



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA
MECÁNICA Y ELÉCTRICA**

UNIDAD ZACATENCO

TÓPICOS SELECTOS DE INGENIERÍA

ANÁLISIS DE RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES

CON FILTRO CHEBYSHEV APLICANDO

LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL

PRESENTAN:

GARCÍA GUERRERO ZEUS TONATIUH

MÉNDEZ CRUZ LUIS ALBERTO

ASESORES: Dr. DANIEL RODRÍGUEZ SALDAÑA

M. en C. ALEJANDRO ITURRI HINOJOSA



MÉXICO, D. F. 2008

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELECTRICA
UNIDAD PROFESIONAL "ADOLFO LÓPEZ MATEOS"

TEMA DE TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
POR LA OPCIÓN DE TITULACIÓN
DEBERA(N) DESARROLLAR

INGENIERO EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA
TESIS COLECTIVA Y EXAMEN ORAL INDIVIDUAL
C.-ZEUS TONATIUH GARCÍA GUERRERO
C.-LUIS ALBERTO MENDEZ CRUZ

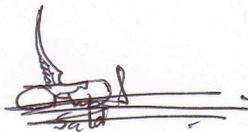
"ANÁLISIS DE RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES CON FILTRO CHEBYSHEV APLICANDO LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL"

ANALIZAR EL PROCESO DE RECONSTRUCCIÓN DE LOS PROCESOS ALEATORIOS APLICANDO LA REGLA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL Y LAS PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DEL FILTRO CHEBYSHEV.

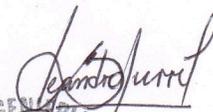
- DESCRIBIR LA RECONSTRUCCIÓN DE LOS PROCESOS ALEATORIOS GAUSSIANOS A PARTIR DE SUS MUESTRAS.
- OBTENER LA FUNCIÓN DE RECONSTRUCCIÓN Y LA FUNCIÓN DE ERROR DE RECONSTRUCCIÓN CUANDO LOS PROCESOS PASAN A TRAVÉS DEL FILTRO CHEBYSHEV DE N-ÉSIMO ORDEN.
- DESCRIBIR COMO LAS PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DE LOS PROCESOS ALEATORIOS INFLUYEN EN LA FORMA Y LA CALIDAD DE LA RECONSTRUCCIÓN.
- DESCRIBIR EL MÉTODO DE LA REGLA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL.
- MENCIONAR LAS PRINCIPALES DIFERENCIAS QUE PROVEE LA REGLA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL EN EL PROCEDIMIENTO DE RECONSTRUCCIÓN.

MÉXICO D.F., 12 DE MAYO DE 2009

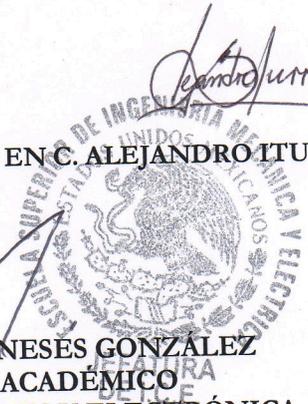
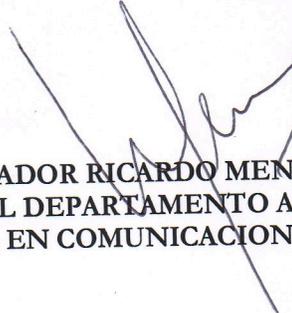
ASESORES



DR. DANIEL RODRÍGUEZ SALDAÑA.



M. EN C. ALEJANDRO ITURRI HINOJOSA.



M. EN C. SALVADOR RICARDO MENESES GONZÁLEZ
JEFE DEL DEPARTAMENTO ACADÉMICO
DE INGENIERÍA EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA

Contenido

Índice de Tablas	iv
Índice de Figuras	iv
Objetivo General	vii
Objetivos Particulares	vii
Justificación	viii

1 INTRODUCCIÓN 1

1.1 EL TEOREMA DE MUESTREO	1
1.2 INTERPOLACIÓN	3
1.2.1 Planteamiento General.....	3
1.2.2 Interpolación. Elección de la Interpolación más adecuada.....	3
1.2.3 Interpolación Lineal.....	4
1.2.4 Interpolación Polinomial.....	5
1.3 GENERALIZACIONES PRESENTADAS POR BALAKRISHNAN	7

2 DESCRIPCIÓN DE PARÁMETROS UTILIZADOS EN LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL 9

2.1 PROBABILIDAD	9
2.2 VARIABLES ALEATORIAS	12
2.2.1 Una Variable Aleatoria.....	12
2.2.2 Varias Variables Aleatorias.....	13
2.2.3 Medias Estadísticas para una Variable Aleatoria.....	17
2.2.4 Medias Estadísticas Conjuntas.....	18

2.3 SEÑALES ALEATORIAS.....	20
2.3.1 Definición.....	20
2.3.2 Estacionariedad.....	22
2.3.3 Media, Correlación y Covarianza.....	23
2.4 DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA.....	31
2.4.1 Definición.....	31
2.4.2 Propiedades.....	32
2.5 TRANSMISIÓN DE UNA SEÑAL ALEATORIA A TRAVÉS DE UN SISTEMA LINEAL INVARIANTE EN EL TIEMPO.....	35
2.5.1 Relación entre Densidades Espectrales a la entrada y salida de un Sistema LTI.....	42
2.6 PROCESOS GAUSSIANOS.....	43
2.6.1 Definición.....	43
2.6.2 Propiedades de los Procesos Gaussianos.....	44
2.7 LA REGLA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL.....	50
2.8 FUNCIONES BÁSICAS.....	54
2.9 APLICACIONES PARA ESTA PROPUESTA.....	55

3 RESULTADOS 57

3.1 RESULTADOS CON FILTROS RC.....	57
3.1.1 Filtro RC de una etapa.....	57
3.1.2 Filtro RC de dos etapas.....	62
3.1.3 Filtro RC de tres etapas.....	65
3.1.4 Comparación entre Filtros RC de distintas etapas.....	68
3.2 RESULTADOS CON FILTROS CHEBYSHEV.....	69
3.2.1 Filtro Chebyshev de primer orden.....	69
3.2.2 Filtro Chebyshev de segundo orden.....	72
3.2.3 Filtro Chebyshev de tercer orden.....	75
3.2.4 Comparación entre Filtros Chebyshev de distinto orden.....	78

4 CONCLUSIONES GENERALES 80

APÉNDICES

81

A: FUNCIONES BÁSICAS.....	81
A.1 Funciones Básicas con un Tiempo de Muestreo Periódico.....	82
A.2 Funciones Básicas con un Tiempo de Muestreo no Periódico.....	85
B: RECONSTRUCCIONES MEDIANTE EL FILTRO	
CHEBYSHEV.....	89
B.1 Filtro Chebyshev de cuarto orden.....	90
B.2 Filtro Chebyshev de quinto orden.....	93
B.3 Filtro Chebyshev de sexto orden.....	95
B.4 Filtro Chebyshev de séptimo orden.....	98
C: PROGRAMAS DE CÓMPUTO.....	101
REFERENCIAS.....	112

Índice de Tablas

1.1	Comparación entre los diferentes métodos de Interpolación.	6
1.2	Ventajas y desventajas de los métodos de Interpolación.	7
3.1	Comparación del valor de Error de Reconstrucción entre diferentes configuraciones de Filtros.	79

Índice de Figuras

CAPÍTULO 1

1.1	Ejemplo gráfico de Interpolación Lineal.	4
1.2	Ejemplo gráfico de Interpolación Polinomial.	5

CAPÍTULO 2

2.1	La función de distribución conjunta es la probabilidad de que el resultado del experimento esté en la zona acotada.	14
2.2	Ejemplo gráfico de una señal aleatoria.	20
2.3	Respuesta en amplitud del sistema $H(f)$.	34
2.4	Transmisión de una señal aleatoria a través de un sistema LTI.	35
2.5	Aspecto de la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza unitaria.	44
2.6	La salida de un sistema LTI estable a una entrada Gaussiana es Gaussiana.	44
2.7	Posibles realizaciones de un proceso aleatorio condicional al pasar a través de un conjunto de muestras X, T .	51
2.8	Etapas de un sistema de comunicación digital.	56
2.9	Esquema de reconstrucción.	56

CAPÍTULO 3

3.1	Densidad espectral de potencia de un filtro RC de una etapa.	57
3.2	Función de covarianza para un filtro RC de una etapa.	58
3.3	Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro RC de una etapa.	59
3.4	Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro RC de una etapa.	60
3.5	Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro RC de una etapa.	60
3.6	Densidad espectral de potencia de un filtro RC de dos etapas.	61
3.7	Función de covarianza para un filtro RC de dos etapas.	62
3.8	Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro RC de dos etapas.	63
3.9	Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro RC de dos etapas.	63
3.10	Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro RC de dos etapas.	64
3.11	Densidad espectral de potencia de un filtro RC de tres etapas.	64
3.12	Función de covarianza para un filtro RC de tres etapas.	65
3.13	Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro RC de tres etapas.	66
3.14	Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro RC de dos etapas.	66
3.15	Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro RC de tres etapas.	67
3.16	Contraste entre las reconstrucciones del proceso propuesto utilizando filtros RC de una, dos y tres etapas.	67
3.17	Densidad espectral de potencia para el filtro Chebyshev de primer orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 0.63$ rad/seg.	69

3.18	Función de covarianza para el filtro Chebyshev de primer orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 0.63$ rad/seg.	69
3.19	Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de primer orden.	70
3.20	Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de primer orden.	70
3.21	Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro Chebyshev de primer orden.	71
3.22	Densidad espectral de potencia para el filtro Chebyshev de segundo orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 1.89$ rad/seg.	71
3.23	Función de covarianza para el filtro Chebyshev de segundo orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 1.89$ rad/seg.	72
3.24	Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de segundo orden.	73
3.25	Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de segundo orden.	73
3.26	Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro Chebyshev de segundo orden.	74
3.27	Densidad espectral de potencia para el filtro Chebyshev de tercer orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 2.71$ rad/seg.	74
3.28	Función de covarianza para el filtro Chebyshev de tercer orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 2.71$ rad/seg.	75
3.29	Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de tercer orden.	76
3.30	Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de tercer orden.	76
3.31	Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro Chebyshev de tercer orden.	77
3.32	Contraste entre las reconstrucciones del proceso propuesto utilizando un filtro Chebyshev de primer, segundo y tercer orden.	77

OBJETIVO GENERAL

Analizar el proceso de reconstrucción de los procesos aleatorios aplicando la regla de la esperanza matemática condicional y las propiedades estadísticas del filtro Chebyshev.

OBJETIVOS PARTICULARES:

- 1) Describir la reconstrucción de los procesos aleatorios Gaussianos a partir de sus muestras.
- 2) Obtener la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción cuando los procesos pasan a través del filtro Chebyshev de n-ésimo orden.
- 3) Describir cómo las propiedades estadísticas de los procesos aleatorios influyen en la forma y la calidad de la reconstrucción.
- 4) Describir el método de la regla de la esperanza matemática condicional.
- 5) Mencionar las principales diferencias que provee la regla de la esperanza matemática condicional en el procedimiento de reconstrucción.

JUSTIFICACIÓN

En la reconstrucción de los procesos aleatorios se utiliza ampliamente el teorema clásico de muestreo o teorema de Shannon. Para utilizar ésta metodología es necesario que los procesos cumplan con ciertos requisitos como son: tener un número infinito de muestras a lo largo del proceso, que el espectro de potencia de la señal esté limitado en banda, que las posiciones de la muestras sean periódicas y que el periodo de muestreo cumpla con el criterio de Nyquist, el cual, indica que éste debe ser igual a dos veces la frecuencia máxima de la señal.

Por otra parte, el teorema de muestreo no especifica daramente si esta metodología debe ser utilizada para reconstruir procesos determinísticos o aleatorios, y que tipo de función de densidad de probabilidad debe tener el proceso a reconstruir.

En el presente trabajo se utiliza la regla de la esperanza matemática condicional para describir la reconstrucción de los procesos aleatorios cuando estos son caracterizados por la función de densidad de probabilidad Gaussiana.

La regla de la esperanza matemática condicional es una alternativa práctica que presenta ciertas ventajas, ya que es posible considerar: procesos con espectro limitado o no limitado en banda, periodicidad o no periodicidad en los tiempos de muestreo, un número infinito o finito de muestras. Entre otras ventajas, esta metodología permite explicar el procedimiento de reconstrucción en función de las propiedades estadísticas de los procesos al utilizar, prácticamente, cualquier filtro de reconstrucción. Además, esta metodología permite analizar cómo se lleva a cabo la interpolación y la extrapolación del proceso al limitar el número de muestras. Otra gran ventaja es que esta metodología proporciona de manera directa la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción para describir la forma de reconstrucción del proceso y calcular la reconstrucción del proceso en cualquier instante de tiempo.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

A lo largo del estudio de las comunicaciones, se han utilizado diferentes métodos para aproximar una función a la señal original de información. Uno de los métodos más conocidos fue propuesto en 1948, por C. E. Shannon, llamado Teorema de Muestreo y posteriormente tuvo una generalización hecha por A. V. Balakrishnan en 1957.

Estos métodos de interpolación han evolucionando, para que las funciones se aproximen lo más posible a la función original.

En principio el Teorema de Muestro, es un método de interpolación que parece puede ser aplicado a cualquier tipo de proceso, ya sea aleatorio o determinístico. Sin embargo, este método presenta algunos inconvenientes: 1) requiere de un número infinito de muestras, 2) dichas muestras necesitan estar periódicamente distribuidas a lo largo del tiempo, 3) el periodo de muestreo está definido por el criterio de Nyquist, 4) este periodo no puede ser alterado entre muestras, ya que si es alterado se presenta el fenómeno conocido como *aliasing*.

1.1 EL TEOREMA DE MUESTREO

Este teorema demuestra que una señal cuyo espectro está limitado en banda con B Hz [$Y(\omega) = 0$] para $|\omega| > 2\pi B$ puede ser reconstruida exactamente (con algunos errores) a partir de sus muestras tomadas de manera uniforme a una tasa $R > 2B$ Hz (muestras por segundo). En otras palabras, la frecuencia mínima de muestreo es $f_s = 2B$ Hz [1].

Como se mencionó anteriormente, el teorema de muestreo, considera una señal cuyo espectro está limitado en banda B Hz. Para mayor conveniencia, los espectros se muestran como funciones de ω , así como de f (Hz). El muestreo de $y(t)$ a una tasa de f_s (Hz) (f_s muestras por segundo) puede lograrse multiplicando $y(t)$ por un tren de impulsos $\delta_{T_s}(t)$ que consiste en la repetición de impulsos unitarios periódicamente cada T_s segundos, donde $T_s = \frac{1}{f_s}$. El resultado se denota como $\bar{y}(t)$. La señal muestreada se compone de impulsos espaciados cada T_s segundos (intervalo de muestreo). Entonces:

$$\bar{y}(t) = y(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_n y(nT_s)\delta(t - nT_s). \quad (1.1)$$

Como el tren de impulsos $\delta_{T_s}(t)$ es una señal periódica, este puede ser expresado mediante la serie trigonométrica de Fourier.

Por tanto:

$$\bar{y}(t) = y(t)\delta_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s} [y(t) + 2y(t) \cos \omega_s t + 2y(t) \cos 2\omega_s t + 2y(t) \cos 3\omega_s t + \dots] \quad (1.2)$$

Para encontrar $\bar{Y}(\omega)$, realizamos la transformada de Fourier de $\bar{y}(t)$, término a término, en donde la transformada del primer término es $Y(\omega)$; la transformada del segundo término $2y(t) \cos \omega_s t$ es $Y(\omega - \omega_s) + Y(\omega + \omega_s)$ y así sucesivamente. Esto significa que el espectro de $\bar{Y}(\omega)$ se compone de $Y(\omega)$ repetida periódicamente con $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ radianes, o $f_s = \frac{1}{T_s}$ Hz. Por tanto:

$$\bar{Y}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(\omega - n\omega_s). \quad (1.3)$$

También, el intervalo de muestreo $T_s = \frac{1}{f_s}$. Entonces:

$$T_s \leq \frac{1}{2B}. \quad (1.4)$$

El número de muestras por segundo son llamadas frecuencia de muestreo o tasa de muestreo y depende de la más alta componente de frecuencia que se presente en la señal analógica. La relación de la frecuencia de muestreo y la más alta componente de frecuencia de la señal para ser muestreada es regida por el Teorema de Nyquist [2]:

Si la frecuencia de muestreo, f_s , es superior a dos veces la frecuencia más alta de la componente de la señal analógica, ω , la señal analógica original es completamente descrito por éstas muestras por sí sola instantánea, es decir, $f_s > 2\omega$.

Shannon 1948 [3, 4] utilizó el teorema de muestreo para demostrar que una señal aleatoria limitada en banda era equivalente a la serie de sus muestras tomadas a una distancia definida por el *intervalo de Nyquist*. Él fue consciente del trabajo de Whittaker a quién citó. Posteriormente, se establecieron algunas pruebas al teorema que es hoy conocido como *el teorema de muestreo de Whittaker-Kotel'nikov-Shannon* (o WKS), el cual dice:

Toda función de una señal $f(t)$ definida en \mathbb{R} está limitada en banda dentro de un intervalo $[-\omega_b, \omega_b]$ (donde $\omega_b > 0$) puede ser completamente reconstruida con respecto a toda $t \in \mathbb{R}$ partiendo de sus valores muestreados $f\left(\frac{k\pi}{\omega_b}\right)$ que son tomados en los puntos $\left(\frac{k\pi}{\omega_b}\right)$ (donde $k \in \mathbb{Z}$) igualmente espaciados sobre el eje real \mathbb{R} en términos de:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_b}\right) \frac{\text{sen}(\omega_b t - k\pi)}{\omega_b t - k\pi}. \quad (1.5)$$

El proceso de reconstrucción de una señal continua en el tiempo $y(t)$, para ésta señal, es conocida como *interpolación*. Una señal $y(t)$ limitada en banda para B (Hz) puede ser reconstruida (interpolada) exactamente por éstas muestras, esto es, pasando la señal muestreada a través de un filtro pasabajas ideal de ancho de banda B (Hz).

1.2 INTERPOLACIÓN

En numerosos fenómenos de la naturaleza observamos una cierta regularidad en la forma en que estos se producen, esto nos permite sacar conclusiones de la marcha de un fenómeno en situaciones que no hemos medido directamente [5].

Una función de interpolación es aquella que pasa a través de puntos dados como datos, los cuales se muestran comúnmente por medio de una tabla de valores o se toman directamente de una función dada.

La interpolación consiste en hallar un dato dentro de un intervalo en el que conocemos los valores de los extremos.

Los datos obtenidos mediante una medición pueden interpolarse, pero en la mayoría de los casos no es recomendable una interpolación directa debido a los errores aleatorios implicados en la medición.

1.2.1 Planteamiento General

El problema general de la interpolación se nos presenta cuando nos dan una función de la cual solo conocemos una serie de puntos de la misma:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \quad (1.6)$$

y se pide hallar un punto x (intermedio de x_0 y x_n) de esta función.

Se desea, por tanto *encontrar una función cuya gráfica pase por esos puntos* y nos sirva para **estimar** los valores deseados.

La interpolación de los datos puede hacerse mediante un polinomio, mediante funciones *spline*, una función racional o la serie de Fourier entre otras posibles formas [6]. La interpolación polinomial (ajustar un polinomio a los puntos dados) es un tema de gran importancia, ya que un gran número de modelos se basan en la interpolación polinomial.

1.2.2 Interpolación. Elección de la Interpolación más adecuada

Consideremos una función de la cual sólo conocemos una serie de puntos de la misma

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \quad (1.7)$$

Deseamos encontrar la expresión analítica de dicha función para poder estudiarla en esos puntos.

Ahora bien, por $n + 1$ puntos pasan infinitas funciones, ¿con cuál de ellas nos quedamos? Lo más lógico es recurrir a la más sencilla. La familia de las funciones más sencillas es la de los polinomios, por tanto buscaremos el polinomio de menor grado que pase por los $n + 1$ puntos dados.

La función polinómica de menor grado que pasa por los puntos (1.7) es en principio de grado n :

$$y = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0. \quad (1.8)$$

Y se obtiene resolviendo el sistema de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas (sistema que tiene solución única ya que la determinante de la matriz de los coeficientes es de Vandermonde y por lo tanto distinto de cero).

Se le llama polinomio interpolador correspondiente a estos puntos. Una vez obtenida su expresión dando valores en él se pueden encontrar nuevos puntos de la función. Los resultados obtenidos son naturalmente *estimaciones aproximadas*.

La interpolación será **lineal** cuando sólo se tomen dos puntos y **cuadrática** cuando se tomen tres.

1.2.3 Interpolación Lineal

Cuando las variaciones de la función son proporcionales (o casi proporcionales) a los de la variable independiente se puede admitir que dicha función es lineal y usar para la estimación de los valores la interpolación lineal ver Figura 1.1.

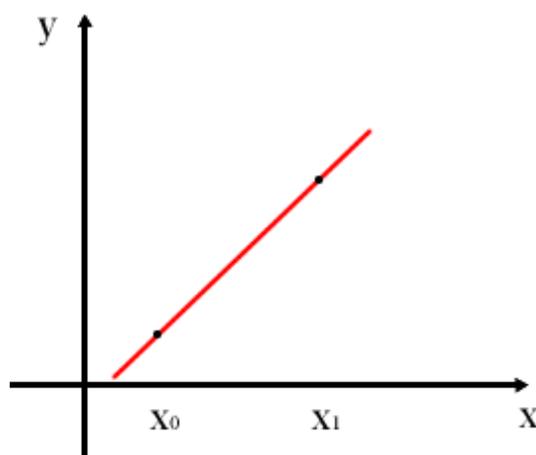


Figura 1.1. Ejemplo gráfico de Interpolación Lineal.

Sean dos puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ la interpolación lineal consiste en hallar una estimación del valor y , para un valor x tal que $x_0 < x < x_1$.

Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos es:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0). \quad (1.9)$$

Obtenemos la fórmula de la interpolación lineal:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0). \quad (1.10)$$

1.2.4 Interpolación Polinomial

¿Pueden ajustarse tres o cuatro datos por medio de una curva? Uno de los métodos fundamentales para encontrar una función que pase a través de datos es el de usar un polinomio Figura 1.2.

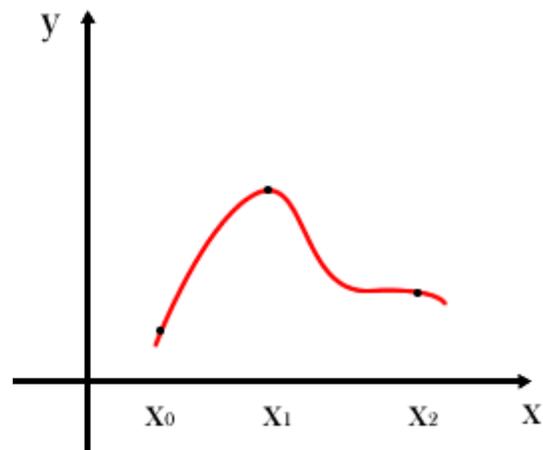


Figura 1.2. Ejemplo gráfico de Interpolación Polinomial.

La interpolación polinomial se puede expresar en varias formas alternativas que pueden transformarse entre sí. Entre éstas se encuentran las series de potencia, la interpolación de Lagrange y la interpolación de Newton hacia atrás y hacia adelante.

Un polinomio de orden N que pasa a través de $N + 1$ puntos es único. Esto significa que, independientemente de la forma de interpolación, todas las interpolaciones polinomiales que se ajustan a los mismos datos son matemáticamente idénticas.

En la Tabla 1.1 se observa que todos los métodos presentados tienen como común denominador el uso de un polinomio que se utiliza para realizar la aproximación.

Tabla 1.1. Comparación entre los diferentes métodos de Interpolación.

Esquema de Interpolación	Fórmula de Interpolación
Interpolación de Lagrange	$P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x)$ <p>donde:</p> $L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$
Interpolación de Newton	$P(x) = \sum_{i=0}^n F_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$
Interpolación de Hermite	$P_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^n f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x)$ <p>donde</p> $H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x_j)] L_{n,j}^2(x)$ <p>y</p> $\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j) L_{n,j}^2(x)$
Spline Cúbico	$P(x) = \begin{cases} s_0(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ s_{n-1}(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$ <p>donde</p> $s_i(x)$ <p>es un polinomio cúbico</p>
Teorema de Muestreo	$P(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_b}\right) \frac{\text{senn}(\omega_b x - k\pi)}{\omega_b x - k\pi}$

En la Tabla 1.2 se describen las principales ventajas y desventajas de diversos métodos de interpolación. La utilización de uno u otro depende principalmente del objetivo a alcanzar, de este modo siempre existirá un método que se ajuste a nuestras necesidades.

Tabla 1.2. Ventajas y desventajas de los métodos de Interpolación.

Esquema de Interpolación	Ventajas	Desventajas
Interpolación de Lagrange	Forma conveniente. Fácil de programar.	Difícil de manejar para cálculos manuales.
Interpolación de Newton	El orden del polinomio puede cambiarse sin problemas. La evaluación de errores es fácil.	Se debe de preparar una tabla de diferencias o de diferencias divididas.
Interpolación de Lagrange mediante puntos de Chebyshev	Los errores se distribuyen más uniformemente que en la malla que presenta igual separación.	Los puntos de la malla no están distribuidos de manera uniforme.
Interpolación de Hermite	Alta precisión debido a que el binomio se ajusta también a las derivadas.	Necesita valores de las derivadas.
Spline cúbico	Aplicable a cualquier número de datos.	Se necesitan resolver ecuaciones simultáneas.
Teorema de Muestreo	Alta precisión debido a su función básica.	No considera las propiedades estadísticas del proceso.

1.3 GENERALIZACIONES PRESENTADAS POR BALAKRISHNAN

En resumen Balakrishnan en su artículo de 1957 "A note on the sampling principle for continuous signals" [7], realiza un análisis para procesos continuos de parámetros estocásticos utilizando dos métodos de muestreo basados en interpolación. El método en este caso que será comprobado y del cual se presentará una generalización será el Teorema de Muestreo desarrollado por Shannon. El punto de partida para el análisis presentado por Balakrishnan se presenta en el siguiente teorema:

Sea $x(t) - \infty < t < \infty$ un proceso estocástico evaluado real o complejo, estacionario en el "sentido amplio" y que posee una densidad espectral, la cual desaparece fuera del intervalo de la frecuencia angular $[-2\pi f_b, 2\pi f_b]$. Entonces $x(t)$ tiene la representación:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N x\left(\frac{n}{2f_b}\right) \frac{\text{sen } \pi(2f_b t - n)}{\pi(2f_b t - n)}. \quad (1.11)$$

Para cada t , donde \lim simboliza el límite en el sentido cuadrático medio.

Más explícitamente, esto significa

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[x(t) - \sum_{n=-N}^N x\left(\frac{n}{2f_b}\right) \frac{\text{sen } \pi(2f_b t - n)}{\pi(2f_b t - n)} \right]^2 \right\} = 0. \quad (1.12)$$

Donde se asume que todos los procesos tienen sus varianzas y sus promedios finitos. Es aquí entonces donde se puede ver la primera diferencia con respecto al Teorema de Shannon ya que se le da un carácter finito a ciertas características del proceso.

Ahora bien el análisis continúa con lo siguiente:

Notamos primeramente que sin tener en cuenta la teoría estadística de si es Gaussiano o no, la mejor estimación cuadrática media de $x(t)$ a partir de $x_n = x(nT)$ es lineal.

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^N x_n \frac{\text{sen } \pi(2f_b t - n)}{\pi(2f_b t - n)} \quad (1.13)$$

El límite se considera al realizar el promedio estadístico de segundo orden. Además, como se mostró en [7] el error cuadrático medio es cero.

Ahora bien este teorema ha sido aceptado y retomado en diversos estudios, pero a su vez contiene algunas inconsistencias que hay que recalcar:

Sabemos que si se toma un número infinito de muestras el error será cero pero si en determinado momento utilizamos solo unas cuantas, entonces la forma que tomará la reconstrucción no será la óptima.

Por otro lado, este teorema esta sujeto a la condición de que el espectro de potencia sea limitado no mencionando que sucede cuando esta condición no se cumple.

Otro aspecto que hay que hacer notar es que no se menciona cómo debe ser la función de densidad de probabilidad del proceso por lo que puede entonces pensarse que este método puede utilizarse arbitrariamente en cualquier proceso que se quiera reconstruir.

Capítulo 2

Descripción de parámetros utilizados en la Esperanza Matemática Condicional

En este capítulo describimos todos los parámetros necesarios para la utilización del método conocido como la Regla de la Esperanza Matemática Condicional. Estos parámetros son: la función de densidad de probabilidad (fdp), estacionariedad, la función de densidad espectral de potencia, procesos gaussianos y una descripción detallada acerca del método a utilizar.

2.1 PROBABILIDAD

Además de las señales determinísticas, otro tipo de señales que siempre aparecen en los sistemas de comunicaciones son las **señales aleatorias**. La señal de información, una interferencia en el canal o el ruido en un receptor son tres ejemplos de señales aleatorias. La señal de información tiene pulsos de voz de duración aleatoria y posición aleatoria. La señal interferente sería debida a la presencia cercana de otros sistemas de comunicaciones. La señal de ruido en el receptor sería debida al ruido térmico en resistencias y componentes del receptor.

