (F_1,G_1), ...$$

tales que $(F_0,G_0) = (F,G)$ y (F_{m+1},G_{m+1}) es un sucesor de (F_m,G_m) para toda v.

Definición 9 *[10] Se dice que una secuencia generadora $\{(F_m,G_m)\}$ tiene periodo $\mu > 0$ si $(F_{m+\mu},G_{m+\mu})$ es equivalente a (F_m,G_m) esto es, sus coeficientes característicos coinciden.*

Sea W una función (F,G)-pseudoanalítica. Utilizando una secuencia generadora en la cual (F,G) está incluido podemos definir las derivadas de orden superior de W mediante la fórmula de recursión

$$W^{[0]} = W; \qquad W^{[m+1]} = \frac{d_{(F_m,G_m)}W^{[m]}}{dz}, \qquad m = 1, 2, ...$$

Definición 10 *[10] Si asumimos ahora que el dominio Ω es simplemente conectado y que una secuencia generadora $\{(F_m, G_m)\}$ está definida en dicho dominio, podemos definir la potencia formal local $Z_m^{(0)}(a, z_0; z)$ con centro en $z_0 \in \Omega$, coeficiente a y exponente 0, como la combinación lineal de los generadores $F_m(z)$, $G_m(z)$ con coeficientes constantes reales λ, μ elegidos de forma que*

$$\lambda F_m(z_0) + \mu G_m(z_0) = a.$$

Las potencias formales locales con exponentes $n = 1, 2, ...$ están definidas por la fórmula de recursión

$$Z_m^{(n+1)}(a, z_0; z) = (n+1) \int_{z_0}^{z} Z_{m+1}^{(n)}(a, z_0; \zeta) d_{(F_m,G_m)}\zeta. \tag{3.11}$$

Esta definición implica las propiedades siguientes

1. $Z_m^{(n)}(a, z_0; z)$ es una función (F_m, G_m)-pseudoanalítica de z.

2. Si $a\prime$ y $a\prime\prime$ son constantes reales, entonces

$$Z_m^{(n)}(a\prime + ia\prime\prime, z_0; z) = a\prime Z_m^{(n)}(1, z_0; z) + a\prime\prime Z_m^{(n)}(i, z_0; z).$$

3. Las potencias formales satisfacen

$$\frac{d_{(F_m,G_m)}Z_m^{(n)}(a, z_0; z)}{dz} = nZ_{m+1}^{(n-1)}(a, z_0; z).$$

4. Las fórmulas asintóticas

$$Z_m^{(n)}(a, z_0; z) \sim a\,(z - z_0)^n\,, \quad z \to z_0$$

se cumplen.

Supongamos ahora que

$$W\,(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(a, z_0; z) \tag{3.12}$$

donde la ausencia del subíndice m significa que todas las potencias formales corresponden al mismo par generador (F, G), y la serie converge uniformemente en algún vecindario de z_0. Puede ser mostrado que el límite uniforme de funciones pseudoanalíticas es pseudoanalítico, y que una serie convergente uniformemente de funciones (F, G)-pseudoanalíticas puede ser (F, G)-diferenciada término a término.

A partir de este punto la función W en (3.12) es (F, G)-pseudoanalítica y su r-ésima derivada admite la expansión

$$W^{[r]}\,(z) = \sum_{n=r}^{\infty} n\,(n-1)\cdots(n-r+1)\,Z_r^{(n-r)}(a_n, z_0; z)$$

De aquí se obtienen las fórmulas de Taylor para los coeficientes

$$a_n = \frac{W^{[n]}(z_0)}{n!}. \tag{3.13}$$

Definición 11 *[10] Sea $W\,(z)$ una función (F, G)-pseudoanalítica definida para pequeños valores de $|z - z_0|$. La serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(a, z_0; z) \tag{3.14}$$

con coeficientes dados por (3.13) es llamada la serie de Taylor de W en z_0, constituida por potencias formales.

La serie de Taylor siempre representa la función pseudoanalítica asintóticamente:

$$W(z) - \sum_{n=0}^{N} Z^{(n)}(a, z_0; z) = O\left(|z - z_0|^{N+1}\right), \quad z \to z_0,$$

para toda N. Esto implica (dado que una función pseudoanalítica no puede tener un cero de orden arbitrariamente alto sin desvanecerse idénticamente) que la secuencia de derivadas $\left\{W^{[n]}(z_0)\right\}$ determina la función W en forma única.

Si la serie (3.14) converge uniformemente en una vecindad de z_0, converge también en la función W.

Capítulo 4

Ecuaciones de Maxwell

La gran diversidad de fenómenos electromagnéticos está regida por las cuatro ecuaciones de Maxwell las cuales son los axiomas de la teoría electromagnética:

$$rot\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \tag{4.1}$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{4.2}$$

$$div\mathbf{D} = \rho, \tag{4.3}$$

$$div\mathbf{B} = 0. \tag{4.4}$$

t es la variable temporal y los operadores div y rot actúan con respecto a las variables espaciales x_1, x_2, x_3. La notación utilizada en estas ecuaciones es explicada en la tabla siguiente.

Notación	Cantidad física	Unidades en el sistema MKS
ρ	Densidad volumétrica de carga	coulomb/m^3
$\mathbf{j}$	Densidad de corriente	amper/m^2
$\mathbf{E}$	Intensidad del campo eléctrico	volt/m
$\mathbf{H}$	Intensidad del campo magnético	amper/m
$\mathbf{D}$	Vector de inducción eléctrica	coulomb/m^2
$\mathbf{B}$	Vector de inducción magnética	vol*seg/m^2

La relación entre los vectores de inducción y los vectores del campo electromagnético está dada por las llamadas ecuaciones constitutivas

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}(\mathbf{E},\mathbf{H}), \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{E},\mathbf{H}). \end{aligned}$$

La interpretación más simple de estas relaciones es que, por ejemplo, la inducción eléctrica $\mathbf{D}(\overrightarrow{x},t)$ está completamente determinada por la intensidad del campo eléctrico $\mathbf{E}(\overrightarrow{x},t)$ en el mismo punto $\overrightarrow{x}$ y en el mismo instante de tiempo t (las mismas consideraciones son hechas para $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$). En otras palabras, los fenómenos electromagnéticos en el medio son considerados como locales y no inerciales: en cada punto el estado no depende del medio que lo rodea y en cada instante de tiempo el estado no depende de estados anteriores. Aunque esta interpretación es un tanto idealizada, resulta aplicable en muchos casos prácticos.

Entonces

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}, \tag{4.5}$$

y

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}, \tag{4.6}$$

donde ε_0 es la permitividad del espacio libre medida en farad/m y μ_0 es la permeabilidad del espacio libre medida en henry/m; las cantidades adimensionales ε_r y μ_r son llamadas permitividad relativa y permeabilidad relativa respectivamente. Podemos definir la permitividad absoluta y la permeabilidad absoluta como

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r,$$

y

$$\mu = \mu_0 \mu_r.$$

Las ecuaciones constitutivas (4.5) y (4.6) describen la gran variedad de fenómenos físicos los cuales representan la respuesta del medio a la aplicación de campos electromagnéticos.

Si asumimos que las características electromagnéticas del medio ε y μ no cambian con el tiempo y ademas tienen los mismos valores en cada punto de algún volumen $\Omega \in \mathbb{R}^3$ entonces el medio contenido en el volumen es llamado homogéneo. Si, por otro lado, $\varepsilon = \varepsilon(\overrightarrow{x})$ y $\mu = \mu(\overrightarrow{x})$ el medio es llamado no homogéneo. Si los pares de vectores $\mathbf{D}, \mathbf{E}$, y $\mathbf{B}, \mathbf{H}$ son colineales el medio es llamado isotrópico, de otro modo el medio es llamado anisotrópico.

4.1 Ecuaciones de Maxwell en forma cuaterniónica para medios homogéneos

Las ecuaciones de Maxwell se han estudiado empleando métodos cuaterniónicos prácticamente desde su planteamiénto original. fue el mismo Maxwell quien por vez primera propuso reescribirlas en forma cuaterniónica para su análisis. La reformulación cuaterniónica del sistema de Maxwell para el vacío se puede encontrar, por ejemplo, en [4] y [51]. Para un medio material utilizamos los resultados de [29].

Algunas de las ventajas que obtenemos al analizar las ecuaciones de Maxwell en términos de cuaterniones son la simplificación en los cálculos numéricos y los resultados nuevos que se obtienen, en forma relativamente sencilla.

Supongamos que tenemos un medio isotrópico y homogéneo. Consideremos la función puramente vectorial

$$\mathbf{V} := \sqrt{\varepsilon}\mathbf{E} + i\sqrt{\mu}\mathbf{H} \tag{4.7}$$

la cual satisface las ecuaciones de Maxwell (4.1)-(4.4) reescritas como una ecuación cuaterniónica en la forma siguiente

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + iD\right)\mathbf{V} = -\left(\sqrt{\mu}\mathbf{j} + \frac{i\rho}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \tag{4.8}$$

donde c es la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el medio:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

$\frac{1}{c}\partial_t + iD$ es conocido como el operador cuaterniónico de Maxwell y posee una propiedad importante, esto es, factoriza al operador de onda:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta = \left(\frac{1}{c}\partial_t + iD\right)\left(\frac{1}{c}\partial_t - iD\right).$$

4.2 Ecuaciones de Maxwell en forma cuaterniónica para medios no homogéneos

Los resultados mostrados en esta sección fueron publicados en [29].

Asumiendo que $\varepsilon = \varepsilon(x)$ y $\mu = \mu(x)$ esto es, están en función de las variables espaciales x_1, x_2, x_3 y utilizando las relaciones constitutivas (4.5) y (4.6), reescribimos el sistema de Maxwell en la forma siguiente

$$rot\mathbf{H} = \varepsilon\partial_t\mathbf{E} + \mathbf{j}, \tag{4.9}$$

$$rot\mathbf{E} = -\mu\partial_t\mathbf{H}, \tag{4.10}$$

$$div\,(\varepsilon\mathbf{E}) = \rho, \tag{4.11}$$

$$div\,(\mu\mathbf{H}) = 0. \tag{4.12}$$

Tomando en cuenta la relación bien conocida

$$div(\varepsilon\mathbf{E}) = \varepsilon div\mathbf{E} + < grad\varepsilon, \mathbf{E} >,$$

las ecuaciones (4.11) y (4.12) pueden ser reescritas como se muestra a continuación

$$div\mathbf{E} = - < \frac{grad\ \varepsilon}{\varepsilon}, \mathbf{E} > + \frac{\rho}{\varepsilon},$$

y en forma análoga para el vector de campo magnético

$$div\mathbf{H} = - < \frac{grad\ \mu}{\mu}, \mathbf{H} > .$$

Combinando estas ecuaciones con (4.9) y (4.10) se llega al sistema de Maxwell en la forma

$$D\mathbf{E} = < \frac{grad\ \varepsilon}{\varepsilon}, \mathbf{E} > -\mu\partial_t\mathbf{H} - \frac{\rho}{\varepsilon}$$

y

$$D\mathbf{H} = < \frac{grad\ \mu}{\mu}, \mathbf{H} > +\varepsilon\partial_t\mathbf{E} + \mathbf{j}.$$

Donde D es el operador de Moisil-Theodoresco.

Notemos algunas propiedades sencillas del operador D. Sea φ una función escalar y f una función valuada en el álgebra bicuaterniónica. Entonces

$$D(\varphi \cdot f) = D\varphi \cdot f + \varphi \cdot Df,$$

y

$$(D - \frac{grad\ \varphi}{\varphi})f = \varphi D(\varphi^{-1}f). \tag{4.13}$$

Si tomamos en cuenta que el producto escalar de dos vectores $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{q}$ puede ser representado como

$$< \overrightarrow{p}, \overrightarrow{q} >= -\frac{1}{2}(^{\overrightarrow{p}}M + M^{\overrightarrow{p}})\overrightarrow{q},$$

podemos reescribir nuestras ecuaciones como sigue

$$(D + \frac{1}{2}\frac{grad\ \varepsilon}{\varepsilon})\mathbf{E} = -\frac{1}{2}M^{\frac{grad\ \varepsilon}{\varepsilon}}\mathbf{E} - \mu\partial_t\mathbf{H} - \frac{\rho}{\varepsilon}$$

y

$$(D + \frac{1}{2}\frac{grad\ \mu}{\mu})\mathbf{H} = -\frac{1}{2}M^{\frac{grad\ \mu}{\mu}}\mathbf{H} + \varepsilon\partial_t\mathbf{E} + \mathbf{j}.$$

Nótese que

$$\frac{1}{2}\frac{grad\ \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{grad\ \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}},$$

entonces, utilizando (4.13) obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}D(\sqrt{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}) + \mathbf{E}\cdot\overrightarrow{\varepsilon} = -\mu\partial_t\mathbf{H} - \frac{\rho}{\varepsilon},$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}D(\sqrt{\mu}\cdot\mathbf{H}) + \mathbf{H}\cdot\overrightarrow{\mu} = \varepsilon\partial_t\mathbf{E} + \mathbf{j},$$

donde

$$\overrightarrow{\varepsilon} =: \frac{grad\ \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}},$$

y

$$\overrightarrow{\mu} := \frac{grad\ \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}.$$

Introduciendo las notaciones siguientes

$$\overrightarrow{\mathcal{E}} = \sqrt{\varepsilon}\mathbf{E}, \tag{4.14}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{H}} = \sqrt{\mu}\mathbf{H}, \tag{4.15}$$

llegamos, finalmente, al sistema siguiente

$$(D + M^{\overrightarrow{\varepsilon}})\overrightarrow{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\partial_t \overrightarrow{\mathcal{H}} - \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{4.16}$$

y

$$(D + M^{\overrightarrow{\mu}})\overrightarrow{\mathcal{H}} = \frac{1}{c}\partial_t \overrightarrow{\mathcal{E}} + \sqrt{\mu}\mathbf{j}, \tag{4.17}$$

donde, al igual que antes, $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ es la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el medio.

