



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO
DE TECNOLOGÍA DIGITAL



MAESTRÍA EN CIENCIAS EN SISTEMAS DIGITALES

CONTROL DE MOVIMIENTO EN SISTEMAS MECÁNICOS
SUBACTUADOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

PRESENTA:

ING. KONSTANTIN STARKOV

BAJO LA DIRECCIÓN DE:

DR. YURY ORLOV KUCHINA
DR. LUIS TUPAK AGUILAR BUSTOS

Junio de 2008

TIJUANA, B. C., MÉXICO



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de Tijuana, B.C. siendo las 10:00 horas del día 19 del mes de JUNIO del 2008 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CITEDI para examinar la tesis de grado titulada:

CONTROL DE MOVIMIENTO EN SISTEMAS MECÁNICOS SUBACTUADOS.

Presentada por el alumno:

STARKOV

Apellido paterno

materno

KONSTANTIN

nombre(s)

Con registro:

| | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|
| B0 | 6 | 1 | 2 | 1 | 0 |
|----|---|---|---|---|---|

aspirante al grado de:

MAESTRIA EN CIENCIAS EN SISTEMAS DIGITALES

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

DR. LUIS TUPAK AGUILAR BUSTOS



Director de tesis

DR. YURY ORLOV KUCHINA

DR. LUIS ARTURO GONZALEZ HERNANDEZ

S. E. P.
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACION Y DESARROLLO
TECNOLOGIA DIGITAL
DIRECCION

DR. MIGUEL AGUSTIN ALVAREZ CABANILLAS

M. C. TEODORO ALVAREZ SANCHEZ

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. LUIS ARTURO GONZALEZ HERNANDEZ



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de Tijuana el día 23 del mes Junio del año 2008, el (la) que suscribe Konstantin Starkov alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Sistemas Digitales con número de registro B061210, adscrito a Centro de Investigación y Desarrollo de Tec. Digital, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Yury Orlov Kochina, Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos y cede los derechos del trabajo intitulado Control de Movimiento en Sistemas Mecánicos Subactuados al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección kuzminki56@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Konstantin Starkov 

Nombre y firma

AGRADECIMIENTOS

A mis directores de tesis Dr. Yuri Orlov y Dr. Luis Aguilar, por su confianza en mí y por compartir sus valiosos conocimientos, que gracias a esto se hizo posible el desarrollo de este trabajo de tesis.

A mi Comisión Revisora de Tesis por su valiosa colaboración.

A los compañeros y amigos del CITEDI por su amistad y apoyo incondicional.

Al Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital por aceptarme como parte de su comunidad estudiantil.

Al Instituto Politécnico Nacional

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

DEDICATORIA

A mis padres, que siempre me han apoyado de manera incondicional y motivado para seguir adelante.

A mi mujer que me ha motivado para luchar y me ha brindado su apoyo en todo momento.

Control de Movimiento de Sistemas Mecánicos Subactuados

Resumen

En el presente trabajo de tesis se propone la solución al problema de estabilización para un helicóptero de tres grados de libertad con dos entradas de control a través de modos deslizantes. A partir del modelo dinámico subactuado, que surgen de las ecuaciones de Newton-Euler, se propone separar el modelo matemático en dos subsistemas donde uno describe el eje de elevación del cuerpo de helicóptero con respecto a la base de la plataforma y el otro es un sistema subactuado que describe los ejes de dirección y rotación gobernado por una entrada de control. Como solución al problema de regulación por retroalimentación de estados se implementa un controlador por modos deslizantes de primer orden para el subsistema de elevación y un controlador Twisting+PD de segundo orden para el subsistema de dirección y rotación. Se concluye estabilidad asintótica en el origen utilizando el análisis de estabilidad de Lyapunov. Los resultados se complementan con simulaciones. Se procede con la solución del problema de estabilización por medición de posición tomando en consideración que las plantas cuentan solamente con lectores de posición mientras que los controladores propuestos requieren de retroalimentación de velocidad. Se propone el diseño del observador lineal Luenberger y el observador no lineal Thau complementado con el análisis de estabilidad y resultados de simulación. Para respaldar el análisis teórico se realizaron experimentos sobre un prototipo didáctico.

Palabras clave: Sistemas de estructura variable, Sistemas Subactuados, Helicóptero.

Motion Control of Underactuated Mechanical Systems

Abstract

The solution for the stabilization problem for the three degrees-of-freedom underactuated laboratory helicopter prototype using sliding modes is presented in this thesis work. Details for the dynamic model derivation are provided via Newton-Euler equations. For simplicity, the mathematical model is separated in two subsystems where the first subsystem describes the elevation axis of the helicopter prototype that is decoupled from the remained underactuated subsystem which describes the direction and rotation axes of the model. A first order sliding mode controller was implemented for the elevation subsystem whereas a second order Twisting-PD controller was proposed for the direction and rotation subsystem. Asymptotic stability was concluded by applying the Lyapunov stability analysis for the closed-loop subsystems. Capabilities of the developed controllers are illustrated by means of numerical simulations. To meet the practical requirements on available measurements, the Luenberger linear and Thau non-linear observers are involved in to the closed-loop system to estimate the plant velocities and utilize these estimates as the solution to the output feedback problem. The asymptotic stability is proven for both observers and illustrated numerical simulations are presented. Theoretical results are supported by practical experiments with the laboratory helicopter.

Keywords: Variable structure systems, Underactuated systems, Helicopter.

Contenido

| | |
|--|-----------|
| Resumen | I |
| Abstract | I |
| Lista de tablas | I |
| Lista de figuras | I |
| Lista símbolos y acrónimos | I |
| 1 Introducción | 1 |
| 1.1 Antecedentes | 2 |
| 1.2 Problema | 3 |
| 1.3 Metodología | 4 |
| 1.4 Organización de trabajo | 5 |
| 2 Modelo dinámico | 7 |
| 2.1 Descripción | 7 |
| 2.2 Modelo dinámico de la plataforma de helicóptero de tres grados de libertad . . . | 8 |
| 2.2.1 Eje de elevación | 8 |
| 2.2.2 Eje de dirección | 9 |
| 2.2.3 Eje de rotación | 9 |
| 3 Diseño de controladores de estructura variable | 12 |
| 3.1 Formulación del problema | 12 |
| 3.2 Control por modos deslizantes para estabilización del eje de elevación | 13 |
| 3.2.1 Prueba de estabilidad | 14 |
| 3.3 Twisting+PD para estabilización de los ejes de dirección y rotación | 15 |
| 3.3.1 Prueba de estabilidad | 16 |
| 3.3.2 Dinámica cero | 17 |
| 3.4 Resultados de simulación | 18 |
| 4 Diseño de observadores | 22 |
| 4.1 Formulación del problema | 23 |
| 4.2 Observador Luenberger | 24 |
| 4.2.1 Diseño de observador de Luenberger para helicóptero | 24 |
| 4.3 Observador Thau (observador Lipschitz) | 27 |
| 4.3.1 Diseño de observador de Thau para helicóptero | 28 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.4 | Síntesis de retroalimentación por la salida | 30 |
| 4.5 | Resultados de simulación | 30 |
| 5 | Resultados experimentales | 40 |
| 5.1 | La Plataforma experimental | 40 |
| 5.1.1 | Tarjeta de Adquisición de Datos | 41 |
| 5.1.2 | Modulo de Potencia Universal | 42 |
| 5.1.3 | Helicóptero | 42 |
| 5.2 | Programación y Sincronización | 44 |
| 5.3 | Resultados experimentales | 45 |
| 6 | Conclusiones | 51 |
| 6.1 | Problemas abiertos | 53 |
| A | Teoría de modos deslizantes | 54 |
| A.1 | Método de Filippov [33] | 54 |
| A.2 | Método de Control Equivalente [33] | 55 |
| B | Análisis de robustez | 57 |
| C | Teoría de Lyapunov | 59 |
| C.1 | Conceptos básicos | 60 |
| C.2 | Teoremas del método directo de Lyapunov | 63 |

Lista de Tablas

| | | |
|-----|---|----|
| 5.1 | Valores de los parámetros del prototipo del helicóptero de 3DOF | 43 |
| 5.2 | Parámetros de los encoders | 43 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Plataforma Quanser. | 8 |
| 2.2 | Vista lateral de la plataforma Quanser. | 9 |
| 2.3 | Vista frontal de la plataforma Quanser. | 10 |
| 2.4 | Vista superior de la plataforma Quanser. | 11 |
| 3.1 | Respuesta en el tiempo del sistema en lazo cerrado: caso no perturbado. | 19 |
| 3.2 | Retrato de fase del subsistema de elevación en lazo cerrado: caso no perturbado. | 20 |
| 3.3 | Entradas de control: caso perturbado. | 20 |
| 3.4 | Respuesta en el tiempo del sistema en lazo cerrado: caso perturbado. | 21 |
| 3.5 | Entradas de control: caso perturbado. | 21 |
| 4.1 | Error de observación usando observador de Luenberger. | 32 |
| 4.2 | Posiciones y velocidades angulares del sistema en lazo cerrado con observador de Luenberger. | 32 |
| 4.3 | Entradas de control del sistema en lazo cerrado con observador de Luenberger. | 33 |
| 4.4 | Posiciones y velocidades angulares del sistema en lazo cerrado con ruido en el modelo usando observador de Luenberger. | 34 |
| 4.5 | Entradas de control del sistema en lazo cerrado con ruido en el modelo usando observador de Luenberger. | 35 |
| 4.6 | Error de observación con observador Thau. | 35 |
| 4.7 | Posiciones y velocidades angulares del sistema en lazo cerrado con observador Thau. | 36 |
| 4.8 | Entradas de control del sistema en lazo cerrado con observador Thau. | 37 |
| 4.9 | Posiciones y velocidades angulares del sistema en lazo cerrado con ruido en el modelo usando observador Thau. | 38 |
| 4.10 | Entradas de control del sistema con ruido en el modelo usando observador de Thau. | 39 |
| 5.1 | Diagrama general de la plataforma experimental. | 41 |
| 5.2 | Gráfica de ubicación de los encoders sobre el prototipo. | 44 |
| 5.3 | Posiciones angulares: resultados experimentales. | 45 |
| 5.4 | Velocidades angulares: resultados experimentales. | 46 |
| 5.5 | Entradas de control. | 46 |
| 5.6 | Posiciones angulares experimentales usando función tangente hiperbólica. | 48 |
| 5.7 | Velocidades angulares experimentales usando función tangente hiperbólica. | 48 |
| 5.8 | Entradas experimentales de control usando función tangente hiperbólica. | 49 |

Lista de símbolos y acrónimos

| | |
|--------------------|--|
| GDL | grados de libertad |
| CD | corriente directa |
| PD | proporcional derivativo |
| PID | proporcional integral derivativo |
| $sign(x)$ | signo de x |
| \in | pertenece |
| \mathbb{R} | números reales |
| \mathbb{R}_+ | conjunto de números reales positivos |
| $\ \cdot\ $ | norma Euclidiana para vectores y norma espectral para las matrices |
| $rank(A)$ | rango de la matriz A |
| $\lambda(A)$ | el espectro de la matriz cuadrada A , el conjunto de valores propios |
| $\lambda_{max}(A)$ | el valor propio máximo de la matriz cuadrada A |
| $\lambda_{min}(A)$ | el valor propio mínimo de la matriz cuadrada A |
| \triangleq | equivalencia por la definición |
| \equiv | equivalente a |
| \dot{x} | derivada de x con respecto a tiempo |
| \ddot{x} | la segunda derivada de x con respecto a tiempo |
| I | Matriz identidad |
| Σ | sumatoria |
| \rightarrow | implica, entonces |
| \forall | para todo |
| \times | producto cartesiano |

Capítulo 1

Introducción

La ingeniería de control tradicionalmente ha estado vinculada al sector industrial para el control de los sistemas físicos [20]. Además de su extrema importancia en vehículos espaciales, sistemas de guía de proyectiles, sistema de piloto automático de aeronaves, sistemas robóticos y otros, el control automático se ha vuelto parte integral e importante de los procesos industriales y de manufactura moderno [21]. Los beneficios que la ingeniería de control aporta a la sociedad actual son indiscutibles, ayudando significativamente a la mejora de la calidad de los productos fabricados, al aumento de la eficiencia de los procesos, a la minimización del consumo de energía, al aumento de la seguridad de las plantas industriales entre otros.

En la mayoría de los sistemas mecánicos, como robots articulados de enlaces rígidos, se asume que existe una fuerza independiente actuando sobre cada articulación. Esta clase de sistemas dinámicos son fáciles de analizar y diferentes metodologías de diseño de control lineal y no lineal se pueden aplicar de manera sencilla, por ejemplo, control Proporcional-Integral (PI), Proporcional-Integral-Derivativo (PID) [4, 28], modos deslizantes [33], control adaptivo [16], técnicas de control robusto [27], entre otros. Existen una clase de sistemas, donde una fuerza independiente (actuador) esta ausente de por lo menos una de las articulaciones, a este tipo de sistemas se le conoce como *sistemas mecánicos subactuados*. Formalmente, los sistemas mecánicos subactuados son aquellos que tienen mas grados de libertad que entradas de control. Algunos ejemplos didácticos de estos sistemas son el pendubot [22], acrobot, rueda inercial [8],

péndulo de Furuta [29]. Aplicaciones más avanzadas podemos citar al helicóptero, robots bípedos [36] y algunos trabajos referenciados en [10].

Diseño de controladores que operen de manera adecuada para sistemas subactuados han sido objeto de estudio desde hace varios años. Diversas metodologías como PI, PID, LQG, control H_∞ lineal y no lineal, control adaptivo, control basado en pasividad, entre otros; han sido extendidos para tratar este problema. Un sistema subactuado clásico es el llamado carro-péndulo invertido, donde el péndulo tiene puntos de equilibrio inestables ya que puede girar en cualquier momento y en cualquier dirección, a menos que se le aplique una acción de control conveniente, que proviene del movimiento del carro. Para dar solución a este problema se asume que las condiciones iniciales del péndulo se encuentran cerca del equilibrio, y a través de técnicas de linealización del sistema, se aplican diferentes acciones de control lineal como PI, PID, LQR, control H_∞ entre otras. Trabajos de aplicación de diseño de controladores no lineales se puede encontrar en [6].

1.1 Antecedentes

Análisis y síntesis de los modelos de helicóptero han llamado mucho la atención de los investigadores (ver, e.g., [3, 12] y las referencias dentro de estos trabajos). En particular para la plataforma experimental de helicóptero de 3 grados de libertad (GDL) fabricado por *Quanser* se han realizado pocos trabajos relevantes. En [31] se resolvió el problema de control por retroalimentación de estados por medio de control predictivo lineal. En [18] se presentan resultados referentes a la implementación de controladores predictivos para el modelo de helicóptero linealizado alrededor del punto de equilibrio. En [25] se presentan resultados referentes al análisis de las técnicas de movimientos primitivos básicos extendidos a la teoría de contracción no lineal con la aplicación al aprendizaje de maniobras agresivas dentro del control de vuelo de robot. En [2] se presentan resultados referentes a la solución del problema de control de movimiento del prototipo de helicóptero basados en pasividad con técnicas de control adaptivo. En [15] se presentan resultados relevantes relativos a la solución del problema de seguimiento de trayectorias

para helicóptero por medio de control de retroalimentación hacia adelante y retroalimentación. En [11] se presentan resultados respecto a la solución del problema de control vía internet para la supervisión y seguridad de su uso en un laboratorio. En [9] se presentan resultados relevantes relativos a la solución del problema de controlar el ángulo de cabeceo del helicóptero utilizando controlador PID. Debido a que los modelos de los helicópteros contienen cierto grado de incertidumbre y están sujetos a perturbaciones externas, los hacen interesantes para la aplicación de los métodos de control por modos deslizantes desde un punto de vista práctico.

1.2 Problema

En el presente trabajo se pretende resolver el problema de regulación para un helicóptero fabricado por *Quanser*, que es un sistema de tres grados de libertad y dos entradas de control. Debido a que en el diseño de los controladores se requiere el modelo dinámico de la planta no se pretende, en este trabajo, hacer una identificación de los parámetros del modelo dinámico. Por lo tanto se deberá diseñar un controlador tal que resuelva el objetivo de control a pesar de las incertidumbres del modelo. Motivados porque el sistema a controlar solo cuenta con sensores de posición se utilizarán los observadores Luenberger y Thau para estimar la velocidad. A lo largo de la tesis se utilizará las ecuaciones de Newton-Euler para representar la dinámica del sistema. Se puede plantear el problema a través del siguiente objetivo general:

- Solucionar el problema de estabilización en el origen del sistema subactuado de tres grados de libertad bajo la técnica de modos deslizantes.