Por lo tanto, una señal recibida va ser una señal con varias componentes aleatorias. Aunque no es posible describir este tipo de señales con una expresión matemática, se pueden utilizar sus **propiedades estadísticas**. La disciplina matemática que trata de las medidas estadísticas se denomina **teoría de la probabilidad**.

Una forma de aproximarse a la noción de probabilidad es a través del fenómeno de **regularidad estadística**. Hay muchas situaciones en la naturaleza en las que podemos predecir lo que va a ocurrir a partir de la experiencia previa en términos promediados, pero no de forma exacta. Cuando la situación se repite muchas veces podemos determinar un patrón de resultados. Para ello se puede proceder como sigue:

1. Prescripción de un experimento básico.
2. Especificar todos los posibles resultados de ese experimento.
3. Repetir el experimento, n veces, bajo condiciones idénticas y observar los resultados.

Si consideramos uno de los posibles resultados de un experimento, como el evento A. Observamos que en n intentos, el evento A ocurre n_A veces. Al evento A se le puede asignar un número no negativo denominado **probabilidad de ocurrencia** dado por la ecuación (2.1) [8].

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_A}{n} \right) \quad (2.1)$$

El **evento cierto** es aquel en donde $n_A = n$. La probabilidad del evento cierto es la unidad. Por otra parte, el **evento imposible** es aquel en donde $n_A = 0$. Por lo tanto, la probabilidad del evento imposible es cero. Por lo tanto la probabilidad de ocurrencia cumple con la ecuación (2.2).

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (2.2)$$

Si consideremos un experimento básico con N posibles resultados $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_N$ que son **mutuamente exclusivos**. La probabilidad de todos los eventos A_k , cumplen con la ecuación (2.3).

$$\sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_A}{n} \right) \quad (2.3)$$

En la práctica nos ocupamos normalmente del resultado de varios experimentos básicos. Por lo tanto hay que extender la definición de probabilidad como la **probabilidad conjunta** de dos o más eventos. Hacemos un experimento y queremos examinar la ocurrencia del par de eventos A y B en ese orden.

Sea n_{AB} el número de veces que aparece el **evento conjunto** (A, B), de un total de n intentos. La probabilidad conjunta de A y B viene dada por la ecuación (2.4) [8].

$$P(A, B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_{AB}}{n} \right) \quad (2.4)$$

Si en n intentos A ocurre n_A veces y B n_B veces, debido a que el evento conjunto (A, B) es primero A y luego B, se sigue que n_A debe incluir n_{AB} . Es decir se cumple la ecuación (2.5).

$$0 \leq \frac{n_{AB}}{n_A} \leq 1 \quad (2.5)$$

La relación $\frac{n_{AB}}{n_A}$ representa la frecuencia relativa de ocurrencia del evento B dado que haya ocurrido A. Así, para n grande $\frac{n_{AB}}{n_A}$ define la probabilidad de que ocurra B dado que haya ocurrido A.

Esto se denomina probabilidad condicional y viene dada por la ecuación (2.6).

$$P(B|A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_A}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \right) \quad (2.6)$$

A partir de la ecuación (2.6) se pueden deducir las expresiones de la ecuación (2.7). Por lo tanto, la probabilidad conjunta de dos eventos se puede expresar como el producto de la probabilidad condicional de un evento dada la ocurrencia del otro por la probabilidad de que ocurra este último [8].

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A, B)}{P(A)} \\ P(A, B) &= P(B|A)P(A) \\ P(A, B) &= P(A|B)P(B) \end{aligned} \quad (2.7)$$

De las expresiones de la ecuación (2.7) se puede llegar a la ecuación (2.8) que se denomina teorema de Bayes y que nos permite calcular $P(B|A)$ sabiendo $P(A)$, $P(B)$ y $P(A|B)$.

$$P(B|A) = \frac{P(A, B)P(B)}{P(A)} \quad (2.8)$$

Si la probabilidad de que ocurra B condicionado a que haya ocurrido A es igual a la probabilidad de B, es decir, si se cumple la ecuación (2.9).

$$P(B|A) = P(B) \quad (2.9)$$

Entonces, la probabilidad conjunta de que ocurra (A, B) es igual al producto de probabilidades de A y B, cumpliéndose así la ecuación (2.10).

$$P(A, B) = P(A)P(B) \quad (2.10)$$

En este caso también se cumple que la probabilidad de que ocurra A condicionado a que haya ocurrido B es igual a la probabilidad de A, según la ecuación (2.11).

$$P(A|B) = P(A) \quad (2.11)$$

Por lo tanto, la ocurrencia de un evento no nos dice nada sobre la ocurrencia del otro. Se dice entonces que los eventos A y B son **estadísticamente independientes**.

2.2 VARIABLES ALEATORIAS

2.2.1 Una Variable Aleatoria

Es conveniente asociar a un experimento un espacio y los posibles resultados puntos de ese espacio. A cada resultado básico se le puede asociar un punto denominado **punto muestra**, denotado por s . La totalidad de los puntos muestra, $\{s\}$, que corresponde a la agregación de todos los posibles resultados del experimento se denomina espacio muestra y se denota por S . Un evento corresponde a un punto del espacio o un conjunto de puntos [9].

Es conveniente utilizar el espacio muestra y pensar en el resultado de un experimento como una **variable aleatoria** que puede tomar cualquier valor del espacio muestra que va a ser determinado por el experimento.

Una función cuyo dominio de definición es un espacio muestra y cuyo rango son los números reales se denomina variable aleatoria del experimento. Cuando el resultado de un experimento es s , la variable aleatoria se denota por $X(s)$ o simplemente X .

Se denomina **variable aleatoria discreta** como aquella variable aleatoria que puede tomar únicamente un número contable de números reales. Si la variable aleatoria puede tomar cualquier valor de un intervalo es una **variable aleatoria continua**.

Hace falta una descripción probabilística de las variables aleatorias que funcione tanto para variables aleatorias discretas como para continuas. Por ejemplo, sea la variable aleatoria X y consideramos la probabilidad del evento $X < x$, es decir, $P(X < x)$. Esto define una función de la variable x según la ecuación (2.12). Esta función se denomina **función de distribución acumulativa** o **función de distribución** de la variable X [9].

$$F_X(x) = P(X \leq x) \tag{2.12}$$

La función de distribución es una función de la variable independiente x no de la variable aleatoria X . Sin embargo, depende de qué variable aleatoria se esté considerando y por ello se pone X como subíndice. Para cada valor de x , $F_X(x)$ expresa una probabilidad. Esta función tiene las siguientes propiedades que se deducen directamente [9]:

1. La función de distribución $F_X(x)$ está acotada entre 0 y 1.
2. La función de distribución $F_X(x)$ es monótona no decreciente en x , es decir se cumple la ecuación (2.13).

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \quad \text{si } x_1 < x_2 \tag{2.13}$$

Una función alternativa que define la variable aleatoria es la derivada de la función de distribución que se denomina **función de densidad de probabilidad** y viene dada por la ecuación (2.14) [8,9].

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{2.14}$$

Integrando la expresión (2.14) se puede calcular la función de distribución a partir de la función de densidad de probabilidad según la ecuación (2.15) [8,9].

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad (2.15)$$

El nombre de densidad de probabilidad viene del hecho de que la probabilidad del evento $x_1 < X < x_2$ sea la de la ecuación (2.16) [8,9].

$$\begin{aligned} P(x_1 < X \leq x_2) &= P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F_X(x_2) - F_X(x_1) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ya que resulta que $F_X(\infty) = 1$ corresponde a la probabilidad del evento cierto y $F_X(-\infty) = 0$ con la del evento imposible, se sigue la ecuación (2.17).

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (2.17)$$

Debido a que $F_X(x)$ es monótona no decreciente, su derivada es siempre mayor o igual que cero. Una función de densidad de probabilidad es una función no negativa cuya área debajo de su curva es unitaria.

2.2.2 Varias Variables Aleatorias

A menudo el resultado de un experimento requiere el uso de varias variables aleatorias. Consideremos el caso de dos variables aleatorias. Después se podría extender a cualquier número de variables aleatorias.

Consideremos las variables aleatorias X e Y . Se define la **función de distribución conjunta** $F_{X,Y}(x,y)$ como la probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor o igual que x y que la variable aleatoria Y sea menor o igual que y . Las variables aleatorias X e Y pueden ser dos variables aleatorias de una dimensión separadas o las componentes de una variable aleatoria de dos dimensiones. En cualquier caso, el dominio de definición es el plano (x,y) . La función de distribución $F_{X,Y}(x,y)$ es la probabilidad de que el resultado del experimento este en el cuadrante acotado, que puede verse en la Figura 2.1.

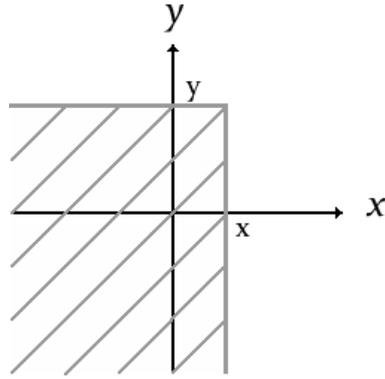


Figura 2.1. La función de distribución conjunta es la probabilidad de que el resultado del experimento esté en la zona acotada.

La función de distribución conjunta viene dada por la ecuación (2.18) [8,9].

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (2.18)$$

La función de distribución conjunta al venir definida a partir de la probabilidad conjunta, da como resultado un valor que va a estar comprendido entre 0 y 1.

Además resulta que $F_{X,Y}(-\infty, -\infty) = 0$, es el evento conjunto imposible y $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$, es el evento conjunto seguro. Además es una función definida no negativa en ambas variables, es decir, se cumple la ecuación (2.19).

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x_1, y) &\leq F_{X,Y}(x_2, y) && \text{si } x_1 < x_2 \\ F_{X,Y}(x, y_1) &\leq F_{X,Y}(x, y_2) && \text{si } y_1 < y_2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Se define la **función de densidad de probabilidad conjunta** de X e Y por la ecuación (2.20) [8,9].

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} \quad (2.20)$$

Integrando la ecuación (2.20) respecto a ambas variables se tendrá la ecuación (2.21) que permite calcular la función de distribución conjunta a partir de la función densidad de probabilidad conjunta [8,9].

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(x,y) dx dy \quad (2.21)$$

Puesto que la función de distribución conjunta fue definida no negativa en ambas variables se cumple que $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \forall x \forall y$.

Además como $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$ por la ecuación (2.21) se cumple la ecuación (2.22), es decir el volumen total debajo de la curva de la función de densidad de probabilidad conjunta es unitaria [8,9].

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1 \quad (2.22)$$

A partir de la función de densidad de probabilidad conjunta se puede calcular la probabilidad de que la variable X este comprendida entre x_1 y x_2 y la variable Y entre y_1 e y_2 usando la ecuación (2.23) [8,9].

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{X,Y}(x,y) dx dy \quad (2.23)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.24) y derivando la primera expresión respecto a x y la segunda respecto a y se obtiene las expresiones de la ecuación (2.25) [8,9].

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(x,y) dx dy \quad (2.24)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx \quad (2.25)$$

Las funciones $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ de la ecuación (2.25) se denominan **densidades marginales**. La función densidad de probabilidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ contiene toda la información estadística sobre las variables X e Y , sin embargo las marginales no.

Se define la función de **densidad de probabilidad condicional** de la variable Y sabiendo que la variable X ha tomado el valor x por la ecuación (2.26) [8].

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad (2.26)$$

También se puede definir la función de densidad de probabilidad de X condicionado a Y según la ecuación (2.27) [8].

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (2.27)$$

La función de densidad de probabilidad condicional $f_{Y|X}(y|x)$ es una función de una variable independiente que es y , sin embargo depende del valor de x que se considera como una constante.

Las funciones de densidad de probabilidad condicional cumplen las propiedades típicas de toda función de densidad de probabilidad. Por ejemplo, para $f_{Y|X}(y|x)$ se cumple la ecuación (2.28).

$$f_{Y|X}(y|x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(n,x) dn \quad (2.28)$$

A partir de las ecuaciones (2.26) y (2.27) despejando la función de densidad de probabilidad conjunta e igualando se llega a la ecuación (2.29) que es otra forma del teorema de Bayes, en este caso para funciones de densidad de probabilidad.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)} \quad (2.29)$$

Si las variables aleatorias X e Y son **estadísticamente independientes**, el conocer el resultado de la variable X no afecta al resultado de la variable Y ni a su distribución estadística. Como resultado de esto se cumple la ecuación (2.30) [9].

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \quad (2.30)$$

En este caso la función densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X e Y se puede poner como el producto de las densidades marginales, según la ecuación (2.31).

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (2.31)$$

2.2.3 Medias Estadísticas para una Variable Aleatoria

Ahora, se define el **operador esperanza matemática** para una función de variable aleatoria $g(X)$ por la ecuación (2.32). Este es un operador lineal [9].

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (2.32)$$

Primeramente, se define el **momento de orden n** de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X por la ecuación (2.33) [9].

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad (2.33)$$

Los momentos más importantes son los dos primeros. Cuando $n = 1$ se tiene el **valor medio, media o valor esperado** de una variable aleatoria X que viene dado por la ecuación (2.34). La media se puede entender gráficamente como el centro de gravedad de la función de densidad de probabilidad.

$$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (2.34)$$

En el caso de que $n = 2$ tenemos el valor cuadrático medio de la variable aleatoria X dado por la ecuación (2.35).

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \quad (2.35)$$

Por otra parte, se define el **momento centrado de orden n** de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X por la ecuación (2.36).

$$E[(X - m_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^n f_X(x) dx \quad (2.36)$$

Para $n = 1$ el momento centrado es cero. El momento centrado más importante es cuando $n = 2$ que se denomina **varianza** de la variable aleatoria y viene dada por la ecuación (2.37) [9].

$$\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X - m_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx \quad (2.37)$$

La raíz cuadrada de la varianza, σ_x , se denomina desviación estándar de la variable aleatoria.

La varianza nos da una medida del ancho efectivo de la función de densidad de probabilidad en torno a la media.

La media y la varianza nos dan una descripción de la distribución de la probabilidad.

La varianza y el valor cuadrático medio están relacionados según la ecuación (2.38) [9].

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[X^2 - 2m_x X + m_x^2] \\ &= E[X^2] - 2m_x E[X] + m_x^2 \\ &= E[X^2] - m_x^2\end{aligned}\tag{2.38}$$

Solo en el caso de que la media sea cero, la varianza y el valor cuadrático medio coinciden, según la ecuación (2.39).

$$\sigma^2 = E[X^2], \text{ para } m_x = 0\tag{2.39}$$

2.2.4 Medias Estadísticas Conjuntas

Ahora, consideremos las variables aleatorias X e Y . Por lo tanto, se define el **momento conjunto** de orden j, k , como el valor esperado de $X^j Y^k$ para j y k enteros. Esto está dado por la ecuación (2.40).

$$E[X^j Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k f_{X,Y}(x,y) dx dy\tag{2.40}$$

El más importante de los momentos conjuntos es el de orden 1, 1, que se denomina **correlación** y viene dado por la ecuación (2.41).

$$\text{Corr}[X, Y] = E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y) dx dy\tag{2.41}$$

Se define el **momento conjunto centrado** de orden j, k como el momento conjunto de las variables centradas $(X - m_x)$ e $(Y - m_y)$. Viene dado por la ecuación (2.42).

$$E[(X - m_x)^j (Y - m_y)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^j (y - m_y)^k f_{X,Y}(x,y) dx dy\tag{2.42}$$

El momento centrado más importante, es el de orden 1, 1, que se denomina **covarianza** y viene dado por la ecuación (2.43).

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= E[(X - m_X)(Y - m_Y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (2.43)$$

Desarrollando la ecuación (2.43) se llega a la ecuación (2.44) que nos da la relación entre la covarianza y correlación.

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= E[(X - m_X)(Y - m_Y)] \\ &= E[XY] - E[X]m_Y - m_X E[Y] + m_X m_Y \\ &= Corr[X, Y] - m_X m_Y \end{aligned} \quad (2.44)$$

Si alguna de las medias de X o Y , son cero o ambas, la correlación y la covarianza son iguales.

Si σ_X^2 y σ_Y^2 son las varianzas de X e Y respectivamente, la covarianza normalizada a $\sigma_X \sigma_Y$, se denomina **coeficiente de correlación** y viene dado por la ecuación (2.45).

$$\rho = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.45)$$

Dos variables aleatorias **no están correlacionadas** sí y solo sí su covarianza es cero. Tal como se observó en la ecuación (2.46).

$$X \text{ e } Y \text{ no correlacionadas} \quad \leftrightarrow \quad Cov[X, Y] = 0 \quad \rightarrow \quad E[XY] = m_X m_Y \quad (2.46)$$

Se dice que dos variables aleatorias X e Y son **ortogonales**, sí y solo sí su correlación es cero. Esto cumple con la ecuación (2.47).

$$X \text{ e } Y \text{ ortogonales} \quad \leftrightarrow \quad Corr[X, Y] = 0 \quad (2.47)$$

Se puede ver que si alguna de las medias de X o Y son cero o ambas cuando X e Y son no correlacionadas, entonces se dice que X e Y son ortogonales.

Si X e Y son estadísticamente independientes entonces son no correlacionadas. Sin embargo, si X e Y son no correlacionadas no tienen porque ser independientes. Por lo tanto, la no correlación es una condición necesaria para la independencia, pero no suficiente. De aquí se tiene la ecuación (2.48).

$$X \text{ e } Y \text{ son independientes} \quad \leftrightarrow \quad Cov[X, Y] = 0 \quad (2.48)$$

2.3 SEÑALES ALEATORIAS

2.3.1 Definición

Realizar un análisis estadístico de **señales aleatorias** como voz, televisión, señales digitales de datos, ruido eléctrico, entre otras tiene un papel muy importante en el campo de las comunicaciones [10].

De manera general, todas estas señales aleatorias tienen dos características:

1. Son funciones del tiempo definidas dentro de un intervalo de observación.
2. Son señales aleatorias en el sentido de que antes de realizar el experimento no es posible describir su forma exacta.

Al describir una señal aleatoria se puede ver que cada punto muestra del espacio muestra es una función del tiempo.

El espacio muestra o el conjunto total de las funciones posibles del tiempo se denomina **proceso estocástico o aleatorio**.

Si suponemos que tenemos definida una distribución de probabilidad sobre conjuntos del espacio muestra, se puede hablar de probabilidad de eventos. Según esto se define un proceso estocástico o una señal aleatoria como un conjunto de funciones del tiempo, junto con unas reglas de probabilidad que asignan una probabilidad a cualquier evento significativo asociado con la observación de una de esas funciones.

Un proceso estocástico se denota por $X(t)$ y representa una posible realización del conjunto de funciones muestra $\{x_j(t)\}$ para $j = 1, 2, \dots, n$. Consideremos el espacio muestra ejemplo que puede verse en la Figura 2.2 [10].

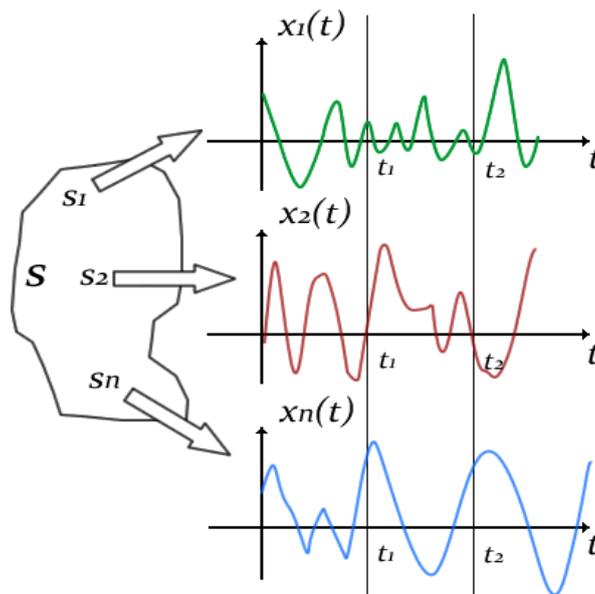


Figura 2.2. Ejemplo gráfico de una señal aleatoria.

La señal $x_1(t)$ tiene una probabilidad de ocurrencia $P(s_1)$ y corresponde al punto muestra s_1 del espacio muestra S . Del mismo modo se puede decir del resto de las funciones $x_2(t), \dots, x_n(t)$. El conjunto de todas las funciones con sus probabilidades asociadas representa la señal aleatoria. Si ahora observamos el valor para cada posible resultado del experimento en el instante $t = t_1$ se tiene $\{x_j(t_1)\}$ para $j = 1, 2, \dots, n$. Debido a que cada punto muestra s_j del espacio muestra S en t_1 tiene asociado el número $x_j(t_1)$ con probabilidad $P(s_j)$, el conjunto de números $\{x_j(t_1)\}$ para $j = 1, 2, \dots, n$, es una variable aleatoria. Esta variable aleatoria se denota por $X(t_1)$. Si ahora fijamos otro instante de tiempo $t = t_2$, se obtendrá otro conjunto de puntos y por lo tanto otra variable aleatoria $X(t_2)$. El conjunto de puntos en este caso $\{x_j(t_2)\}$ tiene las mismas probabilidades que antes $P(s_j)$, lo que cambia es el conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria, que van a ser distintos [10].

Para cada instante fijado, el proceso estocástico $X(t)$ define una variable aleatoria. Una vez que se conoce el proceso estocástico, lo que se tiene es una función determinística del tiempo. Por ejemplo, si tras la realización del proceso estocástico a ocurrido s_k , lo que se tiene es la función del tiempo $x_k(t)$.

En el caso de una variable aleatoria el resultado del experimento era un número real, mientras que en el caso de un proceso estocástico el resultado del experimento es una función del tiempo.

Por definición un proceso estocástico $X(t)$ implica la existencia de infinitas variables aleatorias no contables para cada instante del tiempo fijado t en el intervalo $-\infty < t < \infty$.

Es posible hablar de la función de distribución de la variable aleatoria $X(t_1)$ obtenida a partir del proceso estocástico $X(t)$ fijando $t = t_1$ según la ecuación (2.49).

$$F_{X(t_1)}(x_1) = P(X(t_1) \leq x_1) \quad (2.49)$$

De manera más general, para k instantes de tiempo elegidos t_1, t_2, \dots, t_k , se definen k variables aleatorias $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$ del proceso estocástico $X(t)$. Se puede ahora definir la función de distribución conjunta de esas k variables aleatorias según la ecuación (2.50).

$$F_{X(t_1) \dots X(t_k)}(x_1 \dots x_k) = P(X(t_1) \leq x_1 \dots X(t_k) \leq x_k) \quad (2.50)$$

Como toda función de distribución, su valor esta comprendido entre 0 y 1 y es una función monótona no decreciente en cada una de las k dimensiones.

Por conveniencia se puede utilizar notación matricial. Siguiendo el convenio de utilizar negrita para matrices y vectores, si se define el vector de k variables aleatorias $X(t)$ definido por la ecuación (2.51) y el vector de k variables independientes x definido por la ecuación (2.52), la función de distribución dada por la ecuación (2.50) se puede poner de forma simplificada como $F_{X(t)}(x)$.

$$X(t) = \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_k) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Para cada punto muestra particular s_j las componentes del vector $X(t)$ representan los valores de la función $x_j(t)$ en los instantes t_1, t_2, \dots, t_k . La función de distribución conjunta $F_{X(t)}(x)$ depende del proceso aleatorio $X(t)$ y del conjunto de instantes $\{s_j\}$ para $j = 1, 2, \dots, k$.

También se puede definir la función densidad de probabilidad conjunta de $X(t)$ según la ecuación (2.53). Como toda función densidad de probabilidad su valor es mayor o igual que 0 y tiene volumen k -dimensional unitario.

$$f_{X(t)}(x) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} F_{X(t)}(x) \quad (2.53)$$

2.3.2 Estacionariedad

Consideremos el conjunto de instantes t_1, t_2, \dots, t_k y el proceso estocástico $X(t)$. Una caracterización completa del proceso estocástico $X(t)$ nos permitiría conocer la función de densidad de probabilidad conjunta $f_{X(t)}(x)$. El proceso estocástico $X(t)$ se dice que es **estacionario en sentido estricto** o **estrictamente estacionario** si la función de densidad de probabilidad conjunta es invariante bajo desplazamientos del origen de tiempos, es decir, se cumple la ecuación (2.54) para cualquier conjunto finito de instantes $\{t_j\}$ con $j = 1, 2, \dots, k$ y para cualquier desplazamiento temporal T [10,11].

$$f_{X(t)}(x) = f_{X(t+T)}(x) \quad (2.54)$$

El vector aleatorio $X(t)$ se obtiene observando el proceso estocástico $X(t)$ en los instantes de tiempo t_1, t_2, \dots, t_k . De forma análoga el vector $X(t+T)$ se obtiene observando el proceso estocástico $X(t)$ en los instantes de tiempo $(t_1 + T), (t_2 + T) \dots (t_k + T)$.

Los procesos estocásticos estacionarios son de mucha importancia por dos razones:

1. Se encuentran muy a menudo en la práctica de forma exacta o aproximada. En general no es necesario que el proceso estocástico sea estacionario en todo el intervalo $-\infty < t < \infty$, sino sólo en el intervalo particular de observación.
2. Muchas propiedades importantes de los procesos estocásticos se encuentran a partir de sus momentos de orden 1 y 2. Por lo tanto, es muy fácil desarrollar una teoría simple pero muy útil para este tipo de procesos.

Los procesos estocásticos que no cumplen la ecuación (2.55) para cualquier conjunto finito de instantes $\{t_j\}$ con $j = 1, 2, \dots, k$, y para cualquier desplazamiento temporal T , se dicen que son no estacionarios.

2.3.3 Media, Correlación y Covarianza

En muchos casos no es posible determinar la distribución de probabilidad de un proceso estocástico. Nos debemos conformar con una descripción parcial de la distribución del proceso. La media, correlación y covarianza nos dan una descripción a groso modo de nuestro proceso estocástico.

Sea un proceso estocástico real $X(t)$. Se define la media como la función determinística del tiempo dada por la ecuación (2.55), donde E es el operador esperanza matemática y $X(t_k)$ es la variable aleatoria obtenida observando el proceso $X(t)$ en $t = t_k$ [10].

$$m_X(t_k) = E[X(t_k)] \tag{2.55}$$

Si la función de densidad de probabilidad de $X(t_k)$ es $f_{X(t_k)}(x)$, la media se puede calcular según la ecuación (2.56).

$$m_X(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t_k)}(x) dx \tag{2.56}$$

Se define la **autocorrelación** del proceso $X(t)$ como una función de dos variables temporales t_k y t_i dada por la ecuación (2.57) [10].

$$R_X(t_k, t_i) = E[X(t_k)X(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X(t_k), X(t_i)}(x, y) dx dy \tag{2.57}$$

En el caso de que $t_k = t_i$, se tiene el **valor cuadrático medio** del proceso estocástico que es una función de una variable temporal como puede verse en la ecuación (2.58).

$$R_X(t_k, t_k) = E[X^2(t_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X(t_k)}(x) dx \quad (2.58)$$

Se define la **autocovarianza** del proceso $X(t)$ como una función de dos variables temporales t_k y t_i dada por la ecuación (2.59).

$$\begin{aligned} K_X(t_k, t_i) &= E[(X(t_k) - m_X(t_k))(X(t_i) - m_X(t_i))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X(t_k))(y - m_X(t_i)) f_{X(t_k), X(t_i)}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (2.59)$$

En el caso de que $t_k = t_i$ se tiene la **varianza** del proceso estocástico, que es una función de una variable temporal como puede verse en la ecuación (2.60).

$$\begin{aligned} \text{Var}[X(t_k)] &= \sigma_X^2(t_k) = K_X(t_k, t_k) \\ &= E\left[\left(X(t_k) - m_X(t_k)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X(t_k))^2 f_{X(t_k)}(x) dx \end{aligned} \quad (2.60)$$

Se puede deducir de las ecuaciones (2.57) y (2.59) una relación útil dada por la ecuación (2.61).

$$K_X(t_k, t_i) = R_X(t_k, t_i) - m_X(t_k)m_X(t_i) \quad (2.61)$$

En el caso de que la media del proceso estocástico sea siempre cero, la función de autocorrelación y la de autocovarianza coincidirán.

Además de las ecuaciones (2.58) y (2.60) se puede deducir otra relación útil dada por la ecuación (2.62).

$$\sigma_X^2(t_k) = E[X^2(t_k)] - m_X^2(t_k) \quad (2.62)$$

En el caso de que la media del proceso estocástico sea siempre cero, la varianza y el valor cuadrático medio coincidirán.

Para procesos estocásticos **estacionarios en sentido estricto**¹, las expresiones anteriores toman formas simplificadas. La media no depende del instante de tiempo considerado, sino que es constante, según la ecuación (2.63).

$$m_X(t_k) = m_X \quad \forall t_k \quad (2.63)$$

La autocorrelación depende sólo de la diferencia de tiempos $\tau = t_k - t_i$ según la ecuación (2.64).

$$R_X(t_k, t_i) = R_X(t_k - t_i) = R_X(\tau) \quad (2.64)$$

Igual ocurre con la autocovarianza que solo depende de la diferencia de tiempos $\tau = t_k - t_i$ según la ecuación (2.65).

$$K_X(t_k, t_i) = K_X(t_k - t_i) = K_X(\tau) \quad (2.65)$$

Las tres condiciones anteriores son necesarias pero no suficientes para que un proceso estocástico sea estacionario en sentido estricto. Para un proceso que cumple lo anterior y que no es estacionario en sentido estricto se dice que es **estacionario en sentido amplio**². La estacionariedad en sentido amplio es una condición más débil que la estacionariedad en sentido estricto. Todo proceso estacionario en sentido estricto lo es también en sentido amplio pero no al revés.