Las ecuaciones (4.16) y (4.17) pueden ser reescritas en una forma aún más elegante. Consideremos la función

$$\mathbf{V} := \overrightarrow{\mathcal{E}} + i\overrightarrow{\mathcal{H}}$$

escrita en total acuerdo con (4.7). Aplicando el operador de Maxwell obtenido anteriormente

$$\frac{1}{c}\partial_t + iD$$

obtenemos

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + iD\right)\mathbf{V} = \frac{1}{c}\partial_t \overrightarrow{\mathcal{E}} - D\overrightarrow{\mathcal{H}} + i\left(\frac{1}{c}\partial_t \overrightarrow{\mathcal{H}} + D\overrightarrow{\mathcal{E}}\right).$$

Aplicando las ecuaciones (4.16) y (4.17) a las partes real e imaginaria de la última ecuación obtenemos

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + iD\right)\mathbf{V} = -i(M^{\overrightarrow{\varepsilon}}\overrightarrow{\mathcal{E}} + iM^{\overrightarrow{\mu}}\overrightarrow{\mathcal{H}}) - \sqrt{\mu}\mathbf{j} - \frac{i\rho}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{4.18}$$

Nótese que

$$\overrightarrow{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{V} + \mathbf{V}^*)$$

y

$$\overrightarrow{\mathcal{H}} = \frac{1}{2i}(\mathbf{V} - \mathbf{V}^*),$$

por lo tanto

$$M^{\overrightarrow{\varepsilon}}\overrightarrow{\mathcal{E}} + iM^{\overrightarrow{\mu}}\overrightarrow{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left(M^{(\overrightarrow{\varepsilon}+\overrightarrow{\mu})}\mathbf{V} + M^{(\overrightarrow{\varepsilon}-\overrightarrow{\mu})}\mathbf{V}^*\right).$$

Notemos que

$$\overrightarrow{\varepsilon} + \overrightarrow{\mu} = -\frac{grad\ c}{c},$$

y

$$\overrightarrow{\varepsilon} - \overrightarrow{\mu} = -\frac{grad\ W}{W},$$

donde W es la impedancia de onda intrínseca del medio (ver .[29]). denotemos

$$\overrightarrow{c} := \frac{grad\ \sqrt{c}}{\sqrt{c}},$$

y

$$\overrightarrow{W} := \frac{grad\ \sqrt{W}}{\sqrt{W}}.$$

Entonces

$$M^{\overrightarrow{\varepsilon}}\overrightarrow{\mathcal{E}} + iM^{\overrightarrow{\mu}}\overrightarrow{\mathcal{H}} = -\left(M^{\overrightarrow{c}}\mathbf{V} + M^{\overrightarrow{W}}\mathbf{V}^*\right).$$

A partir de (4.18) obtenemos las ecuaciones de Maxwell en medios inhomogéneos en la forma

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + iD\right)\mathbf{V} - M^{i\overrightarrow{c}}\mathbf{V} - M^{i\overrightarrow{W}}\mathbf{V}^* = -\left(\sqrt{\mu}\mathbf{j} - \frac{i\rho}{\sqrt{\varepsilon}}\right). \tag{4.19}$$

(Comparar con (4.8)). Esta ecuación es completamente equivalente al sistema de Maxwell (4.9)-(4.12) y representa la ecuación de Maxwell para medios inhomogéneos en forma cuaterniónica.

Nota 12 *La ecuación (4.19) puede ser considerada como una generalización de la ecuación de Vekua [55] del análisis complejo, la cual describe, como se ha mencionado en el capítulo anterior, a las funciones analíticas generalizadas.*

4.3 El operador $(D + M^\alpha)$

En 1974 apareció un artículo de E. Obolashvili [47] en el cual fue estudiado el operador $D_{\overrightarrow{\alpha}}$ actuando sobre funciones cuaterniónicas en la forma

$$D_{\overrightarrow{\alpha}} f := Df + f\overrightarrow{\alpha}$$

donde $\overrightarrow{\alpha}$ es un cuaternión real puramente vectorial. El desarrollo de teorías para los casos cuando $\alpha = Sc(\alpha)$ y $\alpha = Vec(\alpha)$ nos lleva a una serie de resultados similares aunque separados unos de otros. El deseo natural de construir una teoría combinando ambos casos e incluyendo el caso cuando los componentes de α son números complejos han llevado a una serie de trabajos en los cuales el operador $(D + M^\alpha)$ ha sido estudiado.

Una razón física importante para el estudio de dicho operador es que está estrechamente relacionado con el operador clásico de Dirac de la mecánica cuántica. La teoría del operador $(D + M^\alpha)$ fue expuesta en detalle en el libro [27].

En [43] fue demostrado que una amplia clase de sistemas diferenciales parciales de primer orden son equivalentes a una sencilla ecuación cuaterniónica

$$Df + f\overrightarrow{\alpha} = 0$$

la cual a su vez se reduce, en general, a una ecuación de Schrödinger con potencial cuaterniónico. Los casos considerados en dicho trabajo son:

1. La ecuación de Dirac con potencial escalar
2. La ecuación de Dirac con potencial eléctrico
3. La ecuación de Dirac con potencial pseudo-escalar
4. El sistema describiendo campos magnéticos libres de fuerza no lineales (Campos de Beltrami con factor de proporcionalidad no constante)

5. Las ecuaciones de Maxwell para medios cambiantes lentamente

6. El caso estático del sistema de Maxwell

Capítulo 5

Caso estático del sistema de Maxwell y representaciones integrales

Cuando los vectores del campo electromagnético no dependen del tiempo las ecuaciones (4.16) y (4.17) toman la forma

$$(D + M^{\overrightarrow{\varepsilon}})\overrightarrow{\mathcal{E}} = -\frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{5.1}$$

y

$$(D + M^{\overrightarrow{\mu}})\overrightarrow{\mathcal{H}} = \sqrt{\mu}\mathbf{j}. \tag{5.2}$$

Si consideramos una situación sin fuentes ambas ecuaciones se reducen al sistema siguiente

$$(D + M^{\overrightarrow{\varepsilon}})\overrightarrow{\mathcal{E}} = 0,$$

y

$$(D + M^{\overrightarrow{\mu}})\overrightarrow{\mathcal{H}} = 0.$$

De esta forma estamos interesados en las soluciones del operador $D_{\overrightarrow{\alpha}} := D + M^{\overrightarrow{\alpha}}$, donde el cuaternión complejo $\overrightarrow{\alpha}$ representa a $\overrightarrow{\varepsilon}$ o $\overrightarrow{\mu}$ y tiene la forma

$$\overrightarrow{\alpha} = \frac{grad\ \varphi}{\varphi}.$$

La función φ es diferente de cero.

5.1 Factorización del operador de Schrödinger

Consideremos la ecuación

$$(D + M^{\overrightarrow{\alpha}})\overrightarrow{f} = 0, \tag{5.3}$$

y denotemos

$$v = \frac{\Delta\varphi}{\varphi}.$$

En otras palabras, φ es solución de la ecuación de Schrödinger

$$-\Delta\varphi + v\varphi = 0. \tag{5.4}$$

Proposición 13 *[32] Sea ψ otra solución de (5.4). Entonces la función*

$$\overrightarrow{f} = (D - M^{\overrightarrow{\alpha}})\psi \tag{5.5}$$

es una solución de (5.3). Esto es

$$(D + M^{\overrightarrow{\alpha}})(D - M^{\overrightarrow{\alpha}})\psi = 0.$$

La prueba consiste de un cálculo simple. Consideremos

$$\begin{aligned} D\overrightarrow{f} &= -\Delta\psi - D\psi \cdot \frac{D\varphi}{\varphi} - \psi \cdot D\left(\frac{D\varphi}{\varphi}\right) \\ &= -v\psi - D\psi \cdot \frac{D\varphi}{\varphi} - \psi \cdot D\left(\frac{D\varphi}{\varphi}\right)^2 + \psi\frac{\Delta\varphi}{\varphi} \\ &= -\left(D\psi - \frac{D\varphi}{\varphi} \cdot \psi\right)\frac{D\varphi}{\varphi} = -\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{\alpha}. \end{aligned}$$

Esta proposición nos brinda la posibilidad de reducir la solución de (5.3) a la solución de la ecuación de Schrödinger dada por (5.4).

Un detalle importante aquí es el hecho de que consideramos la ecuación de Schrödinger junto con una solución particular. Más aún, si ψ es una solución fundamental del operador de Schrödinger:

$$(-\Delta + v)\psi = \delta,$$

entonces la función $\overrightarrow{f}$ definida por (5.5) es una solución fundamental del operador $D + M^{\overrightarrow{\alpha}}$.

En algunos casos, por ejemplo cuando $\overrightarrow{\alpha} = \alpha(x_1)e_1$, es posible construir las representaciones integrales para las soluciones del operador $D_{\overrightarrow{\alpha}}$.

5.2 Representaciones Integrales

Asumimos que $\overrightarrow{\alpha} = \alpha(x_1)e_1$, por lo tanto es posible escribir

$$D_{\overrightarrow{\alpha}} := D + M^{\alpha(x_1)e_1}.$$

Utilizando la factorización del operador de Schrödinger propuesta en la sección anterior obtenemos lo siguiente.

Proposición 14 *[40] Sea* $\mu = \alpha' + \alpha^2$ *y* $v = -\alpha' + \alpha^2$. *Entonces, para una función escalar* φ *tenemos que*

$$D_{\overrightarrow{\alpha}} D_{-\overrightarrow{\alpha}}\varphi = (D + M^{\alpha(x_1)e_1})(D - M^{\alpha(x_1)e_1})\varphi = (-\Delta + \mu)\varphi \tag{5.6}$$

y

$$D_{-\overrightarrow{\alpha}} D_{\overrightarrow{\alpha}}\varphi = (-\Delta + v)\varphi. \tag{5.7}$$

Prueba. La prueba de este hecho puede encontrarse en *[40]*. ■

Corolario 15 *[40] Sea* φ *una solución fundamental del operador* $-\Delta + \mu$ *y sea* ψ *una solución fundamental del operador* $-\Delta + v$ *. Entonces*

$$k_{\overrightarrow{\alpha}} = D_{-\overrightarrow{\alpha}}\varphi$$

es una solución fundamental del operador $D_{\overrightarrow{\alpha}}$ *, esto es*

$$D_{\overrightarrow{\alpha}}k_{\overrightarrow{\alpha}} = \delta,$$

y

$$k_{-\overrightarrow{\alpha}} = D_{\overrightarrow{\alpha}}\psi$$

es una solución fundamental del operador $D_{-\overrightarrow{\alpha}}$

$$D_{-\overrightarrow{\alpha}}k_{-\overrightarrow{\alpha}} = \delta.$$

Usualmente la solución fundamental de un operador diferencial puede ser usada para construir el operador inverso a la derecha correspondiente. Por ejemplo, si φ es una solución fundamental del operador $-\Delta + \mu$ entonces la convolución

$$\int_{\Omega} \varphi(x-y)f(y)dy$$

define un operador inverso a la derecha para el operador $(-\Delta + \mu)$, al menos, en un dominio acotado Ω y en un espacio funcional apropiado.

Con las soluciones fundamentales de los operadores $D_{\overrightarrow{\alpha}}$ y $D_{-\overrightarrow{\alpha}}$ la situación es más complicada. El operador D es aplicado por la izquierda y la multiplicación por $\alpha(x_1)e_1$ es por la derecha. Por lo tanto, la convolución con una solución fundamental no nos proporciona un operador inverso a la derecha.

La solución consiste en un paso adicional. Teniendo las soluciones fundamentales para $D_{\overrightarrow{\alpha}}$ y $D_{-\overrightarrow{\alpha}}$ y utilizando los operadores

$$P^{\pm} = \frac{1}{2}M^{(1 \pm ie_1)}$$

introducidos en *[33]* podemos construir soluciones fundamentales para los operadores $D_{-i\alpha} = D - i\alpha(x_1)$ y $D_{i\alpha} = D + i\alpha(x_1)$. El punto aquí, es que los términos multiplicativos son escalares y consecuentemente las convoluciones por el lado izquierdo con las soluciones fundamentales de estos operadores nos dan los operadores inversos a la derecha correspondientes. Entonces, utilizando P^+ y P^- una vez más los transformamos en los operadores inversos a la derecha para $D_{\overrightarrow{\alpha}}$ y $D_{-\overrightarrow{\alpha}}$.

Las igualdades siguientes pueden ser fácilmente verificadas

$$D - i\alpha = P^+(D + M^{\alpha e_1}) + P^-(D - M^{\alpha e_1}), \tag{5.8}$$

y

$$D + i\alpha = P^+(D - M^{\alpha e_1}) + P^-(D + M^{\alpha e_1}). \tag{5.9}$$

Sea $k_{\overrightarrow{\alpha}}$ una solución fundamental para el operador $D + M^{\alpha e_1}$ y sea $k_{-\overrightarrow{\alpha}}$ una solución fundamental para el operador $D - M^{\alpha e_1}$. Entonces, de (5.8) obtenemos que

$$k_{-i\alpha} = P^+ k_{\overrightarrow{\alpha}} + P^- k_{-\overrightarrow{\alpha}} \tag{5.10}$$

es una solución fundamental del operador $D_{-i\alpha}$ y a partir de (5.9) obtenemos que

$$k_{i\alpha} = P^+ k_{-\overrightarrow{\alpha}} + P^- k_{\overrightarrow{\alpha}} \tag{5.11}$$

es una solución fundamental del operador $D_{i\alpha}$.

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$ con una frontera de Liapunov cerrada Γ. Definimos los operadores $T_{\pm i\alpha}$ y $K_{\pm i\alpha}$ actuando sobre las funciones valuadas en los cuaterniones complejos mediante las reglas siguientes:

$$T_{\pm i\alpha} g(x) = \int_\Omega k_{\pm i\alpha}(x - y) g(y) dy, \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

y

$$K_{\pm i\alpha} g(x) = -\int_\Gamma k_{\pm i\alpha}(x - y) \overrightarrow{n}(y) g(y) d\Gamma_y, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \Gamma,$$

donde $\overrightarrow{n}$ es el vector normal unitario $\overrightarrow{n} = \sum_{k=1}^{3} n_k e_k$.