Con el fin de resolver el problema se citan los siguientes objetivos específicos:

- Realizar el diseño de controladores por modos deslizantes para resolver el problema de regulación para un helicóptero de tres grados de libertad asumiendo retroalimentación de estados.
- Realizar el diseño de observadores lineales y no lineales para estimar velocidad del sistema.

- Realizar prueba de estabilidad en el sentido de Lyapunov para comprobar convergencia de las trayectorias del sistema en lazo cerrado al punto de equilibrio.
- Realizar pruebas de simulación numérica para validar los resultados teóricos.
- Aplicar los controladores a un helicóptero de tres grados de libertad.

Se hace incapié que el sistema no se trata de un helicóptero en extensión estricto de la palabra debido a que helicópteros reales son de seis a siete grados de libertad y por lo tanto su dinámica es más compleja y son más sensibles a efectos aerodinámicos. La importancia del estudio resalta por la complejidad en el diseño de controladores para sistemas subactuados [33].

1.3 Metodología

El control por modos deslizantes es reconocida como una herramienta eficiente para diseñar controladores que son robustos ante las incertidumbres. Sus principales ventajas son:

- Baja sensibilidad a los parámetros de la planta y perturbaciones, eliminando entonces la necesidad de tener un modelo exacto de la planta;
- la posibilidad de desacoplar la planta original en dos componentes de dimensión reducida;
- la mayoría de los controladores aseguran convergencia en tiempo finito a la superficie de conmutación y pueden ser implementados fácilmente.

Sin embargo el desarrollo de la metodología controladores de estructura variable ha expuesto algunas desventajas, específicamente:

- el problema de la alta frecuencia (“chattering”) causado por las imperfecciones de los sensores, actuadores y dispositivos de conmutación;
- el diseño de controladores de estructura variable se enfoca a la presencia de incertidumbres acopladas únicamente.

El termino modos deslizantes aparece por primera vez en el contexto de los sistemas de estructura variable. Pronto modos deslizantes se convierte en el principal modo de operación para esta clase de sistemas de control. Prácticamente todos los métodos de diseño para las sistemas de estructura variable son basados en la introducción deliberada de los modos deslizantes que han y siguen jugando un papel excepcional en desarrollo teórico y aplicación practica. Debido a su propiedad de reducción de orden y baja sensibilidad a los disturbios y variaciones de los parámetros dentro de una planta, control por modos deslizantes es una herramienta eficiente para controlar plantas de alto orden con dinámicas complejas operando bajo las condiciones de incertidumbre que son comunes para muchos procesos de tecnología moderna [33].

Los conceptos de sistemas de control con estructura variable han sido utilizados de manera subsecuente para el diseño de reguladores robustos, sistemas con modelo de referencia, esquemas adaptivos, sistemas con control de seguimiento de trayectorias, observadores de estado y sistemas de detección de fallas. Las ideas han sido aplicadas con gran éxito para problemas tan diversos como control automático de vuelo, control de los motores eléctricos, procesos químicos, sistemas para incrementar la estabilidad de los helicópteros, sistemas espaciales y robots manipuladores.

1.4 Organización de trabajo

La tesis se estructura en seis capítulos. El primero es una introducción general. En el Capítulo 2 se proporciona el modelo dinámico del helicóptero de tres grados de libertad. En el capítulo 3 se presentan los controladores por modos deslizantes para resolver el problema de regulación, se realiza el análisis de estabilidad usando el método de Lyapunov y se finaliza presentando resultados de simulación. Se complementa el Capítulo con prueba de convergencia en tiempo finito y robustez. En el capítulo 4 se aborda el problema de estimación de velocidad a través del diseño del observador lineal de Luenberger y el no lineal Thau respaldados por las pruebas de estabilidad en el sentido de Lyapunov y graficas de simulación. El Capítulo 5 contiene los resultados experimentales llevadas a cabo sobre la plataforma fabricada por Quanser e instalada en el laboratorio de control del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de

Ensenada (CICESE). Además el capítulo contiene una descripción en detalle de la plataforma experimental y los parámetros del helicóptero. Los resultados experimentales son presentados al final del capítulo. El Capítulo 6 contiene las conclusiones y posibles enfoques del trabajo realizado para futuros desarrollos. El presente trabajo se complementa con tres apéndices.

Capítulo 2

Modelo dinámico

El presente capítulo tiene como interés presentar el modelo dinámico del helicóptero de tres grados de libertad que se utilizará a lo largo de la tesis. Básicamente el modelo dinámico se derivó de las ecuaciones Newton-Euler y los parámetros del sistema son tomados del prototipo fabricado por Quanser.

2.1 Descripción

La plataforma Quanser es un dispositivo mecánico de tres grados de libertad diseñado para emular los movimientos de un helicóptero real (véase Fig. 2.1). Los movimientos angulares que permite la plataforma son elevación (x_1), dirección (x_2) y rotación (x_3). El modelo matemático estudiado es basado en las ecuaciones de Newton-Euler [4] $\sum W_a = I_a \alpha$ donde $W_a = r F_a$ con F_a representa la fuerza aplicada sobre el punto a y r es la distancia del punto a al objeto o en este caso la base y su producto representa el momento de fuerza sobre el punto a ; I_a es el momento de inercia de masa sobre el punto a ; α es la aceleración angular de cuerpo rígido. Se requieren tres ecuaciones diferenciales para describir la dinámica del sistema [35].

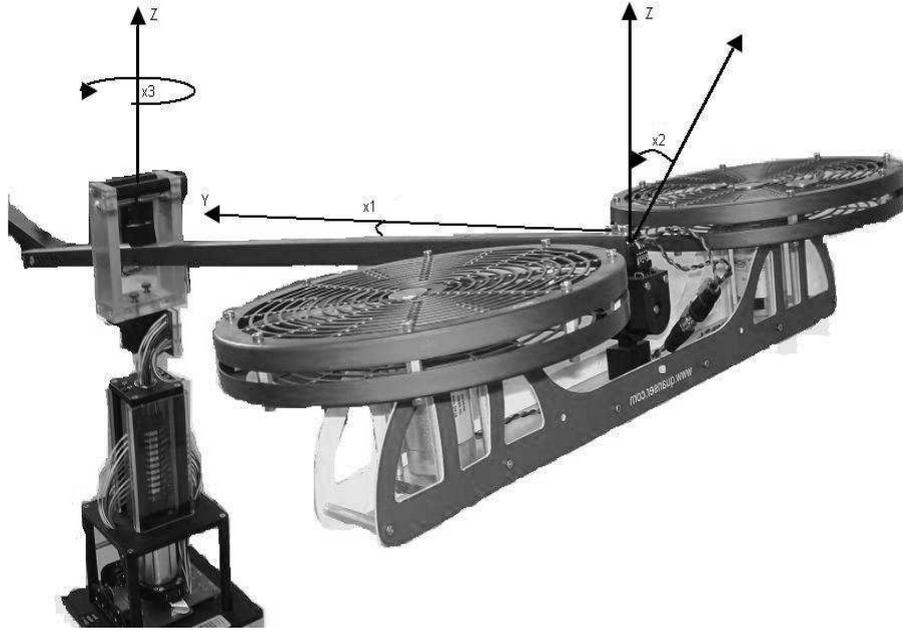


Figura 2.1: Plataforma Quanser.

2.2 Modelo dinámico de la plataforma de helicóptero de tres grados de libertad

2.2.1 Eje de elevación

Empezando el análisis de fuerzas observamos en la Figura 2.2 que al elevarse el cuerpo del modelo es afectado por la fuerza $F_r = F_f + F_t$ que es presentada al momento de aplicar voltaje ($V_f = V_t$) a los motores del helicóptero. La fuerza de gravedad (F_g) la que atrae el cuerpo del helicóptero tiene que ser vencida por la fuerza de elevación (F_r) para mantener el helicóptero en el aire. La ecuación para el eje de elevación queda expresada como

$$J_e \ddot{x}_1 = L_b F_r - L_b F_g \quad (2.1)$$

donde F_f y F_t son las fuerzas de los motores frontal y trasero, respectivamente; $F_r = K_r(V_f + V_t)$ con K_r como constante de fuerza que relaciona el motor con su hélice; L_b es la distancia de la base al cuerpo de helicóptero y J_e es el momento de inercia sobre el eje de elevación.

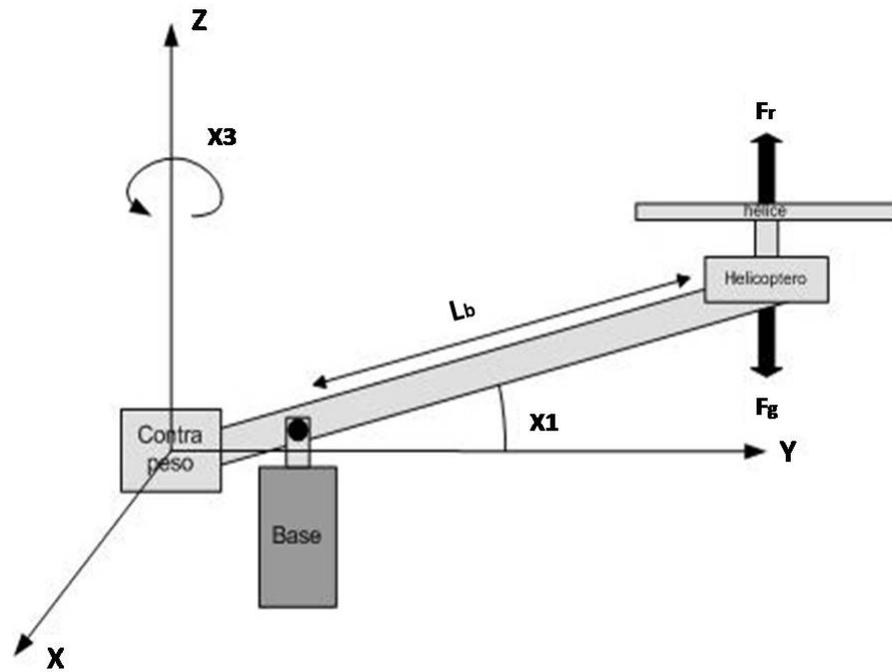


Figura 2.2: Vista lateral de la plataforma Quanser.

2.2.2 Eje de dirección

Para darle dirección de vuelo al helicóptero se tiene que variar el voltaje ($V_f > V_t$ o $V_f < V_t$) de uno de los motores y la fuerza que es generada en este proceso es representada por la diferencia de las fuerzas de los motores frontal y trasero $F_d = (F_f - F_t)$. La ecuación para el eje de dirección queda expresada como (véase Fig. 2.3)

$$J_d \ddot{x}_2 = (F_f - F_t) L_h \quad (2.2)$$

donde J_d es el momento de inercia sobre el eje de dirección y L_h es la distancia del motor al centro de masa entre los dos rotores.

2.2.3 Eje de rotación

Para describir el movimiento rotatorio del helicóptero ocupamos identificar las fuerzas que se presentan. Ya que el cuerpo del modelo está en el aire podemos darle dirección de vuelo variando

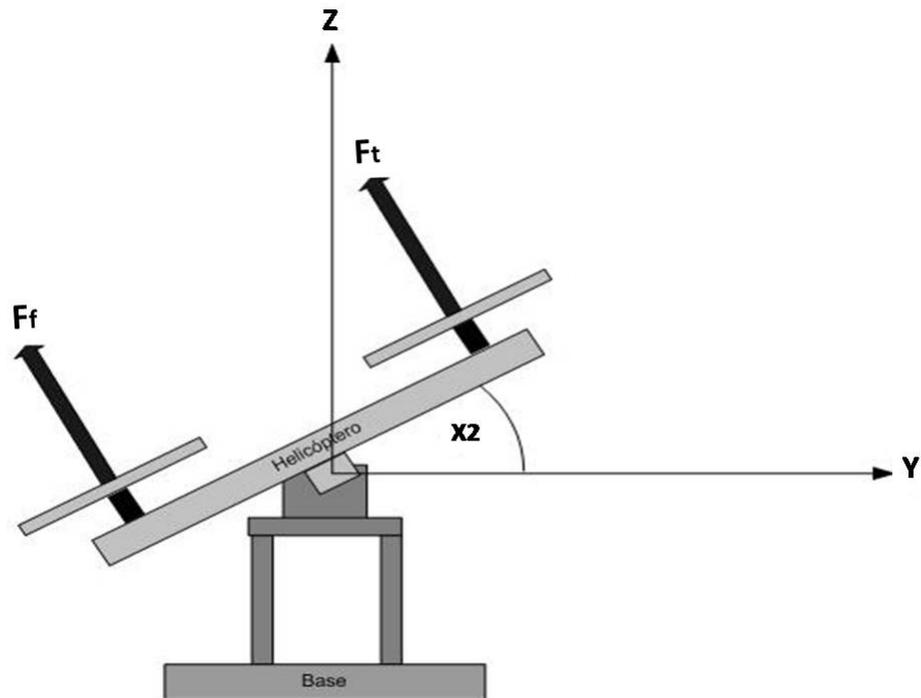


Figura 2.3: Vista frontal de la plataforma Quanser.

el voltaje de uno de los motores. Por ejemplo si el movimiento requerido es hacia enfrente el $V_f < V_t$ o para un movimiento hacia atrás el $V_f > V_t$. Con esta variación de voltaje solamente le damos la dirección y para mover el cuerpo en el sentido deseado se requiere otra vez volver a igualar los voltajes. De lo mencionado podemos concluir que las fuerzas que intervienen en este proceso son $F_d = (F_f - F_t)$ que es la fuerza aplicada para direccionar el cuerpo de helicóptero y $F_r = (F_f + F_t)$ que es la fuerza de elevación o en este caso es la fuerza necesaria para hacer el movimiento de rotación.

También este movimiento se puede describir de una manera más simple tomando el componente horizontal de la fuerza mínima requerida para mantener el helicóptero en el aire que es la fuerza de gravedad y el ángulo de dirección que indica el sentido de giro. La ecuación para el eje de rotación se representa como (véase Fig. 2.4)

$$J_r \ddot{x}_3 = L_b K_p \sin(x_2) \quad (2.3)$$

donde J_r es el momento de inercia sobre el eje de rotación, K_p es la fuerza mínima requerida

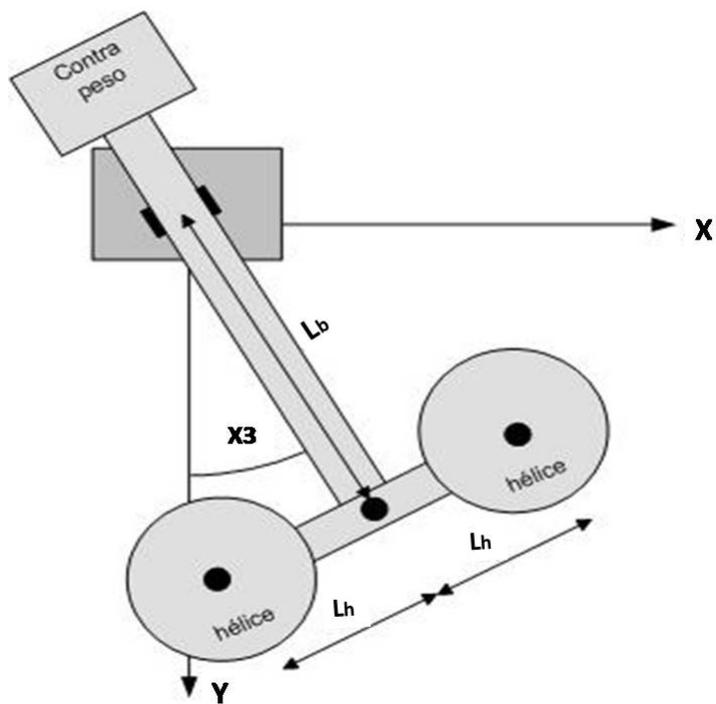


Figura 2.4: Vista superior de la plataforma Quanser.

para mantener el helicóptero en el aire.

Capítulo 3

Diseño de controladores de estructura variable

En el presente capítulo se resolverá el problema de regulación de posición para el helicóptero de tres grados dado en el Capítulo 2, donde se asume que se pueden medir las posiciones y velocidades angulares. Se hará uso de la técnica de control por modos deslizantes de orden uno y dos para resolver el problema. Se complementará el diseño con análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov y con resultados de simulación.