Entonces en el caso estacionario la autocorrelación se puede calcular utilizando la ecuación (2.66), mientras que la autocovarianza se calcula usando la ecuación (2.67).

$$R_X(\tau) = E[X(t + \tau)X(t)] = E[X(t)X(t - \tau)] \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} K_X(\tau) &= E[(X(t + \tau) - m_X)(X(t) - m_X)] \\ &= E[(X(t) - m_X)(X(t - \tau) - m_X)] \end{aligned} \quad (2.67)$$

Se puede deducir de las ecuaciones (2.66) y (2.67) una relación útil dada por la ecuación (2.68).

$$K_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2 \quad (2.68)$$

En el caso de que la media del proceso estocástico sea cero, la función de autocorrelación y la de autocovarianza coincidirán.

¹Proceso en el cual se necesitan evaluar, tanto sus momentos iniciales como centrales para describirlo.

²Proceso en el cual sólo necesitamos evaluar su función media, su varianza y su función de covarianza para describirlo.

Considerando la ecuación (2.68) en el origen se obtiene la ecuación (2.69).

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - m_X^2 \quad (2.69)$$

En el caso de que la media del proceso estocástico sea cero, la varianza y el valor cuadrático medio coincidirán.

La función de autocorrelación en el caso de estacionariedad en sentido amplio tiene las siguientes propiedades [10,11]:

1. El valor cuadrático medio del proceso estocástico es una constante que no depende del instante considerado y se puede obtener a partir del valor de la autocorrelación en el origen según la ecuación (2.70).
Es equivalente a la potencia media de la señal.

$$R_X(0) = E[X^2] \quad \text{no depende del tiempo} \quad (2.70)$$

2. La autocorrelación es una función par de τ según la ecuación (2.71).

$$R_X(\tau) = R_X(-\tau) \quad (2.71)$$

3. La autocorrelación esta acotada por el valor en el origen, según la ecuación (2.72).

$$R_X(0) \geq |R_X(\tau)| \quad (2.72)$$

La función de autocovarianza en el caso de estacionariedad en sentido amplio tiene las siguientes propiedades:

1. La varianza del proceso estocástico es una constante que no depende del instante considerado y se puede obtener a partir del valor de la autocovarianza en el origen según la ecuación (2.73). Es equivalente a la **potencia media AC** de la señal.

$$K_X(0) = \sigma_X^2 \quad \text{no depende del tiempo} \quad (2.73)$$

2. La autocovarianza es una función par de τ según la ecuación (2.74).

$$K_X(\tau) = K_X(-\tau) \quad (2.74)$$

3. La autocovarianza esta acotada por el valor en el origen, según la ecuación (2.75).

$$K_X(0) \geq |K_X(\tau)| \quad (2.75)$$

4. Existe una función de Covarianza Normalizada $R_X(\tau)$ (2.76).

$$\frac{K_X(\tau)}{K_X(0)} = \frac{K_X(\tau)}{\sigma^2(t)} = \frac{K_X(\tau)}{\sigma_X^2} = R_X(\tau) \quad (2.76)$$

El significado físico de la autocovarianza nos da la interdependencia de dos variables aleatorias obtenidas a partir de un proceso estocástico $X(t)$ en dos instantes de tiempo separados τ . Si el proceso estocástico $X(t)$ cambia muy rápidamente con el tiempo, mas rápidamente decrece la función de autocovarianza a partir del máximo $K_X(0)$. En el caso de que el proceso cambie lentamente, la autocorrelación decrece más lentamente [10].

El tiempo de descenso se caracteriza por τ_c o **tiempo de correlación**. Se define para un proceso estacionario en sentido amplio $X(t)$ como el tiempo que pasa hasta que el valor de la autocovarianza $K_X(\tau)$ tiene un valor no mayor del 1% de su valor máximo $K_X(0)$ (2.77) [10].

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_X(\tau)| d\tau \quad (2.77)$$

Sean dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ cuyas funciones de autocorrelación son $R_X(t_1, t_2)$ y $R_Y(t_1, t_2)$ respectivamente. Se definen las funciones de **correlación cruzada** de $X(t)$ e $Y(t)$ según las ecuaciones (2.78) y (2.79) [10].

$$R_{XY}(t, u) = E[X(t)Y(u)] \quad (2.78)$$

$$R_{YX}(t, u) = E[Y(t)X(u)] \quad (2.79)$$

En el caso de que $t = u$ las dos funciones de correlación cruzada coinciden y son igual a la correlación de los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ que depende del instante de tiempo considerado según la ecuación (2.80).

$$R_{XY}(t, t) = R_{YX}(t, t) = Corr[X(t), Y(t)] \quad (2.80)$$

Todas las propiedades de correlación se pueden colocar de forma matricial según la ecuación (2.81). Dicha matriz se denomina **matriz de correlación** de los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ y es una matriz de funciones de dos dimensiones temporales [10].

$$R(t, u) = \begin{bmatrix} R_X(t, u) & R_{XY}(t, u) \\ R_{YX}(t, u) & R_Y(t, u) \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

En el caso de que $t = u$ la matriz de correlación tiene la expresión de la ecuación (2.82). En este caso es una matriz de funciones de una variable temporal y es simétrica.

$$R(t, t) = \begin{bmatrix} E[X^2(t)] & \text{Corr}[X(t), Y(t)] \\ \text{Corr}[X(t), Y(t)] & E[Y^2(t)] \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Si la matriz de correlación puede ponerse en función de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$ la ecuación (2.81) pasa a ser la ecuación (2.83), la cual es una matriz de funciones de una variable temporal [10].

$$R(\tau) = \begin{bmatrix} R_X(\tau) & R_{XY}(\tau) \\ R_{YX}(\tau) & R_Y(\tau) \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

En este caso $X(t)$ e $Y(t)$ son estacionarios en sentido amplio puesto que las funciones de autocorrelación dependen de τ . Además resulta que las funciones de correlación cruzada dependen sólo de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$. En este caso se dice que los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son estacionarios en **sentido amplio de forma conjunta**.

La matriz de correlación de la ecuación (2.83) considerada en el origen, tiene la forma de la ecuación (2.84) que es una matriz de constantes y simétrica. Esta matriz es la versión estacionaria de la ecuación (2.82).

$$R(t, t) = \begin{bmatrix} E[X^2] & \text{Corr}[X, Y] \\ \text{Corr}[X, Y] & E[Y^2] \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

La función de correlación cruzada en el caso estacionario cumple las siguientes propiedades [10]:

1. Se cumple la ecuación (2.85).

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \quad (2.85)$$

2. El valor en el origen de la correlación cruzada es igual a la correlación que para el caso estacionario es una constante, según la ecuación (2.86).

$$R_{XY}(0) = R_{YX}(0) = \text{Corr}[X, Y] \quad \text{no depende del tiempo} \quad (2.86)$$

Sean dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ cuyas funciones de autocovarianza son $K_X(t, u)$ y $K_Y(t, u)$ respectivamente.

Se definen las funciones de **covarianza cruzada** de $X(t)$ e $Y(t)$ según las ecuaciones (2.87) y (2.88).

$$K_{XY}(t, u) = E[(X(t) - m_X(t))(Y(u) - m_Y(u))] \quad (2.87)$$

$$K_{YX}(t, u) = E[(Y(t) - m_Y(t))(X(u) - m_X(u))] \quad (2.88)$$

En el caso de que $t = u$ las dos funciones de covarianza cruzada coinciden y son igual a la covarianza de los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ que depende del instante de tiempo considerado según la ecuación (2.89).

$$\begin{aligned} K_{XY}(t, t) &= K_{YX}(t, t) = Cov[X(t), Y(t)] \\ &= E[(X(t) - m_X(t))(Y(t) - m_Y(t))] \end{aligned} \quad (2.89)$$

Todas las propiedades de covarianza se pueden colocar de forma matricial según la ecuación (2.90).

$$K(t, u) = \begin{bmatrix} K_X(t, u) & K_{XY}(t, u) \\ K_{YX}(t, u) & K_Y(t, u) \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Dicha matriz se denomina **matriz de covarianza** de los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ y es una matriz de funciones de dos dimensiones temporales.

En el caso de que $t = u$ la matriz de covarianza tiene la expresión de la ecuación (2.91). En este caso es una matriz de funciones de una variable temporal y es simétrica.

$$K(t, t) = \begin{bmatrix} \sigma_X^2(t) & Cov[X(t), Y(t)] \\ Cov[X(t), Y(t)] & \sigma_Y^2(t) \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Si la matriz de covarianza puede ponerse en función de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$ la ecuación (2.90) pasa a ser la ecuación (2.92), que es una matriz de funciones de una variable temporal.

$$K(\tau) = \begin{bmatrix} K_X(\tau) & K_{XY}(\tau) \\ K_{YX}(\tau) & K_Y(\tau) \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

En este caso $X(t)$ e $Y(t)$ son estacionarios en sentido amplio, probado que la media sea constante, puesto que las funciones de autocovarianza dependen de τ . Además resulta que las funciones de covarianza cruzada dependen solo de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$, es decir, los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son estacionarios en sentido amplio de forma conjunta.

La matriz de covarianza de la ecuación (2.92) particularizada en el origen tiene la expresión de la ecuación (2.93) que es una matriz de constantes y simétrica. Esta matriz es la versión estacionaria de la ecuación (2.91).

$$K(0) = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & Cov[X, Y] \\ Cov[X, Y] & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

La función de covarianza cruzada en el caso estacionario cumple las siguientes propiedades:

1. Se cumple la ecuación (2.94).

$$K_{XY}(\tau) = K_{XY}(-\tau) \quad (2.94)$$

2. El valor en el origen de la covarianza cruzada es igual a la covarianza que para el caso estacionario es una constante, según la ecuación (2.95).

$$K_{XY}(0) = K_{YX}(0) = Cov[X, Y] \quad \text{no depende del tiempo} \quad (2.95)$$

La relación entre la covarianza cruzada y la correlación cruzada para dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ puede verse en las ecuaciones (2.96) y (2.97).

$$K_{XY}(t, u) = R_{XY}(t, u) - m_X(t)m_Y(u) \quad (2.96)$$

$$K_{YX}(t, u) = R_{YX}(t, u) - m_Y(t)m_X(u) \quad (2.97)$$

En el caso de que algunas de las medias o las dos sean siempre cero la covarianza cruzada y la correlación cruzada coinciden.

Las ecuaciones (2.96) y (2.97) para el caso en que $t = u$ dan como resultado la ecuación (2.98).

$$Cov[X(t), Y(t)] = Corr[X(t), Y(t)] - m_X(t)m_Y(t) \quad (2.98)$$

En el caso de que alguna de las medias o las dos sean siempre cero la covarianza y la correlación coinciden.

En el caso estacionario en sentido amplio la relación entre la covarianza cruzada y la correlación cruzada puede verse en las ecuaciones (2.99) y (2.100).

$$K_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - m_X m_Y \quad (2.99)$$

$$K_{YX}(\tau) = R_{YX}(\tau) - m_Y m_X \quad (2.100)$$

En el caso de que algunas de las medias o las dos sean cero la covarianza cruzada y la correlación cruzada coinciden.

Las ecuaciones (2.99) y (2.100) particularizadas en el origen dan como resultado la ecuación (2.101).

$$Cov[X, Y] = Corr[X, Y] - m_X m_Y \quad (2.101)$$

En el caso de que alguna de las medias o las dos sean cero la covarianza y la correlación coinciden.

También puede ponerse una expresión que relaciona la matriz de covarianza y la matriz de correlación según la ecuación (2.102).

$$K(t, u) = R(t, u) = \begin{bmatrix} m_X(t)m_X(u) & m_X(t)m_Y(u) \\ m_Y(t)m_X(u) & m_Y(t)m_Y(u) \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

La ecuación (2.102) en el caso estacionario, es la ecuación (2.103).

$$K(\tau) = R(\tau) = \begin{bmatrix} m_X^2 & m_X m_Y \\ m_Y m_X & m_Y^2 \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

En el caso de que alguna de las medias o las dos sean siempre cero, la matriz de correlación y la matriz de covarianza serán iguales.

2.4 DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

2.4.1 Definición

Por definición la respuesta al impulso de un sistema es la transformada de Fourier de la función de transferencia según la ecuación (2.104) [10].

$$h(\tau_1) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi f \tau_1} df \quad (2.104)$$

La densidad espectral de potencia es otro parámetro muy importante que nos ayuda a describir la propiedad estadística de los procesos aleatorios. Este parámetro define como se lleva a cabo la distribución de potencia en cada armónico del proceso aleatorio en función de la frecuencia.

La función de autocovarianza y la densidad espectral de potencia están relacionadas por la transformada de Fourier. A esta relación se le conoce como teorema de Wiener-Khintchine (2.105).

$$K_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

(2.105)

Es importante que la función de Densidad espectral de potencia $S_X(\omega)$, represente la distribución de potencia de cada realización del proceso aleatorio.

2.4.2 Propiedades

1. La densidad espectral de potencia $S_X(f)$ y la función de autocorrelación $R_X(\tau)$ de un proceso estacionario en sentido amplio forman un par transformado de Fourier según las ecuaciones (2.106) y (2.107). Esas ecuaciones reciben en nombre de **relaciones de Wiener-Khintchine** y son similares a las definidas para señales de potencia periódicas. Por lo tanto, si se conoce la densidad espectral de potencia se puede calcular la autocorrelación y viceversa. Es decir la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia son equivalentes: una nos da la representación del proceso en el dominio del tiempo y la otra en el dominio de la frecuencia. En la práctica se utiliza más la densidad espectral de potencia [10,11].

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

(2.106)

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

(2.107)

2. El valor a frecuencia cero de la densidad espectral de potencia de un proceso es igual al área bajo la curva de la autocorrelación según la ecuación (2.108). Se demuestra de forma inmediata haciendo $f = 0$ en la ecuación (2.106) [10,11].

$$S_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau$$

(2.108)

3. El valor cuadrático medio de un proceso es igual al área bajo la curva de la densidad espectral de potencia según la ecuación (2.109). Se demuestra de forma inmediata haciendo $\tau = 0$ en la ecuación (2.107) y teniendo en cuenta que $R_X(0) = E[X^2]$ [10,11].

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df \quad (2.109)$$

4. La densidad espectral de potencia es una función par de la frecuencia según la ecuación (2.110) [10,11].

$$S_X(-f) = S_X(f) \quad (2.110)$$

Para probar esta propiedad se sustituye f por $-f$ en la ecuación (2.106) dando lugar a la ecuación (2.111).

$$S_X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.111)$$

Haciendo el cambio de variable τ por $-\tau$ en la ecuación (2.111) y teniendo en cuenta que $R_X(\tau)$ es una función par, se tiene la ecuación (2.112), con lo que queda demostrada la propiedad.

$$S_X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = S_X(f) \quad (2.112)$$

5. La densidad espectral de potencia es siempre una función definida no negativa según la ecuación (2.113) [10,11].

$$S_X(f) \geq 0 \text{ para } f \quad (2.113)$$

Para probar esta propiedad definimos un sistema cuya respuesta en amplitud viene dada por la ecuación (2.114).

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & |f \pm f_c| < \frac{1}{2} \Delta f \\ 0 & |f \pm f_c| > \frac{1}{2} \Delta f \end{cases} \quad (2.114)$$

También puede verse gráficamente en la Figura 2.3, donde Δf se supone que es muy pequeño [10].

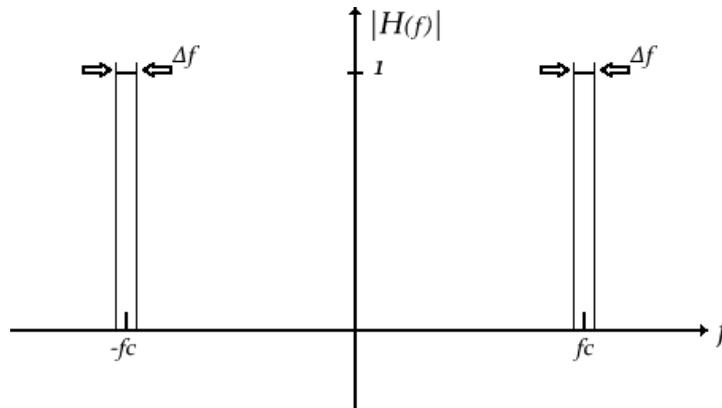


Figura 2.3. Respuesta en amplitud del sistema $H(f)$.

Si $X(t)$ es la señal de entrada a ese sistema e $Y(t)$ la salida, el valor cuadrático medio de la salida viene dado por la ecuación (2.115).

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_X(f) df \quad (2.115)$$

En los intervalos $|f \pm f_c| < \frac{1}{2} \Delta f$, donde la respuesta en amplitud del sistema es un valor unitario, puesto que Δf se supone que es muy pequeño se puede hacer la aproximación dada por la ecuación (2.115).

$$S_X(f) \cong S_X(f_c) \quad |f \pm f_c| < \frac{1}{2} \Delta f \quad (2.116)$$

Teniendo en cuenta ahora las ecuaciones (2.115) y (2.116) el valor cuadrático medio de la salida viene dado por la ecuación (2.117) [10].

$$E[Y^2] \cong 2\Delta f S_X(f_c) \quad \forall f_c \quad (2.117)$$

Puesto que el valor cuadrático medio representa la potencia media de la salida y la potencia siempre toma valores positivos, y puesto que Δf es positivo de la ecuación (2.117) se deduce que $S_X(f_c) \geq 0$, y como eso se cumple para cualquier frecuencia f_c queda demostrado que la densidad espectral de potencia es una función no negativa de la frecuencia.

2.5 TRANSMISIÓN DE UNA SEÑAL ALEATORIA A TRAVÉS DE UN SISTEMA LINEAL INVARIANTE EN EL TIEMPO

Supongamos que un proceso estocástico $X(t)$ se aplica a la entrada de un sistema LTI (Linear Time-Invariant) de respuesta al impulso $h(t)$, dando lugar a la salida otro proceso estocástico $Y(t)$, según la Figura 2.4 [10].

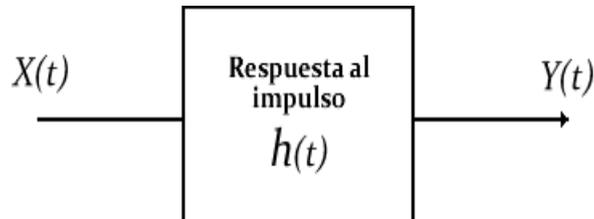


Figura 2.4. Transmisión de una señal aleatoria a través de un sistema LTI.

En general es difícil conocer la función de distribución de $Y(t)$, incluso cuando la función de distribución de $X(t)$ está completamente especificada para $-\infty < t < \infty$.

Lo que se pretende entonces es determinar la media y la autocorrelación del proceso de salida a partir de la media y la autocorrelación del proceso de entrada.

La media de la salida se puede calcular según la ecuación (2.118), puesto que el proceso de salida se puede calcular a través de la integral de convolución en el dominio del tiempo del proceso de entrada y la respuesta al impulso del sistema [10].

$$m_Y(t) = E[Y(t)] = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t - \tau) d\tau \right] \quad (2.118)$$

Suponiendo que la media de $X(t)$ es finita para todo t y que el sistema es estable, se puede intercambiar el orden de la esperanza matemática y la integral obteniéndose la expresión de la ecuación (2.119).

Es decir la media de la señal de salida es igual a la convolución de la media de la señal de entrada con la respuesta al impulso del sistema [10].

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) E[X(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) m_X(t - \tau) d\tau = h(t) * m_X(t) \end{aligned} \quad (2.119)$$

En el caso de que $X(t)$ sea estacionario en sentido amplio, la media del proceso de entrada no depende del tiempo, sino que es una constante.

En ese caso la ecuación (2.119) pasa a ser la ecuación (2.120) [10].

$$m_Y = m_X = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = H(0)m_X \quad (2.120)$$

La media de la señal de salida también es constante e igual al producto de la media de la señal de entrada con el valor de la función de transferencia del sistema en el origen.

Veamos que ocurre ahora con la autocorrelación de la señal de salida $Y(t)$, con la ecuación (2.121) [10].

$$\begin{aligned} R_Y(t, u) &= E[Y(t)Y(u)] \\ &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) X(t - \tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) X(u - \tau_2) d\tau_2 \right] \end{aligned} \quad (2.121)$$

Si el valor cuadrático medio de la señal de entrada es finito para cada instante de tiempo t y el sistema es estable se puede intercambiar el orden de la esperanza matemática y las integrales con respecto a τ_1 y τ_2 y se realiza el siguiente desarrollo (2.122) [10].

$$\begin{aligned} R_Y(t, u) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 h(\tau_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 h(\tau_2) E[X(t - \tau_1)X(u - \tau_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 h(\tau_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 h(\tau_2) R_X(t - \tau_1, u - \tau_2) \\ &= R_X(t, u) * h(t) * h(u) \end{aligned} \quad (2.122)$$

La autocorrelación de la señal de salida se puede calcular como la convolución de la autocorrelación de la señal de entrada con la respuesta al impulso en t y con la respuesta al impulso en u .

En el caso de que el proceso estocástico de la entrada sea estacionario en sentido amplio su autocorrelación va a depender de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$ y por lo tanto la ecuación (2.122) pasa a ser la ecuación (2.123). Donde se observa que, la autocorrelación de la señal de salida se puede calcular como la convolución de la autocorrelación de la señal de entrada con la respuesta al impulso en τ y con la respuesta al impulso en $-\tau$ [10].

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \end{aligned} \quad (2.123)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.120) y (2.123) resulta que la media de la señal de salida es constante y la función de autocorrelación depende únicamente de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$, se puede deducir entonces que si un proceso estocástico estacionario en sentido amplio es la entrada a un sistema LTI y estable, la salida va a ser otro proceso estacionario en sentido amplio cuya media viene dada por la ecuación (2.120) y cuya función de autocorrelación por la ecuación (2.123).

Si lo que se desea ahora es calcular la correlación cruzada entre la señal de entrada $X(t)$ y la señal de salida $Y(t)$ se tendrá la ecuación (2.124).

$$R_{XY}(t, u) = E[X(t)Y(u)] = E\left[X(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)X(u - \tau_1)d\tau_1\right] \quad (2.124)$$

Si el valor cuadrático medio de la señal de entrada es finito para cada instante de tiempo t y el sistema es estable se puede intercambiar el orden de la esperanza matemática y la integral con respecto a τ dando el desarrollo de la ecuación (2.125). La correlación cruzada de la señal de entrada con la de salida se puede calcular como la convolución de la autocorrelación de la señal de entrada con la respuesta al impulso en u .

$$\begin{aligned} R_{XY}(t, u) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)E[X(t)X(u - \tau_1)]d\tau_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)R_X(t, u - \tau_1)d\tau_1 = R_X(t, u) * h(u) \end{aligned} \quad (2.125)$$

En el caso de que se quiera la correlación cruzada de la señal de salida con la de la entrada siguiendo el mismo razonamiento que para las ecuaciones (2.124) y (2.125), se tiene la ecuación (2.126). La correlación cruzada de la señal de salida con la de entrada se puede calcular como la convolución de la autocorrelación de la señal de entrada con la respuesta al impulso en t .

$$R_{YX}(t, u) = R_X(t, u) * h(t) \quad (2.126)$$

Comparando la ecuación (2.122) con la ecuación (2.125) se deduce la ecuación (2.127). La autocorrelación de la señal de salida de un sistema se puede calcular como la convolución de la correlación cruzada entrada salida con la respuesta al impulso del sistema en t .

$$R_Y(t, u) = R_{XY}(t, u) * h(t) \quad (2.127)$$

Si ahora se compara la ecuación (2.122) con la ecuación (2.127) se deduce la ecuación (2.128). La autocorrelación de la señal de salida de un sistema se puede calcular como la convolución de la correlación cruzada salida entrada con la respuesta al impulso del sistema en u .

$$R_Y(t, u) = R_{YX}(t, u) * h(u) \quad (2.128)$$

En el caso de que el proceso de entrada sea estacionario en sentido amplio la ecuación (2.125) pasa a ser la ecuación (2.129).

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)R_X(\tau + \tau_1)d\tau_1 = R_X(\tau) * h(-\tau) \quad (2.129)$$

La correlación cruzada entrada salida se puede calcular como la convolución de la autocorrelación de la señal de entrada con la respuesta al impulso en $-\tau$. Como puede verse el proceso de entrada y el de salida son conjuntamente estacionarios en sentido amplio puesto que su correlación cruzada depende únicamente de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$.

Expresiones similares a las ecuaciones (2.126), (2.127) y (2.128) para el caso estacionario en sentido amplio son la ecuaciones (2.130), (2.131) y (2.132), respectivamente.

$$R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) \quad (2.130)$$

$$R_Y(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau) \quad (2.131)$$

$$R_Y(\tau) = R_{YX}(\tau) * h(-\tau) \quad (2.132)$$

A partir de la ecuación (2.122) haciendo $t = u$ se puede llegar a una expresión para el valor cuadrático medio de la señal de salida dado por la ecuación (2.133) que es una función del tiempo.

$$E[Y^2(t)] = R_Y(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(t - \tau_1, t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \quad (2.133)$$

En el caso estacionario en sentido amplio la ecuación (2.133) pasa a ser la ecuación (2.134).

En este caso el valor cuadrático medio de la señal de salida es constante.

$$E[Y^2] = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1d\tau_2 \quad (2.134)$$

A partir de la ecuación (2.125) o de la ecuación (2.126) haciendo $t = u$ se puede llegar a una expresión para la correlación de la señal de entrada con la de salida. Viene dada por la ecuación (2.135):

$$Corr[X(t), Y(t)] = R_{XY}(t, t) = R_{YX}(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)R_X(t, t - \tau_1)d\tau_1. \quad (2.135)$$

En el caso estacionario en sentido amplio la ecuación (2.135) pasa a ser la ecuación (2.136). En este caso la correlación entrada salida es constante.

$$Corr[X, Y] = R_{XY}(0) = R_{YX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) R_X(\tau_1) d\tau_1 \quad (2.136)$$

Si lo que se desea es trabajar con autocovarianzas y correlaciones cruzadas, si se definen los procesos $X'(t) = X(t) - m_X(t)$ e $Y'(t) = Y(t) - m_Y(t)$, la autocorrelación de $X'(t)$ y de $Y'(t)$ es la autocovarianza de $X(t)$ e $Y(t)$, y la correlación cruzada de $X'(t)$ e $Y'(t)$ es la covarianza cruzada de $X(t)$ e $Y(t)$.

La ecuación equivalente a la (2.122) para la autocovarianza es la ecuación (2.137). La autocovarianza de la señal de salida es igual a la autocovarianza de la señal de entrada convolucionada con la respuesta al impulso en t y la respuesta al impulso en u .

$$K_Y(t, u) = K_X(t, u) * h(t) * h(u) \quad (2.137)$$

Si el proceso de entrada al sistema es estacionario en sentido amplio, la ecuación (2.137) pasa a ser la ecuación (2.138). La autocovarianza de la señal de salida es igual a la autocovarianza de la señal de entrada convolucionada con la respuesta al impulso en τ y la respuesta al impulso en $-\tau$. Como era de esperar, puesto que el proceso de salida es estacionario en sentido amplio depende de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$.

$$K_Y(\tau) = K_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \quad (2.138)$$

La covarianza cruzada tiene expresiones similares a las de la correlación cruzada, ecuaciones (2.125) y (2.126), son las ecuaciones (2.139) y (2.140). La covarianza cruzada entrada salida es igual a la convolución de la autocovarianza de la entrada con la respuesta al impulso en u .

La covarianza cruzada salida entrada es igual a la convolución de la autocovarianza de la entrada con la respuesta al impulso en t .

$$K_{XY}(t, u) = K_X(t, u) * h(u) \quad (2.139)$$

$$K_{YX}(t, u) = K_X(t, u) * h(t) \quad (2.140)$$

Comparando las ecuaciones (2.137) y (2.139) se puede deducir la ecuación (2.141). La autocovarianza de la salida es igual a la convolución de la covarianza cruzada entrada salida con la respuesta al impulso en t .

$$K_Y(t, u) = K_{XY}(t, u) * h(t) \quad (2.141)$$

Si ahora se comparan las ecuaciones (2.137) y (2.140) se puede deducir la ecuación (2.142). La autocovarianza de la salida es igual a la convolución de la covarianza cruzada salida entrada con la respuesta al impulso en u .

$$K_Y(t, u) = K_{YX}(t, u) * h(u) \quad (2.142)$$

Las ecuaciones (2.139) y (2.140) para el caso estacionario son las ecuaciones (2.143) y (2.144). La covarianza cruzada entrada salida es igual a la convolución de la autocovarianza de la entrada con la respuesta al impulso en $-\tau$. La covarianza cruzada salida entrada es igual a la convolución de la autocovarianza de la entrada con la respuesta al impulso en τ . Como era de esperar, puesto que los procesos de entrada y salida son conjuntamente estacionarios en sentido amplio, las covarianzas cruzadas dependen de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$.

$$K_{XY}(\tau) = K_X(\tau) * h(-\tau) \quad (2.143)$$

$$K_{YX}(\tau) = K_X(\tau) * h(\tau) \quad (2.144)$$

Comparando las ecuaciones (2.138) y (2.143) se puede deducir la ecuación (2.145). La autocovarianza de la salida es igual a la convolución de la covarianza cruzada entrada salida con la respuesta al impulso en τ .

$$K_Y(\tau) = K_{XY}(\tau) * h(\tau) \quad (2.145)$$

Si ahora se comparan las ecuaciones (2.138) y (2.144) se puede deducir la ecuación (2.146). La autocovarianza de la salida es igual a la convolución de la covarianza cruzada salida entrada con la respuesta al impulso en $-\tau$.

$$K_Y(\tau) = K_{YX}(\tau) * h(-\tau) \quad (2.146)$$

Particularizando la ecuación (2.137) para cuando $t = u$ se tiene una expresión para la varianza de la señal de salida que viene dada por la ecuación (2.147). Es una función del tiempo.