Teorema 16 *[40] (Fórmula de Borel-Pompeiu) Sea g una función valuada en los cuaterniones complejos con sus componentes perteneciendo a $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Entonces*

$$K_{\pm i\alpha} g(x) + T_{\pm i\alpha} D_{\pm i\alpha} g(x) = g(x), \qquad x \in \Omega.$$

Del teorema 16 se derivan inmediatamente los teoremas siguientes (Comparar con [27, p. 70-71])

Teorema 17 *[40] (Fórmula Integral de Cauchy) Bajo las condiciones del teorema 16, sea g una solución de la ecuación $D_{i\alpha} g = 0$ o $D_{-i\alpha} g = 0$ en Ω. Entonces $g(x) = K_{i\alpha} g(x)$ o $g(x) = K_{-i\alpha} g(x)$, $x \in \Omega$ respectivamente.*

Teorema 18 *[40] (Operador Inverso a la Derecha) Bajo las condiciones del teorema 16 la siguiente igualdad es válida*

$$D_{\pm i\alpha} T_{\pm i\alpha} g(x) = g(x), \qquad x \in \Omega.$$

Retornemos, ahora, al operador $D_{\vec{\alpha}}$. De (5.8) y (5.9) tenemos

$$D_{\vec{\alpha}} = P^+ D_{-i\alpha} + P^- D_{i\alpha}.$$

Introduzcamos las notaciones siguientes

$$T_{\vec{\alpha}} = P^+ T_{-i\alpha} + P^- T_{i\alpha},$$

y

$$K_{\vec{\alpha}} = P^+ K_{-i\alpha} + P^- K_{i\alpha},$$

de inmediato obtenemos hechos similares a aquellos formulados en los teoremas 16-18.

Teorema 19 *[40] Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$ con una frontera de Liapunov Γ, $g \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Entonces*

$$K_{\overrightarrow{\alpha}} g(x) + T_{\overrightarrow{\alpha}} D_{\overrightarrow{\alpha}} g(x) = g(x), \qquad x \in \Omega, \tag{5.12}$$

$$D_{\overrightarrow{\alpha}} T_{\overrightarrow{\alpha}} g(x) = g(x), \qquad x \in \Omega,$$

y si adicionalmente $D_{\overrightarrow{\alpha}} g = 0$ en Ω entonces

$$g(x) = K_{\overrightarrow{\alpha}} g(x), \qquad x \in \Omega. \tag{5.13}$$

Demos una forma más explícita de la igualdad (5.13)

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{4}\int_\Gamma \{((D\varphi(x-y) - \alpha(x_1 - y_1)\varphi(x-y)e_1)(1+ie_1) \\ &\quad +(D\psi(x-y) + \alpha(x_1-y_1)\psi(x-y)e_1)(1-ie_1))\overrightarrow{n}(y)g(y)(1+ie_1) \\ &\quad +((D\psi(x-y) + \alpha(x_1-y_1)\psi(x-y)e_1)(1+ie_1) \\ &\quad +(D\varphi(x-y) - \alpha(x_1-y_1)\varphi(x-y)e_1)(1-ie_1)\overrightarrow{n}(y)g(y)(1-ie_1)\}d\Gamma_y \end{aligned}$$

donde φ es una solución fundamental del operador $-\Delta + \mu$ y ψ es una solución fundamental del operador $-\Delta + v$.

5.3 $\overrightarrow{\alpha}$ como gradiente de una función escalar

Consideremos la expresión siguiente

$$(D + M^{\overrightarrow{\alpha}})(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}) \sum_{k=0}^{3} U_k e_k, \tag{5.14}$$

donde $\sum_{k=0}^{3} U_k e_k$ es una función cuaterniónica arbitraria.

Introduzcamos la notación siguiente

$$\overrightarrow{\alpha}^{(k)} = e_k \overrightarrow{\alpha} \overline{e_k}$$

donde la conjugación es cuaterniónica.

Veamos cual es el efecto de dicha operación

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\alpha}^{(1)} &= e_1 \overrightarrow{\alpha} \overline{e_1} = -e_1 \overrightarrow{\alpha} e_1 \\
&= (-e_1\alpha_1 e_1 - e_1\alpha_2 e_2 - e_1\alpha_3 e_3)e_1 \\
&= e_1\alpha_1 + e_1\alpha_2 e_1 e_2 + e_1\alpha_3 e_1 e_3 \\
&= \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3.
\end{aligned}$$

Podemos reescribir (5.14) como

$$\sum_{k=0}^{3} (D + M^{\overrightarrow{\alpha}})(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}) M^{e_k} U_k,$$

$$(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}) M^{e_k} U_k = M^{e_k} (D - M^{\overrightarrow{\alpha}}) U_k,$$

por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{3} \left\{ M^{e_k} (D + M^{\overrightarrow{\alpha}})(D - M^{\overrightarrow{\alpha}}) U_k \right\}.$$

Observemos la estructura del producto obtenido.

$$\sum_{k=0}^{3} M^{e_k} (-\Delta U_k - \overrightarrow{\alpha}^2 U_k - (D\overrightarrow{\alpha}^{(k)}) U_k).$$

En este punto se requiere que el operador anterior sea escalar pero $D\overrightarrow{\alpha}^{(k)}$ solo es escalar cuando $\overrightarrow{\alpha}^{(k)}$ es el gradiente para cada k, esto es, cuando tiene la forma

$$\overrightarrow{\alpha} = \alpha_1(x_1)e_1 + \alpha_2(x_2)e_2 + \alpha_3(x_3)e_3. \tag{5.15}$$

Proposición 20 *Sean cuatro funciones* φ_k *,* $k = 0, 1, 2, 3$ *tales que son soluciones de la ecuación de Schrödinger*

$$(-\Delta + v_k)\varphi_k = 0,$$

donde

$$v_k = -D\overrightarrow{\alpha}^{(k)} - \overrightarrow{\alpha}^2$$

$$f = (D - M^{\overrightarrow{\alpha}})\sum_{k=0}^{3} \varphi_k e_k$$

$$(D + M^{\overrightarrow{\alpha}})f = 0.$$

Proposición 21 *Supongámos que la función cuaterniónica*

$$f = (D - M^{\overrightarrow{\alpha}})g$$

es solución de

$$(D + M^{\overrightarrow{\alpha}})f = 0,$$

esto implica que

$$g_k \in Ker(-\Delta + v_k).$$

Proposición 22 *Sea* f *solución de* $(D + M^{\overrightarrow{\alpha}})f = 0,$ *entonces*

$$f_k \in Ker(-\Delta + w_k),$$

donde $w_k = D\overrightarrow{\alpha}^{(k)} - (\overrightarrow{\alpha}^{(k)})^2.$

Sea $\Omega \in \mathbb{R}$ y sean $F(\Omega)$ y $G(\Omega)$ dos espacios funcionales cualesquiera.

Proposición 23 *Supongámos que*

$$(-\Delta + w_k)u(x) = \mu(x) \qquad \vee\, x \in \Omega \;\; k = \overline{0, 3} \tag{5.16}$$

tiene solución para cualquier $\mu \in F(\Omega)$ *y* $u \in G(\Omega)$. *Bajo esta suposición*

$$(D - M^{\overrightarrow{\alpha}})g = f \tag{5.17}$$

$$f \in F(\Omega)$$

$$g \in im(D + M^{\overrightarrow{\alpha}}).$$

Proposición 24 *Sean las condiciones de la proposición (23) válidas, entonces, cualquier solución* $f \in F(\Omega)$ *de la ecuación* $(D + M^{\overrightarrow{\alpha}})f = 0$ *tiene la forma*

$$f = (D - M^{\overrightarrow{\alpha}})g$$

donde g_k *satisface* $g_k \in Ker(-\Delta + v_k)(\Omega)$.

Suponemos que

$$(-\Delta + v_k)U_k = \delta.$$

Si tenemos la solución fundamental es posible construir el inverso a la derecha correspondiente y, dado que estamos tratando con un operador escalar, la convolución nos permite encontrar el inverso a la derecha buscado, esto es

$$(-\Delta + v_k)T_k = I.$$

Si tenemos el operador inverso a la derecha es posible encontrar la solución de

$$(D + M^{\overrightarrow{\alpha}})f = g.$$

Capítulo 6

Operador $(D + M^{\alpha})$ en el caso $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$

6.1 Operador de Helmholtz con número de onda complejo y cuaterniónico

Consideremos las funciones dadas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ valuadas en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. En el espacio $C^2(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ se define el siguiente operador:

$$\Delta_\lambda := \Delta + M^\lambda, \tag{6.1}$$

donde $\Delta := \sum_{k=1}^{3} \partial_k^2$, $\partial_k := \frac{\partial}{\partial x_k}$, $M^\lambda[f] := f\lambda$, $\lambda \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$. El operador (6.1) es llamado operador de Helmholtz con número de onda cuaterniónico. Cuando $\lambda = \lambda_0 \in \mathbb{C}$ tenemos el operador de Helmholtz en su forma típica.

Basándonos en el libro [27, p. 46] construiremos una teoría de funciones asociada con el operador de Helmholtz con número de onda cuaterniónico. Para esto se requiere una solución fundamental para el operador de Helmholtz con $\lambda \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Para el caso particular en que $\lambda \in \mathbb{C}$ tal solución fundamental es bien conocida: si $\lambda = v^2 \in \mathbb{C}$, la solución fundamental θ_v del operador de Helmholtz

$$\Delta_{v^2} := \Delta + v^2 I$$

esta dada por la fórmula

$$\theta_v(x) := -(4\pi\,|x|)^{-1} \cdot e^{-iv|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\,; \tag{6.2}$$

En particular, para $v = 0$ obtenemos una solución fundamental del operador de Laplace:

$$\theta(x) := \theta_0(x) = -\frac{1}{4\pi\,|x|}.$$

denotemos por α un cuaternión complejo raíz cuadrada de λ. Esto es, $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ y $\alpha^2 = \lambda$. Consideremos, ahora, que $\lambda = \alpha^2 \notin \mathcal{G}$, $\overrightarrow{\alpha}^2 \neq 0$ y asumimos que $\gamma := +\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2} \in \mathbb{C}$; $\xi_\pm := \alpha_0 \pm \gamma$. Introduzcamos los operadores

$$P^\pm := \frac{1}{2\gamma} M^{(\gamma \pm \overrightarrow{\alpha})},$$

los cuales son proyectores mutuamente complementarios. Entonces

$$\alpha^2 = \lambda = P^+\left[\xi_+^2\right] + P^-\left[\xi_-^2\right].$$

Por lo tanto

$$\Delta + M^\lambda = P^+(\Delta + \xi_+^2 I) + P^-(\Delta + \xi_-^2 I). \tag{6.3}$$

La fórmula (6.3) nos brinda una forma simple de construir una solución fundamental del operador $\Delta + M^\lambda$ en el caso bajo consideración. Por lo tanto, si para números complejos $\xi_\pm$, $\theta_{\xi_\pm}$ denota las funciones de (6.2) entonces

$$\theta_\alpha := P^+\left[\theta_{\xi_+}\right] + P^-\left[\theta_{\xi_-}\right]$$

es una solución fundamental del operador $\Delta + M^{\alpha^2}$. En efecto,

$$(\Delta + M^{\alpha^2})\,[\theta_\alpha] = P^+(\Delta + \xi_+^2 I)\left[\theta_{\xi_+}\right] + P^-(\Delta + \xi_-^2 I)\left[\theta_{\xi_-}\right] = \delta,$$

donde δ es la función delta.

Consideremos el operador siguiente

$$D_\alpha := D + M^\alpha,$$

el cual junto con su conjugado nos proporcionan la factorización siguiente:

$$\Delta_\lambda = -D_\alpha \; D_{-\alpha} = -D_{-\alpha} \; D_\alpha.$$

Ahora construiremos una función α-holomórfica la cual juega un papel muy importante en la teoría de funciones cuaterniónicas, esto es, representa el análogo del kernel de Cauchy para el análisis complejo unidimensional. Denotemos por $\mathcal{K}_\alpha$ a la solución fundamental para el operador D_α para cualquier $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Una vez establecido lo anterior, podemos expresar lo siguiente, sea $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, entonces una solución fundamental para el operador D_α está dada por las fórmulas:

1. Si $\alpha = \alpha_o \in \mathbb{C}$, entonces

$$\mathcal{K}_{\pm\alpha_0}(x) = -\text{grad } \theta_{\alpha_0}(x) \pm \alpha_0 \theta_{\alpha_0}(x) = \theta_{\alpha_0}(x) \left(\pm\alpha_0 + \frac{x}{|x|^2} + i\alpha_0 \frac{x}{|x|} \right) \qquad (6.4)$$

   donde $x := \sum_{k=1}^{3} x_k$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y $\theta_{\alpha_0}(x)$ es la solución fundamental del operador de Helmholtz.

2. Si $\alpha \notin \mathcal{G}$, $\overrightarrow{\alpha}^2 \neq 0$, entonces

$$\mathcal{K}_\alpha(x) = P^+ \left[\mathcal{K}_{\xi_+} \right](x) + P^- \left[\mathcal{K}_{\xi_-} \right](x), \qquad (6.5)$$

   donde $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\mathcal{K}_{\xi_\pm}$ son las soluciones fundamentales para los operadores $D_{\xi_\pm}$ con parámetros complejos $\xi_\pm$.

3. Si $\alpha \notin \mathcal{G}$, $\overrightarrow{\alpha}^2 = 0$, entonces

$$\mathcal{K}_\alpha(x) = \mathcal{K}_{\alpha_0} + \frac{\partial}{\partial \alpha_0} [\mathcal{K}_{\alpha_0}] \overrightarrow{\alpha};$$

4. Si $\alpha \in \mathcal{G}$, $\alpha_0 \neq 0$, entonces

$$\mathcal{K}_\alpha(x) = P^+ \left[\mathcal{K}_{2\alpha_0}\right](x) + P^- \left[\mathcal{K}_0\right](x);$$

5. Si $\alpha \in \mathcal{G}$, $\alpha_0 = 0$, entonces

$$\mathcal{K}_\alpha(x) = \mathcal{K}_0(x) + \theta \cdot \alpha.$$

6.2 Fórmulas integrales

Se construirán, ahora, los operadores integrales cuaterniónicos, los cuales representan una generalización de los siguientes operadores: Operador de tipo de Cauchy, operador T, y el operador de integración singular, definidos para el análisis complejo [27].