3.1 Formulación del problema

El problema de control de posición del helicóptero Quanser puede formularse en los siguientes términos: Dado el sistema (2.1)-(2.3) del capítulo anterior, se trata de determinar una ley de control $u = [u_1, u_2]^T$ de tal forma que las posiciones angulares $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ lleguen asintóticamente a cero, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_3(t)\| = 0. \quad (3.1)$$

A lo largo del capítulo se adoptará la siguiente notación del modelo matemático (2.1)-(2.3):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = au_1 - b + \omega_1 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{x}_3 = y_3 \\ \dot{y}_2 = cu_2 + \omega_2 \\ \dot{y}_3 = -d \sin(x_2) + \omega_3 \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $u_1 = V_f + V_t$, $u_2 = V_f - V_t$, $a = K_r L_b / J_e$, $b = LF_g / J_e$, $c = K_r L_h / J_d$, $d = K_p L_b / J_r$ y ω_i $i = 1, 2, 3$ son las posibles perturbaciones al sistema que serán omitidos en el análisis matemático de este capítulo y se tomarán en cuenta para las simulaciones únicamente. Nótese que el sistema (3.2) que describe el movimiento de elevación de la plataforma está desacoplada del resto del sistema (3.3). De esta manera el futuro análisis de los controladores se subdivide en un sistema de segundo orden completamente actuado (3.2) y uno subactuado (3.3).

3.2 Control por modos deslizantes para estabilización del eje de elevación

Para resolver el problema de regulación de posición del eje de elevación (es decir $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t)\| = 0$), se propone la siguiente ley por modos deslizantes:

$$u_1 = \frac{-my_1 + b - K \text{sign}(s_1)}{a} \quad (3.4)$$

donde m y K son constantes positivas y

$$s_1 = mx_1 + y_1$$

se le conoce como la superficie de deslizamiento. La ecuación de lazo cerrado que resulta de sustituir (3.4) en (3.2) viene dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= -my_1 - K\text{sign}(s_1)\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde se ha asumido $\omega_1 = 0$ para todo $t \geq 0$.

3.2.1 Prueba de estabilidad

La prueba se divide en dos partes:

1. Se debe comprobar que las trayectorias convergen a la superficie de deslizamiento s_1 a través de la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}s_1^2\tag{3.6}$$

que es positiva definida. La derivada temporal de (3.6) a lo largo de la solución de la ecuación de lazo cerrado (3.5) es

$$\dot{V} = s_1[-K\text{sign}(s_1)] = -K|s_1| < 0.\tag{3.7}$$

Entonces, aplicando el Teorema 4.2 de Khalil [14] se concluye que las trayectorias del sistema en lazo cerrado (3.5) tienden de manera asintótica a la superficie de deslizamiento s_1 . Adicionalmente, se puede comprobar que las trayectorias convergen a s_1 en tiempo finito reescribiendo la ecuación (3.7) de la siguiente manera:

$$s_1 \frac{ds_1}{dt} = -K|s_1|$$

e integrando de 0 a t_f se tiene que

$$\begin{aligned}\text{sign}(s_1) \int_0^{t_f} ds_1 &= -K \int_0^{t_f} dt \\ |s_1(t_f)| - |s_1(0)| &= -Kt_f\end{aligned}$$

entonces el tiempo tomado para alcanzar s_1 , representado por t_f , es

$$t_f = \frac{|s_1(0)|}{K}.$$

2. Finalmente, si $s_1 \equiv 0$ implica que $\dot{x}_1 = -mx_1$, $m > 0$, entonces el origen $x_1^* = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable en forma global.

3.3 Twisting+PD para estabilización de los ejes de dirección y rotación

Para resolver el problema de rotación (es decir $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_3(t)\| = 0$) reescribamos la dinámica de y_3 tomada de (3.3) asumiendo el caso no perturbado:

$$\dot{y}_3 = -d \sin(x_2). \quad (3.8)$$

Si se fuerza el lado derecho de (3.8) a la siguiente forma

$$\sin(x_2) = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3, \quad \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0 \quad (3.9)$$

entonces la ecuación de lazo cerrado que resulta de sustituir (3.9) en (3.8) tendrá un único punto de equilibrio que será estable en forma asintótica y global, satisfaciendo así el objetivo de control. Ahora nos enfocaremos en encontrar la ley de control u_2 que force la superficie

$$s_2 = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3 - \sin(x_2) \quad (3.10)$$

a cero. Para diseñar el controlador se debe derivar s_2 tantas veces hasta que aparezca la entrada de control u_2 :

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 &= \alpha_1 \dot{y}_3 + \alpha_2 \dot{y}_3 - \cos(x_2) \dot{y}_2 \\ \ddot{s}_2 &= -\alpha_1 d \sin(x_2) - \alpha_2 d \cos(x_2) \dot{y}_2 + \sin(x_2) \dot{y}_2^2 - c \cos(x_2) u_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nótese que la entrada de control u_2 aparece hasta la segunda derivada con respecto al tiempo de s_2 . Considérese la siguiente ley de control para cancelar la parte no lineal del lado derecho de (3.11) y garantizar la estabilidad asintótica local del subsistema (3.3):

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{c \cos(x_2)} [-\alpha_1 d \sin(x_2) - \alpha_2 d \cos(x_2) \dot{y}_2 + \sin(x_2) \dot{y}_2^2 \\ &\quad + c_1 \text{sign}(s_2) + c_2 \text{sign}(\dot{s}_2) + c_3 s_2 + c_4 \dot{s}_2]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, c_1, c_2, c_3$ y c_4 son constantes positivas. La ley de control u_2 consta de dos partes la primera es el control equivalente

$$u_2^{eq} = -\alpha_1 d \sin(x_2) - \alpha_2 d \cos(x_2) \dot{x}_2 + \sin(x_2) \dot{x}_2^2$$

cuya función es cancelar los términos no lineales de (3.11) y la segunda parte es el controlador Twisting+PD

$$u_2^{ctrl} = -c_1 \text{sign}(s) - c_2 \text{sign}(\dot{s}) - c_3 s - c_4 \dot{s}$$

que se encarga de llevar todas las trayectorias de (3.11) a $s_2 = 0$ y juntos $u_2 = u_2^{eq} + u_2^{ctrl}$ garantizan la estabilidad asintótica del subsistema (3.3). La ecuación de lazo cerrado que resulta de sustituir (3.12) en (3.11) viene dada por

$$\ddot{s}_2 = -c_1 \text{sign}(s_2) - c_2 \text{sign}(\dot{s}_2) - c_3 s_2 - c_4 \dot{s}_2. \quad (3.13)$$

La solución de la ecuación diferencial (3.13) es definida en el sentido de Filippov [33].

3.3.1 Prueba de estabilidad

Con la siguiente función de Lyapunov se demuestra la convergencia de las trayectorias del sistema (3.3) a la superficie de deslizamiento s_2 :

$$V = \frac{1}{2} c_2 s_2^2 + a_1 s_2 \dot{s}_2 + \frac{1}{2} \dot{s}_2^2 + c_2 |s_2| \quad (3.14)$$

que es positiva definida si a_1 es positiva y si $a_1 \leq \sqrt{c_2}$. La derivada de (3.14) a lo largo de la solución de la ecuación de lazo cerrado (3.13) es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= c_2 s_2 \dot{s}_2 + a_1 \dot{s}_2^2 + a_1 s_2 \ddot{s}_2 + \dot{s}_2 \ddot{s}_2 + c_2 \text{sign}(s_2) \dot{s}_2 \\ &= -c_2 \text{sign}(\dot{s}_2) \dot{s}_2 - (c_4 - a_1) \dot{s}_2^2 - (c_3 - c_2 + a_1 c_4) s_2 \dot{s}_2 \\ &\quad - a_1 c_1 \text{sign}(s_2) s_2 - a_1 c_2 \text{sign}(\dot{s}_2) s_2 - c_3 a_1 s_2^2 \end{aligned}$$

Haciendo uso de la desigualdad

$$2\|g\|\|h\| \leq \|g\|^2 + \|h\|^2, \quad g, h \in \mathbb{R}^n$$

se llega a

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -c_2|\dot{s}_2| - \left(\underbrace{c_4 - a_1 + \frac{1}{2}c_3 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}a_1c_4}_{r_1} \right) \|\dot{s}_2\|^2 \\ & - a_1(c_1 - c_2)|s_2| - \left(\underbrace{c_3a_1 + \frac{1}{2}c_3 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}a_1c_4}_{r_2} \right) \|s_2\|^2. \end{aligned}$$

Nótese que \dot{V} será definida negativa si $c_1 > c_2$, $c_4 > r_1$, $c_4 > a_1$ y $c_3a_1 > r_2$.

La estabilidad en tiempo finito de (3.13) se concluye aplicando el Teorema 4.2 de [23]. Dicho Teorema establece que (3.13) es uniformemente estable en forma global y en tiempo finito si $c_1 > c_2 > 0$ y si $c_3 > 0$, $c_4 > 0$.

3.3.2 Dinámica cero

En este subcapítulo se analiza el comportamiento del sistema (3.3) cuando $s_2 = 0$ y $\dot{s}_2 = 0$ (dinámica cero). El subsistema que describe los ejes de dirección y rotación en dinámica cero toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{x}_3 &= y_3 \\ \dot{y}_2 &= -\alpha_1 d \tan(x_2) - \alpha_2 d \dot{x}_2 + \tan(x_2) \dot{x}_2^2 \\ \dot{y}_3 &= -\alpha_1 d x_3 - \alpha_2 d \dot{x}_3. \end{aligned} \tag{3.15}$$

El subsistema (3.15) se representa en forma lineal bajo la condición de $-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$ debido a las restricciones de movimiento del sistema físico. El subsistema (3.3) en dinámica cero toma la

siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -d\alpha_1 & 0 & -d\alpha_2 & 0 \\ 0 & -d\alpha_1 & 0 & 0 -d\alpha_2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_x.$$

Si $d > 0$, $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$ entonces la parte real de los valores propios de A son negativos en consecuencia se asegura la estabilidad asintótica del origen $(x_2^*, x_3^*, y_2^*, y_3^*) = 0 \in \mathbb{R}^4$.

3.4 Resultados de simulación

El rendimiento de los controladores (3.4) y (3.12) se estudiaron mediante simulación numérica, realizados en MATLAB, aplicado al helicóptero Quanser requerido para desplazarse desde $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$ [rad] hacia el origen. La dinámica del helicóptero está dada por (3.2)-(3.3) bajo los parámetros tomados del fabricante dados en la Tabla 1.

Las siguientes ganancias de los controladores fueron seleccionadas arbitrariamente:

$$m = 1, \quad K = 10, \quad \alpha_1 = 10, \quad \alpha_2 = 10, \quad c_1 = 10, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 10.$$

Las condiciones iniciales para la velocidad $\dot{x}(0)$ [rad/s] se fijaron en cero en las simulaciones.

Las posiciones angulares del sistema en lazo cerrado se muestran en la Figura 3.1. De esta gráfica se puede observar que los controladores estabilizan de manera asintótica las trayectorias alrededor de la posición deseada, así satisfaciendo el objetivo de control. La Figura 3.2 muestra el retrato de fase para el subsistema de elevación (3.2). Se puede observar que la señal parte de su condición inicial propuesta hasta llegar la superficie s_1 donde el subsistema (3.2) adopta la dinámica deseada deslizando su trayectoria hasta alcanzar el objetivo de control. La Figura 3.3 muestra las señales de control u_1 y u_2 . En las Figuras 3.4 y 3.5 se puede observar las respuestas en el tiempo de las posiciones y velocidades angulares y las entradas de control, respectivamente;

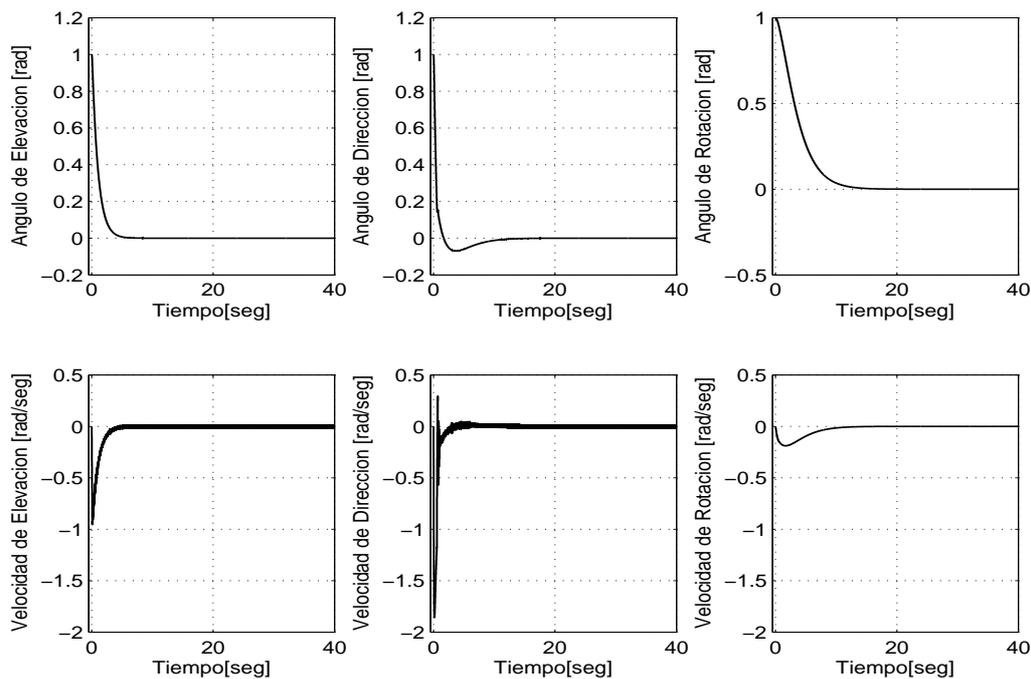


Figura 3.1: Respuesta en el tiempo del sistema en lazo cerrado: caso no perturbado.

sujeto a las perturbaciones

$$\omega_1(t) = \omega_2(t) = \omega_3(t) = 15 \cos(20t).$$

Nótese que aunque la amplitud de la perturbación es de 15 los efectos causados al sistema de lazo cerrado son mínimos y todavía se puede reducir más aumentando las ganancias de los controladores y las constantes α_1 y α_2 .

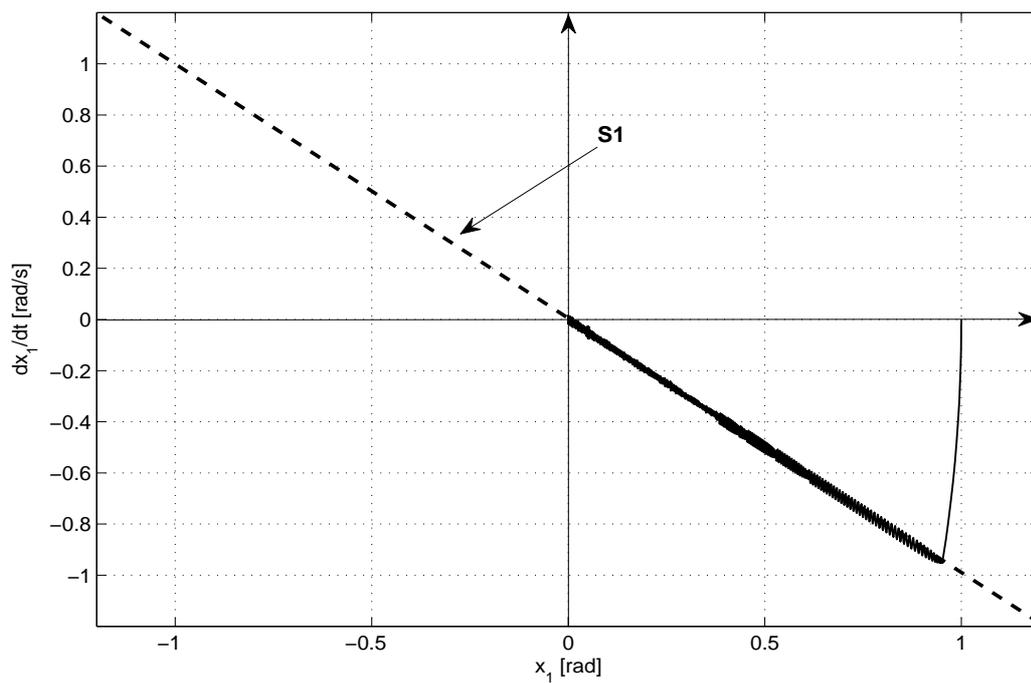


Figura 3.2: Retrato de fase del subsistema de elevación en lazo cerrado: caso no perturbado.