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= \text{Var}[Y(t)] = K_Y(t, t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) K_X(t - \tau_1, t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.147)$$

Si se particulariza la ecuación (2.139) o la ecuación (2.138) para cuando $t = u$ se tiene una expresión para la covarianza de la señal de entrada con la señal de salida que viene dada por la ecuación (2.148). Es una función del tiempo.

$$\text{Cov}[X(t), Y(t)] = K_{XY}(t, t) = K_{YX}(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) K_X(t, t - \tau_1) d\tau_1 \quad (2.148)$$

Si estamos en el caso estacionario en sentido amplio, la expresión de la varianza es la ecuación (2.149) y la de la covarianza es la ecuación (2.150). Ambas son constantes.

$$\sigma_Y^2 = \text{Var}[Y] = K_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)K_X(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1d\tau_2 \quad (2.149)$$

$$\text{Cov}[X, Y] = K_{XY}(0) = K_{YX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)K_X(\tau_1)d\tau_1 \quad (2.150)$$

Se ha considerado la caracterización de procesos estocásticos estacionarios en sentido amplio y su transmisión a través de sistemas LTI en el dominio del tiempo. Vamos a verlo ahora en el dominio de la frecuencia.

Suponiendo estacionariedad en sentido amplio, el valor cuadrático medio de la señal de salida se podía calcular por la ecuación (2.134). Juntando esta ecuación con la ecuación (2.104) se tiene el desarrollo de la ecuación (2.151) [10].

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi f\tau_1}df \right] h(\tau_2)R_X(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dfH(f) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2h(\tau_2) \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau_2 - \tau_1)e^{j2\pi f\tau_1}d\tau_1 \end{aligned} \quad (2.151)$$

Si en la última integral de la ecuación (2.151) se hace el cambio de variable $\tau = \tau_2 - \tau_1$, se tendrá la ecuación (2.152) [10].

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} dfH(f) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2h(\tau_2)e^{j2\pi f\tau_2} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (2.152)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.153), la ecuación (2.152) se puede poner según la ecuación (2.154) [10].

$$H * (f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)e^{j2\pi f\tau_2}d\tau_2 \quad (2.153)$$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (2.154)$$

Si llamamos $S_X(f)$ a la transformada de Fourier de la función de autocorrelación dada por la ecuación (2.155), la ecuación (2.154) pasará a ser la ecuación (2.156) [10].

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.155)$$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_X(f) df \quad (2.156)$$

La función $S_X(f)$ se denomina **densidad espectral de potencia** del proceso estocástico $X(t)$. Tiene unidades de W/Hz. La ecuación (2.156) nos dice que el valor cuadrático medio o la potencia media de la salida de un sistema LTI estable como respuesta a un proceso estocástico de entrada es igual al área a lo largo de todas las frecuencias del producto de la densidad espectral de potencia de la entrada multiplicada por el módulo al cuadrado de la función de transferencia del sistema [10].

2.5.1 Relación entre Densidades Espectrales a la entrada y salida de un Sistema LTI

Sea $S_Y(f_e)$ la densidad espectral de potencia de una señal $Y(t)$ salida de un sistema LTI cuya función de transferencia es $H(f)$ y cuya entrada sea el proceso $X(t)$ con densidad espectral de potencia $S_X(f_e)$. La densidad espectral de potencia de la señal de salida se puede calcular utilizando la ecuación (2.106) y la ecuación (2.124) según la ecuación (2.157) [10].

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2) e^{-j2\pi f\tau} d\tau_1 d\tau_2 d\tau \end{aligned} \quad (2.157)$$

Haciendo el cambio de variable $\tau_0 = \tau - \tau_1 + \tau_2$ en la ecuación (2.157) se obtiene la ecuación (2.158) [10].

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau_0) e^{-j2\pi f\tau_0} e^{-j2\pi f\tau_1} e^{j2\pi f\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_0 \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) e^{-j2\pi f\tau_1} d\tau_1}_{H(f)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) e^{j2\pi f\tau_2} d\tau_2}_{H^*(f)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau_0) e^{-j2\pi f\tau_0} d\tau_0}_{S_X(f)} \end{aligned} \quad (2.158)$$

De la última expresión de la ecuación (2.158) se deduce que la densidad espectral de potencia de la salida es igual al producto de la densidad espectral de la entrada por el módulo al cuadrado de la función de transferencia del sistema.

Es decir se tiene la ecuación (2.159) [10].

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) \quad (2.159)$$

De la ecuación (2.159) se podría deducir la ecuación (2.156) según la ecuación (2.160).

$$E[Y^2] = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_X(f) df \quad (2.160)$$

2.6 PROCESOS GAUSSIANOS

2.6.1 Definición

Vamos a observar un proceso $X(t)$ en un intervalo $0 < t < T$. Supongamos que ponderamos el proceso estocástico por una función conocida $g(t)$ e integramos el producto en el intervalo de observación. Esto nos define una variable aleatoria Y que depende de la realización del proceso estocástico y de la elección de $g(t)$, tal como se observa con la ecuación (2.161). Se dice que Y es un funcional lineal de $X(t)$ [10].

$$Y = \int_0^T g(t)X(t)dt \quad (2.161)$$

Hay que distinguir los conceptos de funcional lineal y función lineal. Una función lineal de variables aleatorias da como resultado otra variable aleatoria, según la ecuación (2.162). Para cada realización de las variables aleatorias X_i se tiene un valor concreto de la variable aleatoria Y [10].

$$Y = \sum_{i=1}^N a_i X_i \quad (2.162)$$

Sin embargo en el caso del funcional de la ecuación (2.161) el valor de la variable aleatoria Y depende del valor de $g(t)X(t)$ en el intervalo de observación $0 < t < T$.

Un funcional depende del valor de una o más funciones o procesos estocásticos en un intervalo o intervalos dados, en lugar del valor de un conjunto de variables. El dominio de definición de un funcional es un conjunto o espacio de funciones admisibles en lugar de una región de un espacio de coordenadas.

Si en la ecuación (2.161), $g(t)$ es una función tal que el valor cuadrático medio de la variable aleatoria Y es finito y su distribución estadística es Gaussiana para cualquier $g(t)$ y cualquier intervalo de observación, se dice entonces que el proceso $X(t)$ es Gaussiano. Por lo tanto un proceso $X(t)$ es Gaussiano, si cualquier funcional de $X(t)$ es una variable aleatoria Gaussiana.

Se dice que una variable aleatoria Y tiene distribución Gaussiana si su función densidad de probabilidad viene dada por la ecuación (2.163), donde m_Y es la media de la variable aleatoria y σ_Y^2 la varianza. Esta variable aleatoria queda completamente caracterizada estadísticamente con su media y varianza. En el caso en el que la media m_Y sea cero y la varianza σ_Y^2 sea unidad en la Figura 2.5 puede verse cual es el aspecto de la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria Gaussiana [10].

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} e^{\left[-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right]} \quad (2.163)$$

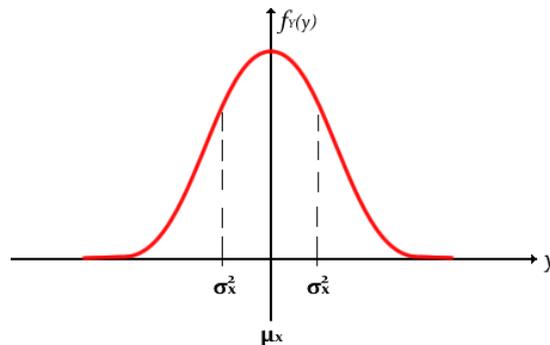


Figura 2.5. Aspecto de la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza unitaria.

El que un proceso sea Gaussiano tiene muchas ventajas. Se puede trabajar analíticamente de forma sencilla. Muy a menudo en la naturaleza se encuentran procesos físicos que se pueden modelar como procesos Gaussianos. El **teorema del límite central** nos justifica el uso de procesos Gaussianos para el caso de fenómenos que se pueden descomponer en muchos elementos independientes con iguales propiedades estadísticas [10].

2.6.2 Propiedades de los Procesos Gaussianos

1. Si se aplica un proceso Gaussiano $X(t)$ a la entrada de un sistema LTI estable, su salida $Y(t)$ es también Gaussiana. Por ejemplo en el de la Figura 2.6, la relación entre el proceso de entrada y el de salida viene dada por la integral de convolución en el dominio del tiempo según la ecuación (2.164) [10].

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)X(\tau)d\tau \quad \infty < t < \infty \quad (2.164)$$

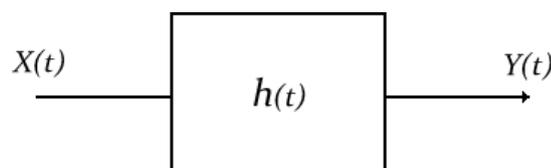


Figura 2.6. La salida de un sistema LTI estable a una entrada Gaussiana es Gaussiana.

Vamos a suponer que $h(t)$ es tal que el valor cuadrático medio de la señal de salida es finito en el intervalo $-\infty < t < \infty$. Para demostrar que el proceso estocástico de salida $Y(t)$ es Gaussiano habrá que demostrar que cualquier funcional de ese proceso es una variable aleatoria Gaussiana. Para ello sea $g_Y(t)$ una función arbitraria pero conocida definida en el intervalo $-\infty < t < \infty$ y sea un intervalo cualquiera $t_a < t < t_b$. Vamos a definir un funcional para el proceso de salida $Y(t)$, para esa función $g_Y(t)$ y ese intervalo según la ecuación (2.165). Z va a ser una variable aleatoria que habrá que demostrar que es Gaussiana. Entonces puesto que es un funcional cualquiera del proceso de salida, este será Gaussiano [10].

$$Z = \int_{t_a}^{t_b} g_Y(t)Y(t)dt \quad (2.165)$$

Sustituyendo la ecuación (2.164) en la ecuación (2.165) se tiene la ecuación (2.166).

$$\begin{aligned} Z &= \int_{t_a}^{t_b} g_Y(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)X(\tau)d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{t_a}^{t_b} g_Y(t)h(t-\tau) \right] X(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.166)$$

La integral dentro de los corchetes en la ecuación (2.166) es una función conocida de τ , puesto que $g_Y(t)$ es conocida y $h(t)$ también, por lo tanto si a dicha función de τ , la llamo $g(\tau)$ según la ecuación (2.167), la ecuación (2.166) pasa a ser la ecuación (2.168) [10].

$$g(\tau) = \int_{t_a}^{t_b} g_Y(t)h(t-\tau)dt \quad (2.167)$$

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)X(\tau)d\tau \quad (2.168)$$

La ecuación (2.168) es un funcional del proceso $X(t)$ para la función $g(t)$ definida por la ecuación (2.167) y para el intervalo $-\infty < t < \infty$. Puesto que se partía de que $X(t)$ era un proceso Gaussiano, entonces cualquier funcional de $X(t)$ es una variable aleatoria Gaussiana.

Por lo tanto como hemos puesto la variable Z como un funcional de $X(t)$, es una variable aleatoria Gaussiana. Ya que según la ecuación (2.165), Z era un funcional cualquiera del proceso $Y(t)$ y puesto que Z es Gaussiana, queda demostrado que $Y(t)$ es Gaussiano y que por lo tanto la salida de un sistema LTI estable para una señal Gaussiana es también Gaussiana.

Esta propiedad también se cumple si se supone para el sistema linealidad y estabilidad, pudiendo ser variante en el tiempo.

- Un conjunto de variables aleatorias muestra $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ de un proceso Gaussiano $X(t)$ son Gaussianas. Además este conjunto de variables aleatorias Gaussianas son también Gaussianas de forma conjunta [10,11].

Si \mathbf{X} es el vector de variables aleatorias y viene dado por la ecuación (2.169),

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{bmatrix} \quad (2.169)$$

x es un vector de variables independientes y viene dado por la ecuación (2.170).

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.170)$$

Además, $m_{\mathbf{X}}$ es el vector de las medias de las variables aleatorias y viene dado por la ecuación (2.171):

$$m_{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} m_{\mathbf{X}}(t_1) \\ m_{\mathbf{X}}(t_2) \\ \vdots \\ m_{\mathbf{X}}(t_n) \end{bmatrix}, \quad (2.171)$$

y $K_{\mathbf{X}}$ es la matriz de covarianza dada por la ecuación (2.172).

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{X}} &= E[(\mathbf{X} - m_{\mathbf{X}})^T(\mathbf{X} - m_{\mathbf{X}})] \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{\mathbf{X}}^2(t_1) & \cdots & Cov[X(t_1), X(t_n)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov[X(t_n), X(t_1)] & \cdots & \sigma_{\mathbf{X}}^2(t_n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.172)$$

Así, la función densidad de probabilidad conjunta para esas variables aleatorias Gaussianas tomadas muestreando el proceso estocástico viene completamente determinada por la ecuación (2.173)

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|K_X|}} e^{\left[-\frac{1}{2}(x-m_X)^T K_X^{-1}(x-m_X)\right]}, \quad (2.173)$$

donde $|K_X|$ es el determinante de la matriz de covarianza y K_X^{-1} es la matriz de covarianza.

Por ejemplo, las ecuaciones (2.169), (2.170), (2.171) y (2.172) para el caso particular $n = 1$ (usamos la notación $X = X(t_1)$ para simplificar) pasan a ser las ecuaciones (2.174), (2.175), (2.176) y (2.177) respectivamente.

$$X = [X] \quad (2.174)$$

$$x = [x] \quad (2.175)$$

$$m_X = [m_X] \quad (2.176)$$

$$K_X = [\sigma_X^2] \quad (2.177)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.178) y (2.179):

$$|K_X| = \sigma_X^2 \quad (2.178)$$

$$K_X^{-1} = \left[\frac{1}{\sigma_X^2} \right] \quad (2.179)$$

y sustituyendo esas ecuaciones en la ecuación (2.173) se obtiene la ecuación (2.180), que es la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria Gaussiana como ya habíamos visto.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X}} e^{\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}\right]} \quad (2.180)$$

Por otra parte, las ecuaciones (2.169), (2.170) y (2.171) para el caso particular $n = 2$ (usamos la notación $X = X(t_1)$ e $Y = X(t_2)$ para simplificar) pasan a ser las ecuaciones (2.181), (2.182) y (2.183) respectivamente.

$$X = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (2.181)$$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.182)$$

$$m_X = \begin{bmatrix} m_X \\ m_Y \end{bmatrix} \quad (2.183)$$

La covarianza se puede poner utilizando el coeficiente de correlación y las desviaciones estándar de X e Y según la ecuación (2.184).

$$Cov[X, Y] = \rho \sigma_X \sigma_Y \quad (2.184)$$

Entonces la ecuación (2.172) ahora es la ecuación (2.185).

$$K_X = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho \sigma_X \sigma_Y \\ \rho \sigma_X \sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \quad (2.185)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.186) y (2.187).

$$|K_X| = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 - \rho^2 \sigma_X^2 \sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 (1 - \rho^2) \quad (2.186)$$

$$K_X^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2} & \frac{-\rho}{\sigma_X \sigma_Y} \\ \frac{-\rho}{\sigma_X \sigma_Y} & \frac{1}{\sigma_Y^2} \end{bmatrix} \quad (2.187)$$

Y sustituyendo esas ecuaciones en la ecuación (2.173) se obtiene la ecuación (2.188), que es la función de densidad de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias Gaussianas.

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1 - \rho^2}} e^{\left\{ \frac{1}{2(1 - \rho^2)} [x - m_X \quad y - m_Y] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2} & \frac{-\rho}{\sigma_X \sigma_Y} \\ \frac{-\rho}{\sigma_X \sigma_Y} & \frac{1}{\sigma_Y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - m_X \\ y - m_Y \end{bmatrix} \right\}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left\{ \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho \frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right] \right\}} \quad (2.188)$$

En el caso de que X e Y sean no correlacionadas $\rho = 0$ y por lo tanto la ecuación (2.188) pasa a ser la ecuación (2.189) y como puede verse queda el producto de las funciones marginales y se tiene que x e y son independientes.

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{\left[-\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right]} = f_X(x)f_Y(y) \quad (2.189)$$

3. Un proceso estacionario en sentido amplio Gaussiano es estacionario en sentido estricto. Se sigue inmediatamente de la segunda propiedad, puesto que la media y la covarianza identifica la función densidad de probabilidad, los conceptos de estacionariedad en sentido amplio y en sentido estricto coinciden [10].
4. Si se toman n muestras de un proceso estocástico Gaussiano $X(t), X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ y resulta que son variables aleatorias no correlacionadas según la ecuación (2.190) entonces son estadísticamente independientes [10,11].

$$E[(X(t_k) - m_X(t_k))(X(t_i) - m_X(t_i))] = 0 \quad i \neq k \quad (2.190)$$

En el caso de que las variables aleatorias $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sean no correlacionadas, la matriz de covarianza es diagonal y viene dada por la ecuación (2.191) [10].

$$K_X = \begin{bmatrix} \sigma_{X(t_1)}^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \sigma_{X(t_2)}^2 & & & & 0 \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{X(t_n)}^2 \end{bmatrix} \quad (2.191)$$

El determinante de esa matriz es el producto de los elementos de la diagonal según la ecuación (2.192):

$$|K_X| = \sigma_{X(t_1)}^2 \sigma_{X(t_2)}^2 \dots \sigma_{X(t_n)}^2, \quad (2.192)$$

y la inversa es otra matriz diagonal cuyos elementos son los inversos de los elementos de la diagonal de la matriz de covarianza, según la ecuación (2.193).

$$K_X = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2(t_1)} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_X^2(t_2)} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{\sigma_X^2(t_n)} \end{bmatrix} \quad (2.193)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la función densidad de probabilidad conjunta se tendrá el desarrollo de la ecuación (2.194) y por lo tanto como la función densidad de probabilidad conjunta es igual al producto de las marginales. Por lo tanto, queda demostrado que las variables aleatorias son independientes.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sigma_X(t_i)} e^{\left[-\frac{1}{2}(x-m_X)^T K_X^{-1} (x-m_X)\right]} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sigma_X(t_i)} e^{\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_X(t_i))^2}{\sigma_X^2(t_i)}\right]} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_X(t_i)} e^{\left[-\frac{1}{2} \frac{(x_i - m_X(t_i))^2}{\sigma_X^2(t_i)}\right]} \\ &= \prod_{i=1}^n f_{X(t_i)}(x_i) \end{aligned} \quad (2.194)$$

2.7 LA REGLA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL

A partir de aquí, se trabaja principalmente con un proceso aleatorio $x(t)$ que se obtiene a la salida de un sistema lineal. Este proceso estocástico $x(t)$ está caracterizado por dos funciones de probabilidad multidimensionales $w_m(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m))$. Una realización de este proceso es discretizado en los instantes de tiempo $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$. Por lo tanto, existe un conjunto de *muestras* $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$ donde el número de muestras N y sus tiempos de ocurrencia $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ son arbitrarios.

Esta información cambia la representación inicial que condeine al proceso aleatorio, en particular, las funciones de sus momentos iniciales y centrales y sus densidades de probabilidad. Estas nuevas funciones y densidades de probabilidad modificadas se dice que son condicionales y dependerán del valor de cada muestra $x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)$ [12].

$$w[x(t)|X, T] = w[x(t)|x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)] \quad (2.195)$$

$$\tilde{m}(t) = \langle x(t)|X, T \rangle = \langle x(t)|x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w[x(t)|X, T]dx \quad (2.196)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \langle (x(t) - \tilde{m}(t))^2 |X, T \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - \tilde{m}(t))^2 w[x(t)|X, T]dx \quad (2.197)$$

Por lo tanto, la reconstrucción del proceso depende ahora del conjunto de muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$ y de su fdp $w_m(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m))$ donde $N < m$. El conjunto de diferentes realizaciones del *proceso aleatorio condicional* $\tilde{x}(t) = x(t)|X, T$ pasa a través de todas las muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$. Esto se observa en la Figura 2.7 donde cada realización es una entre un número infinito de otras realizaciones del proceso estocástico condicional $\tilde{x}(t)$. No es posible conocerlas exactamente, pero uno puede estimar su reconstrucción estadísticamente en un momento de tiempo t . Para hacer esto, es necesario escoger la regla estadística apropiada para la función de reconstrucción y después calcular la función de error de esta reconstrucción. En la mayoría de los casos este error *no tiene que ser iguala cero*.

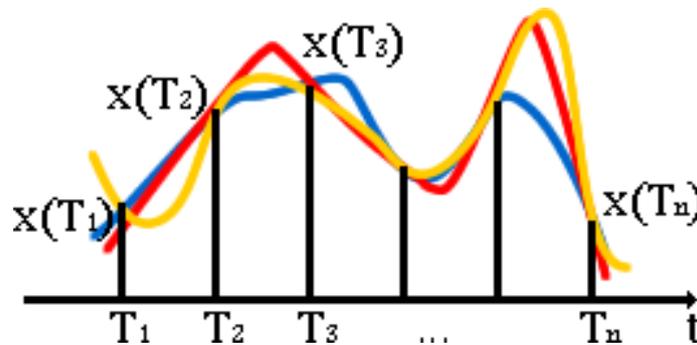


Figura 2.7. Posibles realizaciones de un proceso aleatorio condicional al pasar a través de un conjunto de muestras X, T.

Existe un criterio estadístico muy conocido para la estimación de una variable aleatoria *la regla de la esperanza matemática condicional*. Esta regla proporciona el mínimo error de la estimación para las variables aleatorias con función de densidad de probabilidad arbitraria. Siguiendo esta regla es posible utilizar la función de la media condicional $\tilde{m}(t) = \langle x(t)|X, T \rangle$ como la *función de reconstrucción*.

Mientras que la calidad de la reconstrucción es evaluada con la función de la varianza condicional $\tilde{\sigma}^2(t) = \langle (x(t) - \tilde{m}(t))^2 | X, T \rangle$, como la *función de error de reconstrucción*. Es posible introducir algunas otras características en el Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción, por ejemplo, la función de covarianza $K_x(\tau)$ del proceso reconstruido.

Consideramos el caso general de un proceso Gaussiano *no estacionario* $x(t)$ con la esperanza matemática $m(t)$, la varianza $\tilde{\sigma}^2(t)$ y la función de covarianza $K_x(\tau)$. Esta es la información completa acerca del proceso dado. De aquí se puede escribir la expresión exacta de la función de densidad de probabilidad multidimensional de orden m arbitraria:

$$w_m[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)] = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} [Det[K_x(t_i, t_j)]]^{-\frac{1}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [x(t_i) - m(t_i)] a_{ij} [x(t_j) - m(t_j)] \right\}} \quad (2.198)$$

Donde $Det[K_x(t_i, t_j)]$ es el determinante de la matriz de covarianza.

$$K_x(t_i, t_j) = |K_x(t_i, t_j)| = \begin{bmatrix} K_x(t_1, t_1) & K_x(t_1, t_2) & \dots & K_x(t_1, t_m) \\ K_x(t_2, t_1) & K_x(t_2, t_2) & \dots & K_x(t_2, t_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_x(t_m, t_1) & K_x(t_m, t_2) & \dots & K_x(t_m, t_m) \end{bmatrix} \quad (2.199)$$

Y a_{ij} representa a cada elemento de la matriz inversa de covarianza $A = K^{-1}(t_i, t_j)$.

$$A = K^{-1}(t_i, t_j) = \begin{bmatrix} K_x(t_1, t_1) & \dots & K_x(t_1, t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_x(t_m, t_1) & \dots & K_x(t_m, t_m) \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.200)$$

Donde:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} K(t_j, t_k) = \delta_{ik}, \quad (2.201)$$

δ_{ik} es la función de Kronecker: ($\delta_{ik} = 1$ para $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ para $i \neq k$).

Si fijamos el conjunto de muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$, entonces la función de densidad de probabilidad condicional, será también Gaussiana y las principales características estadísticas de este proceso condicional están dadas por las siguientes expresiones, donde el proceso Gaussiano condicional $\tilde{x}(t)$ está completamente descrito [13]:

$$\tilde{m}(t) = m(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t, T_i) a_{ij} [x(T_j) - m(T_j)] \quad (2.202)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \sigma^2(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t, T_i) a_{ij} K_x(T_j - t) \quad (2.203)$$

$$\tilde{K}_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t_1, T_i) a_{ij} K_x(T_j - t_2) \quad (2.204)$$

Donde $m(t)$ y $\sigma^2(t)$ son, respectivamente, la media y la varianza no-condicional del proceso inicial $x(t)$ y a_{ij} representa nuevamente a cada elemento de la matriz inversa de covarianza, pero ahora esta matriz está en función de los instantes de muestreo ($\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1}(T_i, T_j)$). Los elementos a_{ij} presentan valores solo cuando la matriz de covarianza es de dimensión $n \times n$ y su determinante no es igual a cero. En la matriz de covarianza inversa todos los elementos en cualquier diagonal son iguales y son matrices simétricas.

$$\mathbf{K}_x(T_i, T_j) = \begin{bmatrix} K_x(T_1, T_1) & K_x(T_1, T_2) & \dots & K_x(T_1, T_N) \\ K_x(T_2, T_1) & K_x(T_2, T_2) & \dots & K_x(T_2, T_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_x(T_N, T_1) & K_x(T_N, T_2) & \dots & K_x(T_N, T_N) \end{bmatrix} \quad (2.205)$$

Se debe enfatizar que todas las fórmulas de ésta sección son válidas para el caso *no estacionario* y para el conjunto no arbitrario de muestras X, T .

En el proceso de reconstrucción, la regla de la media condicional puede resolver dos problemas prácticos muy importantes: 1) dado un conjunto de muestras de un proceso estocástico inicial, es posible encontrar la función de reconstrucción y calcular la función de error de reconstrucción; o 2) dado algunos requisitos sobre la calidad del procedimiento de reconstrucción, es posible calcular intervalos de muestreo y la función de reconstrucción óptima del proceso estocástico inicial.

Si consideramos la reconstrucción del proceso condicional cuando $t > T_N$, se obtiene en este caso la descripción de reconstrucción del proceso en *la región de extrapolación*, es decir, fuera de la región de muestreo. Esto se puede observar siempre y cuando el número de muestras N sea finito.

Por ejemplo, muy particular es cuando $N = 1$, en donde podemos darnos cuenta del proceso de extrapolación solamente. Si $T_i < t < T_N$, en donde $i = 1, 2, \dots, N$ podemos observar la reconstrucción del proceso en *la región de interpolación*, es decir, dentro de la región de muestreo. Si $N = 2$, en este caso, los dos procesos, tanto de extrapolación y de interpolación existen. A pesar del número limitado de N , esta regla nos permite reconstruir las realizaciones sobre todo el eje del tiempo t .

2.8 FUNCIONES BÁSICAS

Partiendo de la expresión de la función de la media condicional para un proceso que está caracterizado por tener una media matemática $m(t) = 0$ y una función de covarianza $K(\tau)$, es posible encontrar una expresión no determinística que nos describa la influencia que proporciona cada muestra en la reconstrucción del proceso. Por lo tanto, en lugar de (2.202) tenemos:

$$\hat{x}(t) = \tilde{m}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t - T_i) a_{ij} [x(T_j)] = \sum_{j=1}^N x(T_j) b_j(t). \quad (2.206)$$

En este caso, se obtuvo una expresión para la función de reconstrucción del proceso que solamente depende de la suma total del producto de cada muestra $x(T_j)$ por una función llamada *función básica* $b_j(t)$, la cual está determinada por:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N K(t - T_i) a_{ij}. \quad (2.207)$$

La función básica $b_j(t)$ depende principalmente del comportamiento de la función de covarianza $K(\tau)$ del proceso aleatorio y existe una función básica $b_j(t)$ para cada muestra, según el número de *muestras* $j = 1, 2, \dots, N$ que se tomen en consideración. Cada función básica se multiplica con su correspondiente muestra y al final se suman todas las formas de onda resultante para obtener la reconstrucción del proceso.

De manera general, la forma de la función básica $b_j(t)$ depende del número actual j de la muestra. Junto a esto, la función básica $b_j(t)$ depende de la cantidad de las muestras N , del conjunto de tiempos de muestreo arbitrarios T_i , del momento de covarianza que existe entre las secciones del proceso en los instantes T_i y T_j , (esto se ve en los elementos de la función de covarianza inversa a_{ij} que comprenden a los momentos de covarianza $K_x(T_i - T_j)$ del momento de covarianza $K_x(t - T_j)$ entre la sección actual del tiempo t y las secciones de los tiempos de muestreo T_i). Por lo tanto, en el modo en que todos estos parámetros influyen en la forma de la función básica $b_j(t)$, así también, influyen sobre la función de reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y la función de error de reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$.