Comenzaremos con el caso cuando $\alpha = \alpha_0 \in \mathbb{C}$. Introducimos los operadores

$$T_{\pm\alpha_0}[f](x) := \int_\Omega \mathcal{K}_{\pm\alpha_0}(x-y) f(y) dy, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{6.6}$$

$$K_{\pm\alpha_0}[f](x) := -\int_\Gamma \mathcal{K}_{\pm\alpha_0}(x-y) \overrightarrow{n}(y) f(y) d\Gamma_y, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \Gamma, \tag{6.7}$$

$$S_{\pm\alpha_0}[f](t) := -2\int_\Gamma \mathcal{K}_{\pm\alpha_0}(t-\tau) \overrightarrow{n}(\tau) f(\tau) d\Gamma_\tau, \qquad \tau \in \Gamma, \tag{6.8}$$

donde el kernel de Cauchy $\mathcal{K}_{\alpha_0}$ esta definido por la ecuación (6.4); la integral en (6.8) existe en el sentido del valor principal de Cauchy.

Teorema 25 *[27] (Fórmula cuaterniónica de Borel-Pompeiu para un parámetro complejo α) Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^3$ con frontera de Liapunov $\Gamma := \partial\Omega$. Sea $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ y $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$. Entonces*

$$K_{\alpha_0}[f](x) + T_{\alpha_0} D_{\alpha_0}[f](x) = f(x), \qquad \forall x \in \Omega. \tag{6.9}$$

El teorema anterior fue enunciado asumiendo que $\alpha = \alpha_0 \in \mathbb{C}$, pero es posible extender la definición de los operadores integrales introducidos anteriormente para $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ como se presenta a continuación [27]:

$$T_\alpha := \begin{cases} P^+ \cdot T_{\xi_+} + P^- \cdot T_{\xi_-}, & \alpha \notin \mathcal{G},\ \overrightarrow{\alpha}^2 \neq 0, \\ T_{\alpha_0} + M^{\overrightarrow{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \alpha_0}[T_{\alpha_0}], & \alpha \notin \mathcal{G},\ \overrightarrow{\alpha}^2 = 0, \\ P^+ \cdot T_{2\alpha_0} + P^- \cdot T_0, & \alpha \in \mathcal{G},\ \alpha_0 \neq 0, \\ T_0 + M^\alpha \cdot W_0, & \alpha \in \mathcal{G},\ \alpha_0 = 0, \end{cases}$$

donde

$$W_\mu [f](x) := \int_\Omega \theta_\mu (x-y) f(y)\, dy, \qquad \mu \in \mathbb{C}, \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

$$K_\alpha := \begin{cases} P^+ \cdot K_{\xi_+} + P^- \cdot K_{\xi_-}, & \alpha \notin \mathcal{G},\ \overrightarrow{\alpha}^2 \neq 0, \\ K_{\alpha_0} + M^{\overrightarrow{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \alpha_0}[K_{\alpha_0}], & \alpha \notin \mathcal{G},\ \overrightarrow{\alpha}^2 = 0, \\ P^+ \cdot K_{2\alpha_0} + P^- \cdot K_0, & \alpha \in \mathcal{G},\ \alpha_0 \neq 0, \\ K_0 - M^\alpha \cdot V_0, & \alpha \in \mathcal{G},\ \alpha_0 = 0, \end{cases}$$

donde

$$V_\mu [f](x) := \int_\Gamma \theta_\mu (x-\tau) \cdot \overrightarrow{n}(\tau) f(\tau)\, d\Gamma_\tau, \qquad \mu \in \mathbb{C}, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \Gamma.$$

$$S_\alpha := \begin{cases} P^+ \cdot S_{\xi_+} + P^- \cdot S_{\xi_-}, & \alpha \notin \mathcal{G},\ \overrightarrow{\alpha}^2 \neq 0, \\ S_{\alpha_0} + M^{\overrightarrow{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \alpha_0}[S_{\alpha_0}], & \alpha \notin \mathcal{G},\ \overrightarrow{\alpha}^2 = 0, \\ P^+ \cdot S_{2\alpha_0} + P^- \cdot S_0, & \alpha \in \mathcal{G},\ \alpha_0 \neq 0, \\ S_0 - M^\alpha \cdot \widehat{V}_0, & \alpha \in \mathcal{G},\ \alpha_0 = 0, \end{cases}$$

donde

$$\widehat{V}_\mu [f](x) := 2 \int_\Gamma \theta_\mu (x-\tau) \cdot \overrightarrow{n}(\tau) f(\tau)\, d\Gamma_\tau, \qquad \mu \in \mathbb{C}, \qquad x \in \Gamma.$$

Teorema 26 *[27] (Fórmula cuaterniónica de Borel-Pompeiu para un parámetro cuaterniónico-complejo α) Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^3$ con frontera de Liapunov $\Gamma := \partial\Omega$. Sea α un* *cuaternión complejo arbitrario y* $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ *. Entonces*

$$K_\alpha [f](x) + T_\alpha D_\alpha [f](x) = f(x), \qquad \forall x \in \Omega. \tag{6.10}$$

Obtengamos la representación explícita de los operadores involucrados en la última ecuación considerando una función vectorial para el operador integral de Cauchy y una función escalar para el operador T.

$$\begin{aligned}
K_{\xi_+} \overrightarrow{f}(x) &= -\int_\Gamma (-grad\ \theta_\xi(x-y) + \xi\theta_\xi(x-y)) \overrightarrow{n}(y) \overrightarrow{f}(y) d\Gamma_y \\
&= -\int_\Gamma (-grad\ \theta_\xi(x-y) + \xi\theta_\xi(x-y)) \left([\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{f}(y)] - < \overrightarrow{n}(y), \overrightarrow{f}(y) > \right) \\
&= -\int_\Gamma -\xi\theta_\xi(x-y) < \overrightarrow{n}(y), \overrightarrow{f}(y) > - < -grad\ \theta_\xi(x-y), [\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{f}(y)] > \\
&\qquad + \xi\theta_\xi(x-y)[\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{f}(y)] + < \overrightarrow{n}(y), \overrightarrow{f}(y) > grad\ \theta_\xi(x-y) \\
&\qquad + \left[-grad\ \theta_\xi(x-y) \times [\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{f}(y)] \right] \\
&= \int_\Gamma \xi\theta_\xi(x-y) < \overrightarrow{n}(y), \overrightarrow{f}(y) > + < -grad\ \theta_\xi(x-y), [\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{f}(y)] > \\
&\qquad - \xi\theta_\xi(x-y)[\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{f}(y)] - < \overrightarrow{n}(y), \overrightarrow{f}(y) > grad\ \theta_\xi(x-y) \\
&\qquad - \left[-grad\ \theta_\xi(x-y) \times [\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{f}(y)] \right]
\end{aligned}$$

$$K_{\xi_-}\overrightarrow{f}(x) = -\int_\Gamma (-\text{grad }\theta_\xi(x-y) - \xi\theta_\xi(x-y))\,\overrightarrow{n}(y)\overrightarrow{f}(y)d\Gamma_y$$

$$= -\int_\Gamma (-\text{grad }\theta_\xi(x-y) - \xi\theta_\xi(x-y))\left([\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{f}(y)] - <\overrightarrow{n}(y),\overrightarrow{f}(y)>\right)d\Gamma_y$$

$$\begin{aligned}= -\int_\Gamma &\xi\theta_\xi(x-y) <\overrightarrow{n}(y),\overrightarrow{f}(y)> - <-\text{grad }\theta_\xi(x-y),[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{f}(y)>\\ &-\xi\theta_\xi(x-y)[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{f}(y)] + <\overrightarrow{n}(y),\overrightarrow{f}(y)> \text{grad }\theta_\xi(x-y)\\ &+\left[-\text{grad }\theta_\xi(x-y)\times[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{f}(y)]\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \int_\Gamma &-\xi\theta_\xi(x-y) <\overrightarrow{n}(y),\overrightarrow{f}(y)> + <-\text{grad }\theta_\xi(x-y),[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{f}(y)]>\\ &+\xi\theta_\xi(x-y)[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{f}(y)] - <\overrightarrow{n}(y),\overrightarrow{f}(y)> \text{grad }\theta_\xi(x-y)\\ &-\left[-\text{grad }\theta_\xi(x-y)\times[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{f}(y)]\right].\end{aligned}$$

Para multiplicar por $P^\pm$ consideremos el hecho siguiente:

$$P^+(F+G) + P^-(F-G) = F + \frac{1}{\gamma}G\alpha.$$

Introduzcamos, también, las siguientes notaciones

$$\begin{aligned}F &= <-grad\ \theta_\xi(x-y),[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{f}(y)]> - <\overrightarrow{n}(y),\overrightarrow{f}(y)> grad\ \theta_\xi(x-y)\\ &\quad -\left[-grad\ \theta_\xi(x-y)\times[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{f}(y)]\right],\end{aligned}$$

$$G = \xi\theta_\xi(x-y) <\overrightarrow{n}(y),\overrightarrow{f}(y)> -\xi\theta_\xi(x-y)[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{f}(y)],$$

por lo tanto el operador K_α puede ser reescrito como

$$K_\alpha f(x) = \int_\Gamma < -grad\ \theta_\xi(x-y), [\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{f}(y)] >$$
$$- < \overrightarrow{n}(y), \overrightarrow{f}(y) > grad\ \theta_\xi(x-y) - \Big[-grad\ \theta_\xi(x-y) \times [\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{f}(y)]\Big]$$
$$+\frac{1}{\gamma}\Big(\xi\theta_\xi(x-y) < \overrightarrow{n}(y), \overrightarrow{f}(y) > -\xi\theta_\xi(x-y)[\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{f}(y)]\Big)\alpha dy.$$

Para el operador T_α tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} T_{\xi_+} f(x) &= \int_\Omega \left(-grad\ \theta_\xi(x-y) + \xi\theta_\xi(x-y)\right) f(y)dy \\ &= \int_\Omega -grad\ \theta_\xi(x-y)f(y) + \xi\theta_\xi(x-y)f(y)dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\xi_-} f(x) &= \int_\Omega \left(-grad\ \theta_\xi(x-y) - \xi\theta_\xi(x-y)\right) f(y)dy \\ &= \int_\Omega -grad\ \theta_\xi(x-y)f(y) - \xi\theta_\xi(x-y)f(y)dy. \end{aligned}$$

Si redefinimos F y G en la forma

$$\begin{aligned} F &= -grad\ \theta_\xi(x-y)f(y), \\ G &= \xi\theta_\xi(x-y)f(y), \end{aligned}$$

el operador T_α puede ser representado como

$$T_\alpha = \int_\Omega -grad\ \theta_\xi(x-y)f(y) + \frac{1}{\gamma}\xi\theta_\xi(x-y)f(y)\alpha dy.$$

Utilizando las representaciones de los operadores K_α y T_α obtenidas podemos regresar al campo electromagnético utilizando las relaciones dadas por (4.14) y (4.15), esto es,

$$\mathbf{E}=\sqrt{\varepsilon}^{-1}\overrightarrow{\mathcal{E}}=\sqrt{\varepsilon}^{-1}(K_{\overrightarrow{\varepsilon}}\overrightarrow{\mathcal{E}}+T_{\overrightarrow{\varepsilon}}[-\frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}]),$$

$$\mathbf{H}=\sqrt{\mu}^{-1}\overrightarrow{\mathcal{H}}=\sqrt{\mu}^{-1}(K_{\overrightarrow{\mu}}\overrightarrow{\mathcal{H}}+T_{\overrightarrow{\mu}}[\sqrt{\mu}\overrightarrow{j}]),$$

donde

$$ScK_{\overrightarrow{\varepsilon}}\overrightarrow{\mathcal{E}}+ScT_{\overrightarrow{\varepsilon}}[-\frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}]=0,$$

y

$$ScK_{\overrightarrow{\mu}}\overrightarrow{\mathcal{H}}+ScT_{\overrightarrow{\mu}}[\sqrt{\mu}\overrightarrow{j}]=0.$$

Sustituyendo los operadores obtenídos en la ecuación del campo eléctrico tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}=\sqrt{\varepsilon}^{-1}\int_{\Gamma} &< -grad\theta_{\gamma}(x-y),[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{\mathcal{E}}(y)]>\\
&-<\overrightarrow{n}(y),\overrightarrow{\mathcal{E}}(y)>grad\theta_{\gamma}(x-y)\\
&-\Big[-grad\ \theta_{\gamma}(x-y)\times[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{\mathcal{E}}(y)]\Big]\\
&+\frac{1}{\gamma}\Big(\gamma\theta_{\gamma}(x-y)<\overrightarrow{n}(y),\overrightarrow{\mathcal{E}}(y)>-\gamma\theta_{\gamma}(x-y)[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{\mathcal{E}}(y)]\Big)\overrightarrow{\varepsilon}d\Gamma_y\\
&+\sqrt{\varepsilon}^{-1}\int_{\Omega}-grad\ \theta_{\gamma}(x-y)\left(-\frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\frac{1}{\gamma}\gamma\theta_{\gamma}(x-y)\left(-\frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\overrightarrow{\varepsilon}dy.\end{aligned}$$