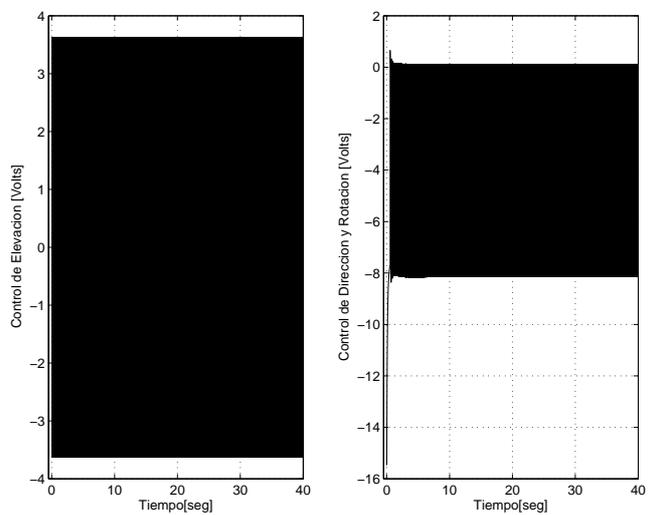


Figura 3.3: Entradas de control: caso perturbado.

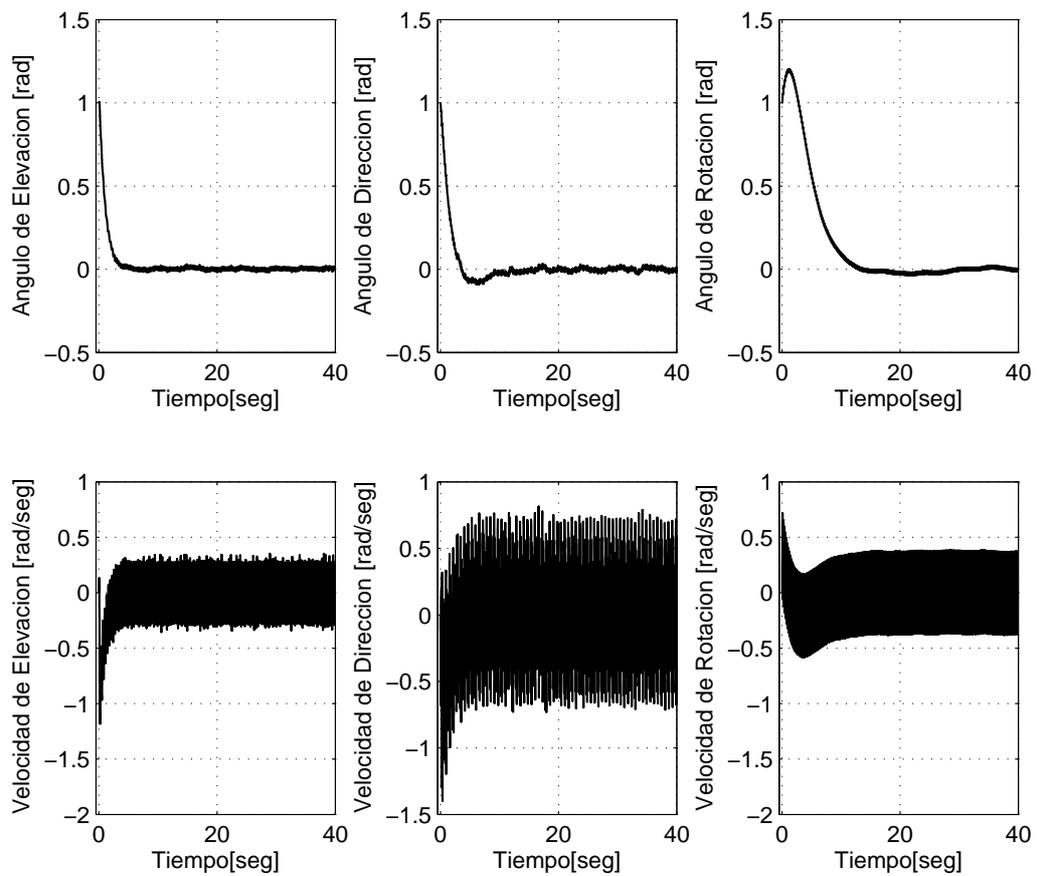


Figura 3.4: Respuesta en el tiempo del sistema en lazo cerrado: caso perturbado.

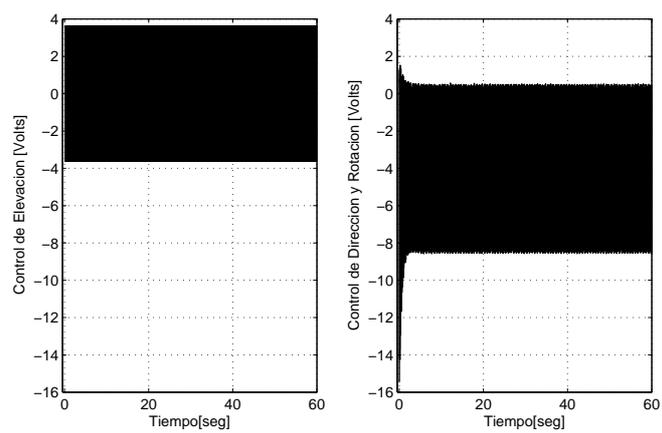


Figura 3.5: Entradas de control: caso perturbado.

Capítulo 4

Diseño de observadores

En el presente capítulo se resolverá el problema de regulación de posición para el helicóptero de tres grados dado en el Capítulo 2, donde se asume que se pueden medir las posiciones angulares únicamente. Se hará uso de observador de Luenberger [33] y de Thau [19] mientras que las leyes de control por modos deslizantes se utilizarán para resolver el problema de estabilización. Se complementará el diseño con análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov y con resultados de simulación.

En el capítulo 3 se diseñaron los controladores u_1 y u_2 que requieren de retroalimentación de posición y velocidad del sistema. Desde el punto de vista práctico, la plataforma Quanser cuenta con sensores que proporcionan datos de posición angulares del cuerpo de helicóptero. Para resolver el problema se pueden proponer dos alternativas: La primera solución es encontrar una ley de control tal que el sistema no requiera de los datos de velocidad y controlar el helicóptero con pura retroalimentación de posición. La segunda opción es diseñar un observador que proporciona los datos de velocidad a los controladores ya propuestos (3.4) y (3.12).

Previo a la solución del problema se proporcionarán algunas definiciones y teoremas que serán de utilidad en el subsecuente análisis.

Definición 1 ([17]) *Un **observador** o **estimador** es un sistema que estima las variables de estado a partir de las mediciones de las variables de salida.*

Definición 2 (Observabilidad completa) *Considérese el sistema lineal*

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + Bu \\ z &= C\xi\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^n$ son los estados del sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, $z \in \mathbb{R}^p$ es la salida y A, B, C son matrices de dimensiones apropiadas. El sistema (4.1) se dice que es completamente observable si todo estado inicial $\xi(0)$ puede ser determinado a partir de la observación de la salida $z(t)$.

Teorema 1 ([32]) *Un sistema es completamente observable si se satisface la condición de observabilidad*

$$\text{rango} \underbrace{\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}}_{\mathcal{O}} = n,\tag{4.2}$$

donde n es la dimensión del sistema.

4.1 Formulación del problema

El problema de control de posición del helicóptero Quanser puede formularse en los siguientes términos: Para el sistema (2.1)-(2.3) asúmase que solo las posiciones angulares están disponibles para ser medidas. Se deberá encontrar una ley de control $u = [u_1, u_2]^T$ de tal forma que las posiciones angulares $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ lleguen asintóticamente a cero, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_1\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_2\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_3\| = 0\tag{4.3}$$

usando información de posición únicamente.

4.2 Observador Luenberger

El observador lineal de Luenberger está diseñado para la clase de sistemas dado en (4.1). El observador tiene la siguiente forma

$$\dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + L_L(z - \hat{z}) + Bu, \quad \hat{z} = C\hat{\xi} \quad (4.4)$$

donde $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^n$ es el estado estimado, $\hat{z} \in \mathbb{R}^p$ es la salida estimada y $L_L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ se selecciona de tal manera que la matriz $A - L_L C$ sea Hurwitz [14, p.472].

Teorema 2 ([14]) *Si el par (C, A) es observable entonces todos los valores propios de $A_0 = A - L_L C$ se pueden seleccionar arbitrariamente a través de L_L .*

4.2.1 Diseño de observador de Luenberger para helicóptero

Antes de construir el observador Luenberger se requiere llevar el sistema (3.2)-(3.3) dado por:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\xi} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \\ -d \sin(x_2) \end{bmatrix}}_{F(\xi)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a & 0 \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_H, \quad z = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \xi \quad (4.5)$$

a la forma lineal:

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + H, \quad z = C\xi \quad (4.6)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es la matriz linealizada alrededor del punto de equilibrio $\xi = 0$ por expansión de series de Taylor

$$F(\xi) = F(0) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \xi}}_A \Big|_{\xi=0}$$

$B \in \mathbb{R}^{6 \times 2}$ es la matriz que distribuye las entradas de control del sistema (4.6), $H \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ es el vector de pares gravitacionales y $C \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ es la matriz de las salidas del sistema (4.6). Los elementos de la matriz A se obtiene de la matriz Jacobiana de $F(\xi)$ evaluada en el punto de equilibrio $x_i = 0, y_i = 0$ donde $i = 1, 2, 3$, es decir [14, p.52]:

$$A = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial y_1} & \frac{\partial f_4}{\partial y_2} & \frac{\partial f_4}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial y_1} & \frac{\partial f_5}{\partial y_2} & \frac{\partial f_5}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6}{\partial y_1} & \frac{\partial f_6}{\partial y_2} & \frac{\partial f_6}{\partial y_3} \end{bmatrix} \right|_{\xi=0}$$

El sistema (3.2)-(3.3) linealizado toma la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\xi} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \xi + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a & 0 \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_H, \quad z = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \xi \quad (4.7)$$

Al aplicar la prueba de observabilidad (4.2) al sistema (4.7) se tiene que el rango $\{\mathcal{O}\} = 6$ concluyendo entonces que el sistema (4.7) es observable. Se desea diseñar un observador que

sitúe de manera arbitraria los valores propios de A_0 en

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = -1.5 \\ s_2 = -1.3 \\ s_3 = -1.2 \\ s_4 = -3 \\ s_5 = -2 \\ s_6 = -1 \end{array} \right.$$

con lo que la matriz L_L quedaría

$$L_L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.56 & 0 \\ 0 & -0.5 & 4.5 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Dado que $(A - L_L C)$ es una matriz estable las condiciones anteriores son suficientes para garantizar la estabilidad asintótica del observador lineal Luenberger. Finalmente, el observador Luenberger calculado tiene la siguiente forma:

$$\dot{\hat{\xi}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\xi} + (z - \hat{z}) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a & 0 \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_H$$

$$\hat{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\xi}.$$

4.3 Observador Thau (observador Lipschitz)

El observador Luenberger funciona para sistemas lineales con las características mencionadas en la Sección 4.2, pero en caso de tener un modelo no lineal el funcionamiento de este observador es cuestionable para las condiciones iniciales suficientemente alejadas.

El Observador Thau [19] estudiado en esta sección se aplica a los sistemas no lineales que tienen la siguiente forma:

$$\dot{\xi} = A\xi + f(\xi) + Bu$$

$$z = C\xi$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^n$ son los estados del sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, $z \in \mathbb{R}^p$ es la salida, A , B , C son conocidos y $f(\xi)$ satisface la condición de Lipschitz (4.12). El observador Thau tiene la siguiente forma:

$$\dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + f(\hat{\xi}) + Bu + L_T(z - \hat{z}) \quad (4.9)$$

$$\hat{z} = C\hat{\xi} \quad (4.10)$$

donde $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^n$ es el estado estimado y $\hat{z} \in \mathbb{R}^p$ es la salida estimada. El error de observación viene dada por

$$\hat{e} = \hat{\xi} - \xi$$

$$\dot{\hat{e}} = (A - L_TC)\hat{e} + f(\hat{\xi}) - f(\xi) = A_0\hat{e} + f(\hat{\xi}) - f(\xi).$$

Para que el error de observación tienda a cero de manera asintótica se tiene que cumplir el siguiente teorema.

Teorema 3 ([19]) Si seleccionamos L_T tal que A_0 satisface la ecuación de Lyapunov

$$A_0^T P + P A_0 = -2Q, \quad Q > 0 \quad (4.11)$$

y L es la constante de Lipschitz

$$\|f(\xi_a) - f(\xi_b)\| \leq L\|\xi_a - \xi_b\| \quad (4.12)$$

para todo ξ_a y ξ_b , que satisface la desigualdad:

$$L < \frac{\lambda_{\min}\{Q\}}{\|P\|},$$

entonces el observador no lineal Thau será asintóticamente estable.

4.3.1 Diseño de observador de Thau para helicóptero

Del sistema (3.2)-(3.3) se tiene

$$A = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b \\ 0 \\ -d \sin(x_2) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a & 0 \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}^T. \quad (4.13)$$

De acuerdo al Teorema 3 los parámetros calculados que se presentan a continuación:

$$L_T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.56 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix} \quad A_0 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4.5 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.56 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 27.28 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12.02 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8.02 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0.0458 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0.1034 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0.1451 \end{bmatrix}.$$

garantizan que $\hat{\xi} \rightarrow \xi$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Aplicando el Teorema 3 al sistema estudiado tenemos que el observador Thau es asintóticamente estable dado que:

$$L = \frac{K_p L_b}{J_r} = 0.497 \quad \|P\| = 1.4 \quad Q = I \quad L < 0.710.$$

El observador Thau para el sistema (3.2)-(3.3) queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}} = & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \hat{\xi} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b \\ 0 \\ -d \sin(\hat{x}_2) \end{bmatrix}}_{f(\hat{\xi})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a & 0 \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_u + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.56 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix}}_{L_T} (z - \hat{z}) \quad (4.14) \\ & \hat{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \hat{\xi}. \end{aligned}$$

4.4 Síntesis de retroalimentación por la salida

Los controladores por retroalimentación de salida tienen la siguiente forma:

$$u_1 = \frac{1}{a}(b - m\dot{x}_1 - K\text{sign}(\hat{s}_1)) \quad (4.15)$$

$$u_2 = \frac{1}{c \cos(x_2)}(-\alpha_1 d \sin(x_2) - \alpha_2 d \cos(x_2)\hat{y}_2 + \sin(x_2)\hat{y}_2^2 + c_1\text{sign}(\hat{s}_2) + c_2\text{sign}(\dot{\hat{s}}_2) + c_3\hat{s}_2 + c_4\dot{\hat{s}}_2). \quad (4.16)$$

Estas ecuaciones se obtienen de sustituir las velocidades angulares proporcionada por el observador a los controladores por retroalimentación de salida (3.4) y (3.12). El análisis adicional de estabilidad del sistema en lazo cerrado no está considerado en este trabajo pero se presentan las simulaciones numéricas para sustentar el presente desarrollo.

4.5 Resultados de simulación

El rendimiento de los controladores (4.15) y (4.16) se estudió mediante simulación numérica, realizada en MATLAB, aplicado al helicóptero Quanser requerido para desplazarse desde $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.6$ [rad] hacia el origen. Las condiciones iniciales para el observador de Luenberger se consideraron $\hat{x}_i(0) = 1.5$ [rad]. Al igual que en el capítulo 3, la dinámica del helicóptero está dada por (3.2)-(3.3) bajo los parámetros tomados del fabricante dados en la Tabla 1.

Las siguientes ganancias de los controladores y observador fueron seleccionadas:

$$m = 1, \quad K = 10, \quad \alpha_1 = 10, \quad \alpha_2 = 10, \quad c_1 = 10, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 10.$$

Las condiciones iniciales para la velocidad $\dot{x}(0)$ [rad/s] y del observador se fijaron en cero en todas las simulaciones.