Podemos expresar la función $b_j(t)$ en términos del espectro de potencia $S(\omega)$ del proceso dado $x(t)$ si aplicamos el teorema de Wiener-Khintchine en la función de covarianza $K_x(t - T_j)$:

$$K_x(t - T_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega(t - T_i)} d\omega. \quad (2.208)$$

En lugar de (2.207), tenemos:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega(t-T_i)} d\omega. \quad (2.209)$$

Con la expresión anterior, es posible considerar cualquier proceso Gaussiano con su espectro limitado en $-\omega_b \leq \omega \leq \omega_b$. Quedando la expresión de la función básica $b_j(t)$ de la siguiente manera:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} S_x(\omega) e^{j\omega(t-T_i)} d\omega. \quad (2.210)$$

Podemos observar que la función básica $b_j(t)$ ahora depende de la frecuencia de corte ω_b y del tipo de la función espectral $S(\omega)$. También podemos notar que los momentos de covarianza $K_x(T_i - T_j)$ (consecuentemente los elementos a_{ij} deben ser calculados basándose en la función de covarianza $K_x(\tau)$) correspondiente al espectro limitado.

Si algún parámetro en (2.209) cambia, la forma de la función básica $b_j(t)$ también cambia. Esta consideración muestra que la función básica óptima $b_j(t)$ determinada por las expresiones (2.208), (2.209) y (2.210) dependerá tanto de las principales características estadísticas del proceso estocástico dado y de los parámetros de discretización. Además de la frecuencia de corte ω_b uno puede ver muchos otros parámetros que forman la función básica.

Si consideramos la Transformada de Fourier, es posible representar las funciones básicas de cada muestra, no solo en el dominio del tiempo, sino además en el dominio de la frecuencia.

Para conocer así, las amplitudes relativas de las diferentes componentes de frecuencia que cada muestra aporta en el proceso de reconstrucción. Para lo anterior, se considera únicamente el espectro de amplitud $|B_j(\omega)|$ de la densidad espectral de potencia de cada función básica:

$$B_j(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} b_j(t) e^{-j\omega t} dt = |B_j(\omega)| e^{[j\theta(\omega)]}. \quad (2.211)$$

2.9 APLICACIONES PARA ESTA PROPUESTA

La regla de la esperanza matemática condicional se puede aplicar prácticamente en la mayoría de los sistemas de comunicación, tales como: telefonía digital, enlaces de radio digital, sistemas satelitales digitales; y en aquellos sistemas que requieren la reconstrucción o reproducción de señales discretas, por ejemplo: reproductores de audio y video.

De manera general se muestra en la Figura 2.8 las etapas de un sistema de comunicación digital. El método de reconstrucción propuesto se puede utilizar incluso en sistemas que realizan el proceso de modulación y de demodulación digital de manera intermedia, es decir entre la etapa de transmisión y la etapa de recepción. El método de reconstrucción planteado es considerado dentro de la etapa de reconstrucción que se muestra en la Figura 2.8.

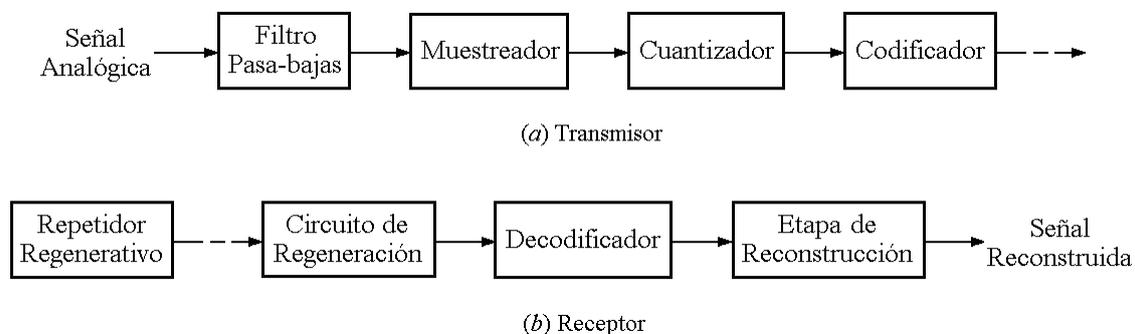


Figura 2.8. Etapas de un sistema de comunicación digital.

En la etapa de reconstrucción se tiene el siguiente esquema de reconstrucción general. Si tomamos en cuenta las expresiones (2.206) y (2.207) se observa que cada muestra debe influir sobre el filtro lineal con su correspondiente respuesta al impulso, la cual está determinada por el orden que se le da al filtro Chebyshev. Posteriormente, se generan las funciones básicas $b_j(t)$, para cada muestra y al final todas las salidas son sumadas, tal como se ve en la Figura 2.9. El objetivo principal de este trabajo es presentar las ventajas de la regla de la esperanza matemática condicional para la reconstrucción de señales. Para ello se muestra en el siguiente capítulo diferentes resultados calculando tanto la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción que se obtiene con esta metodología.

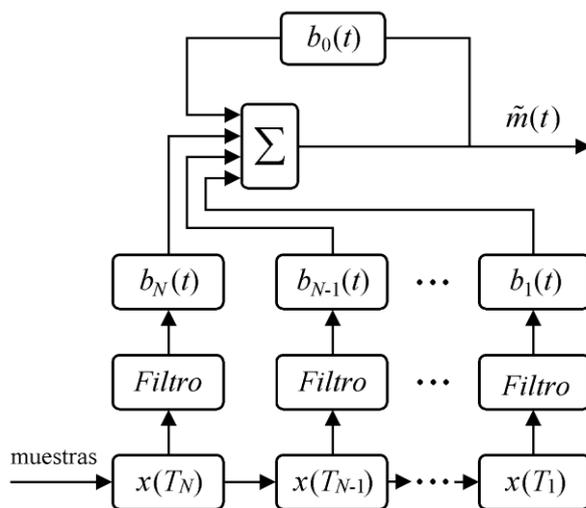


Figura 2.9. Esquema de reconstrucción.

La principal ventaja de la regla de la esperanza matemática condicional es que se pueden determinar y elegir los requerimientos de reconstrucción en función de la calidad que se desea obtener cambiando el orden del filtro Chebyshev.

Capítulo 3

Resultados

En este capítulo nos disponemos a mostrar los resultados obtenidos con la metodología anteriormente presentada.

Antes que nada debemos hacer énfasis en que lo novedoso de utilizar la regla de la esperanza matemática condicional radica en que ésta considera las propiedades estadísticas del proceso a reconstruir. Pero además de las ya mencionadas características del proceso, otro factor importante para la reconstrucción son las características del filtro.

Para el análisis que aquí se presenta se utilizaron dos tipos de filtros: el filtro RC y el filtro Chebyshev. Como se ha explicado anteriormente una de las características principales de un filtro es su función de transferencia, dicha característica nos ayuda a encontrar la densidad espectral de potencia de un proceso a la salida del filtro que se esté utilizando. A su vez, a través del teorema de Wiener-Khintchine podemos conocer la función de covarianza de ese proceso si aplicamos la transformada inversa de Fourier a la densidad espectral de potencia. Es así como entonces es posible a partir de estos parámetros, utilizar la regla de la esperanza matemática condicional.

3.1 RESULTADOS CON FILTROS RC

Las reconstrucciones presentadas a continuación tienen los siguientes parámetros:

- 8 muestras (x) para la reconstrucción con valores de [0.3, 0.2, 0.4, 0.05, -0.2, -0.1, -0.1, 0.2] respectivamente.
- Un tiempo de muestreo (T) de 0.25 segundos entre muestras.
- Las muestras están distribuidas en el intervalo de tiempo que comprende de los 0 a los 1.75 segundos.

3.1.1 Filtro RC de una etapa

Como se ha mencionado anteriormente para llevar a cabo la reconstrucción utilizando la regla de la esperanza matemática condicional es necesario primero conocer la densidad espectral de potencia a la salida del filtro. Ésta se presenta a continuación; para el filtro RC de una etapa, en la Figura 3.1.

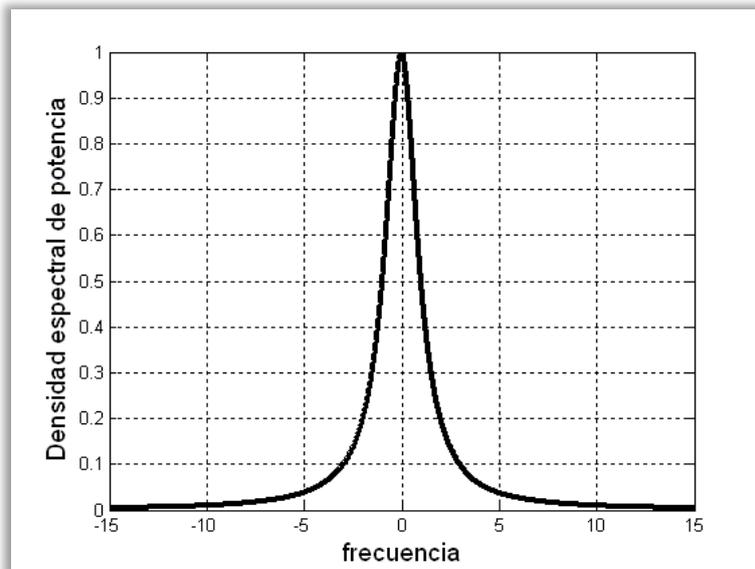


Figura 3.1. Densidad espectral de potencia de un filtro RC de una etapa.

La densidad espectral de potencia a la salida de este filtro está definida por la siguiente expresión:

$$S(\omega) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad (3.1)$$

donde α es la inversa de la constante de tiempo del filtro $\alpha = \frac{1}{RC}$.

De la Figura 3.1, se observa que el filtro RC de una etapa es un filtro pasabajas con una densidad espectral de potencia infinita, es decir, la respuesta en frecuencia de este filtro no está limitada en banda. Para conocer la función de covarianza de éste filtro aplicamos el teorema de Wiener-Khintchine, donde tenemos que:

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.2)$$

Para garantizar que los resultados de cada filtro mantengan los mismos criterios con cada parámetro del proceso, es importante calcular la función de covarianza normalizada y trabajar con el mismo tiempo de covarianza.

El proceso de normalización, es muy importante para comparar los resultados de cada filtro. La función de covarianza normalizada $R(\tau)$, está definida por la siguiente fórmula:

$$R(\tau) = \frac{K(\tau)}{K(0)} = \frac{K(\tau)}{\sigma^2(t)}, \quad (3.3)$$

donde

$$K(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega 0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (3.4)$$

Para el filtro RC de una etapa, tenemos que:

$$K(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\alpha}{2}, \quad (3.5)$$

por lo tanto

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} e^{j\omega\tau} d\omega = e^{-\alpha|\tau|}. \quad (3.6)$$

La forma de la función de covarianza del filtro RC de una etapa, se observa en la Figura 3.2.

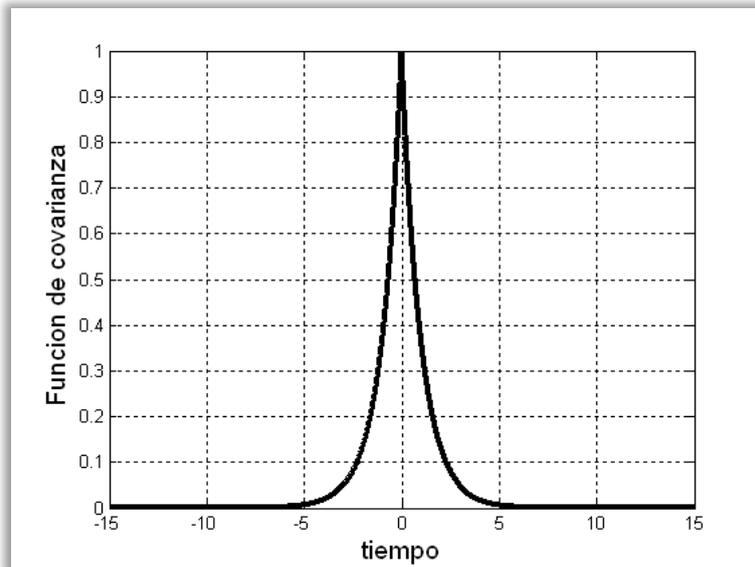


Figura 3.2. Función de covarianza para un filtro RC de una etapa.

Por otra parte, el tiempo de covarianza τ_c , se calcula a partir de la función de covarianza normalizada $R(\tau)$ de la manera siguiente:

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} |e^{-\alpha|\tau|}| d\tau = \frac{1}{\alpha}. \quad (3.7)$$

Por simplicidad vamos a considerar que el tiempo de covarianza de cada proceso por analizar, tiene un valor unitario, es decir, $\tau_c = 1$. Para que el filtro RC de una etapa tenga este tiempo de covarianza es necesario que α sea igual a 1. Esto se ve en la expresión (3.7).

Para obtener la reconstrucción y calcular el error de reconstrucción, aplicamos la función de la esperanza matemática condicional como la función de reconstrucción.

$$\tilde{m}(t) = m(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t, T_i) a_{ij} [x(T_j) - m(T_j)] \quad (3.8)$$

Y la función de varianza matemática condicional como la función de error de reconstrucción.

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \sigma^2(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t, T_i) a_{ij} K_x(T_j - t) \quad (3.9)$$

Donde $m(t)$ es la esperanza matemática y $\sigma^2(t)$ es la varianza no condicional del proceso inicial.

Si sustituimos los valores de todos los parámetros que requieren las ecuaciones (3.8) y (3.9), obtenemos las curvas que describen la reconstrucción del proceso y el error de reconstrucción en la Figura 3.3 y Figura 3.4, respectivamente, en todo el dominio del tiempo.

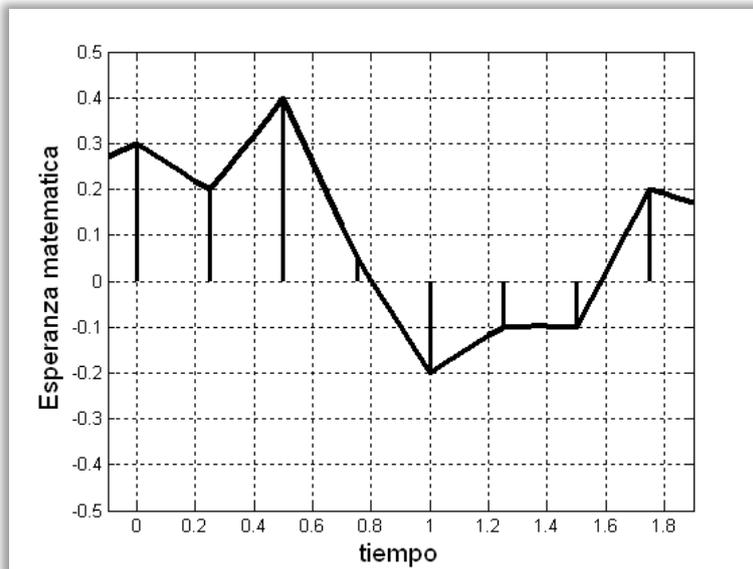
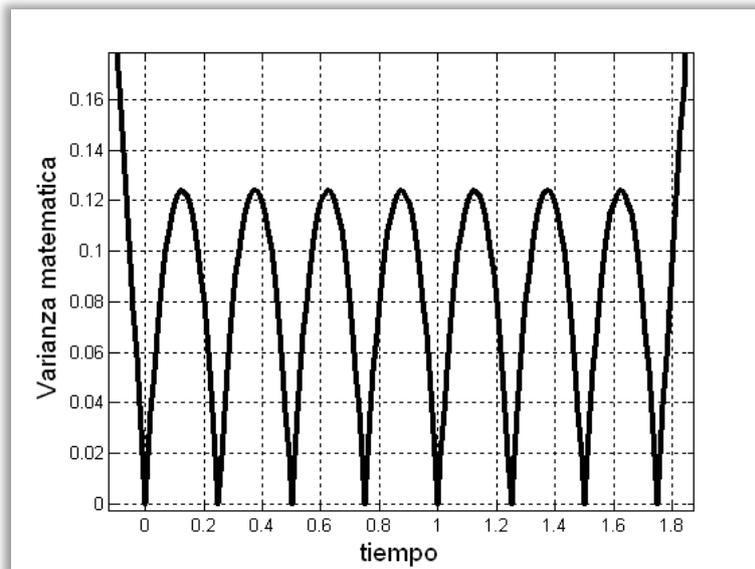


Figura 3.3. Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro RC de una etapa.



Función 3.4. Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro RC de una etapa.

La función de la esperanza matemática para el filtro RC de una etapa tiene un comportamiento lineal, debido a que su función de covarianza es exponencial. En este caso la reconstrucción del proceso se observa como la unión de las muestras por medio de líneas rectas.

Por otra parte, se observa que el error de reconstrucción es máximo a la mitad de cada intervalo de muestreo y es cero en los instantes de muestreo, ya que en esos puntos se conoce con toda certeza el valor del proceso. El valor del error de reconstrucción en cada máximo es un poco mayor a 0.12 que representaría un error mayor al 12%.

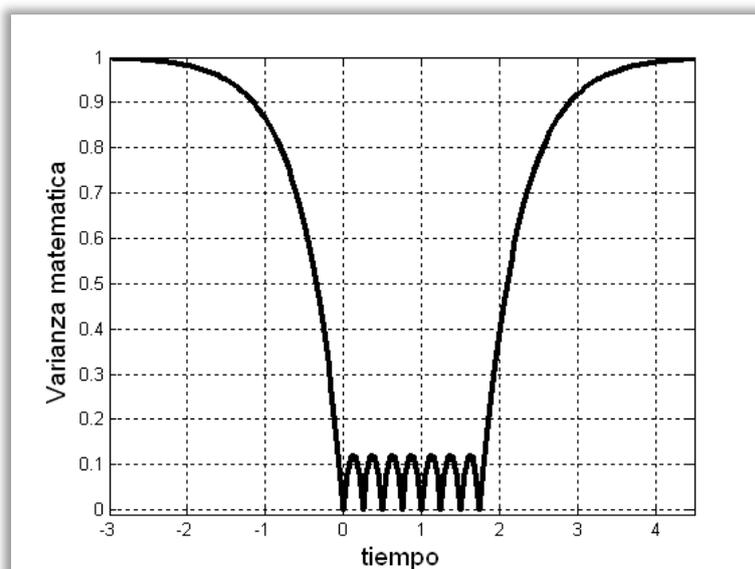


Figura 3.5. Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro RC de una etapa.

Además, es muy importante observar que el error de reconstrucción es prácticamente el mismo en cada intervalo de muestreo, debido a que las muestras que están fuera de los otros intervalos de muestreo no influyen o no participan en la reconstrucción de dicho intervalo.

Es decir, que la reconstrucción de cada intervalo sólo depende de la influencia estadística que proporcionan las muestras que conforman dicho intervalo. Además, en los puntos donde están los tiempos de muestreo el error es cero, por que precisamente la señal está completamente definida por el valor de cada muestra.

Por otra parte, en la región sin muestras, el error de reconstrucción tiende completamente a ser del 100% (región de extrapolación) debido a que ya no se tiene información del proceso en ésta región.

3.1.2 Filtro RC de dos etapas

Para el filtro RC de dos etapas, la densidad espectral de potencia se presenta en la Figura 3.6.

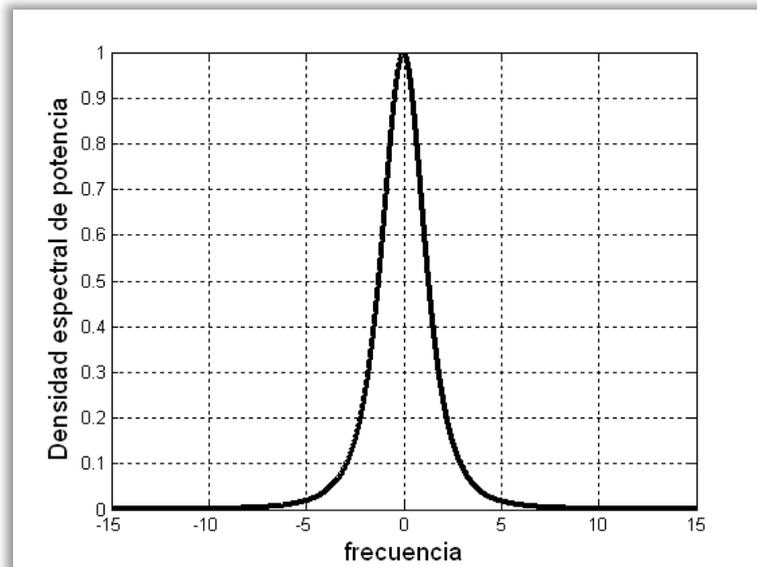


Figura 3.6. Densidad espectral de potencia de un filtro RC de dos etapas.

Y analíticamente la densidad espectral de potencia a la salida de este filtro está definida por la siguiente expresión:

$$S(\omega) = \frac{\alpha^4}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}, \quad (3.10)$$

Observamos que el filtro RC de dos etapas también es un filtro pasabajas con una densidad espectral de potencia infinita, es decir, la respuesta en frecuencia de este filtro no está limitada en banda.

Para conocer la función de covarianza de éste filtro aplicamos nuevamente el teorema de Wiener-Khintchine (3.2).

Además, es importante calcular la función de covarianza normalizada $R(\tau)$ (3.3) y trabajar con el mismo tiempo de covarianza.

Para el filtro RC de dos etapas, la función de covarianza normalizada es la siguiente:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^4}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} e^{j\omega\tau} d\omega = (1 + \alpha|\tau|)e^{-\alpha|\tau|}, \quad (3.11)$$

La forma de la función de covarianza del filtro RC de dos etapas, se observa en la Figura 3.7.

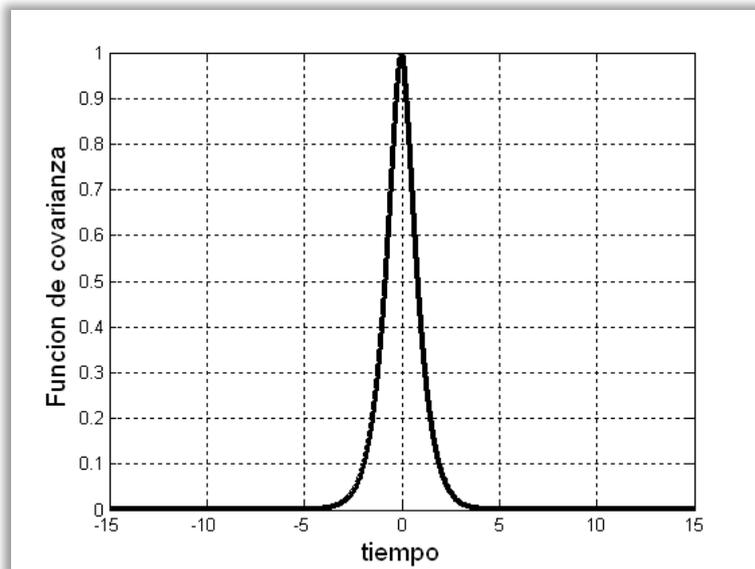


Figura 3.7. Función de covarianza para un filtro RC de dos etapas.

Por otra parte, el tiempo de covarianza τ_c , se calcula a partir de la función de covarianza normalizada $R(\tau)$ de la manera siguiente:

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} (1 + \alpha|\tau|)e^{-\alpha|\tau|} d\tau = \frac{2}{\alpha}, \quad (3.12)$$

Sabemos que el tiempo de covarianza de cada proceso, tiene un valor unitario, $\tau_c = 1$. Para que el filtro RC de dos etapas tenga este tiempo de covarianza es necesario que α sea igual a 2. Esto se ve en la expresión (3.12).

La función de reconstrucción y la función de varianza matemática condicional se muestran en la Figura 3.8 y Figura 3.9, respectivamente.

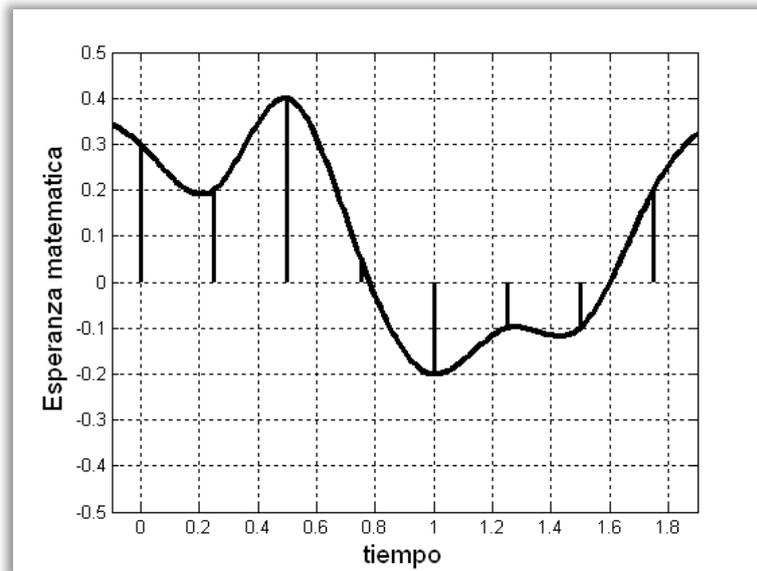


Figura 3.8. Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro RC de dos etapas.

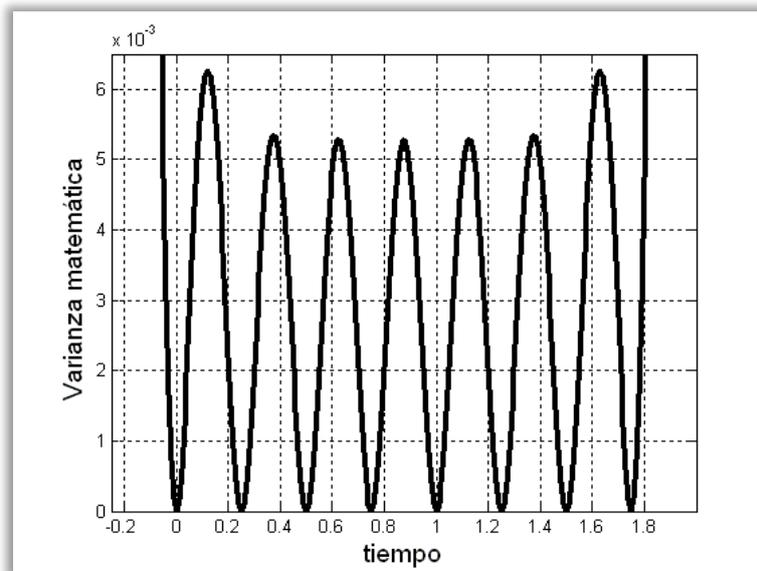


Figura 3.9. Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro RC de dos etapas.

La función de reconstrucción del filtro RC de dos etapas, tiene un comportamiento más suave, en comparación de la función de reconstrucción obtenida por el filtro RC de una etapa, debido a que el proceso es más selectivo. Por otra parte, con la función de la varianza matemática condicional, vemos que el error entre las muestras es más pequeño, del orden de 6×10^{-3} . Este error es mucho menor en comparación con el filtro RC de una etapa.

El error máximo en los intervalos centrales es menor que el error máximo obtenido en los intervalos de cada extremo.

Lo anterior es debido a que los intervalos centrales sienten la influencia de las muestras que se ubican tanto del lado derecho como del lado izquierdo. Mientras que en los intervalos de cada extremo la reconstrucción sólo depende de la influencia de las muestras ubicadas hacia un solo lado.

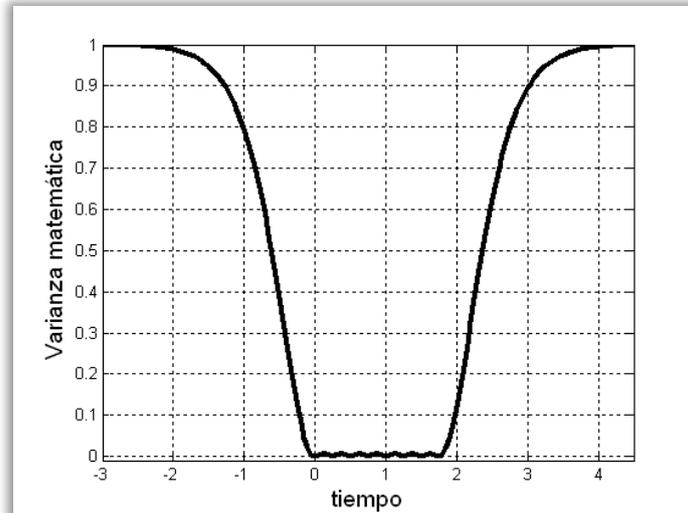


Figura 3.10. Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro RC de dos etapas.

Para éste filtro también existe una zona de extrapolación, la cual nos dice que el proceso no contiene más información fuera de esa zona para poder reconstruirlo.

3.1.3 Filtro RC de tres etapas

La densidad espectral de potencia para el filtro RC de tres etapas se muestra en la Figura 3.11.

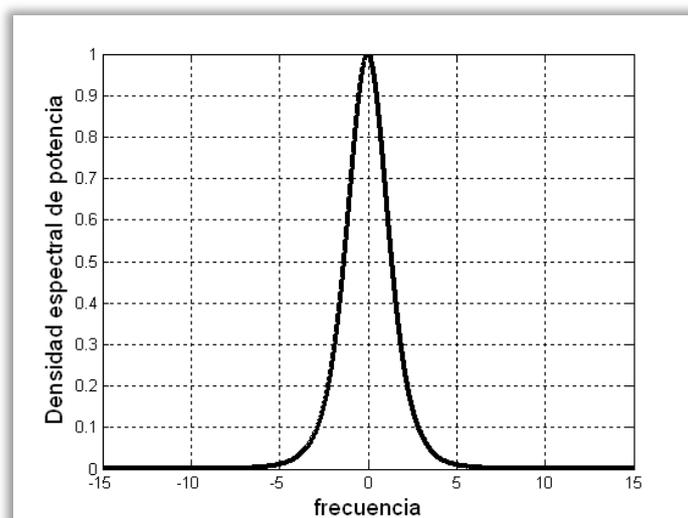


Figura 3.11. Densidad espectral de potencia de un filtro RC de tres etapas.