Realizando los productos indicados la ecuación queda como

$$\begin{aligned}\mathbf{E}=\sqrt{\varepsilon}^{-1}\int_{\Gamma} &< -grad\theta_{\gamma}(x-y),[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{\mathcal{E}}(y)]>\\
&-<\overrightarrow{n}(y),\overrightarrow{\mathcal{E}}(y)>grad\theta_{\gamma}(x-y)-\Big[-grad\ \theta_{\gamma}(x-y)\times[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{\mathcal{E}}(y)]\Big]\\
&+\frac{1}{\gamma}\gamma\theta_{\gamma}(x-y)<\overrightarrow{n}(y),\overrightarrow{\mathcal{E}}(y)>\overrightarrow{\varepsilon}+\frac{1}{\gamma}\Big[-\gamma\theta_{\gamma}(x-y)[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{\mathcal{E}}(y)]\times\overrightarrow{\varepsilon}\Big]\\
&-\frac{1}{\gamma}<-\gamma\theta_{\gamma}(x-y)[\overrightarrow{n}(y)\times\overrightarrow{\mathcal{E}}(y)],\overrightarrow{\varepsilon}>d\Gamma_y\\
&+\sqrt{\varepsilon}^{-1}\left(\int_{\Omega}-grad\ \theta_{\gamma}(x-y)\left(-\frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\frac{1}{\gamma}\gamma\theta_{\gamma}(x-y)\left(-\frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\overrightarrow{\varepsilon}dy\right).\end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
Sc\overrightarrow{E} = \sqrt{\varepsilon}^{-1} \int_{\Gamma} &< -grad\theta_{\gamma}(x-y), [\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{\mathcal{E}}(y)] > \\
&-\frac{1}{\gamma} < -\gamma\theta_{\gamma}(x-y)[\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{\mathcal{E}}(y)], \overrightarrow{\varepsilon} > d\Gamma_y = 0
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
Vec\overrightarrow{E} = \sqrt{\varepsilon}^{-1} \int_{\Gamma} & - < \overrightarrow{n}(y), \overrightarrow{\mathcal{E}}(y) > grad\theta_{\gamma}(x-y) - \left[-grad\ \theta_{\gamma}(x-y) \times [\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{\mathcal{E}}(y)] \right] \\
+\frac{1}{\gamma}\gamma\theta_{\gamma}(x-y) &< \overrightarrow{n}(y), \overrightarrow{\mathcal{E}}(y) > \overrightarrow{\varepsilon} + \frac{1}{\gamma}\left[-\gamma\theta_{\gamma}(x-y)[\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{\mathcal{E}}(y)] \times \overrightarrow{\varepsilon} \right] d\Gamma_y \\
&+ \left(\sqrt{\varepsilon}^{-1} \int_{\Omega} -grad\ \theta_{\gamma}(x-y) \left(-\frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}} \right) + \frac{1}{\gamma}\gamma\theta_{\gamma}(x-y) \left(-\frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \overrightarrow{\varepsilon}\, dy \right)
\end{aligned}
$$

En forma análoga para el campo magnético se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H} = \sqrt{\mu}^{-1} \int_{\Gamma} &< -grad\theta_{\gamma}(x-y), [\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{\mathcal{H}}(y)] > \\
&- < \overrightarrow{n}(y), \overrightarrow{\mathcal{H}}(y) > grad\theta_{\gamma}(x-y) \\
&- \left[-grad\ \theta_{\gamma}(x-y) \times [\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{\mathcal{H}}(y)] \right] \\
&+\frac{1}{\gamma} \left(\gamma\theta_{\gamma}(x-y) < \overrightarrow{n}(y), \overrightarrow{\mathcal{H}}(y) > -\gamma\theta_{\gamma}(x-y)[\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{\mathcal{H}}(y)] \right) \overrightarrow{\mu}\, d\Gamma_y \\
&+\sqrt{\mu}^{-1} \int_{\Omega} -grad\ \theta_{\gamma}(x-y)\sqrt{\mu}\,\overrightarrow{j} + \frac{1}{\gamma}\gamma\theta_{\gamma}(x-y)\sqrt{\mu}\,\overrightarrow{j}\,\overrightarrow{\mu}\, dy
\end{aligned}
$$

finalmente

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H} = \sqrt{\mu}^{-1} \int_{\Gamma} &< -grad\theta_\gamma(x-y), [\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{\mathcal{H}}(y)] > \\
&- < \overrightarrow{n}(y), \overrightarrow{\mathcal{H}}(y) > grad\theta_\gamma(x-y) - \Big[-grad\ \theta_\gamma(x-y) \times [\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{\mathcal{H}}(y)] \Big] \\
&+ \frac{1}{\gamma} \Big(\gamma\theta_\gamma(x-y) < \overrightarrow{n}(y), \overrightarrow{\mathcal{H}}(y) > - \gamma\theta_\gamma(x-y)[\overrightarrow{n}(y) \times \overrightarrow{\mathcal{H}}(y)] \Big) \overrightarrow{\mu}\, d\Gamma_y \\
&\sqrt{\mu}^{-1} \int_{\Omega} \Big[-grad\ \theta_\gamma(x-y) \times \sqrt{\mu}\overrightarrow{j} \Big] - < -grad\ \theta_\gamma(x-y), \sqrt{\mu}\overrightarrow{j} > \\
&+ \left[\frac{1}{\gamma}\gamma\theta_\gamma(x-y)\sqrt{\mu}\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{\mu} \right] - < \frac{1}{\gamma}\gamma\theta_\gamma(x-y)\sqrt{\mu}\overrightarrow{j}, \overrightarrow{\mu} > dy.
\end{aligned}
$$

Capítulo 7

Modelos bidimensionales del movimiento de partículas en campos externos

7.1 Operador de Dirac en forma cuaterniónica

Considérense las siguientes matrices de Dirac:

$$\gamma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Introduzcamos el operador de Dirac con potenciales electromagnético y escalar [42]

$$\mathbb{D} = \gamma_0 \partial_t + \sum_{k=1}^{3} \gamma_k \partial_k + im + ip_{el}\gamma_0 - \sum_{k=1}^{3} A_k \gamma_k + ip_{sc}$$

donde γ_j , $j = 0, 1, 2, 3$ son las matrices de Dirac clasicas definidas anteriormente, $m \in \mathbb{R}$, p_{el}, A_k , y p_{sc} son funciones valuadas en los reales.

Las matrices de Dirac tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \gamma_0^2 &= E_4, \quad \text{la matriz identidad;} \\ \gamma_k^2 &= -E_4, \quad k \in \mathbb{N}_3; \\ \gamma_j\gamma_k + \gamma_k\gamma_j &= 0 \quad \text{para} \quad j, k \in \mathbb{N}_3^0. \end{aligned}$$

Introduzcamos las notaciones siguientes

$$\widehat{i}_0 := I; \quad \widehat{i}_1 := \gamma_3\gamma_2; \quad \widehat{i}_2 := \gamma_1\gamma_3; \quad \widehat{i}_3 := \gamma_1\gamma_2; \quad \widehat{i} := \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Cálculos simples muestran que el conjunto $\{\widehat{i}_0, \widehat{i}_1, \widehat{i}_2, \widehat{i}_3, \widehat{i}\}$ de las matrices complejas 4 x 4 tiene las mismas leyes de mutiplicación que el conjunto $\{e_0, e_1, e_2, e_3, i\}$.

Denotemos por $\mathfrak{D}$ el álgebra compleja generada por $\{\widehat{i}_0, \widehat{i}_1, \widehat{i}_2, \widehat{i}_3, \widehat{i}\}$, y definamos el mapeo

$$\kappa : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathfrak{D},$$

esto es,

$$\begin{aligned} \kappa(e_k) &= : \widehat{e}_k, \\ \kappa(i) &= : \widehat{i}, \end{aligned}$$

lo cual nos da un isomorfismo del álgebra de $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ en una subalgebra del álgebra de Dirac.

Entonces, si

$$a = \sum_{k=0}^{3} a_k e_k \in \mathbb{H}(\mathbb{C}),$$

donde

$$a_k = \widetilde{a}_k + \widetilde{\widetilde{a}}_k \cdot i, \quad \left\{\widetilde{a}_k, \widetilde{\widetilde{a}}_k\right\} \subset \mathbb{R},$$

se tiene que

$$\kappa(a) = \widetilde{a}_0\widehat{i}_0 + \widetilde{a}_1\widehat{i}_1 + \widetilde{a}_2\widehat{i}_2 + \widetilde{a}_3\widehat{i}_3 + \widehat{i}\left(\widetilde{\widetilde{a}}_0\widehat{i}_0 + \widetilde{\widetilde{a}}_1\widehat{i}_1 + \widetilde{\widetilde{a}}_2\widehat{i}_2 + \widetilde{\widetilde{a}}_3\widehat{i}_3\right),$$

o en forma explícita

$$\kappa(a) = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_0 - i\widetilde{a}_3; & i\widetilde{a}_1 + \widetilde{a}_2; & i\widetilde{\widetilde{a}}_0 + \widetilde{\widetilde{a}}_3; & -\widetilde{\widetilde{a}}_1 + i\widetilde{\widetilde{a}}_2 \\ i\widetilde{a}_1 - \widetilde{a}_2; & \widetilde{a}_0 + i\widetilde{a}_3; & -\widetilde{\widetilde{a}}_1 - i\widetilde{\widetilde{a}}_2; & i\widetilde{\widetilde{a}}_0 - \widetilde{\widetilde{a}}_3 \\ i\widetilde{\widetilde{a}}_0 + \widetilde{\widetilde{a}}_3; & -\widetilde{\widetilde{a}}_1 + i\widetilde{\widetilde{a}}_2; & \widetilde{a}_0 - i\widetilde{a}_3; & i\widetilde{a}_1 + \widetilde{a}_2 \\ -\widetilde{\widetilde{a}}_1 - i\widetilde{\widetilde{a}}_2; & i\widetilde{\widetilde{a}}_0 - \widetilde{\widetilde{a}}_3; & i\widetilde{a}_1 - \widetilde{a}_2; & \widetilde{a}_0 + i\widetilde{a}_3 \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Esto significa que una matriz arbitraria $A \in \mathfrak{D}$ tiene la forma siguiente

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & -c_1^* & c_2 & c_3^* \\ c_1 & c_0^* & c_3 & -c_2^* \\ c_2 & c_3^* & c_0 & -c_1^* \\ c_3 & -c_2^* & c_1 & c_0^* \end{pmatrix},$$

donde c_0, c_1, c_2, c_3 son números complejos arbitrarios y "$*$" denota la conjugación compleja.

Ahora, para cualquier $A \in \mathfrak{D}$, definamos una matriz-columna denotada como

$$\chi(A) := A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos definido el siguiente mapeo

$$\chi = A \in \mathfrak{D} \mapsto \beta := \chi(A) := \begin{pmatrix} \widetilde{a}_0 - i\widetilde{a}_3 \\ i\widetilde{a}_1 - \widetilde{a}_2 \\ i\widetilde{\widetilde{a}}_0 + \widetilde{\widetilde{a}}_3 \\ -\widetilde{\widetilde{a}}_1 - i\widetilde{\widetilde{a}}_2 \end{pmatrix}$$

el cual toma la primer columna de cualquier matriz $A \in \mathfrak{D}$.

El mapeo χ es invertible dado que por una columna de números complejos es posible reconstruir una matriz de la forma (7.1).

Para cualquier dominio $G \subset \mathbb{R}^4$ denotemos por $\widetilde{G}$ su imagen bajo la reflexión $x_3 \mapsto -x_3$, y para cualquier f definida en $\widetilde{G}$ la función $\widetilde{f}$ actua en G mediante la regla:

$$\widetilde{f}(t, x_1, x_2, x_3) := f(t, x_1, x_2, -x_3).$$

Ahora nos es posible introducir un mapeo $\mathcal{A}$ definido por la regla

$$\mathcal{A}[\Phi] := \chi^{-1}\kappa^{-1}[\Phi]$$

esto es, una función $\Phi : G \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^4$ es transformada en una función $F : \widetilde{G} \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$.

En forma explícita

$$F = \mathcal{A}[\Phi] := \frac{1}{2}\left(-\left(\widetilde{\Phi}_1 - \widetilde{\Phi}_2\right)e_0 + i\left(\widetilde{\Phi}_0 - \widetilde{\Phi}_3\right)e_1 - \left(\widetilde{\Phi}_0 + \widetilde{\Phi}_3\right)e_2 + i\left(\widetilde{\Phi}_1 + \widetilde{\Phi}_2\right)e_3\right).$$

La transformación inversa $\mathcal{A}^{-1}$ es definida como

$$\Phi = \mathcal{A}^{-1}[F] = \left(-i\widetilde{F}_1 - \widetilde{F}_2, -\widetilde{F}_0 - i\widetilde{F}_3, \widetilde{F}_0 - i\widetilde{F}_3, i\widetilde{F}_1 - \widetilde{F}_2\right)^T.$$

Presentemos, ahora, las transformaciones introducidas anteriormente en una forma matricial más explícita la cual relaciona los componentes de una función Φ valuada en $\mathbb{C}^4$ con los componentes de una función F valuada en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$:

$$F = \mathcal{A}[\Phi] := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{\Phi}_0 \\ \widetilde{\Phi}_1 \\ \widetilde{\Phi}_2 \\ \widetilde{\Phi}_3 \end{pmatrix},$$

y

$$\Phi = \mathcal{A}^{-1}[F] := \begin{pmatrix} 0 & -i & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{F}_0 \\ \widetilde{F}_1 \\ \widetilde{F}_2 \\ \widetilde{F}_3 \end{pmatrix}.$$

La transformación $\mathcal{A}$ posee las siguientes propiedades.

Lema 27 *[42] (Propiedades algebráicas de la transformación $\mathcal{A}$)*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_1\mathcal{A}^{-1}[F] &= -\mathcal{A}\gamma_2\gamma_3\mathcal{A}^{-1}[F] = e_1 F; \\
\mathcal{A}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_2\mathcal{A}^{-1}[F] &= \mathcal{A}\gamma_1\gamma_3\mathcal{A}^{-1}[F] = e_2 F; \\
\mathcal{A}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_3\mathcal{A}^{-1}[F] &= -\mathcal{A}\gamma_1\gamma_2\mathcal{A}^{-1}[F] = -e_3 F; \\
\mathcal{A}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0\mathcal{A}^{-1}[F] &= -\mathcal{A}\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathcal{A}^{-1}[F] = F e_1; \\
\mathcal{A}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathcal{A}^{-1}[F] &= -iFe_2;
\end{aligned}$$

Prueba. Notemos, primeramente, que $\mathcal{A}$ es una transformación lineal en $\mathbb{C}$. Probemos la primera propiedad:

$$\mathcal{A}\gamma_2\gamma_3\mathcal{A}^{-1}[F] = -e_1 F,$$

tenemos que

$$\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Por definición de $\mathcal{A}^{-1}$ es posible escribir

$$\mathcal{A}^{-1}[F] = \begin{pmatrix} -iF_1 - F_2 \\ -F_0 - iF_3 \\ F_0 - iF_3 \\ iF_1 - F_2 \end{pmatrix}.$$

Así

$$\gamma_2\gamma_3\mathcal{A}^{-1}[F] = -i\begin{pmatrix} -F_0 - iF_3 \\ -iF_1 - F_2 \\ iF_1 - F_2 \\ F_0 - iF_3 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\gamma_2\gamma_3\mathcal{A}^{-1}[F] &= \frac{i}{2}\left(-iF_1 - F_2 - iF_1 + F_2\right)e_0 - \frac{i^2}{2}\left(-F_0 - iF_3 - F_0 + iF_3\right)e_1 \\ &\quad + \frac{i}{2}\left(-F_0 - iF_3 + F_0 - iF_3\right)e_2 - \frac{i^2}{2}\left(-iF_1 - F_2 + iF_1 - F_2\right)e_3 \\ &= -i\left[iF_1e_0 - iF_0e_1 + iF_3e_2 - iF_2e_3\right] \\ &= F_1e_0 - F_0e_1 + F_3e_2 - F_2e_3 = -e_1F. \end{aligned}$$

Por analogía es posible probar las propiedades restantes. ■

Introduzcamos el siguiente operador cuaterniónico

$$R = D - \partial_t M^{e_1} + a + M^{-i(\widetilde{p}_{el}e_1 - i(\widetilde{p}_{sc}+m)e_2)}$$

donde $a = -\widetilde{A}_1e_1 - \widetilde{A}_2e_2 + \widetilde{A}_3e_3$.