El error de observación usando Luenberger se muestra en la Figura 4.1. Las posiciones y velocidades angulares del sistema en lazo cerrado se muestran en la Figura 4.2. De esta gráfica se puede observar que los controladores estabilizan de manera asintótica las trayectorias alrededor

de la posición deseada, así satisfaciendo el objetivo de control. La Figura 4.3 muestra las señales de control u_1 y u_2 . En las Figuras 4.4 y 4.5 se puede observar las respuestas en el tiempo de las posiciones y velocidades angulares y las entradas de control, respectivamente; sujeto a las perturbaciones

$$\omega_1(t) = \cos(20t), \quad \omega_2(t) = \cos(30t), \quad \omega_3(t) = \cos(50t). \quad (4.17)$$

Nótese que los efectos causados al sistema de lazo cerrado son mínimos y todavía se pueden reducir más aumentando las ganancias de los controladores y las constantes α_1 y α_2 .

Se repiten las simulaciones utilizando observador Thau (4.14) bajo las condiciones iniciales del sistema (3.2)-(3.3) $x_1(0) = 0.9$ [rad], $x_2(0) = 0.7$ [rad], $x_3(0) = 0.7$ [rad]. Las condiciones iniciales del observador fueron $\hat{x}_i(0) = 1$ [rad].

El error de observación usando Thau se muestra en la Figura 4.6. Las posiciones y velocidades angulares del sistema en lazo cerrado se muestran en la Figura 4.7. De esta gráfica se puede observar que los controladores estabilizan de manera asintótica las trayectorias alrededor de la posición deseada, así satisfaciendo el objetivo de control. La Figura 4.8 muestra las señales de control u_1 y u_2 . En las Figuras 4.9 y 4.10 se puede observar las respuestas en el tiempo de la posiciones y velocidades angulares y las entradas de control, respectivamente; sujeto a las perturbaciones (4.17). Nótese que los efectos causados al sistema de lazo cerrado son mínimos y todavía se pueden reducir más aumentando las ganancias de los controladores y las constantes α_1 y α_2 .

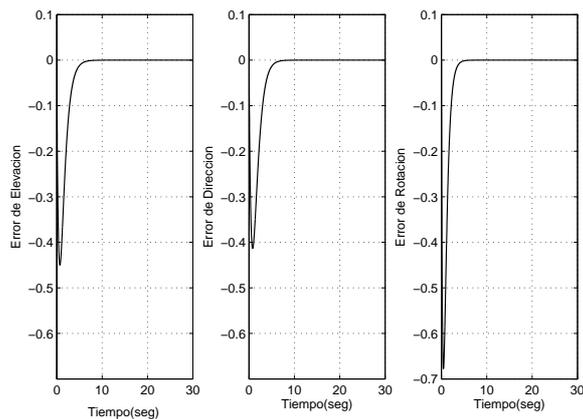


Figura 4.1: Error de observación usando observador de Luenberger.

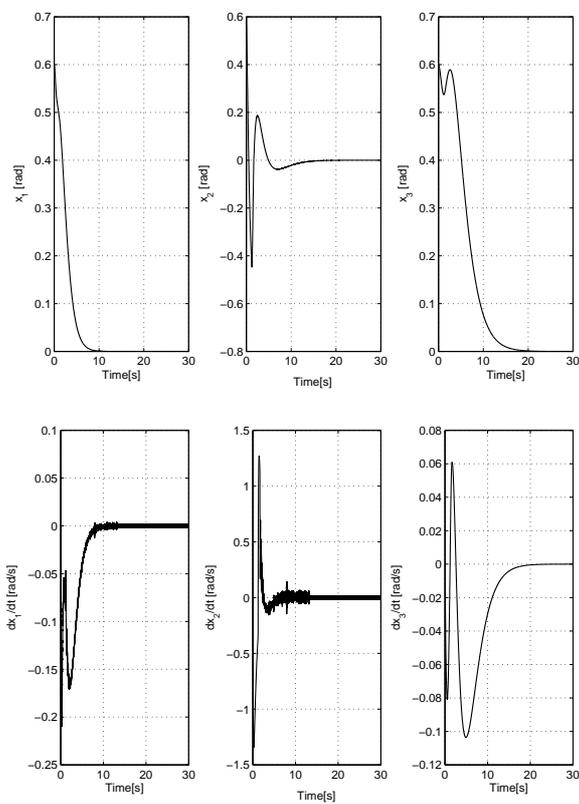


Figura 4.2: Posiciones y velocidades angulares del sistema en lazo cerrado con observador de Luenberger.

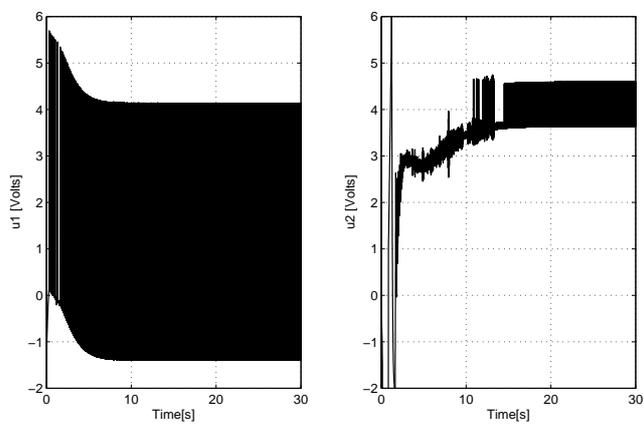


Figura 4.3: Entradas de control del sistema en lazo cerrado con observador de Luenberger.

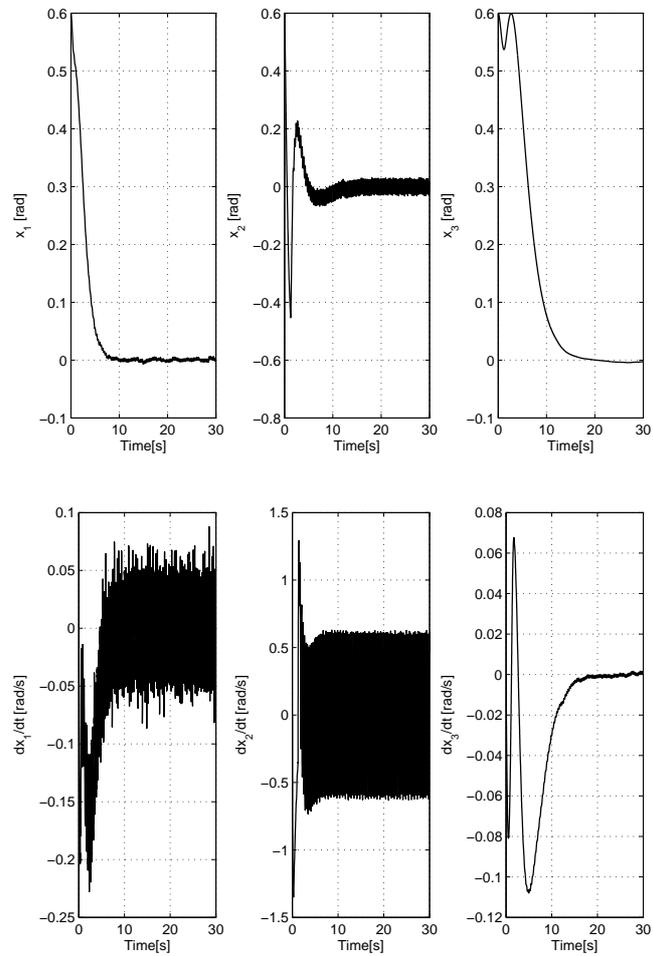


Figura 4.4: Posiciones y velocidades angulares del sistema en lazo cerrado con ruido en el modelo usando observador de Luenberger.

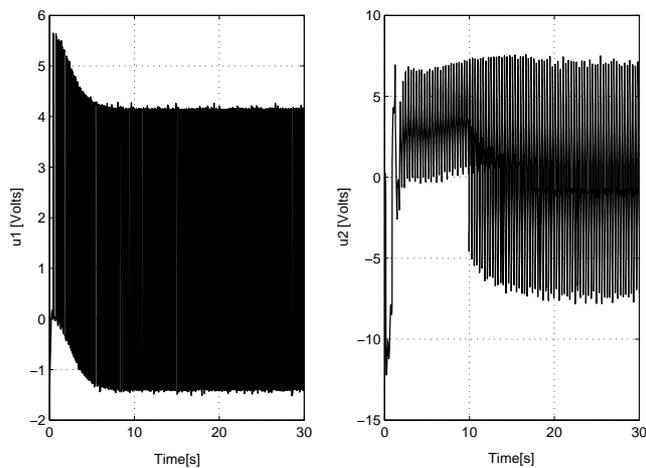


Figura 4.5: Entradas de control del sistema en lazo cerrado con ruido en el modelo usando observador de Luenberger.

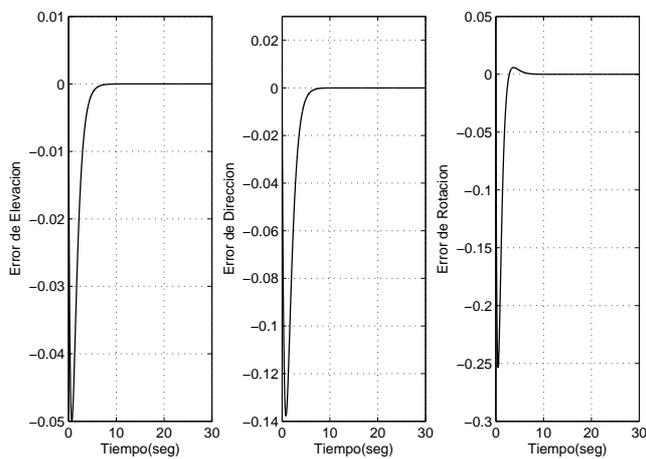


Figura 4.6: Error de observación con observador Thau.

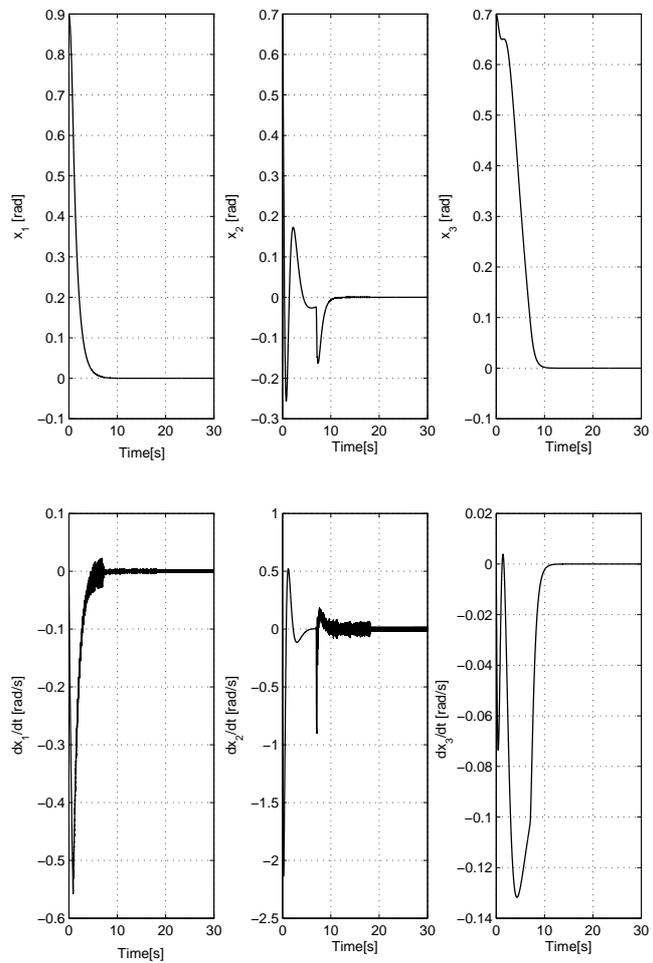


Figura 4.7: Posiciones y velocidades angulares del sistema en lazo cerrado con observador Thau.

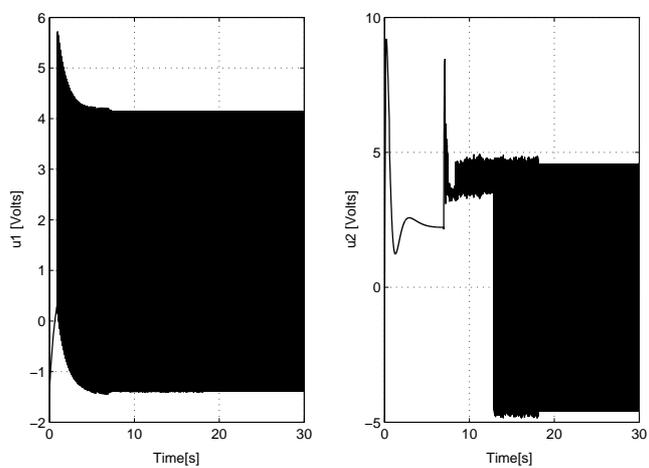


Figura 4.8: Entradas de control del sistema en lazo cerrado con observador Thau.

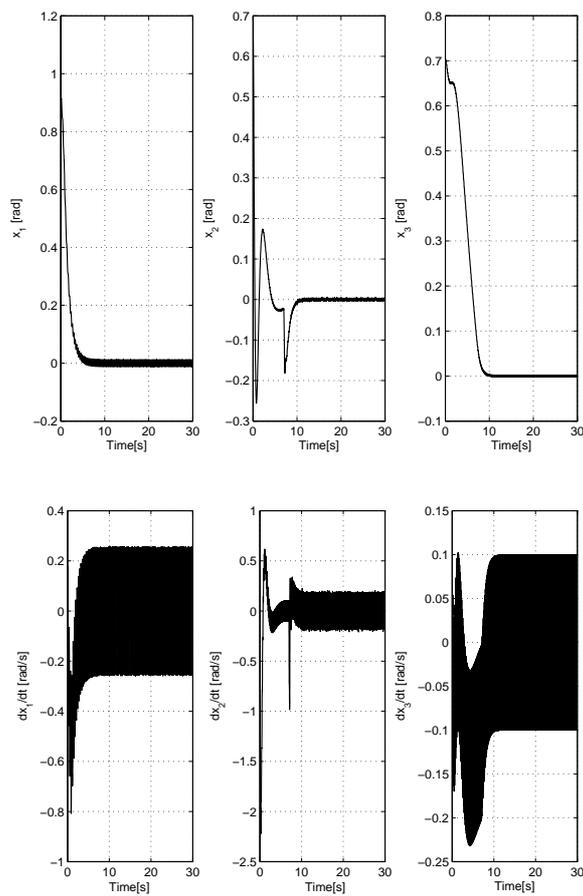


Figura 4.9: Posiciones y velocidades angulares del sistema en lazo cerrado con ruido en el modelo usando observador Thau.

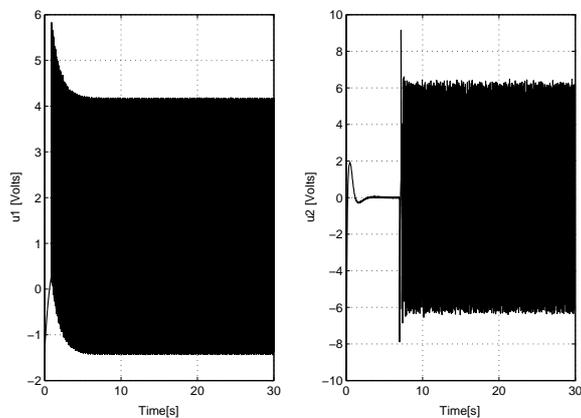


Figura 4.10: Entradas de control del sistema con ruido en el modelo usando observador de Tau.

Capítulo 5

Resultados experimentales

La justificación del funcionamiento esperado del robot consiste en la implementación práctica. Por esta razón, se realizó el experimento sobre el prototipo de helicóptero de 3 G.D.L. marca Quanser, ubicado en el Laboratorio de Control Automático de CICESE. Dicho experimento consistió en aplicar los controladores y el observador Thau desarrollados en los capítulos 3 y 4 a la plataforma experimental con el fin de apreciar la eficiencia real de los mismos y comparar los resultados experimentales con los de la simulación.

5.1 La Plataforma experimental

En esta sección se presentarán los requerimientos necesarios para realizar el experimento. Como se puede observar en la Figura 5.1 la plataforma cuenta con

- Computadora
- Tarjeta de Adquisición de Datos
- Modulo de Potencia Universal
- Helicoptero Quanser

Cada uno de estos elementos se describirá a continuación.