Análiticamente la densidad espectral de potencia a la salida de este filtro está definida por la siguiente expresión:

$$S(\omega) = \frac{\alpha^6}{(\alpha^2 + \omega^2)^3} \quad (3.13)$$

Tenemos que el filtro RC de tres etapas también es un filtro pasabajas con una densidad espectral de potencia infinita, es decir, la respuesta en frecuencia de este filtro no está limitada en banda.

Para el filtro RC de tres etapas, la función de covarianza normalizada es la siguiente:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^6}{(\alpha^2 + \omega^2)^3} e^{j\omega\tau} d\omega = \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{\alpha^2\tau^2}{3} \right) e^{-\alpha|\tau|}. \quad (3.14)$$

La forma de la función de covarianza del filtro RC de tres etapas, se observa en la Figura 3.12.

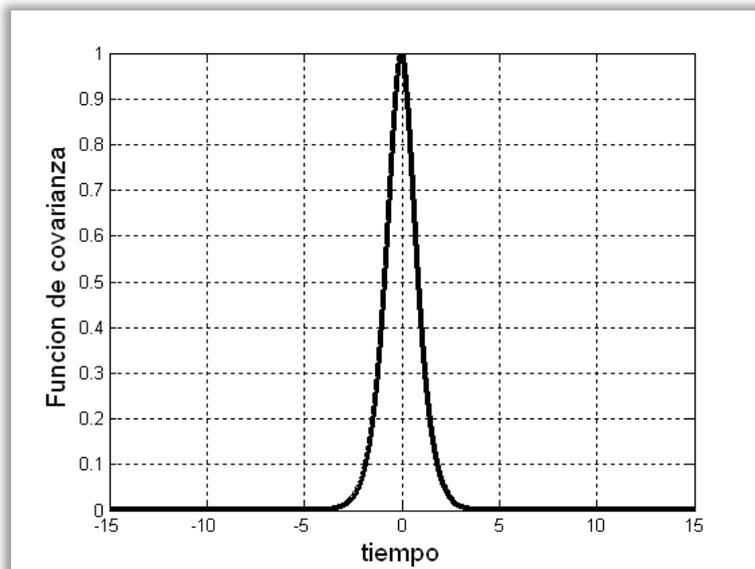


Figura 3.12. Función de covarianza para un filtro RC de tres etapas.

Como se mencionó anteriormente, el tiempo de covarianza τ_c , se calcula a partir de la función de covarianza normalizada $R(\tau)$:

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} \left(1 + \alpha\tau + \frac{\alpha^2\tau^2}{3} \right) e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{8}{3\alpha}. \quad (3.15)$$

Para que el filtro RC de tres etapas tenga un tiempo de covarianza unitario es necesario que α sea igual a $\frac{8}{3}$. Esto se ve en la expresión (3.15).

Las curvas que describen la reconstrucción del proceso y el error de reconstrucción se observan en la Figura 3.13 y Figura 3.14, respectivamente.

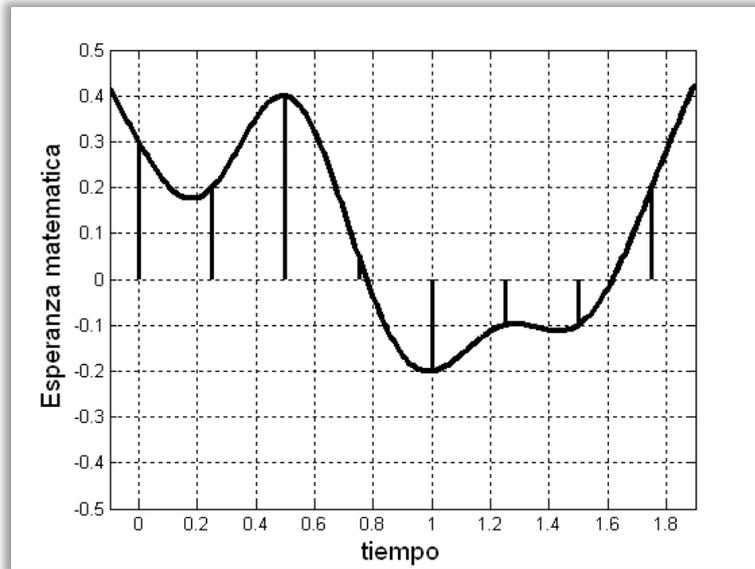


Figura 3.13. Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro RC de tres etapas.

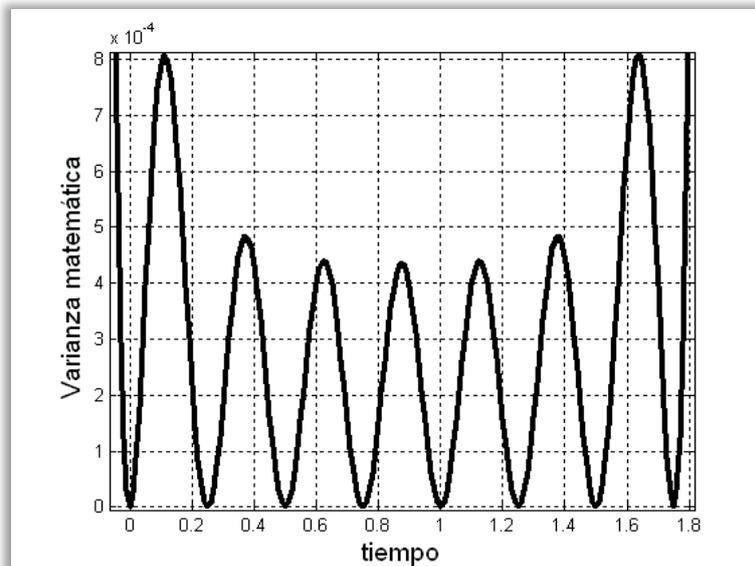


Figura 3.14. Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro RC de tres etapas.

Observamos que la función de reconstrucción de éste proceso es mucho más suave que las funciones de reconstrucción obtenidas con los dos filtros anteriores. Lo anterior es debido a que aumenta la influencia de cada muestra en cada uno de los intervalos. De igual forma, se observa que, los puntos donde están los tiempos de muestreo, el error es cero; porque la señal es conocida en dichos puntos.

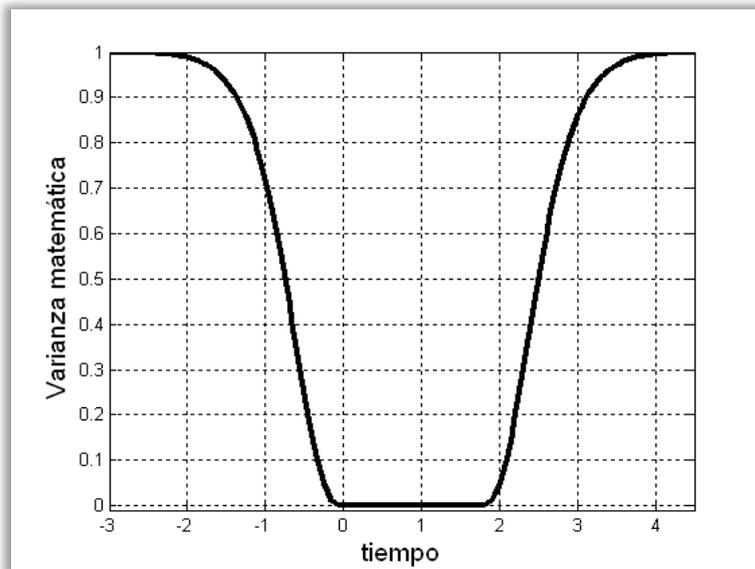


Figura 3.15. Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro RC de tres etapas.

Para el filtro RC de tres etapas, así como para los filtros RC de una y dos etapas es claro que en todos existe una zona de extrapolación, la cual nos dice que el proceso no contiene más información para poder reconstruirlo.

3.1.4 Comparación entre Filtros RC de distintas etapas

Hasta ahora hemos obtenido tres reconstrucciones utilizando un filtro RC de diferentes etapas, estas reconstrucciones son contrastadas en la Figura 3.16.

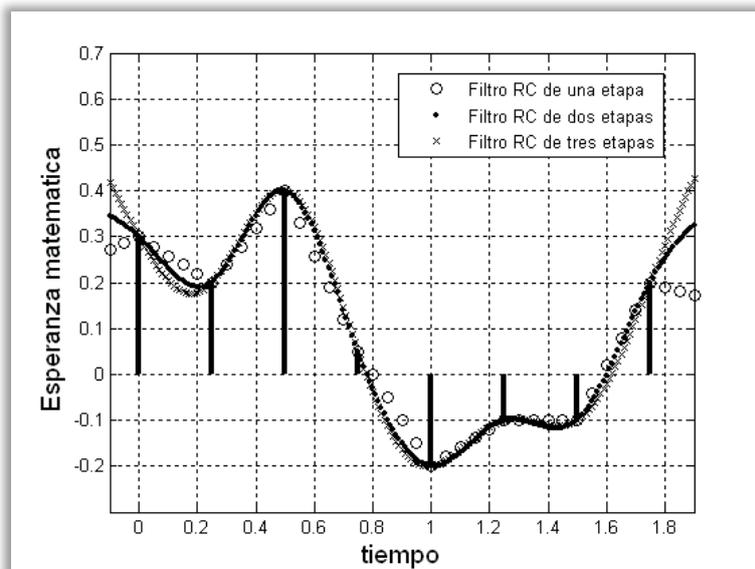


Figura 3.16. Contraste entre las reconstrucciones del proceso propuesto utilizando filtros RC de una, dos y tres etapas.

Aquí podemos observar que, el proceso de reconstrucción para el filtro de una etapa es muy abrupto, mientras que para los filtros de dos y tres etapas es más suave.

3.2 RESULTADOS CON FILTROS CHEBYSHEV

Al igual que con el filtro RC, primeramente debemos indicar los parámetros utilizados para la obtención de estos resultados.

Las reconstrucciones presentadas a continuación tienen los siguientes parámetros:

- 8 muestras (x) para la reconstrucción con valores de [0.3, 0.2, 0.4, 0.05, -0.2, -0.1, -0.1, 0.2] respectivamente.
- Un tiempo de muestreo (T) de 0.25 segundos entre muestras.
- Las muestras están distribuidas en el intervalo de tiempo que comprende de los 0 a los 1.75 segundos.
- Además la frecuencia de corte cambia para diferente orden del filtro, por ejemplo, para el filtro Chebyshev de primer orden es de $\omega_c = 0.63$ rad/seg, para el filtro Chebyshev de segundo orden es de $\omega_c = 1.89$ rad/seg y para el filtro Chebyshev de tercer orden es de $\omega_c = 2.71$ rad/seg. Lo anterior es para mantener el tiempo de covarianza unitario del proceso.

3.2.1 Filtro Chebyshev de primer orden

A partir de la función de transferencia para el filtro Chebyshev de orden uno (3.10) y para filtros de ordenes mayores la función de transferencia es la misma.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \quad (3.10)$$

Donde ε es la amplitud del rizo, $T_N(\omega)$ es el polinomio de Chebyshev y $\omega = \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$ siendo ω_c la frecuencia de corte.

La densidad espectral de potencia y la función de covarianza no se pueden determinar analíticamente, en este caso se determinaron mediante un algoritmo de programación (ver Apéndice C).

Utilizando dicho algoritmo, las curvas de la densidad espectral de potencia y de la función de covarianza se observan en la Figura 3.17 y 3.18, respectivamente.

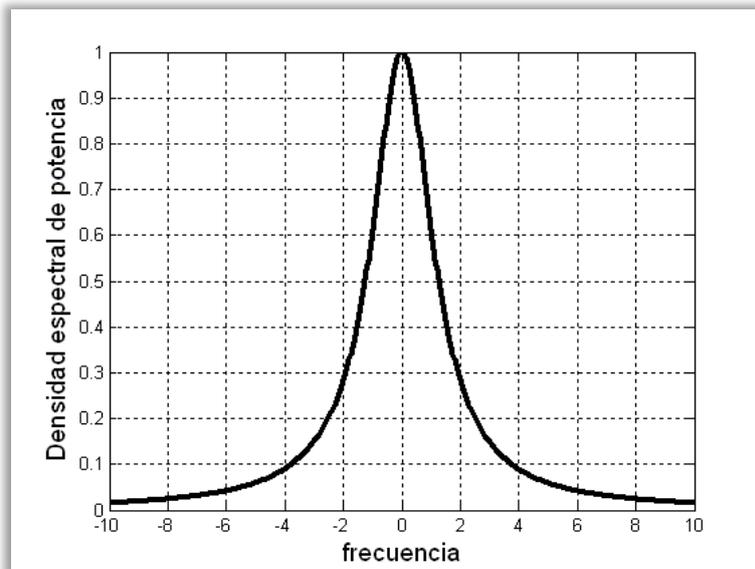


Figura 3.17. Densidad espectral de potencia para el filtro Chebyshev de primer orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 0.63$ rad/seg.

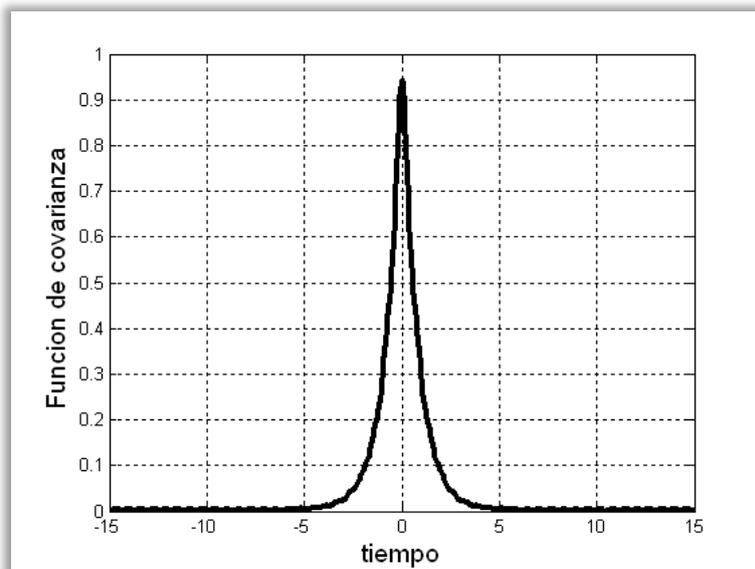


Figura 3.18. Función de covarianza para el filtro Chebyshev de primer orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 0.63$ rad/seg.

Tenemos que el filtro Chebyshev de primer orden es un filtro digital pasabajas con una densidad espectral de potencia infinita, es decir, la respuesta en frecuencia de este filtro no está limitada en banda. Para obtener la reconstrucción y calcular el error de reconstrucción, aplicamos la función de la esperanza matemática condicional como la función de reconstrucción (3.8), y la función de varianza matemática condicional como la función de error de reconstrucción (3.9).

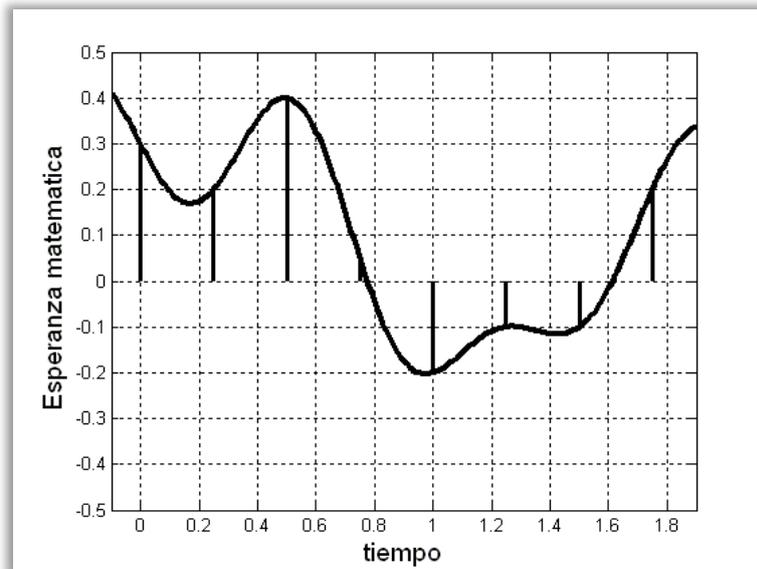


Figura 3.19. Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de primer orden.

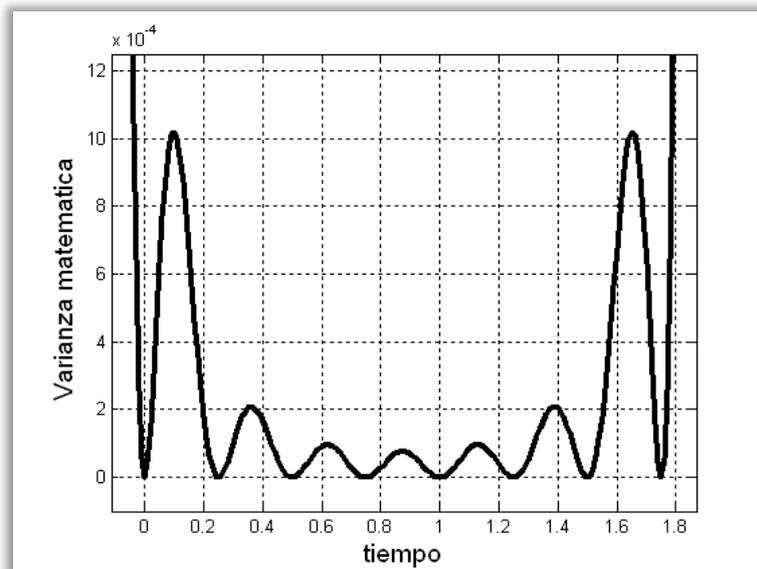


Figura 3.20. Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de primer orden.

Véase que la función de reconstrucción para el filtro Chebyshev de primer orden presenta un proceso de reconstrucción más suave a comparación del filtro RC de una etapa y la función de error de reconstrucción es casi imperceptible en los tiempos de muestreo que se encuentran al centro del proceso pero en los tiempos de muestreo de los extremos el error crece y de igual manera es muy pequeño.

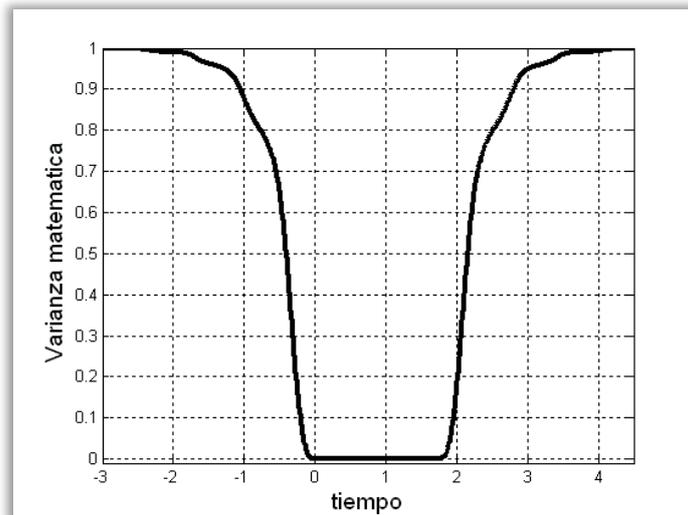


Figura 3.21. Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro Chebyshev de primer orden.

Como se puede observar, en primera instancia éste error es, mucho menor al proporcionado por un filtro RC de tres etapas. Esto quiere decir que el filtro Chebyshev nos va a proporcionar siempre una mejor calidad en la reconstrucción.

3.2.2 Filtro Chebyshev de segundo orden

De la expresión (3.10), para pasar de un filtro Chebyshev de primer orden a un filtro Chebyshev de segundo, se necesita cambiar el polinomio pero más específicamente debemos cambiar $N = 2$ y ω_c que es la frecuencia de corte a $\omega_c = 1.89$ rad/seg. Para así obtener un filtro Chebyshev de segundo orden. Con estos cambios la función de densidad espectral de potencia para éste filtro de segundo orden se ve en la Figura 3.22 y por el teorema Wiener-Khintchine podemos obtener su función de covarianza, presentada en la Figura 3.23.

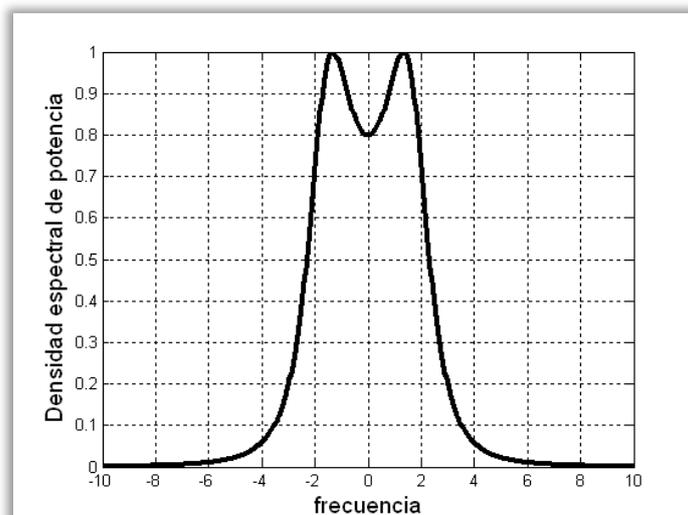


Figura 3.22. Densidad espectral de potencia para el filtro Chebyshev de segundo orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 1.89$ rad/seg.

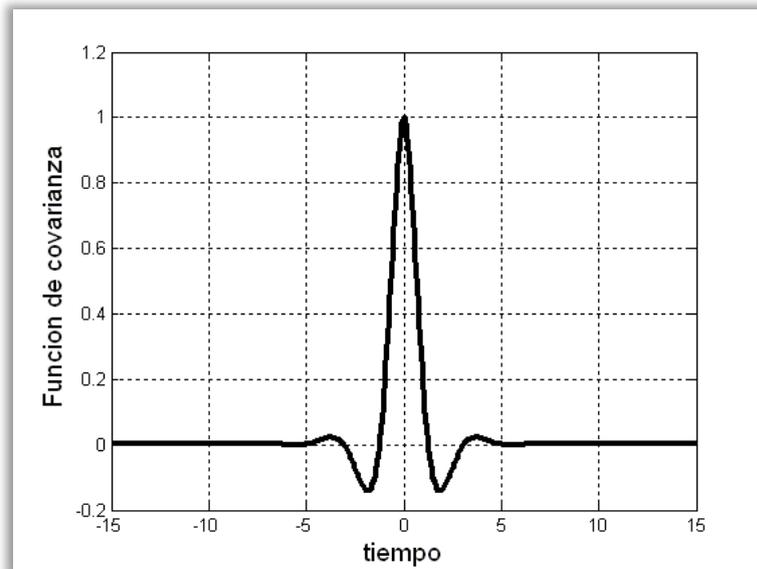


Figura 3.23. Función de covarianza para el filtro Chebyshev de segundo orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 1.89$ rad/seg.

En la Figura 3.22 se observa cómo cambia totalmente la forma de la función de densidad espectral de potencia. De este modo podemos suponer que la función de covarianza a partir de aquí y en órdenes posteriores cambiará totalmente.

Esta función de covarianza a diferencia de las anteriores presenta rizados antes de la frecuencia de corte.

Tenemos que el filtro Chebyshev de segundo orden es un filtro digital pasabajas con una densidad espectral de potencia infinita, es decir, la respuesta en frecuencia de este filtro no está limitada en banda.

Para obtener la reconstrucción y calcular el error de reconstrucción, aplicamos la función de la esperanza matemática condicional como la función de reconstrucción (3.8) y la función de varianza matemática condicional como la función de error de reconstrucción (3.9).

Al sustituir todos los valores de los parámetros que requieren las ecuaciones (3.8) y (3.9), obtenemos las curvas que describen la reconstrucción del proceso y el error de reconstrucción en la Figura 3.24 y Figura 3.25, respectivamente.

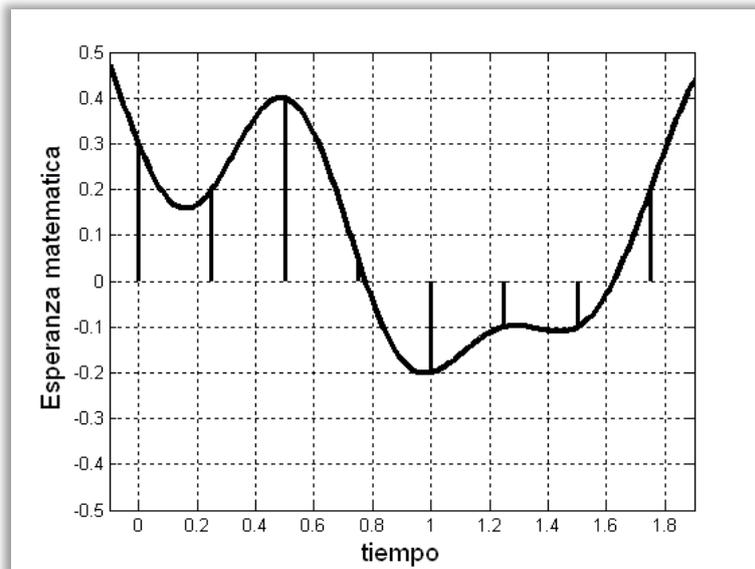


Figura 3.24. Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de segundo orden.

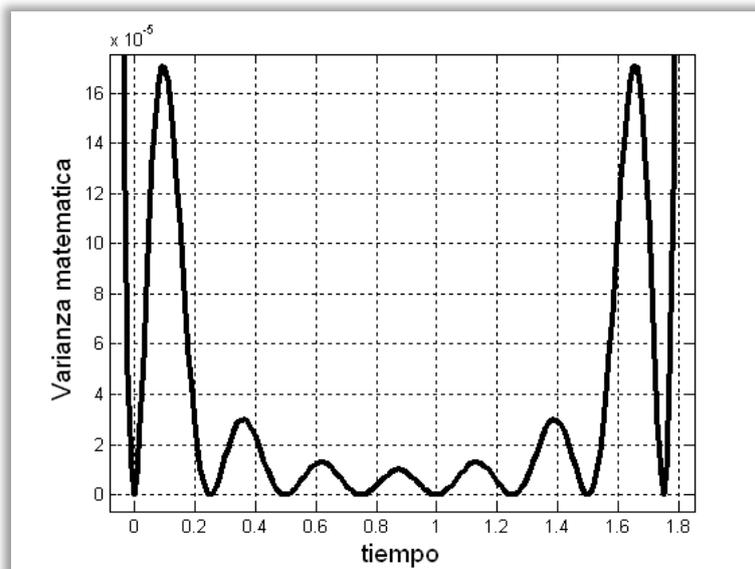


Figura 3.25. Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de segundo orden.

La función de reconstrucción para el filtro Chebyshev de segundo orden presenta un proceso de reconstrucción parecido a la reconstrucción del filtro Chebyshev de primer orden aunque más suave y la función de error de reconstrucción se reduce en gran medida. En la función de error de reconstrucción se ve como el máximo error en los extremos tiene un valor de 1.704×10^{-4} y como el error mas pequeño tiene un valor de 1.002×10^{-5} ubicado en la zona intermedia del proceso.

En éste y en los casos posteriores se perciben variaciones en los extremos de la función de error de reconstrucción del proceso, debido principalmente a las ondulaciones que presenta la función de covarianza del proceso analizado.

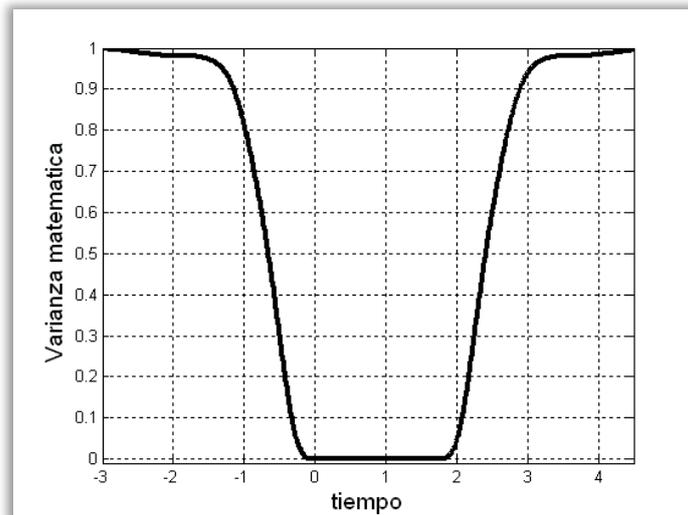


Figura 3.26. Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro Chebyshev de segundo orden.

3.2.3 Filtro Chebyshev de tercer orden

Si bien en la densidad espectral de potencia del filtro Chebyshev de segundo orden se pudo observar una variación, lo que viene a continuación puede darnos una idea de hacia dónde pueden ir dirigidos resultados posteriores.