Utilizando las propiedades algebráicas de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^{-1}$ obtenemos la siguiente igualdad

$$R = \mathcal{A}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathbb{D}\mathcal{A}^{-1}.$$

Así, el operador R es el operador de Dirac para una partícula libre con spin 1/2 en forma cuaterniónica. Esto es, una función Φ valuada en $\mathbb{C}^4$ es una solución de la ecuación

$$\mathbb{D}\Phi = 0 \qquad \text{en } G$$

si la función cuaterniónica compleja $F = \mathcal{A}\Phi$ es una solución de la ecuación cuaterniónica

$$RF = 0 \qquad \text{en } \widetilde{G}.$$

7.2 Soluciones con energía dada

De ahora en adelante consideraremos soluciones armónicas de la ecuación de Dirac o en otras palabras, soluciones con energía fija ω y potenciales independientes del tiempo, esto es

$$\Phi(t,x) = \Phi_\omega(x)\, e^{i\omega t},$$

donde $\omega \in \mathbb{R}$ y Φ_ω es una función valuada en $\mathbb{C}^4$ la cual depende únicamente de $x = (x_1, x_2, x_3)$.

La ecuación para Φ_ω tiene la forma

$$\mathbb{D}_\omega\Phi_\omega = 0 \qquad \text{en } \widehat{G} \tag{7.2}$$

donde $\widehat{G}$ es un dominio en $\mathbb{R}^3$, y

$$\mathbb{D}_\omega = i\omega\gamma_0 + \sum_{k=1}^{3}\gamma_k\partial_k + im + ip_{el}\gamma_0 - \sum_{k=1}^{3}A_k\gamma_k + ip_{sc}.$$

Tenemos que

$$R_\omega = \mathcal{A}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathbb{D}_\omega\mathcal{A}^{-1},$$

donde

$$R_\omega = D + a + M^b, \tag{7.3}$$

con $b = -i\left(\left(\widetilde{p}_{el} + \omega\right)e_1 - i\left(\widetilde{p}_{sc} + m\right)e_2\right)$. Así , la ecuación (7.2) se convierte en la ecuación cuaterniónica compleja

$$R_\omega q = 0,$$

donde q es una función valuada en los cuaterniones complejos.

7.3 Relación entre la ecuación cuaterniónica de Dirac y la ecuación de Vekua

Introduzcamos la notación siguiente. Un cuaternión complejo q es representable en la forma siguiente

$$q = Q_1 + Q_2e_2, \tag{7.4}$$

donde $Q_1 = q_0 + q_3e_3$ y $Q_2 = q_2 - q_1e_3$.

La ecuación de Dirac con potenciales electromagnético y escalar (7.3) en forma cuaterniónica tiene la forma [28, p. 158],

$$(D + \overrightarrow{b} + M^{\overrightarrow{\alpha}})f = 0, \tag{7.5}$$

donde $\overrightarrow{b}$ está relacionada con el pótencial magnético y es una función cuaterniónica puramente vectorial (usualmente real) con forma $b_1e_1 + b_2a_2 - b_3e_3$ y $\overrightarrow{\alpha}$ se encuentra definida por

$$\overrightarrow{\alpha} = \alpha_1(x)e_1 + \alpha_2(x)e_2, \tag{7.6}$$

$$\alpha_1(x) = -i(\phi(x) + \omega) \quad \text{y} \quad \alpha_2(x) = ig(x) - m,$$

donde ϕ está relacionado con el potencial eléctrico y g con el potencial escalar; ω es la energía de la partícula y m es la masa.

Proposición 28 *Sea $D = D_1 + D_2 e_2$ donde $D_1 = e_1 \partial_1$ y $D_2 = \partial_2 - \partial_1 e_3$, entonces (7.5) es equivalente al sistema*

$$D_1 F_1 - D_2 \overline{F}_2 + B_1 F_1 - B_2 \overline{F}_2 - F_2 \overline{A} = 0, \tag{7.7}$$

$$D_2 \overline{F}_1 + D_1 F_2 + B_2 \overline{F}_1 + B_1 F_2 + F_1 A = 0. \tag{7.8}$$

Las otras notaciones estan en pleno acuerdo con la representación bicompleja (7.4).

Supongámos que $F_2 \equiv 0$ y por simplicidad $b_3 \equiv 0$ lo cual equivale a $B_1 \equiv 0$. Entonces, a partir del sistema (7.7-7.8) llegamos de inmediato a la ecuación siguiente para F_1

$$\overline{D}_2 F_1 + \overline{B}_2 F_1 + \overline{A F}_1 = 0, \tag{7.9}$$

y para la primera ecuación obtenemos

$$D_1 F_1 = 0.$$

En la misma forma, para $F_1 \equiv 0$ y $b_3 \equiv 0$, obtenemos la ecuación siguiente para F_2

$$\overline{D}_2 F_2 + \overline{B}_2 F_2 + A \overline{F}_2 = 0, \tag{7.10}$$

y para la segunda ecuación tenemos

$$D_1 F_2 = 0.$$

Así, llegamos a una ecuación general de la forma

$$\overline{\partial} w + a w + b \overline{w} = 0 \tag{7.11}$$

donde $\overline{\partial} = \partial_2 + \partial_1 e_3$ y cada una de las funciones a, b y w es una función bicompleja de la forma $w = u + ve_3$ con componentes complejos u y v. (7.11) es conocida como ecuación de Vekua y sus soluciones como funciones analíticas generalizadas [55] o funciones pseudo-analíticas [10].

7.4 Divisores de cero y principio de similitud para la ecuación cuaterniónica de Vekua

Teorema 29 *[16] Sea* $w(z)$ *una solución regular de la ecuación* $\overline{\partial} w + aw + b\overline{w} = 0$ *en un dominio* G*, sea* $b(z) \notin \mathcal{G} \smile \{0\}$*,* $\forall z \notin G,$ *y sea*

$$g(z) = \{ \begin{array}{llll} a(z) + b(z)\frac{\overline{w(z)}}{w(z)}, & si & w(z) \neq 0, & z \in G, \\ a(z) + b(z), & si & w(z) = 0, & z \in G, \end{array}$$

entonces la función

$$\Phi(z) = w(z)e^{-h(z)},$$

donde

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_G \frac{g(\tau)\, d\tau}{\tau - z} \equiv -T_G g(z),$$

es holomórfica en G*, esto es*

$$\overline{\partial}\Phi = 0.$$

Prueba. Sea $\Phi = we^{-h}$ una solución de $\overline{\partial}\Phi = 0,$ esto implica lo siguiente

$$\overline{\partial} we^{-h} - \overline{\partial} hwe^{-h} = 0,$$

y

$$(-aw - b\overline{w})e^{-h} - \overline{\partial} hwe^{-h} = 0,$$

entonces

$$\overline{\partial}h = -a - b\frac{\overline{w}}{w},$$

y

$$h = -T\left(a + b\frac{\overline{w}}{w}\right).$$

■

Teorema 30 *Sea* $\Phi(z)$ *una solución de la ecuación* $\overline{\partial}\Phi = 0$ *en un dominio* G, *entonces*

$$w(z) = \Phi(z)e^{h(z)} \tag{7.12}$$

es una solución de $\overline{\partial}w + aw + b\overline{w} = 0$.

Prueba. Este hecho es fácilmente probado multiplicando (7.12) por $e^{-h(z)}$ desde el lado derecho. ■

El hecho (7.12) es conocido como principio de similitud y fue obtenido para el caso complejo por Vekua (ver [55]).

7.5 Pares generadores en forma cuaterniónica

Definición 31 *Sean* F, $G \in C^1(\Omega)$ *dos funciones pseudoanalíticas de la forma*

$$F := F_0 + F_3e_3, \quad G := G_0 + G_3e_3.$$

Si F *y* G *satisfacen la condición*

$$\mathbf{vec}\{\overline{F}G\} \neq 0, \tag{7.13}$$

son llamadas par generador.

La desigualdad (7.13) implica que cada función w admite una representación única en la forma

$$w = \lambda F + \mu G, \tag{7.14}$$

con constantes complejas λ y μ.

Supongámos que λ y μ $\in C^1$. Dado que F, G son soluciones de la ecuación de Vekua

$$F_{\overline{z}} = aF + b\overline{F},$$

y

$$G_{\overline{z}} = aG + b\overline{G},$$

tenemos que

$$w_{\overline{z}} = aw + b\overline{w} + F\lambda_{\overline{z}} + G\mu_{\overline{z}}.$$

Entonces, $w(z)$ es pseudo-analítica si y solo si

$$F\lambda_{\overline{z}} + G\mu_{\overline{z}} = 0. \tag{7.15}$$

Esto es, si suponemos que $F = 1$ y $G = e_3$, (7.15) puede ser escrito como el sistema siguiente

$$\partial_2\lambda = \partial_1\mu,$$
$$\partial_2\mu = -\partial_1\lambda,$$

el cual es un análogo del sistema de Cauchy en el análisis complejo.

En ([10, p.5]) fueron obtenidos los coeficientes siguientes para el par generador (F, G)

$$a = -\frac{\overline{F}G_{\overline{z}} - F_{\overline{z}}\overline{G}}{F\overline{G} - \overline{F}G},$$

$$b = -\frac{FG_{\overline{z}} - F_{\overline{z}}G}{F\overline{G} - \overline{F}G},$$

De (7.11), si consideramos un potencial magnético nulo, obtenemos

$$\overline{\partial} w + b\overline{w} = 0. \tag{7.16}$$

La derivada- (F,G) de una función (7.14) es definida por la relación

$$\dot{w}(z) = \frac{d_{(F,G)}w(z)}{dz} = W(z). \tag{7.17}$$

Los generadores, los cuales se comportan como constantes, tienen derivadas- (F,G) idénticamente decrecientes.

Junto con el par generador (F,G) consideremos su par generador adjunto $(F,G)^* = (F^*, G^*)$ definido por las fórmulas

$$F^* = -\frac{2\overline{F}}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \qquad G^* = \frac{2\overline{G}}{F\overline{G} - \overline{F}G}. \tag{7.18}$$

Sea $W(z)$ una función contínua definida en una curva rectificable Γ. La integral-(F,G) de W en Γ es por definición

$$\int_\Gamma W d_{(F,G)} z = F(z_1)\,\mathrm{Re}\int_\Gamma G^* W dz - G(z_1)\,\mathrm{Re}\int_\Gamma F^* W dz. \tag{7.19}$$

donde Γ es una curva rectificable desde z_0 hasta z_1.

7.6 Factorización del operador de Schrödinger

Consideremos la ecuación

$$(-\Delta + v)f = 0. \tag{7.20}$$

en algún dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, v y f son funciones valuadas en los reales. Supongamos que f es una función doblemente diferenciable y contínua. Por C denotamos el operador de conjugación cuaterniónica.

Teorema 32 *[39] Sea* f_0 *una solución particular no decreciente, en* Ω, *de (7.20). Entonces, para cualquier función contínua doblemente diferenciable valuada en los reales* φ *la siguiente igualdad es válida*

$$(\Delta - v)\varphi = \left(\partial_{\overline{z}} + \frac{\partial_z f_0}{f_0} C\right)\left(\partial_z - \frac{\partial_z f_0}{f_0}\right)\varphi. \tag{7.21}$$

Prueba. *Consideremos*

$$\begin{aligned}\left(\partial_{\overline{z}} + \frac{\partial_z f_0}{f_0} C\right)\left(\partial_z - \frac{\partial_z f_0}{f_0}\right)\varphi &= \Delta\varphi - \frac{|\partial_z f_0|^2}{f_0^2}\varphi - \partial_{\overline{z}}\left(\frac{\partial_z f_0}{f_0}\right)\varphi \\ &= \Delta\varphi - \frac{\Delta f_0}{f_0}\varphi = (\Delta - v)\varphi.\end{aligned}$$

■

Como φ en (7.21) en una función valuada en los reales, podemos agregar el operador de conjugación en el segundo operador de primer orden en el lado derecho, y la ecuación (7.21) toma la forma

$$(\Delta - v)\varphi = \left(\partial_{\overline{z}} + \frac{\partial_z f_0}{f_0} C\right)\left(\partial_z - \frac{\partial_z f_0}{f_0} C\right)\varphi.$$

El operador $\partial_z - \frac{\partial_z f_0}{f_0} I$, donde I es el operador identidad, puede ser representado en la forma

$$\partial_z - \frac{\partial_z f_0}{f_0} I = f_0 \partial_z f_0^{-1} I.$$

Introduzcamos la notación siguiente $P = f_0 \partial_z f_0^{-1} I$. Debido a (32), si f_0 es una solución no decreciente de (7.20), el operador P transforma soluciones de (7.20) en soluciones de la ecuación

$$\left(\partial_{\overline{z}} + \frac{\partial_z f_0}{f_0} C\right) w = 0. \tag{7.22}$$

Nótese que el operador ∂_z aplicado a una función φ valuada en los reales puede ser interpretado como un tipo de gradiente, y si sabemos que $\partial_z \varphi = \Phi$ en un plano complejo completo o en un dominio convexo, donde $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ es una función dada valuada en los complejos tal que su parte real Φ_1 y su parte imaginaria Φ_2 satisfacen la ecuación

$$\partial_y \Phi_1 + \partial_x \Phi_2 = 0, \tag{7.23}$$

entonces es posible reconstruir φ hasta una constante real arbitrara c en la forma siguiente

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^{x} \Phi_1(\eta, y)\, d\eta - \int_{y_0}^{y} \Phi_2(x_0, \xi)\, d\xi + c \tag{7.24}$$

donde (x_0, y_0) es un punto fijo arbitrario en el dominio de interés.