Computadora

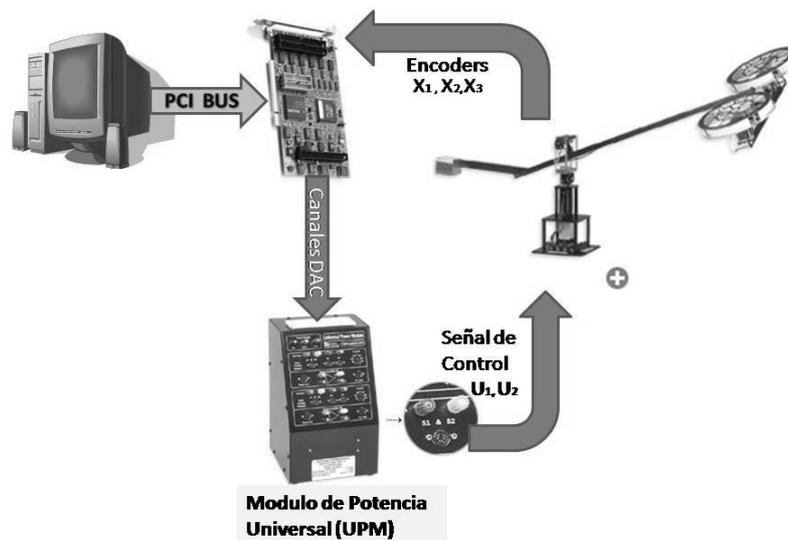


Figura 5.1: Diagrama general de la plataforma experimental.

La computadora cuenta con las siguientes características:

- procesador Pentium 4 de 3.0GHz
- 1GB RAM
- 80GB Disco Duro
- Matlab2007 R2007a
- Simulink, Real Time Window Target.

5.1.1 Tarjeta de Adquisición de Datos

La tarjeta marca Sensoray 626 (véase Figura 5.1) se conecta en el bus PCI del CPU y sirve como interface entre la computadora y la plataforma. La tarjeta cuenta con las siguientes características [34]:

- 48 canales digitales de E/S

- 16 entradas analógicas con resolución de 14 bits
- 4 salidas analógicas con resolución de 13 bits
- 6 entradas de encoder con 5v de alimentación y hasta 500 Khz de manejo de frecuencia
- ± 12 Volts y 100 mA de manejo estándar en los puertos analógicos.

5.1.2 Modulo de Potencia Universal

Se manejan dos módulos de potencia universal (UPM-2405) marca Quanser. Cada modulo amplifica los voltajes de la tarjeta y alimenta los motores del prototipo. Las características de UPM son las siguientes:

- ± 12 volts y 5 A como características de operación máximas
- Salida analógica por amplificador de potencia.

5.1.3 Helicóptero

El helicóptero consta de dos servo motores de cd con escobillas en serie de marca PITTMAN (modelo 9234S004) ubicados en cada una de las hélices del helicóptero experimental. Estas a su vez conectadas por una barra de plástico ligero la que separa las hélices a 0.354 [m] y así formando el cuerpo de helicóptero. El cuerpo esta sostenido por medio de una chumacera la que permite al cuerpo inclinarse y así proporcionar el sentido de vuelo. A su vez la chumacera esta montada sobre una barra de aluminio de 0.66 [m] de longitud que conecta el helicóptero con la base en forma de un columpio, dado que el otro extremo de la barra contiene un contrapeso ajustable para mantener el cuerpo del modelo en el aire (el helicóptero pesa 1.15 [kg]) y permitir el movimiento de elevación. La base del modelo cuenta con anillos deslizantes por los cuales pasan todas las conexiones del helicóptero permitiendo así la libre rotación del modelo al rededor de la base.

Los motores cuentan con las siguientes características eléctricas de operación:

- 12 Volts de alimentación

- 0.043 Nm de torque continuo
- 3.53 A de corriente continua
- 14.5 A de corriente pico

El manual de usuario proporciona los valores de los parámetros físicos reales del modelo de helicóptero Quanser dados en la Tabla 5.1 [35].

Tabla 5.1: Valores de los parámetros del prototipo del helicóptero de 3DOF

| Notación | Valores | Unidades |
|----------|---------|----------------|
| L_b | 0.66 | m |
| L_h | 0.177 | m |
| J_e | 0.91 | $Kg \cdot m^2$ |
| J_d | 0.0364 | $Kg \cdot m^2$ |
| J_r | 0.91 | $Kg \cdot m^2$ |
| K_r | 0.5 | $N/Volt$ |
| K_p | 0.686 | N |
| F_g | 0.686 | N |

Los encoders que se encuentran montados en cada uno de los ejes del prototipo (como se puede apreciar en la Figura 5.2) cuentan con las siguientes características proporcionadas por el manual de usuario Quanser.

Tabla 5.2: Parámetros de los encoders

| Ejes | Cuentas/Revolución | Radianes/Cuenta |
|-----------|--------------------|-----------------|
| Elevación | 4096 | 0.0015339804 |
| Dirección | 4096 | 0.0015339804 |
| Rotación | 8192 | 0.0007669902 |

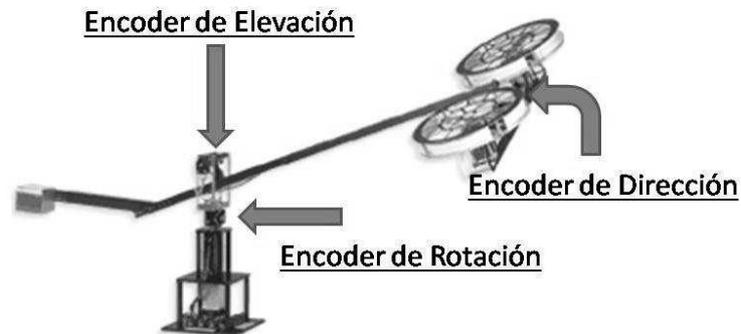


Figura 5.2: Gráfica de ubicación de los encoders sobre el prototipo.

5.2 Programación y Sincronización

En esta sección se describirá el proceso de programación y sincronización del robot (helicóptero) con el dispositivo programador de tareas (computadora). Como se mencionó en los capítulos anteriores todas las simulaciones y pruebas prácticas fueron realizadas por medio del Matlab.

Matlab es una herramienta de cálculo para distintas operaciones matemáticas que también cuenta con un paquete para la simulación de diferentes procesos numéricos llamado Simulink.

Simulink fue utilizado para interactuar al robot con la computadora. Este simulador cuenta con tres modos de operación: normal, acelerado y externo. La simulación en modo externo es realizada por medio de una tarjeta de adquisición de datos (Sensoray 626) que mantiene una comunicación entre la computadora y el elemento externo (helicóptero). La tarjeta Sensoray proporciona tres puertos diseñados para recibir la lectura de los encoders y dos puertos DAC por medio de los cuales se envían los datos de control para cada uno de los motores. Antes de llegar a los motores las señales de control V_f y V_t pasan por una etapa de potencia (UPM) donde son amplificados. Esta descripción del proceso de operación se puede apreciar en la grafica (5).

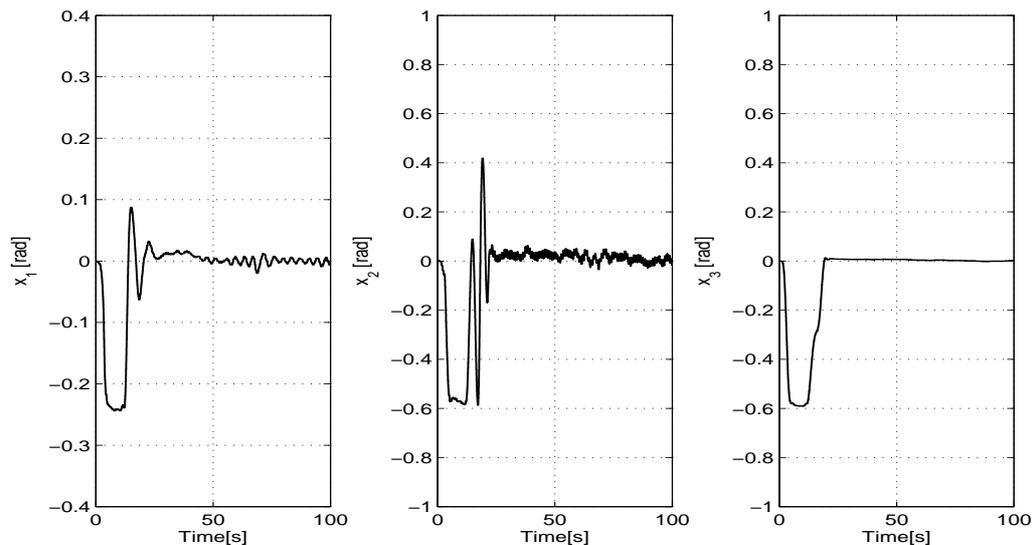


Figura 5.3: Posiciones angulares: resultados experimentales.

5.3 Resultados experimentales

Para los experimentos con la plataforma Quanser se consideraron los siguientes parámetros:

$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = 4, \quad c_1 = 10, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 10, \quad K = 1.5, \quad c = 1.$$

Antes de enviar la señal de control a los motores se implementó una etapa de saturación a ± 5 volts con el fin de manejar los niveles de voltaje recomendados por el manual de usuario.

Para grabar los datos de comportamiento del prototipo se utilizó el bloque *Scope* del *Simulink*. Al cargar el programa a la tarjeta Sensoray 626 y ejecutar lo los primeros datos a recibir son las posiciones (x_1, x_2, x_3) del helicóptero que son interpretadas como referencia o la posición del origen. Para las graficas presentadas a continuación se consideraron dos casos. En el primer caso se utilizó la función signo dentro de los controladores u_1 y u_2 .

Las posiciones y velocidades angulares del sistema en lazo cerrado se muestran en la Figuras 5.3 y 5.4. De estas gráficas se puede observar que los controladores estabilizan de manera asintótica las trayectorias alrededor de la posición deseada en un tiempo menor a $t_k = 15$ [seg], así satisfaciendo el objetivo de control. La Figura 5.5 muestra las señales de control u_1 y u_2 . Se hace hincapié que en todas las graficas la señal de control se activa hasta los 12 segundos.

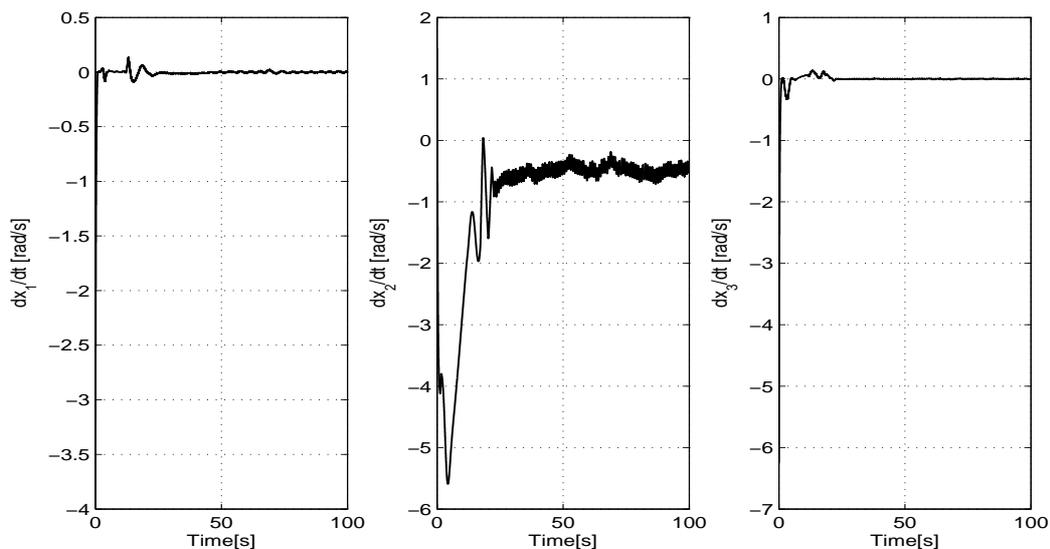


Figura 5.4: Velocidades angulares: resultados experimentales.

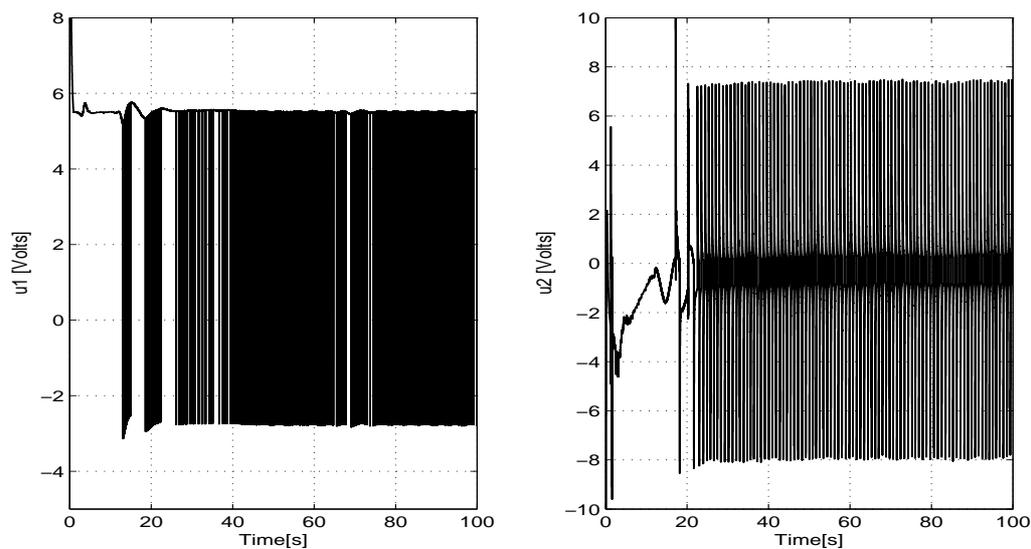


Figura 5.5: Entradas de control.

Entonces las condiciones iniciales para $x \in \mathbb{R}^3$ son $x_1(0) = -0.23$ [rad], $x_2(0) = -0.58$ [rad] y $x_3(0) = -0.59$ [rad].

Al momento de activar los controladores el helicoptero alcanzó la posición deseada en un tiempo menor a $t_k = 15$ segundos oscilando alrededor de esta con un aproximado de ± 0.01 [rad].

En la grafica de posición (x_2), el helicóptero alcanzó la posición deseada en un tiempo menor a $t_k = 12$ [seg] oscilando alrededor de esta con un aproximado de ± 0.03 [rad] de precisión. En la grafica de posición (x_3) el helicóptero alcanzó la referencia en un tiempo menor a $t_k = 10$ [seg] oscilando alrededor de esta con un aproximado de $\pm 2 \times 10^{-3}$ [rad] de precisión.

La Figura 5.4 muestra las velocidades angulares obtenidas del experimento. En las graficas de velocidad de elevación (\dot{x}_1) y de rotación (\dot{x}_3 se observa la poca actividad debido a que la mayor parte de trabajo de posicionamiento lo realiza el eje de dirección (\dot{x}_2 en la Fig. 5.4). La Figura 5.5 presenta las respuestas en el tiempo de las señales de control u_1 y u_2 que son los voltajes generados por la tarjeta de adquisición de datos. Las oscilaciones alcanzan una frecuencia máxima de 100 [Hz]. La respuesta en el tiempo de u_1 que es la señal de control para el eje de elevación se pueden notar momentos de tiempo cuando la señal varia de oscilación a constante. Esto sucede cuando el helicóptero esta por debajo de la posición deseada entonces con el voltaje constante se eleva hasta alcanzar el objetivo de control y estando a la altura empieza oscilar para mantenerse en la posición de referencia.

Se hace hincapié en que estas señales no van directamente a los motores dado que u_1 es la suma y u_2 es la resta de los voltajes que alimentan los motores. Debido a esto en el programa se consideró una etapa de separación de los voltajes y saturación previa a la etapa de salida para los motores.

Para el segundo caso la función signo (sign) fue sustituida por la función tangente hiperbólica (tanh). Las posiciones y velocidades angulares del sistema en lazo cerrado se muestran en la Figuras 5.6 y 5.7. De estas gráficas se puede observar que los controladores estabilizan de manera asintótica las trayectorias alrededor de la posición deseada en un tiempo menor a $t_k = 15$ [seg], así satisfaciendo el objetivo de control. La Figura 5.8 muestra las señales de control u_1 y u_2 . Se hace hincapié que en todas las graficas la señal de control se activa hasta los 12 segundos. Entonces las condiciones iniciales para $x \in \mathbb{R}^3$ son $x_1(0) = -0.2$ [rad], $x_2(0) = -0.59$ [rad] y $x_3(0) = -0.63$ [rad].