De la misma expresión (3.10), para obtener un filtro Chebyshev de tercer orden; cambiamos el parámetro del polinomio, $N = 3$ y la frecuencia de corte a $\omega_c = 2.71$ rad/seg. Con estos cambios la función de densidad espectral de potencia para éste filtro de tercer orden se ve en la Figura 3.27 y la función de covarianza, se presenta en la Figura 3.28.

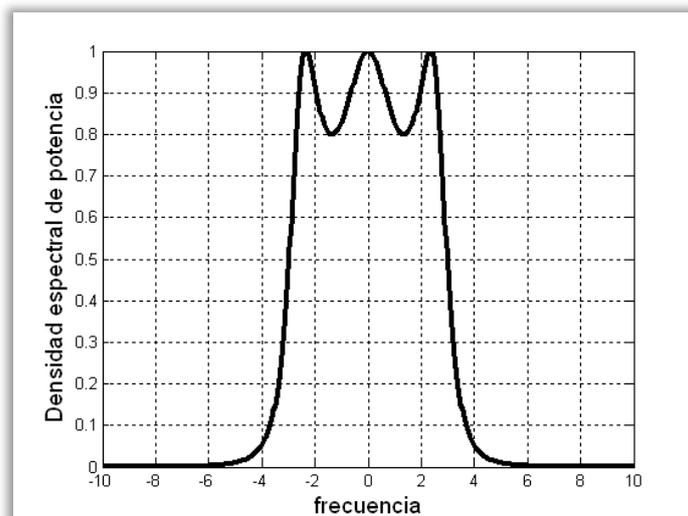


Figura 3.27. Densidad espectral de potencia para el filtro Chebyshev de tercer orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 2.71$ rad/seg.

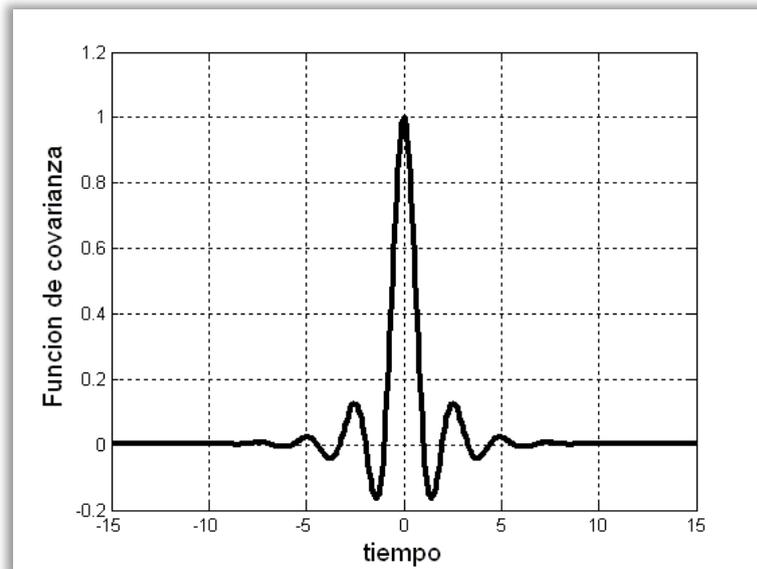


Figura 3.28. Función de covarianza para el filtro Chebyshev de tercer orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 2.71$ rad/seg.

En la Figura 3.27, observamos el cambio de la función de densidad espectral de potencia.

Tenemos que el filtro Chebyshev de tercer orden, también es un filtro digital pasabajas con una densidad espectral de potencia infinita, es decir, la respuesta en frecuencia de este filtro no está limitada en banda.

Pero conforme se va aumentando el orden, la densidad espectral de potencia del filtro Chebyshev se va aproximando a la respuesta en frecuencia de un filtro ideal, es decir a la respuesta de un filtro limitado en banda.

Para obtener la reconstrucción y calcular el error de reconstrucción, aplicamos la función de la esperanza matemática condicional como la función de reconstrucción (3.8), y la función de varianza matemática condicional como la función de error de reconstrucción (3.9).

Al sustituir los valores de todos los parámetros que requieren las ecuaciones (3.8) y (3.9), obtenemos las curvas que describen la reconstrucción del proceso y el error de reconstrucción en la Figura 3.29 y Figura 3.30, respectivamente.

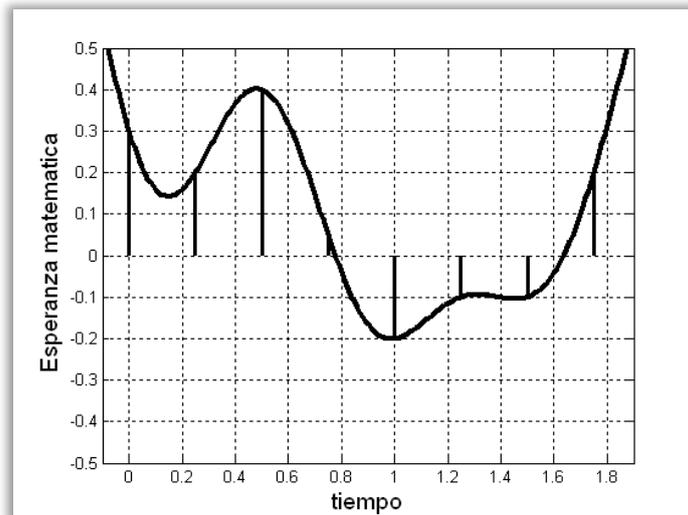


Figura 3.29. Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de tercer orden.

Esta función de reconstrucción presenta pocos cambios hacia el centro del proceso con respecto a los otros dos resultados obtenidos con el filtro Chebyshev de segundo y tercer orden pero, a su vez, existen ciertas variaciones más que nada en los extremos que, al paso de reconstrucciones posteriores podrían dar un mejor aproximado de la reconstrucción de la señal propuesta.

Más que en las propias reconstrucciones del proceso, donde claramente se puede apreciar la calidad del mismo, es en su función de error de reconstrucción. Donde se observa que el máximo error presente en la función de error de reconstrucción es de 3.26×10^{-5} , mientras que el mínimo error es de 1.449×10^{-6} . Estos valores son muy pequeños y por lo tanto podemos decir que las aproximaciones de ahora en adelante serán cada vez más precisas hasta un punto donde ese error sea despreciable.

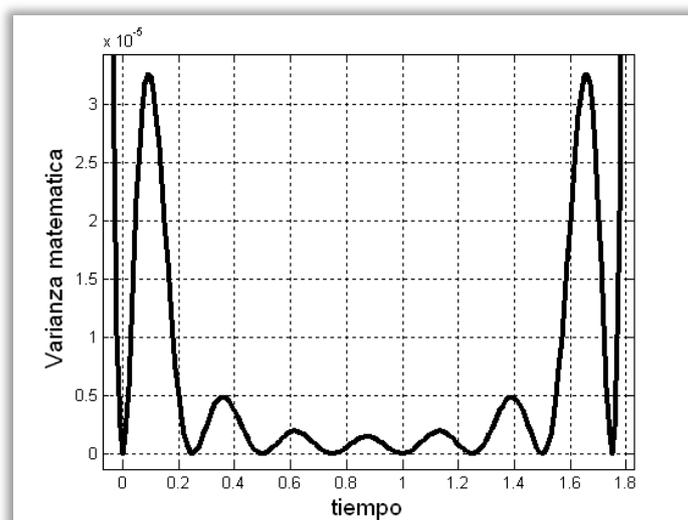


Figura 3.30. Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de tercer orden.

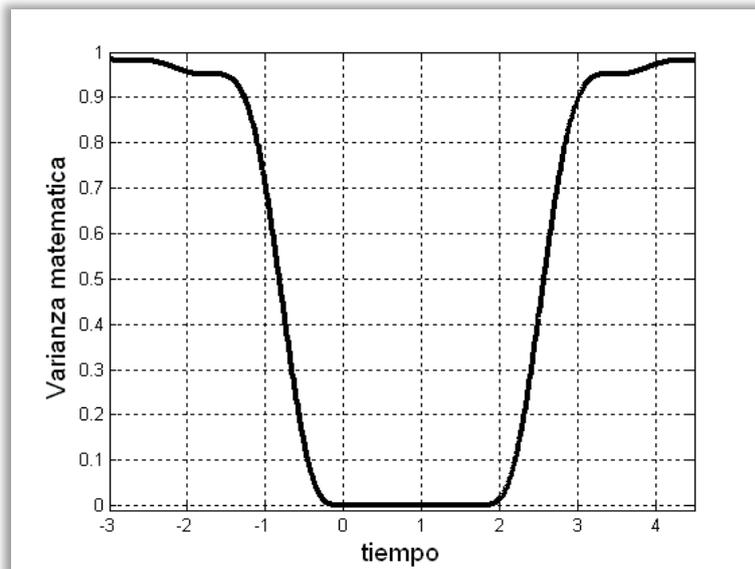


Figura 3.31. Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro Chebyshev de tercer orden.

En la Figura 3.31 se muestra a detalle la zona de extrapolación, que, como en los filtros Chebyshev de primer y segundo orden nos dice que fuera de esa zona ya no existe más información que nos ayude a reconstruir el proceso.

3.2.4 Comparación entre Filtros Chebyshev de distinto orden

Si bien en los resultados obtenidos con el filtro RC se mostró una grafica comparativa entre las distintas etapas del mismo, veamos ahora una comparación del filtro Chebyshev de distinto orden.

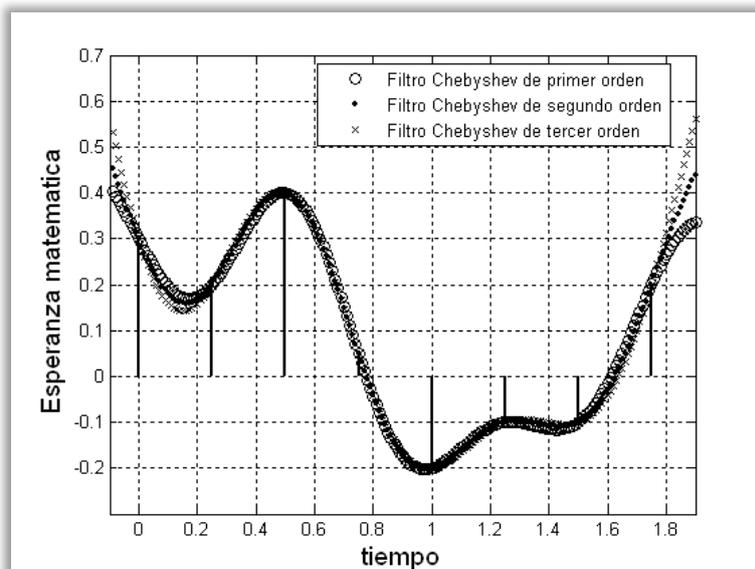


Figura 3.32. Contraste entre las reconstrucciones del proceso propuesto utilizando un filtro Chebyshev de primer, segundo y tercer orden.

Podemos ver que, para el caso de la utilización de distintos órdenes para este filtro, la reconstrucción del proceso es similar en la parte central del mismo mientras que tiende a tener variaciones a los extremos.

La siguiente tabla muestra la variación en el error de reconstrucción utilizando diferentes configuraciones de los filtros RC y Chebyshev. De esta forma es posible determinar cuál es obviamente la mejor opción para una óptima reconstrucción.

Tabla 3.1. Comparación del valor de Error de Reconstrucción entre diferentes configuraciones de Filtros.

Tipo de filtro	Error máximo	Error mínimo
RC de una etapa	125.7×10^{-3}	125.7×10^{-3}
RC de dos etapas	6.28×10^{-3}	5.28×10^{-3}
RC de tres etapas	8.11×10^{-4}	4.33×10^{-4}
Chebyshev de primer orden	1.02×10^{-3}	7.67×10^{-5}
Chebyshev de segundo orden	1.704×10^{-4}	1.002×10^{-5}
Chebyshev de tercer orden	3.26×10^{-5}	1.449×10^{-6}
Chebyshev de cuarto orden	7.134×10^{-6}	2.337×10^{-7}
Chebyshev de quinto orden	1.615×10^{-6}	3.807×10^{-8}
Chebyshev de sexto orden	4.961×10^{-7}	8.462×10^{-9}
Chebyshev de séptimo orden	2.139×10^{-7}	3.05×10^{-9}

Capítulo 4

Conclusiones Generales

- ✓ Las generalidades presentadas por Balakrishnan, tienen varias deficiencias, al no tomar en cuenta las propiedades estadísticas de los procesos, al limitar en banda el espectro de frecuencia y al considerar que el tiempo de muestreo debe ser periódico.
- ✓ La regla de esperanza matemática condicional nos proporciona una mejor información sobre el procedimiento de reconstrucción del proceso a la salida de un sistema, por que considera todas las propiedades estadísticas del mismo.
- ✓ La metodología propuesta lleva mayores ventajas sobre otros métodos por que podemos variar algunas propiedades de los procesos, por ejemplo: el tiempo de muestreo puede ser o no periódico, se puede o no tener un número finito de muestras y los procesos pueden ser o no limitados en banda.
- ✓ El presente trabajo considera la reconstrucción de procesos que están caracterizados por la función de densidad de densidad de probabilidad gaussiana. Además de tener un comportamiento estacionario.
- ✓ Si se pretende conocer el proceso a la entrada del sistema, es posible hacerlo, mediante la regla de la esperanza matemática condicional, ya que existe una relación estrecha entre parámetros de entrada-salida.
- ✓ La reconstrucción del proceso depende del número de muestras, así como de la dependencia estadística que presentan unas con otras, de la posición de cada muestra y de la correlación del tiempo presente con los instantes de muestreo.
- ✓ La calidad de la reconstrucción puede ser medida mediante la función de la varianza matemática condicional.
- ✓ Para filtros RC o Chebyshev, ya sea variando el número de etapas del filtro o aumentando el orden del polinomio de Chebyshev, se puede observar como el error de reconstrucción disminuye en gran medida.

Por lo tanto el procedimiento de reconstrucción de procesos de cualquier tipo, va a depender principalmente de factores como: la función de covarianza, el número de muestras consideradas, el tiempo de muestreo y el tipo de respuesta o las características del filtro con el que deseemos trabajar.

APÉNDICE A

FUNCIONES BÁSICAS:

A.1	Funciones Básicas con un Tiempo de Muestreo Periódico.....	82
A.2	Funciones Básicas con un Tiempo de Muestreo no Periódico.....	85

A.1 Funciones Básicas con un Tiempo de Muestreo Periódico

Las siguientes funciones básicas nos ayudan a ilustrar el proceso de reconstrucción. En este caso cada muestra es multiplicada por una función básica y al final, la suma de todas estas será la reconstrucción de la señal.

A continuación se presentan las formas de las funciones básicas para un filtro Chebyshev de orden 1 hasta 7. El tiempo de muestreo (T) es uniforme y tiene un valor de 0.5 segundos, éste está distribuido en el intervalo que comprende de los 0 a los 1.5 segundos.

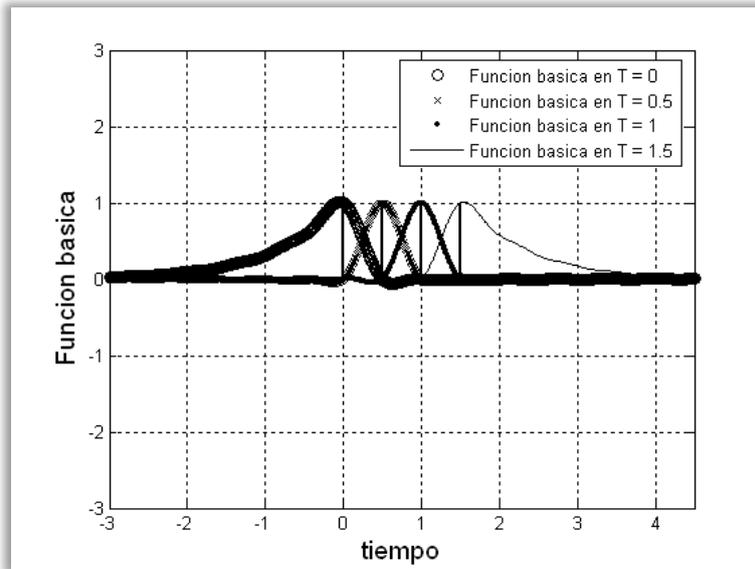


Figura A.1. Funciones básicas para el filtro Chebyshev de primer orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 0.63$ rad/seg.

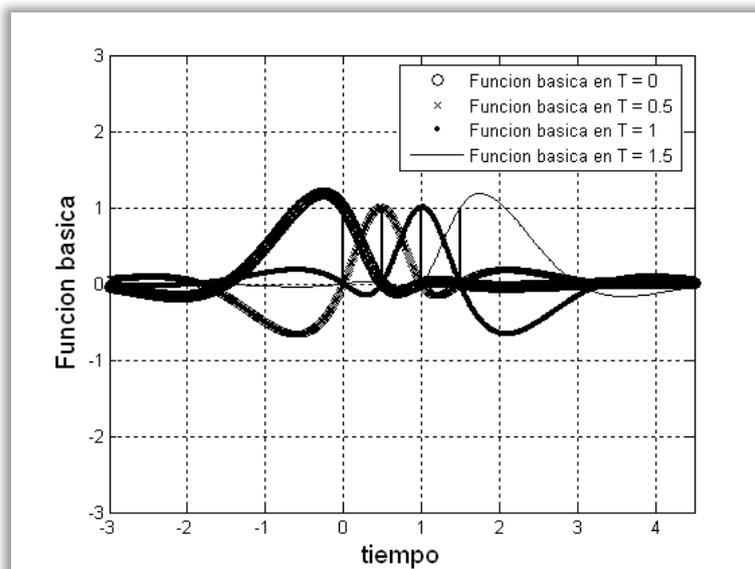


Figura A.2. Funciones básicas para el filtro Chebyshev de segundo orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 1.89$ rad/seg.

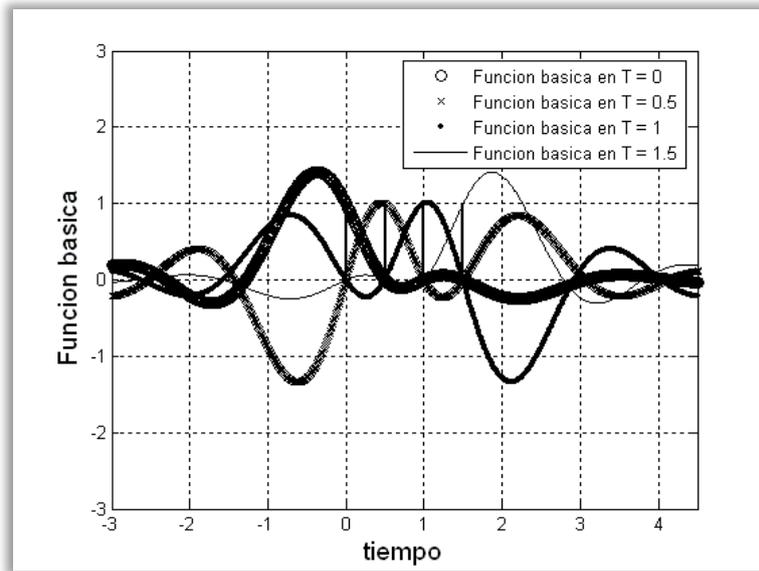


Figura A.3. Funciones básicas para el filtro Chebyshev de tercer orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 2.71$ rad/seg.

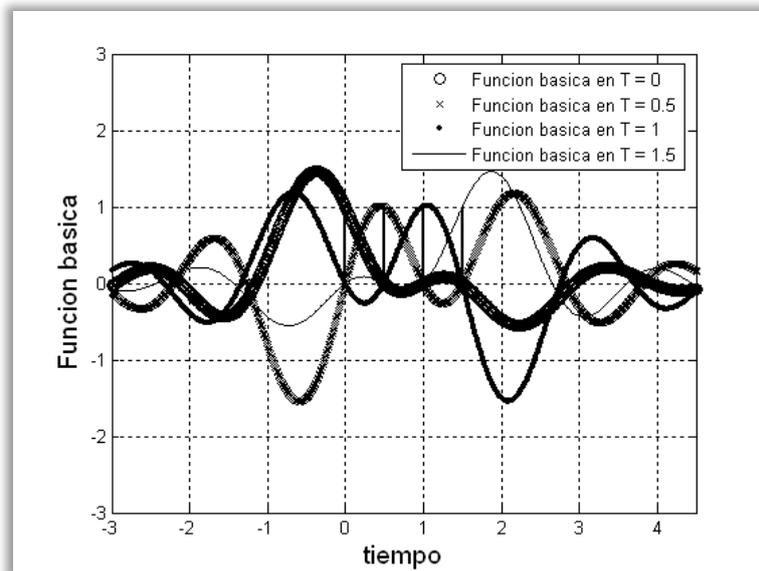


Figura A.4. Funciones básicas para el filtro Chebyshev de cuarto orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 3.25$ rad/seg.

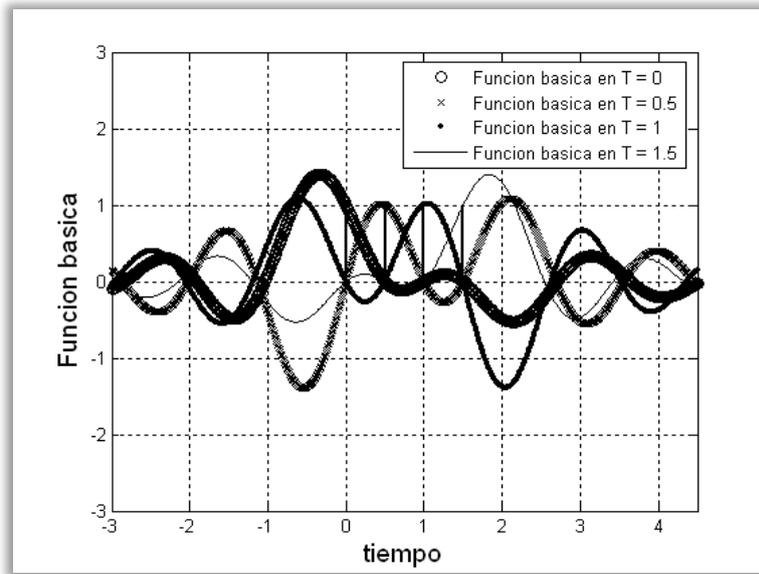


Figura A.5. Funciones básicas para el filtro Chebyshev de quinto orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 3.6$ rad/seg.

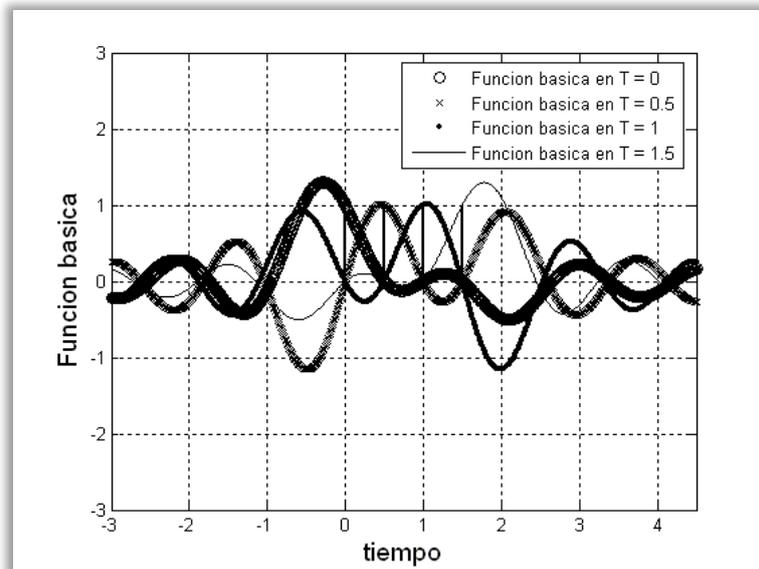


Figura A.6. Funciones básicas para el filtro Chebyshev de sexto orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 3.93$ rad/seg.

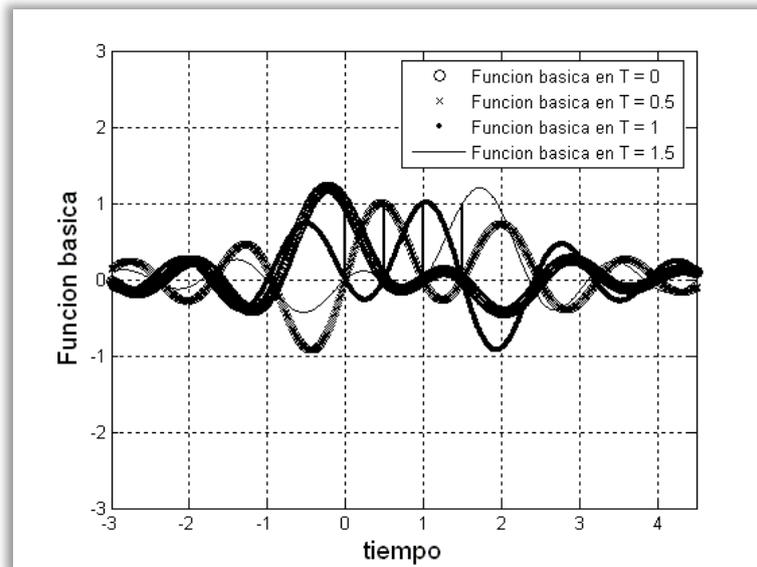


Figura A.7. Funciones básicas para el filtro Chebyshev de séptimo orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 4.24$ rad/seg.

A.2 Funciones Básicas con un Tiempo de Muestreo no Periódico

A continuación se presentan algunas figuras donde el tiempo de muestreo es diferente y por esa razón las funciones básicas adoptan formas distintas según la posición donde se encuentren. El tiempo entre muestras en este caso es el siguiente 0.25 segundos entre la primera y segunda muestra, 0.5 segundos para la segunda y tercera muestra y 0.75 segundos para la tercera y cuarta muestra, estando estas cuatro muestras distribuidas en el intervalo de los 0 a los 1.5 segundos.

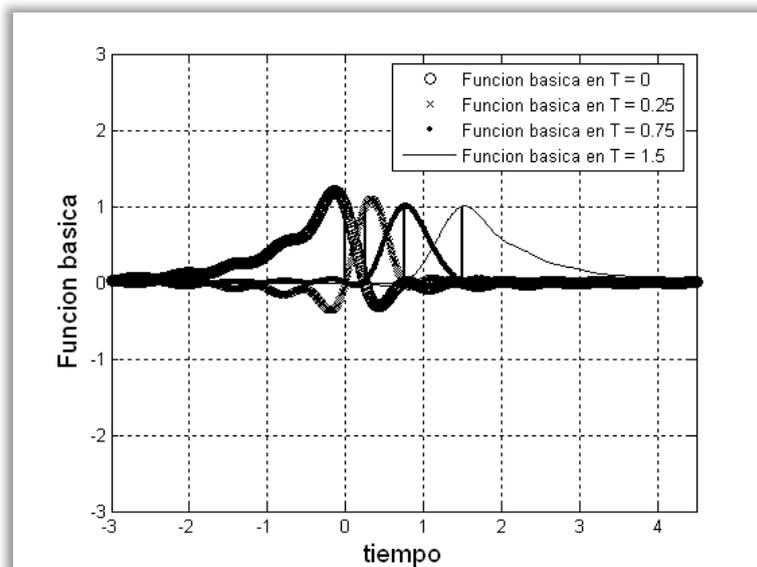


Figura A.8. Funciones básicas para el filtro Chebyshev de primer orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 0.63$ rad/seg y diferentes tiempos de muestreo.

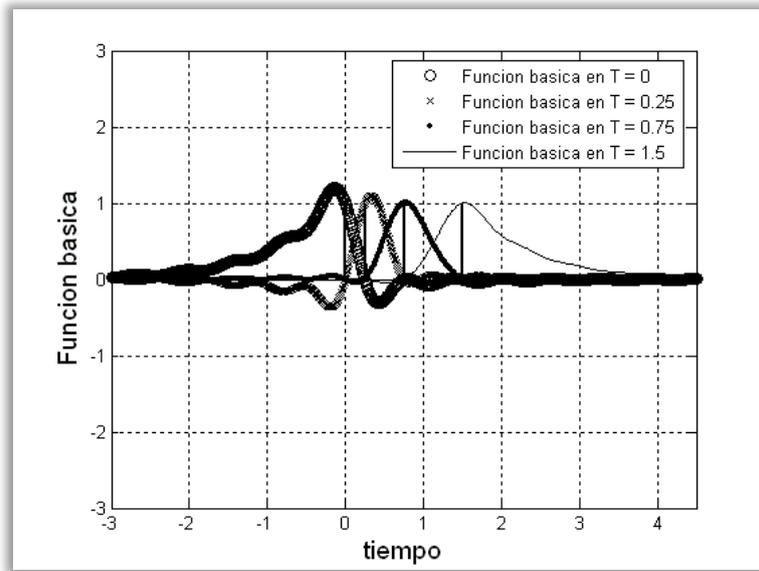


Figura A.9. Funciones básicas para el filtro Chebyshev de segundo orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 1.89$ rad/seg y diferentes tiempos de muestreo.