Denotemos por A el operador integral en (7.24)

$$A[\Phi](x, y) = \int_{x_0}^{x} \Phi_1(\eta, y)\, d\eta - \int_{y_0}^{y} \Phi_2(x_0, \xi)\, d\xi + c.$$

Nótese que la fórmula (7.24) puede ser fácilmente extendida a cualquier dominio simplemente conectado considerando la integral a lo largo de una curva rectificable arbitraria Γ desde (x_0, y_0) hasta (x, y)

$$\varphi(x, y) = \int_{\Gamma} \Phi_1 dx - \Phi_2 dy + c.$$

Así, si Φ satisface (7.23), entonces existe una familia de funciones φ valuadas en los reales tales que $\partial_z \varphi = \Phi$, dadas por la ecuación $\varphi = A[\Phi]$.

En una forma similar definimos el operador $\overline{A}$ correspondiente a $\partial_{\overline{z}}$:

$$\overline{A}[\Phi](x, y) = \int_{x_0}^{x} \Phi_1(\eta, y)\, d\eta + \int_{y_0}^{y} \Phi_2(x_0, \xi)\, d\xi + c.$$

Consideremos el operador $S = f_0 A f_0^{-1} I$. Es claro que $PS = I$.

Proposición 33 *[39] Sea f_0 una solución particular no desvanescente de (7.20) y w una solución de (7.22). Entonces la función $f = Sw$ es una solución de (7.20).*

Proposición 34 *[39] Sea f una solución de (7.20). Entonces*

$$SPf = f + cf_0$$

donde c es una constante real arbitraria.

El teorema 32 en conjunto con la proposición 33 nos muestran que la ecuación (7.20) es equivalente a la ecuación de Vekua (7.22) en el sentido siguiente. Cada solución de una de estas ecuaciones puede ser transformada en una solución de la otra ecuación y viceversa

7.7 Clases especiales de ecuaciones de Vekua

Sea f_0 una función no desvanecente valuada en los complejos (con respecto a i) con segunda derivada definida en Ω. Y consideremos la ecuación

$$\overline{\partial} W = \frac{\overline{\partial} f_0}{f_0} \overline{W} \quad \text{en } \Omega. \tag{7.25}$$

La ecuación (7.25) está estrechamente relacionada con (7.22) y fue considerada en [31]. Denotemos

$$v_1 = \frac{\Delta f_0}{f_0}.$$

Teorema 35 *[31] Si $W = W_1 + W_2\mathbf{k}$ es una solución de (7.25) entonces $W_1 = ScW$ es una solución de la ecuación de Schrödinger estacionaria*

$$-\Delta W_1 + v_1 W_1 = 0 \quad \text{en } \Omega, \tag{7.26}$$

y $W_2 = VecW$ es una solución de la ecuación de Schrödinger asociada

$$-\Delta W_2 + v_2 W_2 = 0 \quad \text{en } \Omega, \tag{7.27}$$

donde $v_2 = 2\left(\overline{\partial} f_0 \cdot \partial f_0\right)/f_0^2 - v_1$.

7.8 Ecuación de Dirac con potencial escalar

Mostremos que la ecuación de Dirac con potencial escalar dependiendo de una variable real se reduce a una ecuación de Vekua bicompleja de la forma (7.25).

Sea $p(x)$ el potencial escalar y consideremos $p_{el} \equiv 0$, $A_k \equiv 0$, $k = 1,2,3$. Entonces, de acuerdo a la sección 6.3 la ecuación de Dirac es equivalente a un par de ecuaciones de Vekua bicomplejas

$$\overline{\partial} w = b\overline{w} \tag{7.28}$$

y

$$\overline{\partial} W = \overline{bW} \tag{7.29}$$

con $b = p(x) + m - iw\mathbf{k}$.

Sea $f_0 = e^{P(x)+mx+iwy}$, donde P es la antiderivada de p. Entonces tenemos que

$$\overline{b} = \frac{\overline{\partial} f_0}{f_0}.$$

Notemos que debido al teorema 35 si la función bicompleja W es una solución de (7.29) entonces la función compleja $W_1 = ScW$ es una solución de la ecuación estacionaria de Schrödinger (7.26) donde

$$v_1(x) = p'(x) + (p(x) + m)^2 - w^2, \tag{7.30}$$

y la función $W_2 = VecW$ es una solución de la ecuación (7.27) donde

$$v_2(x) = -p'(x) + (p(x) + m)^2 - w^2. \tag{7.31}$$

Notemos que ambas ecuaciones de Schrödinger (7.26) y (7.27) en este caso admiten separación de variables. No obstante lo anterior, esto no implica que puedan ser resueltas explicitamente. En general este no es el caso. Sin embargo mostraremos como utilizando nuestra propuesta y la teoría de Bers para cada una de las ecuaciones es posible construir en forma explícita un sistema completo local de soluciones exactas.

Consideremos la ecuación (7.29). Es fácil ver que el par de funciones

$$F = f_0 \qquad \text{y} \qquad G = \frac{\mathbf{k}}{f_0} \tag{7.32}$$

representa un par generador para (7.29). Nótese que $F = e^{\sigma}$ y $G = e^{-\sigma}\mathbf{k}$, donde $\sigma = \alpha(x) + \beta(y)$ y $\alpha(x) = P(x) + mx$, $\beta(y) = iwy$. Para un par generador de tal tipo es facil construir un sucesor. Sea $\tau = -\alpha(x) + \beta(y)$. Entonces el par $F_1 = e^{\tau}$ y $G_1 = e^{-\tau}\mathbf{k}$ es un sucesor de (F, G). Más aún, (F, G) es un sucesor de (F_1, G_1). Así, para el par (F, G) obtenemos una secuencia generadora periódica completa con periodo 2 en forma explícita.

El hecho de que tengamos una secuencia generadora en forma explícita implica, de inmediato, que es posible construir las potencias formales correspondientes de cualquier órden en forma explícita y en consecuencia obtener un sistema completo local de soluciones exáctas de la ecuación de Dirac con potencial escalar dependiendo de una variable así como de las ecuaciones de Schrödinger (7.26) y (7.27) con potenciales (7.30) y (7.31) respectivamente.

Como primer paso construiremos el par generador adjunto

$$F^* = -f_0\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad G^* = \frac{1}{f_0}.$$

Escribamos ahora la ecuación para la (F, G)-integral:

$$\int_{\Gamma} W d_{(F,G)}z = \frac{1}{2}\left(f_0(z_1) Sc \int_{\Gamma} \frac{W(z)}{f_0(z)} dz - \frac{\mathbf{k}}{f_0(z_1)} Sc \int_{\Gamma} f_0(z) W(z) dz \right).$$

Por definición, la potencia formal $Z^{(0)}(a, z_0; z)$ para la ecuación (7.29) tiene la forma

$$Z^{(0)}(a, z_0; z) = \lambda F(z) + \mu G(z),$$

donde las constantes complejas λ y μ son elegidas de tal forma que $\lambda F(z_0) + \mu G(z_0) = a$.

Esto es,

$$Z^{(0)}(a,z_0;z) = \lambda e^{P(x)+mx+iwy} + \mu e^{-(P(x)+mx+iwy)}\mathbf{k}.$$

Para poder obtener $Z^{(1)}(a,z_0;z)$ debemos tomar la (F,G)-integral de $Z_1^{(0)}(a,z_0;z)$, donde

$$Z_1^{(0)}(a,z_0;z) = \lambda_1 F_1(z) + \mu_1 G_1(z),$$

con $\lambda_1 F_1(z_0) + \mu_1 G_1(z_0) = a$. Así

$$Z^{(1)}(a,z_0;z) = \int_{z_0}^{z} (\lambda_1 F_1(\zeta) + \mu_1 G_1(\zeta))\, d_{(F,G)}\zeta$$

$$= \frac{1}{2}\{e^{P(x)+mx+iwy} Sc \int_{z_0}^{z} e^{-P(x')-mx'-iwy'} \left(\lambda_1 e^{-P(x')-mx'-iwy'} + \mu_1 e^{P(x')+mx'-iwy'}\mathbf{k}\right) d\zeta$$

$$-e^{-P(x)-mx-iwy}\mathbf{k} Sc \int_{z_0}^{z} e^{P(x')+mx'+iwy'}\mathbf{k} \left(\lambda_1 e^{-P(x')-mx'+iwy'} + \mu_1 e^{P(x')+mx'-iwy'}\mathbf{k}\right) d\zeta\}$$

$$\begin{aligned} =\ & \frac{1}{2}\{e^{P(x)+mx+iwy} Sc \int_{z_0}^{z} \left(\lambda_1 e^{-2(P(x')+mx')} + \mu_1 e^{-2iwy'}\mathbf{k}\right) d\zeta \\ & -e^{-P(x)-mx-iwy}\mathbf{k} Sc \int_{z_0}^{z} \left(\lambda_1 e^{2iwy'}\mathbf{k} - \mu_1 e^{2(P(x')+mx')}\right) d\zeta\} \end{aligned} \tag{7.33}$$

donde $\zeta = x' + y'\mathbf{k}$.

Para $Z^{(2)}(a,z_0;z)$ tenemos que

$$Z^{(2)}(a,z_0;z) = 2\int_{z_0}^{z} Z_1^{(1)}(a,z_0;\zeta) d_{(F,G)}\zeta, \tag{7.34}$$

donde $Z_1^{(1)}(a,z_0;\zeta)$ a su vez puede ser encontrada utilizando la igualdad

$$Z_1^{(1)}(a,z_0;z) = \int_{z_0}^{z} Z_2^{(0)}(a,z_0;\zeta) d_{(F_1,G_1)}\zeta. \tag{7.35}$$

Notemos que debido a la periodicidad de la secuencia generadora dentro de la cual se encuentra el par generador (7.32)

$$Z_2^{(0)}(a,z_0;\zeta) = Z^{(0)}(a,z_0;\zeta).$$

El par adjunto para (F_1, G_1) necesario para la (F_1, G_1)-integral en (7.35) tiene la forma

$$F_1^* = -e^{\tau}\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad G_1^* = e^{-\tau}.$$

entonces,

$$Z_1^{(1)}(a, z_0; z) =$$

$$= \frac{1}{2}\{e^{-P(x)-mx+i\omega y}\,\mathrm{Sc}\int_{z_0}^{z} e^{P(x')+mx'-i\omega y'}(\lambda e^{P(x')+mx'+i\omega y'} + \mu e^{-P(x')-mx'-i\omega y'}\mathbf{k})d\zeta$$
$$- e^{P(x)+mx-i\omega y}\mathbf{k}\,\mathrm{Sc}\int_{z_0}^{z} e^{-P(x')-mx'+i\omega y'}\mathbf{k}(\lambda e^{P(x')+mx'+i\omega y'} + \mu e^{-P(x')-mx'-i\omega y'}\mathbf{k})d\zeta\}$$

$$= \frac{1}{2}\{e^{-P(x)-mx+i\omega y}\,\mathrm{Sc}\int_{z_0}^{z}(\lambda e^{2(P(x')+mx')} + \mu e^{-2i\omega y'}\mathbf{k})d\zeta \tag{7.36}$$
$$- e^{P(x)+mx-i\omega y}\mathbf{k}\,\mathrm{Sc}\int_{z_0}^{z}(\lambda e^{2i\omega y'}\mathbf{k} - \mu e^{-2(P(x')+mx')})d\zeta\}.$$

La substitución de esta expresión en (7.34) nos da la potencia formal $Z^{(2)}(a, z_0; z)$, y este procedimiento simple puede continuar en forma indefinida. Como resultado obtenemos un sistema infinito de potencias formales el cual, al menos localmente, nos da un sistema completo de soluciones de (7.29) en el sentido de que cualquier solución regular de (7.29) puede ser aproximada hasta un orden arbitrario por una combinación lineal finita de potencias formales.

Un procedimiento similar es aplicable a la ecuación (7.28). Donde el par de funciones $F_1\mathbf{k} = e^{\tau}\mathbf{k}$ y $G_1\mathbf{k} = -e^{-\tau}$ es un par generador correspondiente a (7.28).

Como cualquier solución de la ecuación de Schrödinger (7.26) con potencial ν_1 definido por (7.30) es la parte escalar de alguna solución de (7.29), y cualquier solución de (7.27) con potencial (7.31) es la parte vectorial de alguna solución de (7.29), las partes escalar y vectorial del sistema de potencias formales construido nos da un sistema completo localmente de soluciones de (7.26) y (7.27) respectivamente.

Este último resultado puede también ser interpretado en la forma siguiente. Consideremos la ecuación

$$-\Delta f + \nu f = \omega^2 f \qquad \text{en } \Omega \tag{7.37}$$

donde f es una función compleja continuamente diferenciable hasta la segunda derivada de dos variables reales x y y y ν es una función valuada en los complejos de una variable real x, ω es una constante compleja. Supongamos que tenemos una solución particular $f_0 = f_0(x)$ de la ecuación diferencial ordinaria

$$-\frac{d^2 f_0}{dx^2} + \nu f_0 = 0. \tag{7.38}$$

Esto implica que podemos representar ν en la forma $\nu = p' + p^2$ donde $p = f_0'/f_0$. Entonces observamos que (7.37) es precisamente la ecuación (7.26) con $m = 0$ en (7.30). Así, nuestro resultado significa que si somos capaces de resolver la ecuación diferencial ordinaria (7.38) entonces podemos construir explícitamente un sistema completo localmente de soluciones exactas para (7.37) para cualquier ω. Para lograrlo es necesario considerar la ecuación bicompleja de Vekua (7.29) y seguir el procedimiento descrito anteriormente para construir el sistema correspondiente de potencias formales. Entonces la parte escalar del sistema nos da un sistema completo localmente de soluciones exactas para (7.37).