Al momento de activar los controladores el helicóptero alcanzó la posición deseada en un

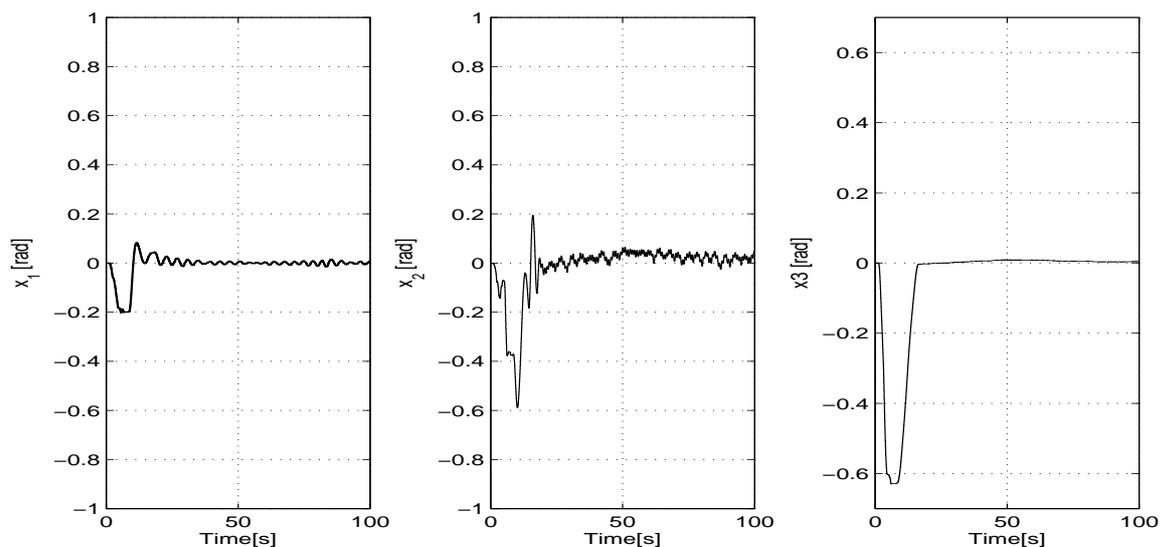


Figura 5.6: Posiciones angulares experimentales usando función tangente hiperbólica.

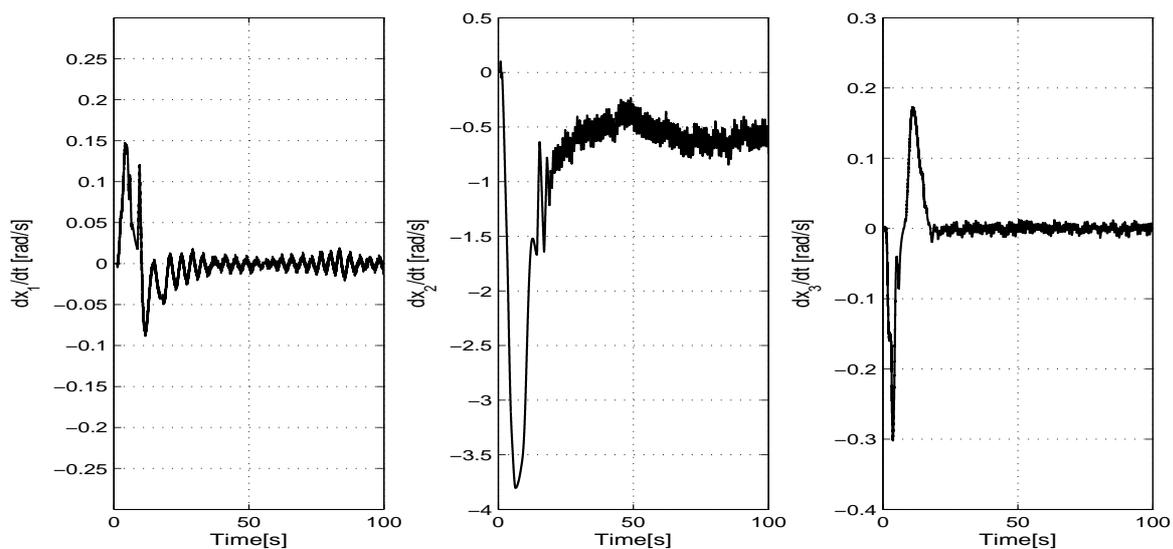


Figura 5.7: Velocidades angulares experimentales usando función tangente hiperbólica.

tiempo menor a $t_k = 20$ segundos oscilando alrededor de esta con un aproximado de ± 0.01 [rad]. En la grafica de posición (x_2), el helicóptero alcanzó la posición deseada en un tiempo menor a $t_k = 15$ [seg] oscilando alrededor de esta con un aproximado de ± 0.03 [rad] de precisión. En la grafica de posición (x_3) el helicóptero alcanzó la referencia en un tiempo menor a $t_k = 7$ [seg]

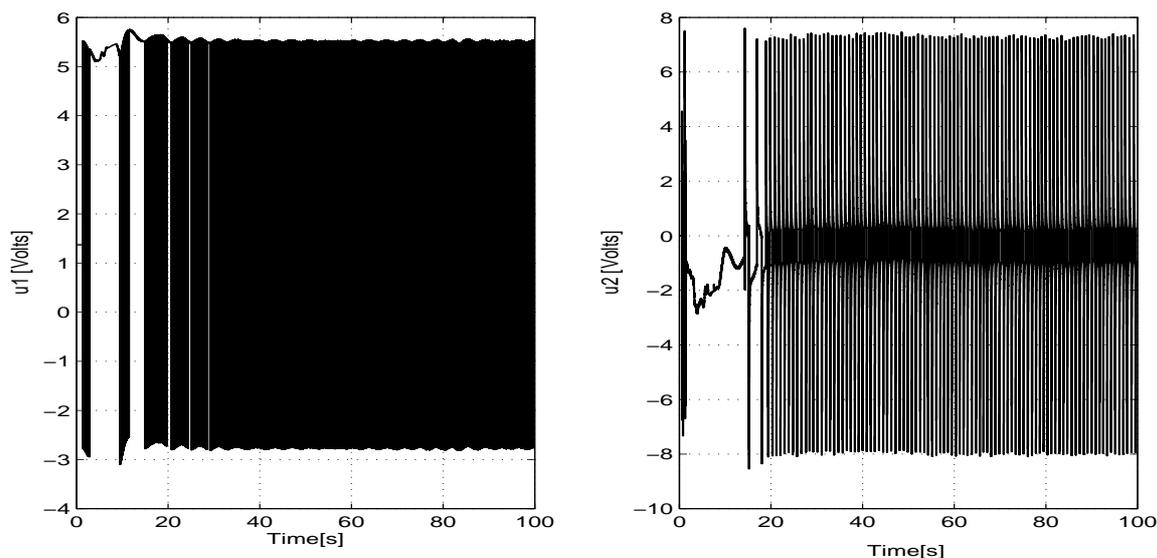


Figura 5.8: Entradas experimentales de control usando función tangente hiperbólica.

oscilando alrededor de esta con un aproximado de $\pm 1 \times 10^{-3} [rad]$ de precisión.

La Figura 5.4 muestra las velocidades angulares obtenidas del experimento. En las graficas de velocidad de elevación (\dot{x}_1) y de rotación (\dot{x}_3) se observa la poca actividad debido a que la mayor parte de trabajo de posicionamiento lo realiza el eje de dirección (\dot{x}_2 en la Fig. 5.4). La Figura 5.5 presenta las respuestas en el tiempo de las señales de control u_1 y u_2 que son los voltajes generados por la tarjeta de adquisición de datos. Las oscilaciones alcanzan una frecuencia máxima de 100 [Hz]. La respuesta en el tiempo de u_1 que es la señal de control para el eje de elevación se pueden notar momentos de tiempo cuando la señal varía de oscilación a constante. Esto sucede cuando el helicóptero está por debajo de la posición deseada entonces con el voltaje constante se eleva hasta alcanzar el objetivo de control y estando a la altura empieza oscilar para mantenerse en la posición de referencia.

Se hace hincapié en que estas señales no van directamente a los motores dado que u_1 es la suma y u_2 es la resta de los voltajes que alimentan los motores. Debido a esto en el programa se consideró una etapa de separación de los voltajes y saturación previa a la etapa de salida para los motores.

La Figura 5.7 muestra las velocidades angulares obtenidas del experimento. En las graficas de velocidad de elevación (\dot{x}_1), dirección (\dot{x}_2) y de rotación (\dot{x}_3) se observa un comportamiento parecido a la de Figura 5.4. La Figura 5.8 presenta las respuestas en el tiempo de las señales de control u_1 y u_2 que son los voltajes generados por la tarjeta de adquisición de datos. Comparando estos datos con las simulaciones del Capítulo 4 (Figuras 4.7 y 4.8) se mostró un aumento de 5 segundos en el tiempo de estabilización. En cuanto a las velocidades angulares del experimento fueron mayores a los de la simulación. La razón principal de este suceso se debe a que en el experimento la posición deseada del helicóptero fue mas elevada que el punto de equilibrio de este, así forzando que los motores siempre estén activos y a las dinámicas no modeladas.

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se resolvió el problema de estabilización para un helicóptero de tres grados de libertad gobernado por dos entradas de control. Se utilizaron las técnicas de control por modos deslizantes de primer y segundo orden para resolver el problema de regulación de posición. Aplicando las técnicas de control mencionadas fueron construidos dos controladores: el controlador por modos deslizantes de primer orden que resuelve el problema de elevación y el controlador Twisting+PD que resuelve el problema de dirección y rotación. Se demostró que el punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado es asintóticamente estable en forma local. El análisis de estabilidad se realizó a través de la teoría de estabilidad de Lyapunov, complementando el análisis con demostración de convergencia en tiempo finito y robustez. Se demostró la efectividad de los controladores por medio de simulaciones numéricas.

Motivados por la experiencia experimental y sabiendo que la mayoría de los prototipos mecánicos existentes en el mercado no cuentan con sensor de velocidad, se construyeron dos observadores (Luenberger y Thau) para operar el sistema por retroalimentación de salida debido a que el prototipo experimental proporciona únicamente los datos de posición y los controladores diseñados en el Capítulo 3 requieren adicionalmente de información de velocidad. Para ambos observadores fue comprobada la estabilidad asintótica del error de observación y se demostró su eficiencia por medio de simulación numérica.

A través de los resultados de simulación se concluye lo siguiente:

- El sistema con los controladores por modos deslizantes presenta una buena respuesta estabilizándose alrededor de la posición deseada en un tiempo menor a 10 segundos, así satisfaciendo el objetivo de control según se observa en las simulaciones de las Figuras 3.2, 3.4, 4.2, 4.4, 4.7 y 4.9.
- El sistema con los controladores por modos deslizantes tiene una buena regulación a pesar de las perturbaciones aplicadas al sistema según se observa en las simulaciones de las Figuras 4.9 y 4.10.
- De acuerdo a las Figuras 4.1 a 4.5, el observador Luenberger presenta una buena estimación de la velocidad del sistema pero dado que el modelo de helicóptero es no lineal el funcionamiento de este observador resulta ser cuestionable para condiciones iniciales suficientemente alejadas del punto de equilibrio.

De acuerdo a las simulaciones el observador Thau presenta mejor rendimiento por lo tanto se realizaron validaciones experimentales exclusivamente para este observador. De acuerdo a los resultados experimentales se concluye lo siguiente

- El sistema con los controladores por modos deslizantes presenta una buena respuesta en cuanto a la estabilización alrededor de la posición deseada aun teniendo un aumento de 5 segundos con respecto al tiempo de estabilización obtenido por las simulaciones numéricas (véase las Figuras 4.7, 5.3 y 5.6).
- Para evitar problemas computacionales y mecánicos debido al chattering se sustituyó la función discontinua signo (sign) por la función tangente hiperbólica (tanh) observando a través de las Figuras 5.6, 5.7 y 5.8 que el sistema retroalimentado aun conserva su robustez.
- De acuerdo a las Figuras 5.3 y 5.6, el observador Thau diseñado presenta una estimación eficiente de la velocidad del sistema.

Los resultados de la presente tesis fueron reportados en [1, 30].

6.1 Problemas abiertos

A lo largo del desarrollo de la tesis se descubrieron varios puntos de interés resumidos a continuación no contemplados en el presente documento:

- Realizar el análisis de la estabilidad de los sistemas en lazo cerrado considerando el caso de retroalimentación de salida.
- Evaluar el funcionamiento de observadores de estructura variable complementado con el análisis de estabilidad.
- Resolver el problema de seguimiento de trayectorias considerando retroalimentación de estados y de salida.
- Motivado por la experiencia experimental se deberá establecer una estrategia de selección de ganancias.
- Se deberá realizar una comparación de la eficiencia del observador Thau diseñado en el Capítulo 4 con un observador por modos deslizantes analizando los factores como el desempeño en términos del error, la energía consumida, el error de observación, el conjunto de condiciones iniciales, robustez, entre otros.

Apéndice A

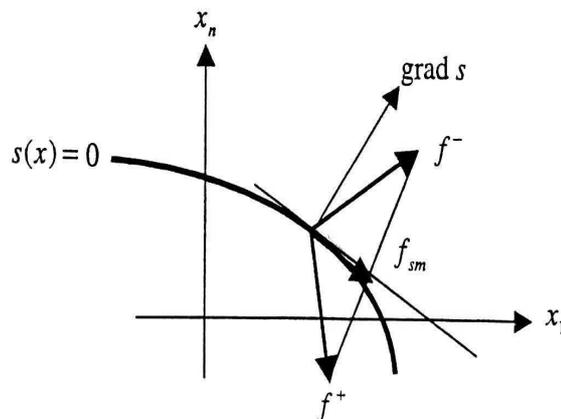
Teoría de modos deslizantes

Las sistemas de estructura variable [7] son aquellas sistemas donde la ley de control cambia deliberadamente durante el proceso de control de acuerdo con reglas previamente establecidas que dependen del estado del sistema.

En caso de este trabajo las reglas de cambio son definidos por técnicas de Modos Deslizantes que son caracterizados por su propiedad de reducción del orden del sistema y su baja sensibilidad a los disturbios y cambios de los parámetros dentro del sistema. En 1992 en [26] ha sido comprobado que el teorema de estabilidad asintótica para los sistemas continuos se extiende al igual para los sistemas discontinuos considerando la solución de estas últimas en el sentido de Filippov o en el sentido de Utkin.

A.1 Método de Filippov [33]

Este método fue desarrollado para encontrar las soluciones o continuación de las superficies discontinuas de las ecuaciones diferenciales con la parte derecha discontinua. De acuerdo al método, las puntas de cada vector de velocidad formado en la vecindad del punto ubicado en la superficie discontinua se relacionan por medio de un conjunto convexo mínimo y el vector de velocidad del movimiento deslizante deberá pertenecer a este conjunto. Este método fue desarrollado para casos especiales como: las imperfecciones tipo retardo o histéresis donde se



puede tomar solamente dos valores extremos, sistemas con control escalar o con solamente una superficie discontinua.

A.2 Método de Control Equivalente [33]

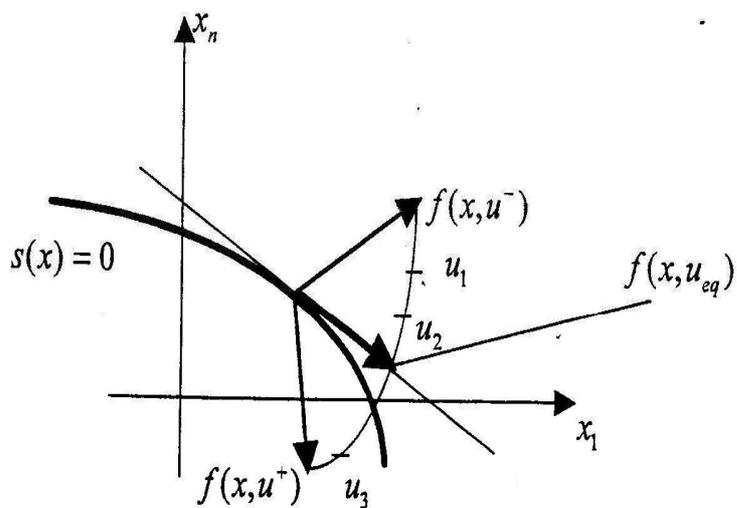
Este método consiste en reemplazo del control discontinuo de la intersección entre las superficies discontinuas por un control continuo tal que el vector velocidad del sistema se encuentra en el plano tangencial de la superficie de deslizamiento.

Supóngase un sistema tipo

$$\dot{x} = f(x) + u \quad (\text{A.1})$$

donde $f(x)$ es una función acotada, $f(x) \leq r$ con r como constante y u es la entrada de control.

El problema es estabilizar el sistema (A.1) en el origen $x_0 = 0$. Para esto se propone una superficie denotada como S llamada como la superficie de deslizamiento. Se deberá encontrar una ley de control u tal que lleve las trayectorias del sistema a dicha superficie en tiempo finito. Una vez que las trayectorias se mantienen en la superficie $S = 0$ se forma el control equivalente u_{eq} el que se encarga de que S se mantenga en cero (A.1). Esto último se comprueba por medio del método directo de Lyapunov. Suponiendo que las trayectorias se encuentran en la



superficie de deslizamiento ahora es necesario analizar la tendencia o el sentido de las dichas trayectorias sobre la superficie $S = 0$. En caso de la estabilización en el origen la meta es demostrar que estando sobre la superficie de deslizamiento las trayectorias tiendan al origen de manera asintótica. Recientemente fue comprobado en [23] que para un sistema localmente homogéneo con el punto de equilibrio $x_0 = 0$ estable de manera asintótica la estabilidad del sistema es en tiempo finito.

Apéndice B

Análisis de robustez

En esta sección se demostrará la robustez del sistema estudiado para las perturbaciones $f(t)$ acotadas por $M \in \mathbb{R}_+$. Considerando un sistema de siguiente forma:

$$\ddot{x} = A \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

A es una matriz estable con la condición de que sus valores propios λ_1 y λ_2 sean negativos.

Entonces existe una $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con $\det D \neq 0$ y $\Lambda = D^{-1}AD$ donde Λ es una matriz diagonal o la forma real de Jordan de A . Aplicando la transformación lineal a $X = [x \ \dot{x}]$:

$$X = DZ$$

$$\dot{X} = D\dot{Z} = ADZ + F(t)$$

$$\dot{Z} = \Lambda Z + D^{-1}F(t)$$

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} \\ \tilde{d}_{21} & \tilde{d}_{22} \end{bmatrix} F(t)$$

Analizando el caso de \dot{z}_1 .

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + \tilde{d}_{12} f(t) \\ z_1(t) &= \exp^{\lambda_1 t} z_1(0) + \tilde{d}_{12} \exp^{\lambda_1 t} \int_0^t \exp^{-\lambda_1 \tau} f(\tau) d\tau \\ |z_1(t)| &= |\exp^{\lambda_1 t} z_1(0)| + \left| \frac{\tilde{d}_{12} M}{\lambda_1} [1 - \exp^{\lambda_1 t}] \right|\end{aligned}$$

Concluyendo que cuando $t \rightarrow \infty$ y $\lambda_1 \gg \tilde{d}_{12} M$ entonces $|z_1(t)| \rightarrow 0$ o también se puede concluir que para sistemas de este tipo una perturbación acotada puede ser reducida proponiendo las constantes λ_1 y λ_2 suficientemente grandes.

Apéndice C

Teoría de Lyapunov

La teoría de estabilidad de Lyapunov que debe su nombre a Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, un matemático y ingeniero Ruso quien en 1899 dejó fundada su teoría que es uno de los principales recursos para analizar la estabilidad de un sistema. Siendo una evaluación de estabilidad más general que no depende de un análisis de lugar de las raíces o valores propios. Y como tal es una herramienta principal para el análisis de estabilidad de los sistemas no lineales o sistemas lineales con problemas de incertidumbre.

La teoría de estabilidad de Lyapunov tiene como principal objetivo estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales de forma:

$$\dot{x} = f(t, x(t)), \quad x(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{C.1})$$

donde el vector $x(t) \in \mathbb{R}^n$ se refiere al estado del sistema dinámico representado por (C.1) y $x(0) \in \mathbb{R}^n$ se denomina la condición inicial o estado inicial. La función $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua en t y $x(t)$, y se supone que es tal que:

- La ecuación (C.1) tiene una solución única en el intervalo $[0, \infty)$ correspondiente a cada condición inicial de $x(0)$
- Si $x(t)$ es la solución de (C.1) correspondiente a la condición inicial $x(0)$, entonces $x(t)$ depende de una manera continua del estado inicial $x(0)$.

Si la función f no depende explícitamente del tiempo, i.e, $f(t, x(t)) = f(x(t))$, luego la ecuación (C.1) se denomina autónoma.

C.1 Conceptos básicos

Entre los conceptos básicos de la teoría de Lyapunov destacan los siguientes: equilibrio, estabilidad, estabilidad asintótica y estabilidad exponencial. Cada uno de ellos será tratado a continuación. Primeramente, se presenta el concepto de equilibrio, el cual, a pesar de su sencillez, juega un papel clave en la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Definición 3 (Equilibrio [13]) *Un vector constante $x_e \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio o estado de equilibrio del sistema (C.1) si*

$$f(t, x_e) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Como consecuencias inmediatas de la definición de equilibrio se tiene que si la condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$ es justamente un equilibrio ($x(0) = x_e \in \mathbb{R}^n$), entonces se satisface:

- $x(t) = x_e \quad \forall t \geq 0$
- $\dot{x}(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$

Tradicionalmente se supone que el origen del espacio de estado \mathbb{R}^n , esto es $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, es un equilibrio de (C.1). Si este no es el caso, puede demostrarse que mediante un cambio adecuado de coordenadas, cualquier equilibrio de (C.1) puede trasladarse al origen del espacio de estado.

A continuación se presentan los conceptos básicos de estabilidad para equilibrios de ecuaciones diferenciales.

Definición 4 (Estabilidad [13]) *El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio estable (en el sentido de Lyapunov) de la Ecuación (C.1) si para cada número $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$, tal que:*

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

En la definición anterior la constante $\delta(\leq \varepsilon)$ no es única. Si existe una constante δ que satisfaga la condición de la definición, entonces cualquier $\alpha\delta$ con $\alpha \leq 1$ también la satisface.

Definición 5 (Estabilidad Asintótica [13]) *El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable de (C.1) si:*

- *El origen es estable.*
- *El origen es atractivo, es decir, existe un número $\delta' > 0$ tal que:*

$$\|x(0)\| < \delta' \rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Definición 6 (Estabilidad asintótica global [13]) *El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global de la Ecuación (C.1) si:*

- *El origen es estable.*
- *El origen es atractivo, es decir,*

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \forall x = 0 \in \mathbb{R}^n.$$

De la definición anterior se deduce que un equilibrio asintóticamente estable globalmente implica que dicho equilibrio es también asintóticamente estable, pero lo contrario es falso.

Definición 7 (Estabilidad exponencial global [13]) *El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio exponencialmente estable en forma global de (C.1) si existen constantes positivas α y β tales que:*

$$\|x(t)\| < \alpha \|x(0)\| \exp^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 8 (Función definida positiva localmente y función definida positiva [13])

Una función continua $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función definida positiva localmente si:

- $W(0) = 0$.
- $W(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ pero con $\|x\|$ pequeña.

Una función continua $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida positiva si:

- $W(0) = 0$.
- $W(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

Definición 9 (Función radialmente desacotada y función menguante [13]) Una función continua $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función radialmente desacotada si:

- $W(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$.

Una función continua $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función menguante (globalmente), si existe una función definida positiva $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que:

$$V(t, x) \leq W(x) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Naturalmente, si $V(t, x)$ es una función definida positiva independiente de t , i.e., $V(t, x) = V(x)$, luego $V(x)$ es trivialmente una función menguante.

Definición 10 (Función candidata de Lyapunov [13]) Una función $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$ si:

- $V(t, x)$ es una función definida positiva localmente.
- $\frac{\partial V(t, x)}{\partial t}$ es una función continua con respecto a t y x .
- $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$ es una función continua con respecto a t y x .

En otras palabras, la función candidata de Lyapunov para el equilibrio $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ de $\dot{x} = f(t, x)$ es cualquier función definida positiva localmente y continuamente diferenciable.

La derivada temporal de una función de Lyapunov juega un papel clave en la extracción de conclusiones sobre los atributos de estabilidad para los equilibrios de las ecuaciones diferenciales. Por este motivo, se presenta la siguiente definición:

Definición 11 (Derivada de una función candidata de Lyapunov [13]) Sea $V(t, x)$ una función candidata de Lyapunov para la Ecuación (C.1). La derivada de $V(t, x)$ a lo largo de las

trayectorias de (C.1), se denota por $\dot{V}(t, x)$ vendrá dada por:

$$\dot{V}(t, x) = \frac{d}{dt}V(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)^T}{\partial x}f(t, x).$$

Si $V(x)$ no depende explícitamente del tiempo, y la Ecuación (C.1) es autónoma, entonces:

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)^T}{\partial x}f(t, x)$$

la cual tampoco depende explícitamente del tiempo.

Definición 12 (Función de Lyapunov [13]) Una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ para la Ecuación (C.1) es una función de Lyapunov para (C.1) si su derivada a lo largo de las trayectorias de (C.1) satisface:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0$$

al menos para $\|x\|$ pequeña.

C.2 Teoremas del método directo de Lyapunov

Teorema 4 (Estabilidad [13]) El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un estado de equilibrio estable de la ecuación (C.1), si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ tal que su derivada temporal satisfaga:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0$$

al menos para $\|x\|$ pequeña.

El teorema anterior da condiciones suficientes para la estabilidad del equilibrio en el sentido de Lyapunov.

Teorema 5 (Estabilidad asintótica global [13]) El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un estado de equilibrio asintóticamente estable en forma global de (C.1), si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ definida positiva (globalmente), radialmente desacotada, y menguante, tal que su derivada satisfaga:

- $\dot{V}(t, x) = 0, \forall t \geq 0.$
- $\dot{V}(t, x) < 0, \forall t \geq 0 \ x \neq 0 \in \mathbb{R}^n.$

La condición impuesta por el teorema anterior sobre $\dot{V}(t, x)$ es equivalente a requerir que $\dot{V}(t, x)$ sea una función definida negativa (globalmente).

Bibliografía

- [1] L. Aguilar, Y. Orlov, R. Rascón, K. Starkov, R. Cárdenas y N. Alvarez, “Dinámica de vehículos autónomos subactuados,” *3er. Encuentro Regional Académico CITEDIPN*, Tijuana, B.C., Oct 11 y 12, 2007, pp. 127–132.
- [2] B. Andrievsky, D. Peaucelle and A.L. Fradkov, “Adaptive Control of 3DOF Motion for LAAS Helicopter Benchmark: Design and Experiments,” *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 3312–3317, 2007.
- [3] J.C. Avila-Vilchis, B. Brogliato, A. Dzul and R. Lozano, “Nonlinear modelling and control of helicopters,” *Automatica*, vol. 39, pp. 1526–1530, 2003.
- [4] H. Asada H. and J.E. Slotine, *Robot Control and Analysis*. Wiley-Interscience publication, 1985.
- [5] A. Bacciotti and L. Rosier, *Liapunov functions and stability in control theory*. Berlin: Springer, 2001.
- [6] C. Chung and J. Hauser, “Nonlinear control of a swinging pendulum,” *Automatica*, vol. 31, no. 6, pp. 851–862, 1995.
- [7] C. Edwards and S. Spurgeon, *Sliding mode control theory and applications*. Taylor and Francis, 1998.

- [8] L. Freidovich, A. Robertsson, A. Shiriaev y R. Johansson, “Stable Periodic Motions of Inertia Wheel Pendulum Via Virtual Holonomic Constraints,” *European Control Conference*, pp.3771–3776, 2007.
- [9] M. García-Sanz, J. Elso y I. Egaña, “Control del Ángulo de Cabeceo de un Helicóptero como Benchmark de diseño de controladores,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* , vol. 3, no. 2, pp. 111–116, 2006.
- [10] J.W. Grizzle, C.H. Moog and C. Chevallereau, “Nonlinear control of mechanical systems with an unactuated cyclic variable,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 50, no. 5, pp. 559–576, May 2005.
- [11] M.A. Ishutkina, M. Casini and A. Vicino, “An Internet Based Laboratory for Control of a Safety Critical System,” *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pp. 2707–2712, 2004.
- [12] A. Isidori, L. Marconi and A. Serrani, “Robust nonlinear motion control of a helicopter,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 48, no. 3, pp. 413–426, 2003.
- [13] R. Kelly y V. Santibáñez, *Control de movimiento de robots manipuladores*. México: Prentice-Hall, 2003.
- [14] H.K. Khalil, *Nonlinear systems: Third edition*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002.
- [15] T. Kiefer, A. Kugi, K. Graichen and M. Zeitz, “Feedforward and Feedback Tracking Control of a 3DOF Helicopter Experiment under Input and Output Constraints,” *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1586–1593, 2006.
- [16] M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P. Kokotovic, *Nonlinear and adaptive control design*. Wiley Interscience, 1995.
- [17] B.C. Kuo, *Sistemas de control automático: Séptima Edición*. Prentice-Hall, 1996.

- [18] R. V. Lopes, R. K. H. Galvão, A. P. Milhan, V. M. Becerray and T. Yoneyama, “Modelling and Constrained Predictive Control of a 3DOF Helicopter,” *XV Congreso Brasileiro de Automatica*, pp. 429–434, 2006.
- [19] S.H. Mahboobi, M. Shahrokhi and H.N. Pishkenari, “Observer-based control design for three well-known chaotic systems,” *Chaos Solitions and Fractals*, vol. 29, pp 381–392, Aug. 2006.
- [20] L. Moreno, S. Garrido y C. Balaguer, *Ingeniería de control: modelado y control de sistemas mecánicos*. Madrid: Ariel Ciencia, 2003.
- [21] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna: Segunda edición*. México: Prentice Hall, 1993.
- [22] Y. Orlov, L. Aguilar, L. Acho and A. Ortiz, “Swing up and balancing control of pendubot via model orbit stabilization: algorithm synthesis and experimental verification,” in *2006 Conference on Decision and Control*, Dec. 13–15, San Diego, USA, pp. 6138–6143, 2006.
- [23] Y. Orlov, “Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems,” *SIAM J. Control Optim.*, vol. 43, no. 4, pp. 1253–1271, 2005.
- [24] Y. Orlov, J. Álvarez, J. Acho and L. Aguilar, “Global position regulation of friction manipulators via switched chattering control,” *International Journal of Control*, vol. 76, no. 14, pp. 1446–1452, 2003.
- [25] E.B. Perk, E. Jean-Jacques, “Motion Primitives for Robotic Flight Control,” *CoRR abs/cs/0609140*, 2006.
- [26] L. Rosier, “Inverse of Lyapunov’s second theorem for measurable functions,” *2nd IFAC Symposium NOLCOS’92*, Ed. Fliess M., Bordeaux, pp. 655–660, 1992.
- [27] H. Sage, M. De Mathelin and E. Ostertag, “Robust control of robot manipulators,” *International Journal of Control*, vol. 72, no. 16, pp. 1498–1522, 1999.

- [28] L. Sciavicco and B. Siciliano, *Modelling and control of robot manipulators*. London: Springer Verlag, 2000.
- [29] A.S. Shiriaev, L.B. Freidovich, A. Robertsson and A. Sandberg, “Virtual-holonomic-constraints-based design stable oscillations of Furuta pendulum: theory and experiments,” *IEEE Trans. Robot.*, vol. 23, no. 4, pp. 827–832, 2007.
- [30] K.K. Starkov, L. Aguilar and Y. Orlov, “Sliding mode control synthesis of a 3-DOF helicopter prototype using position feedback” in *10th International Workshop on Variable Structure Systems*, Antalya, Turkey, pp. 233–237, June 8–10, 2008.
- [31] P. Tondel and T.A. Johansen, “Complexity Reduction in Explicit Linear Model Predictive Control,” *IFAC 15th Triennial World Congress*, 2002.
- [32] L.H. Trentelman, A.A. Stoorvogel and M. Hautus, *Control theory for linear systems*. London: Springer, 2001.
- [33] V. Utkin, J. Guldner and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis, 1999.
- [34] Sensoray Co. [En línea]. Disponible en <http://www.sensoray.com/products/626data.htm>
- [35] Quanser Co. [En línea]. Disponible en <http://www.quanser.com>
- [36] E.R. Westervelt, J.W. Grizzle, C. Chevallerau, J.H. Choi and B. Morris, *Feedback control of dynamic bipedal robot locomotion*. New York: CRC, 2007.