Consideremos el caso cuando $p(x)$ es constante, entonces

$$b = p + m - iw\mathbf{k},$$

y

$$f_0 = e^{(p+m)x + iwy}.$$

Los potenciales (7.30) y (7.31) toman la forma

$$v_1 = (p+m)^2 - w^2 = v_2,$$

utilizando los valores anteriormente obtenidos la ecuación (7.33) toma la forma

$$\begin{aligned} = &\ \frac{1}{2}\{e^{(p+m)x+iwy}Sc\int_{z_0}^{z}\left(\lambda_1 e^{-2(p+m)x'}+\mu_1 e^{-2iwy'}\mathbf{k}\right)d\zeta \\ &-e^{-(p+m)x-iwy}\mathbf{k}Sc\int_{z_0}^{z}\left(\lambda_1 e^{2iwy'}\mathbf{k}-\mu_1 e^{2(p+m)x'}\right)d\zeta\} \end{aligned} \tag{7.39}$$

considerando los siguientes cambios de variable

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta\cdot t, \qquad 0\le t\le 1 \\ d\zeta &= \zeta\cdot dt, \\ x(\zeta) &= x\cdot t, \\ y(\zeta) &= y\cdot t. \end{aligned}$$

evaluemos una a una las integrales

$$\begin{aligned} Sc\int_0^1 \lambda_1 e^{-2((p+m)x't)}\left(x+y\mathbf{k}\right)dt &= x\lambda_1\int_0^1 e^{-2(p+m)x't}dt \\ &= \frac{x\lambda_1}{-2\left(p+m\right)x'}e^{-2(p+m)x't}|_0^1 \\ &= -\frac{x\lambda_1}{2\left(p+m\right)x'}e^{-2(p+m)x'}+\frac{x\lambda_1}{2\left(p+m\right)x'}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sc\int_0^1 \mu_1 e^{-2iwy't}\mathbf{k}\left(x+y\mathbf{k}\right)dt &= -y\mu_1\int_0^1 e^{-2iwy't}dt \\ &= \frac{y\mu_1}{2iwy'}e^{-2iwy't}|_0^1 \\ &= \frac{y\mu_1}{2iwy'}e^{-2iwy'}-\frac{y\mu_1}{2iwy'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sc\int_0^1 \lambda_1 e^{2iwy't}\mathbf{k}\left(x+y\mathbf{k}\right)dt &= -y\lambda_1\int_0^1 e^{2iwy't}dt \\ &= -\frac{y\lambda_1}{2iwy'}e^{2iwy't}|_0^1 \\ & \quad -\frac{y\lambda_1}{2iwy'}e^{2iwy'}+\frac{y\lambda_1}{2iwy'} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Sc\int_0^1 -\mu_1 e^{2(p+m)x't}\left(x+y\mathbf{k}\right)dt &= -x\mu_1\int_0^1 e^{2(p+m)x't}dt \\
&= \frac{-x\mu_1}{2\left(p+m\right)x'}e^{2(p+m)x't}|_0^1 \\
&= -\frac{x\mu_1}{2\left(p+m\right)x'}e^{2(p+m)x'}+\frac{x\mu_1}{2\left(p+m\right)x'}
\end{aligned}
$$

Una vez obtenidos los valores de las integrales podemos sustituirlas en la ecuación (7.39)

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{1}{2}\{e^{(p+m)x+iwy}\left(-\frac{x\lambda_1}{2\left(p+m\right)x'}e^{-2(p+m)x'}+\frac{x\lambda_1}{2\left(p+m\right)x'}+\frac{y\mu_1}{2iwy'}e^{-2iwy'}-\frac{y\mu_1}{2iwy'}\right) \\
& -e^{-(p+m)x-iwy}\mathbf{k}\left(-\frac{y\lambda_1}{2iwy'}e^{2iwy'}+\frac{y\lambda_1}{2iwy'}-\frac{x\mu_1}{2\left(p+m\right)x'}e^{2(p+m)x'}+\frac{x\mu_1}{2\left(p+m\right)x'}\right)\}
\end{aligned}
$$

Capítulo 8

Conclusiones

En la primer parte de este trabajo se consideraron las ecuaciones de Maxwell en medios no homogéneos, se presentó su reformulación en términos de cuaterniones y se obtuvieron las representaciones integrales de las soluciones en el caso cuando los parámetros del medio se representan como funciones exponenciales. Cabe mencionar que la solución exacta del sistema de Maxwell se conoce solo en algunos casos.

En la segunda parte se presentó una factorización del operador de Schrödinger mediante la cual a partir de una solución particular de la misma, la solución general se reduce a una ecuación diferencial cuaterniónica de primer orden la cual es equivalente al sistema de Maxwell en el caso estático. El caso de dos variables independientes fué considerado. Entonces la ecuación cuaterniónica de primer orden se convierte en la ecuación de Vekua que describe a las funciones pseudoanalíticas. Se utilizaron algunos hechos importantes de la teoría de potencias formales de L. Bers del análisis complejo y se obtuvieron algunos resultados de gran importancia.

La relación obtenida entre la ecuación de Schrödinger y la ecuación cuaterniónica de primer orden o en una situación bidimensional con la ecuación de Vekua puede ser utilizada para el análisis de problemas con valores de frontera, para obtener representaciones integrales de las soluciones y posiblemente para otras aplicaciones de gran interés.

Dos resultados palpables de gran relevancia son la publicación de los artículos [15] y [16].

No obstante la importancia y lo sorpresivo de algunos de los resultados presentados resulta claro que aún quedan un gran número de aspectos pendientes. Uno de ellos es la consideración y análisis del efecto que tienen los llamados divisores de cero en hechos como el principio de similitud de la teoría de Bers replanteada en términos cuaterniónicos.

Bibliografía

[1] Bagrov V., Gitman D.M. *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1990.

[2] Beltrami E., *Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse.* Opere matematice, vol 3, Milano, 1911, pp. 115-128.

[3] Beltrami E., *Sulle teoria delle funzioni potenziali simmetriche.* ibid, pp. 349-377.

[4] Berezin A. V., Kurochkin Yu. A. and Tolkachev E. A., *Quaternions in relativistic physics.* Minsk: Nauka y Tekhnika, 1989.

[5] Bernstein S. *Factorization of Solutions of the Schrödinger Equation.* Proceedings of the symposium " Analitical and Numerical Methods in Quaternionic and Clifford Analysis", Seiffen, 1996, Eds. K. Gürlebeck and W. Sprösig, 1-6.

[6] Bernstein S. *Fundamental Solutions for Dirac-type Operators.* Banach Center Publications, v.37 " Generalizations of Complex Analysis and their Applications in Physics", Warsaw, 1996, J. Lawrynowicz (ed), 159-172.

[7] Bers L. *Partial differential equations and generalized analytic functions.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, vol. 36, 130-136, 1950.

[8] Bers L. *Partial differential equations and generalized analytic functions. Second note.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, vol. 37, 42-47, 1951.

[9] Bers L. and Agmon S. *The expansion theorem for pseudo-analytic functions.* Proceedings of the American Math. Soc., vol. 3, 757-764, 1952.

[10] Bers L. *Theory of Pseudo-Analytic Functions* New York University. 1952

[11] Bers L. *Formal powers and power series.* Communications on pure and applied mathematics, vol. IX, 693-711, 1956.

[12] Bitsadze A. V. *Boundary value problems for second-order elliptic equations.* Amsterdam: North-Holland and N.Y. Interscience, 1998.

[13] Carleman T., *Sur les systemes lineaires aux derivees partielles du premier ordre a deux variables.* C. R. Acad. Sci. Paris, vol 197 (1933) pp. 471-474.

[14] Casanova G., *L'algebre vectorielle.* Presses universitaires de France, 1976.

[15] Castañeda A. y Kravchenko V., *Sobre algunas nuevas representaciones integrales para el campo electromagnético en medios no homogéneos.* Memorias del 7o. Congreso de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, IPN, México, 2003.

[16] Castañeda A. y Kravchenko V., *New applications of pseudoanalytic function theory to de Dirac equation.* J. Phys. A: Math. Gen. 38 (2005) 9207-9219.

[17] Dzhuraev, A. V., *Singular integral equation method.* Longman. Sci. Tech., Harlow and Wiley, N. Y., 1992.

[18] Gajov F.D. *Problemas de contorno.* Editorial MIR (traducción al español), URSS, 1980.

[19] Gsponer A. *On the eauivalence oh the Maxwell and Dirac equations.* Int. J. Theor. Phys., April 2002.

[20] Gürlebeck K., *Hypercomplex Factorization of the Hemlholtz Equation.* Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, 1986, v. 5, #2, p. 125-131.

[21] Gürlebeck, K., and Sprössig, W., *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems.* Berlin: Akademie-Verlag, 1989.

[22] Gürlebeck, K., and Sprössig, W., *Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers.* Chichester: John Wiley & sons, 1998.

[23] Hestenes D. *Real Dirac Theory.* Proceedings of the international conference: The theory of the electron, UNAM, México, c.1997, 97-144.

[24] Imaeda K., *A new formulation of classical electrodynamics.* Nuovo Cimento, 1976, v. 32 B, #1, 138-162.

[25] Jancewicz B., *Multivectors and Clifford Álgebra in electrodynamics.* Singapore: World Scientific, 1988.

[26] Kaiser R., Neudert M., Whal von W. *On the existence of free-force magnetic fields with small nonconstant* α *in exterior domains.* Comun. Math. Phys. vol. 211, 111-36, 2000.

[27] Kravchenko V. and Shapiro M. *Integral representations for spatial models of mathematical physics* Pitman research notes in mathematics series, 1996.

[28] Kravchenko V. *Applied quaternionic analysis. Maxwell's system and Dirac's equation.* World Scientific, "Functional-analytic and complex methods, their interactions, and applications to partial differential equations", Ed. by W. Tutschke, 143-160, 2001.

[29] Kravchenko V. *Applied Quaternionic Analysis* Heldermann Verlag, Research and Exposition in mathematics Series, v. 28, 2003.

[30] Kravchenko V. *On the reduction of the multidimensional Schrödinger equation to a first order equiation and its relation to the pesudoanalityc function theory.* Submitted for publication, available from arxiv.org math.AP/0408172

[31] Kravchenko V. *On a relation of pseudoanalytic function theory to the two-dimensional stationary Schrödinger equation and Taylor series in formal powers for its solutions.* Submitted for publication

[32] Kravchenko V. *Quaternionic Reformulation of Maxwell Equations for Inhomogeneous Media and New Solutions.* Journal for Analysis and its Applications Vol. 21 (2002), No 1, 21-26

[33] Kravchenko V. *On the Dirac operator with an electromagnetic potential.* Journal for Analysis and its Applications Vol. 17 (1998), No 3, 549-556

[34] Kravchenko V. *On the relation between holomorphic biquaternionic functions and time-harmonic electromagnetic fields.* Depositado en UkrINTEI, 29.12.1992, #2073-Uk-92,18pp (en ruso).

[35] Kravchenko V. *Integral representations of biquaternionic hyperholomorphic functions and their applications.* Ph. D. Thesis Odessa, 1993, 95pp (en ruso).

[36] Kravchenko V. *Exact solutions of the Dirac equation with harmonic pseudoscalar, scalar or electric potential.* J. Phys. A: Math. v. 31 (1998) 7561-7575.

[37] Kravchenko V. *A new method for obtaining solutions of the Dirac equation.* Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, 2000, v. 19, No. 3, 655-676.

[38] Kravchenko V. *On a new approach for solving Dirac equations with some potentials and Maxwell's system in inhomogeneous media.* Operator Theory: Advances and applications, v. 121 (2001) 278-306.

[39] Kravchenko V. *On the relationship between p-analytic functions and the Schrödinger equation.* Z. Anal. Anwendungen (2005), v. 24, #3, 487-496.

[40] Kravchenko V. *On Beltrami fields with nonconstant proportionality factor.* Journal of Physics A, 2003, v. 36, 1515-1522

[41] Kravchenko V. *On a Biquaternionic Bag Model.* Z. Anal. ihre Anwendungen 1995, 14, 3-14

[42] Kravchenko V, Malonek H. R, and Santana G. *Biquaternionic integral representations for massive Dirac spinors in a magnetic field and generalized biquaternionic differentiability* Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 19, 1415-1431 (1996).

[43] Kravchenko V. G. and Kravchenko V. V. *Quaternionic factorization of the Schrödinger operator and its applications to some first order systems of mathematical physics.* J. Phys. A: Math. Gen. 36 (2203) 1285-11297

[44] Malonek H. *Generalizing the (F,G)-derivative in the sense of Bers.* Clifford Álgebras and their application in mathematical physics, Kluwer academic publishers, Dordrecht, 1996, 247-257.

[45] Moisil, M., *Sur les quaternions monogenes.* Bull. Sci. Math. Paris 55 (1931), 169-194.

[46] Moisil, M. and N. Theodoresco, *Functions holomorphes dans l'espace.* Mathematica (Cluj) 5 (1931), 142-159.

[47] Obolashvili E. I., *Three-dimensional Generalized Holomorphic Vectors.* Differential Equations, 1975, v. 11, #1, p. 82-87.

[48] Pezzaglia Jr. W. M., *Multivector solutions to harmonic systems.* Clifford Álgebras and their Applications in Mathematical Physics, 1986, p. 445-454.

[49] Picard E., *Sur une systeme des equations aux derivees partielles.* C. R. Acad.Sci. Paris vol. 112 (1891) pp. 69-80.

[50] Picard E., *Sur une generalization des equations de la theorie des functions d'une variable complexe.* ibid., pp. 1399-1403.

[51] Shneerson M. S., *On Moisil Monogenic Functions.* Mat. Sbornik, 1958, v. 44, #43, 5, p. 165-204.

[52] Sabatier P. C. *Darboux transformations and global information in inverse theory.* Z. Angew. Math. Mech. 78 (suppl 1), 1998, S89-92.

[53] Saks R. *On boundary valued problems for the system* $rot u + \lambda u = h$. Diff. Eqns., vol. 8, 26-33, 1972.

[54] Thaller B. *The Dirac equation.* Springer-Verlag, 1992.

[55] Vekua I. N. *Generalized analytic Functions.* Pergamon Press 1962

[56] Vladimirov V. S. *Equations of mathematical physics.* Marcel Dekker, inc., New York, 1971.