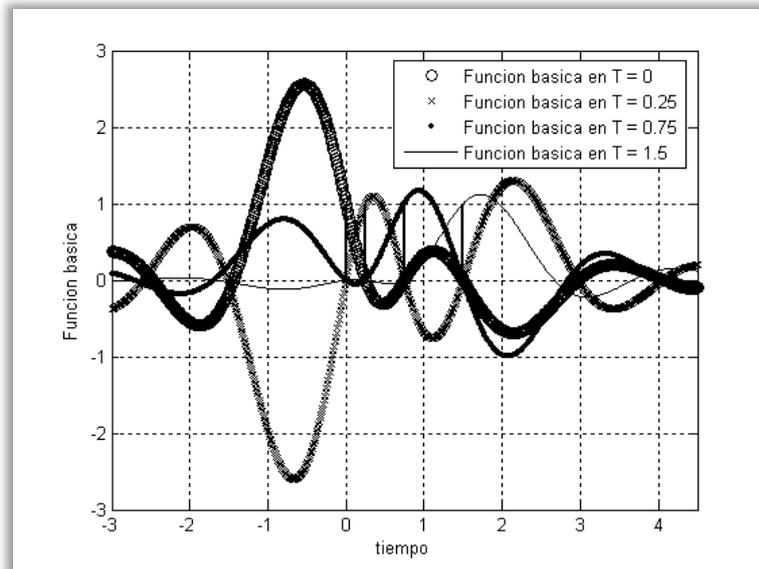


Figura A.10. Funciones básicas para el filtro Chebyshev de tercer orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 2.71$ rad/seg y diferentes tiempos de muestreo.

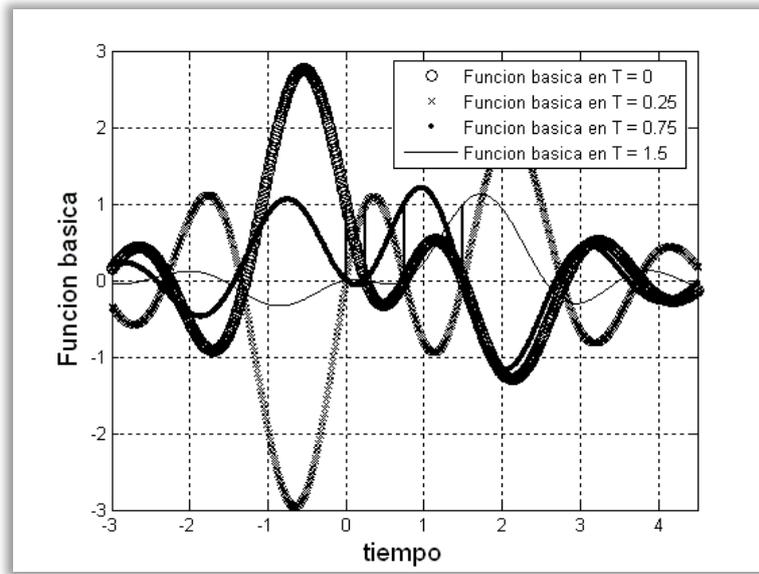


Figura A.11. Funciones básicas para el filtro Chebyshev de cuarto orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 3.25$ rad/seg y diferentes tiempos de muestreo.

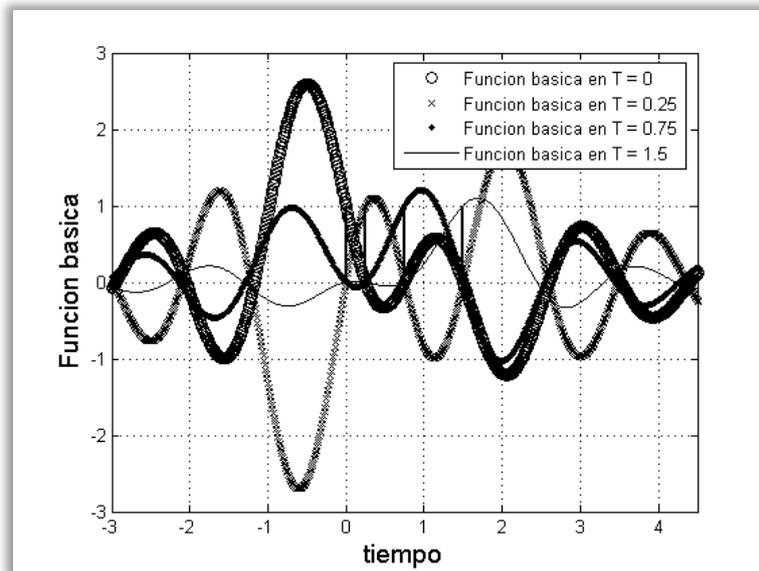


Figura A.12. Funciones básicas para el filtro Chebyshev de quinto orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 3.6$ rad/seg y diferentes tiempos de muestreo.

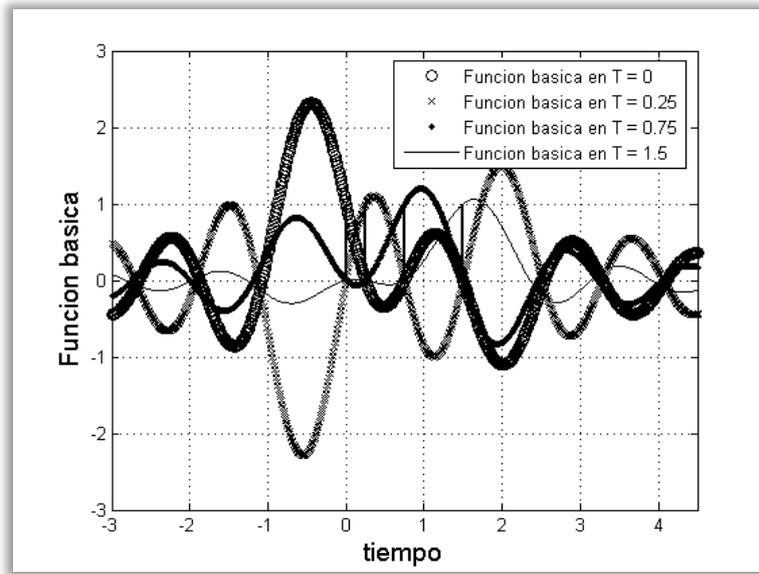


Figura A.13. Funciones básicas para el filtro Chebyshev de sexto orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 3.93$ rad/seg y diferentes tiempos de muestreo.

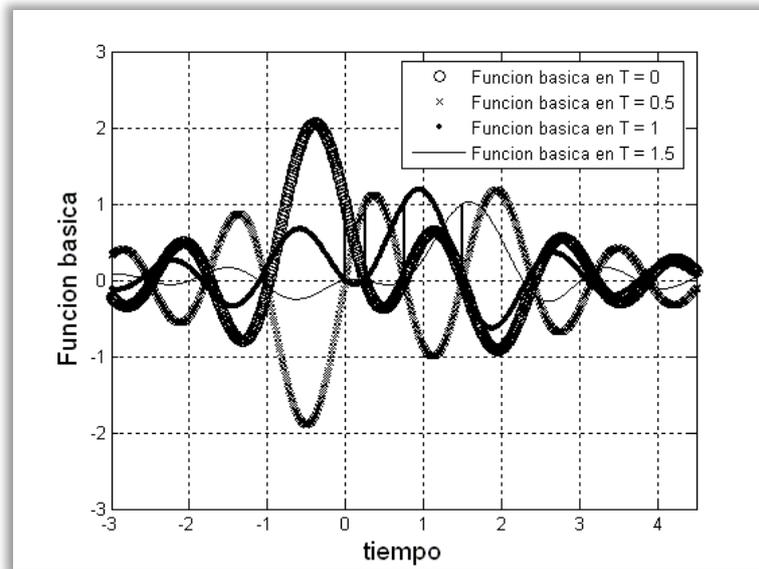


Figura A.14. Funciones básicas para el filtro Chebyshev de séptimo orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 4.24$ rad/seg y diferentes tiempos de muestreo.

APÉNDICE B

RECONSTRUCCIONES MEDIANTE EL FILTRO CHEBYSHEV:

B.1	Filtro Chebyshev de cuarto orden.....	90
B.2	Filtro Chebyshev de quinto orden.....	93
B.3	Filtro Chebyshev de sexto orden.....	95
B.4	Filtro Chebyshev de séptimo orden.....	98

Las siguientes figuras, son algunas reconstrucciones donde se puede apreciar como la densidad espectral de potencia del filtro Chebyshev influye en la forma de la función de covarianza y por ende en la precisión de reconstrucción del proceso.

Estas reconstrucciones fueron realizadas bajo los mismos parámetros que se presentaron en el capítulo 3. Estos parámetros son:

- 8 muestras (x) para la reconstrucción con valores de [0.3, 0.2, 0.4, 0.05, -0.2, -0.1, -0.1, 0.2] respectivamente.
- Un tiempo de muestreo (T) de 0.25 segundos entre muestras.
- Además la frecuencia de corte cambia para diferente orden del filtro, por ejemplo, para el filtro Chebyshev de cuarto orden es de $\omega_c = 3.25$ rad/seg, para el filtro Chebyshev de quinto orden es de $\omega_c = 3.6$ rad/seg, para el filtro Chebyshev de sexto orden es de $\omega_c = 3.93$ rad/seg y para el filtro Chebyshev de séptimo orden es de $\omega_c = 4.24$ rad/seg.

B.1 Filtro Chebyshev de cuarto orden

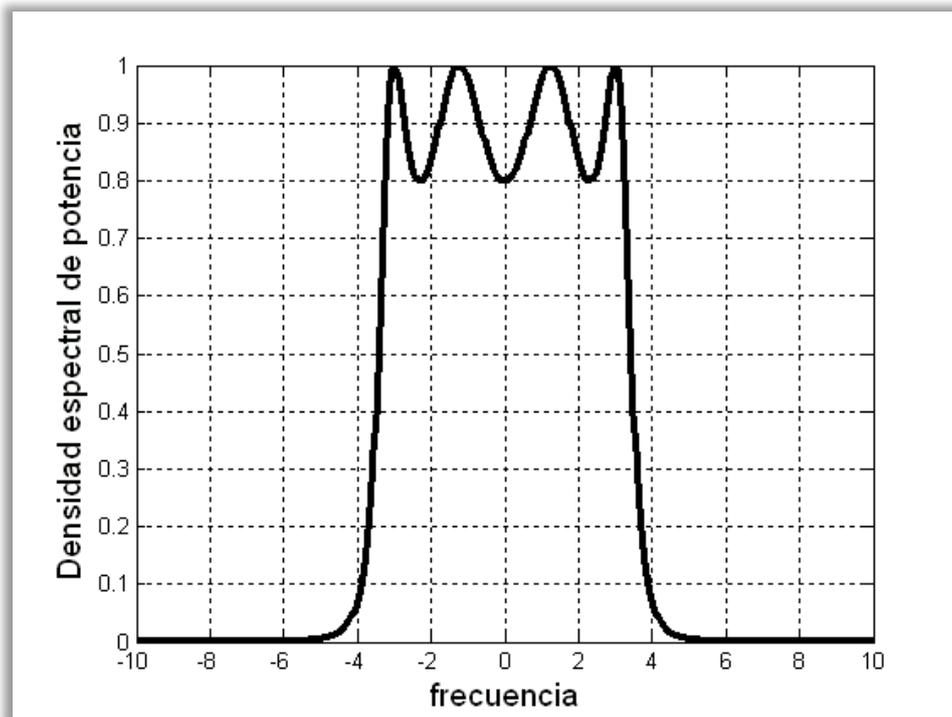


Figura B.1. Densidad espectral de potencia para el filtro Chebyshev de cuarto orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 3.25$ rad/seg.

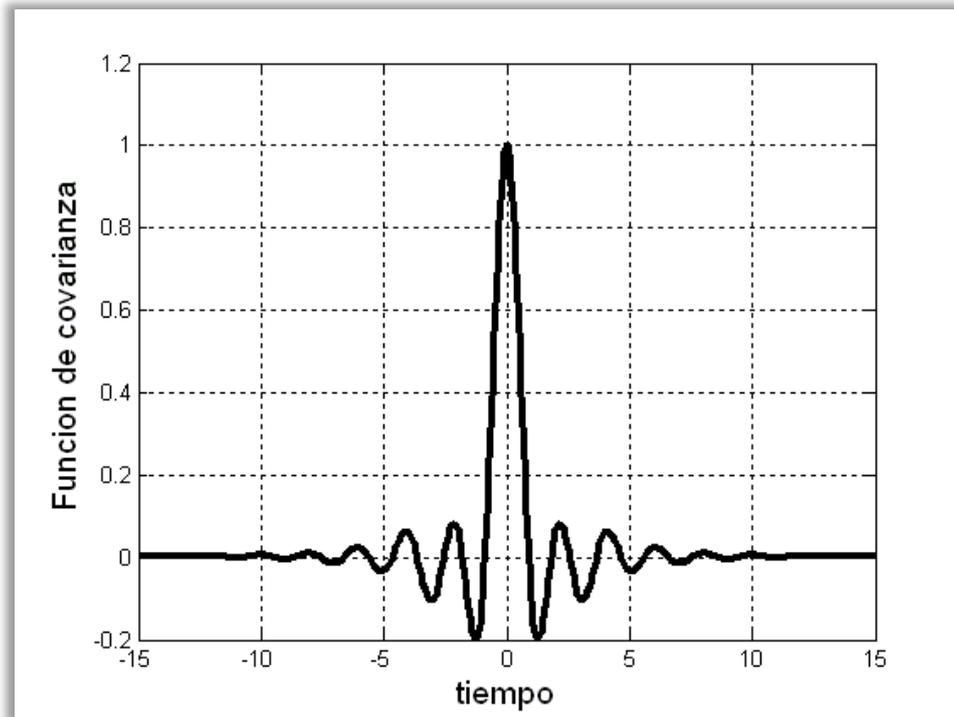


Figura B.2. Función de covarianza para el filtro Chebyshev de cuarto orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 3.25$ rad/seg.

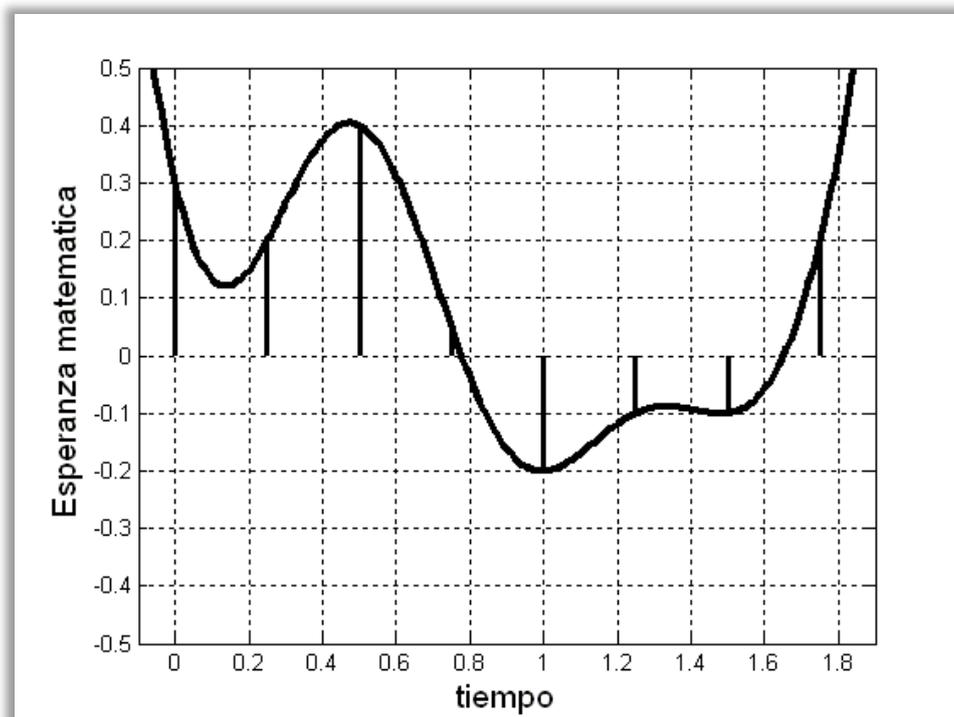


Figura B.3. Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de cuarto orden.

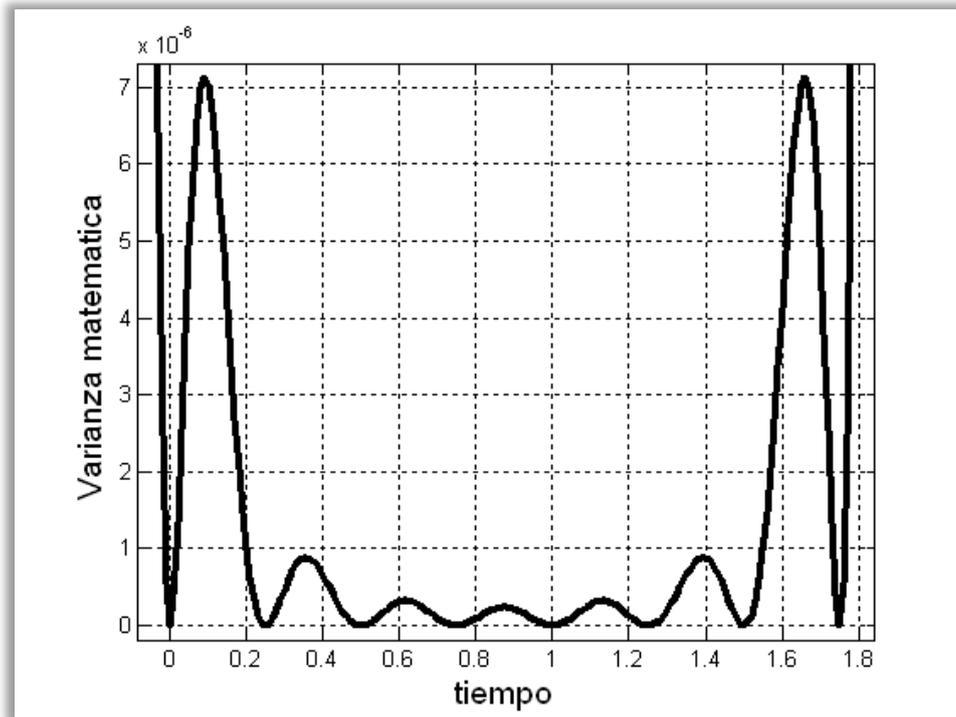


Figura B.4. Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de cuarto orden.

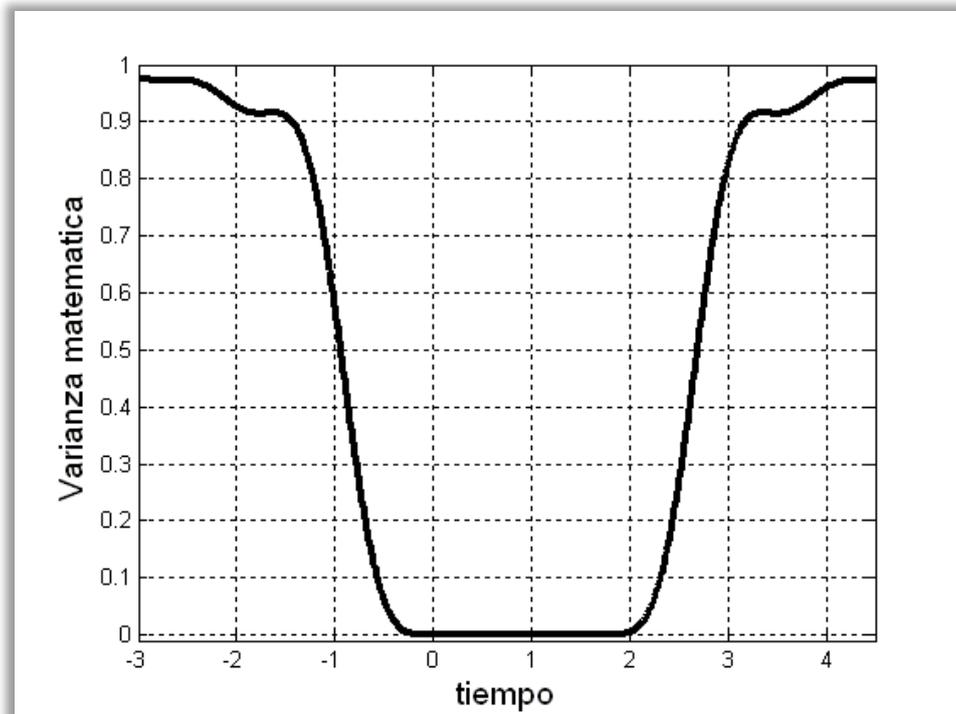


Figura B.5. Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro Chebyshev de cuarto orden.

B.2 Filtro Chebyshev de quinto orden

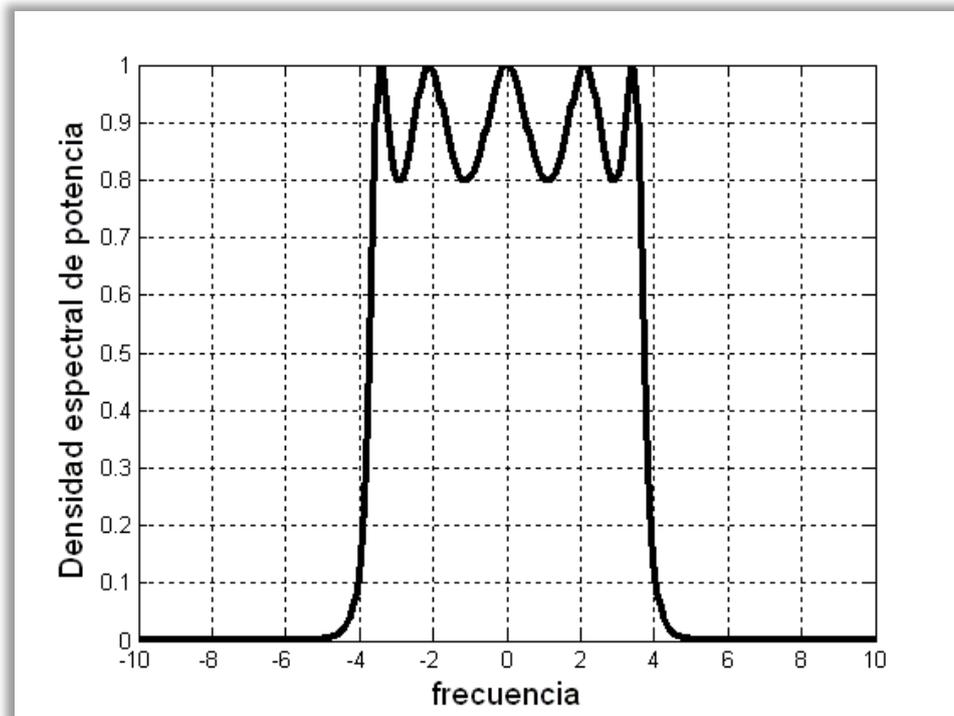


Figura B.6. Densidad espectral de potencia para el filtro Chebyshev de quinto orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 3.6$ rad/seg.

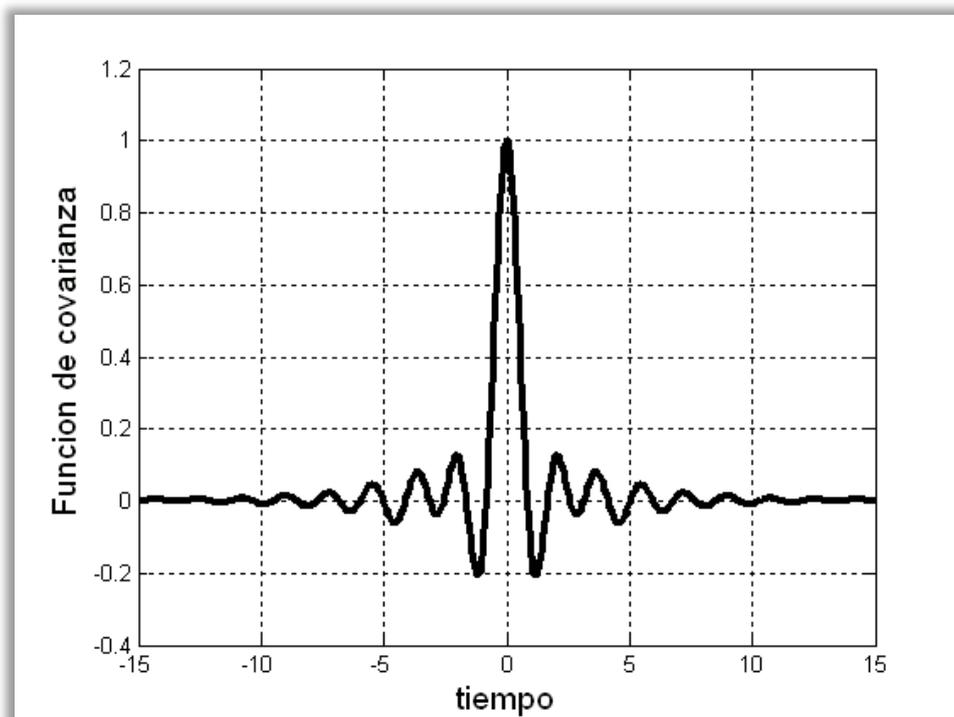


Figura B.7. Función de covarianza para el filtro Chebyshev de quinto orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 3.6$ rad/seg.

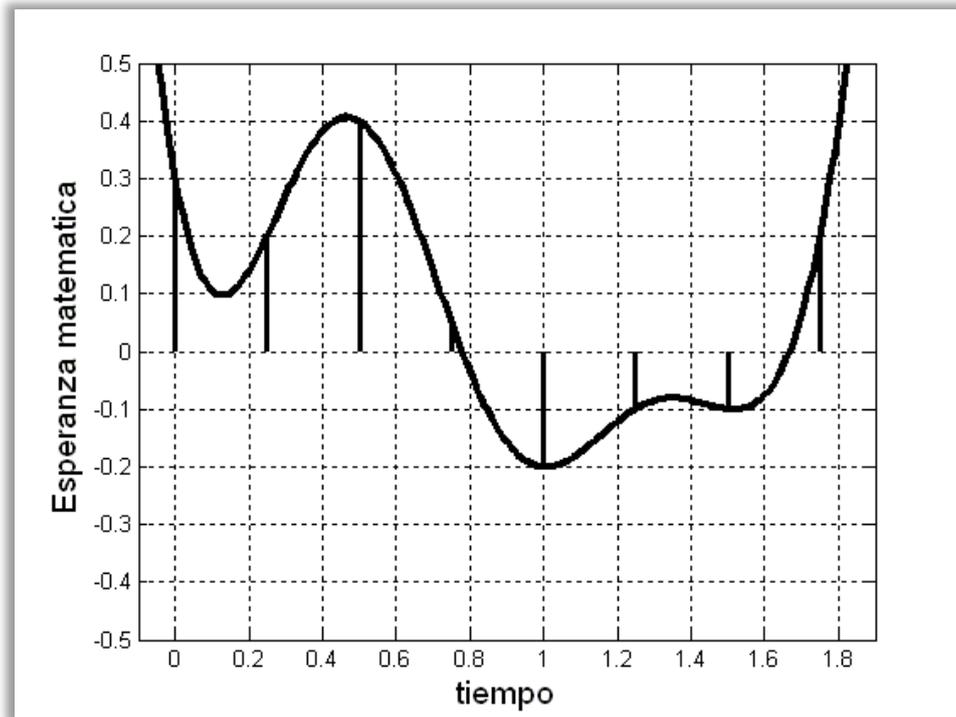


Figura B.8. Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de quinto orden.

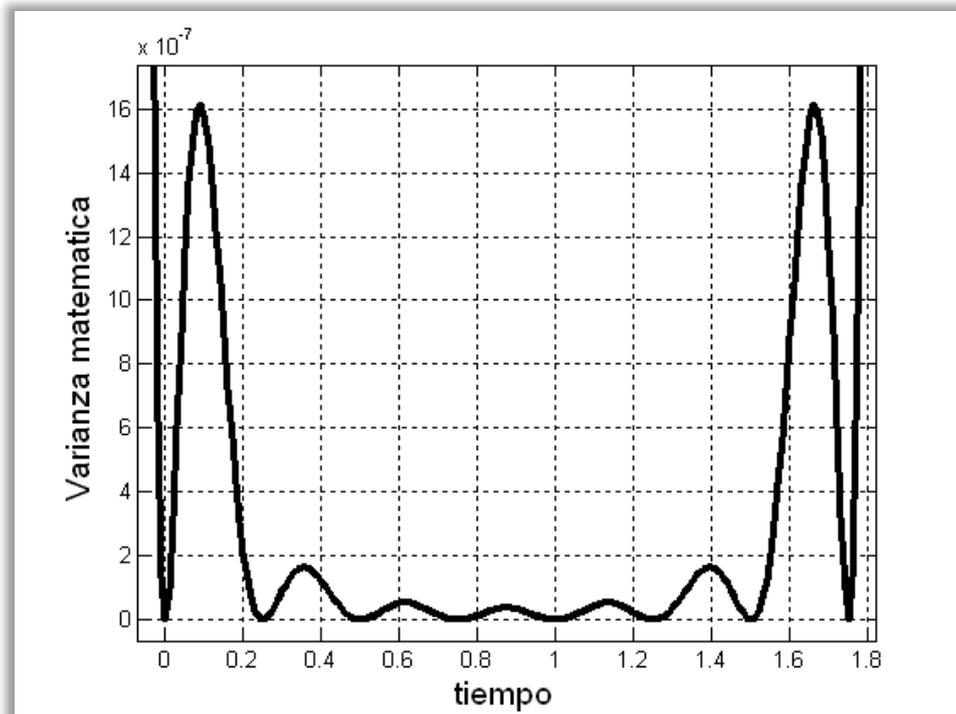


Figura B.9. Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de quinto orden.

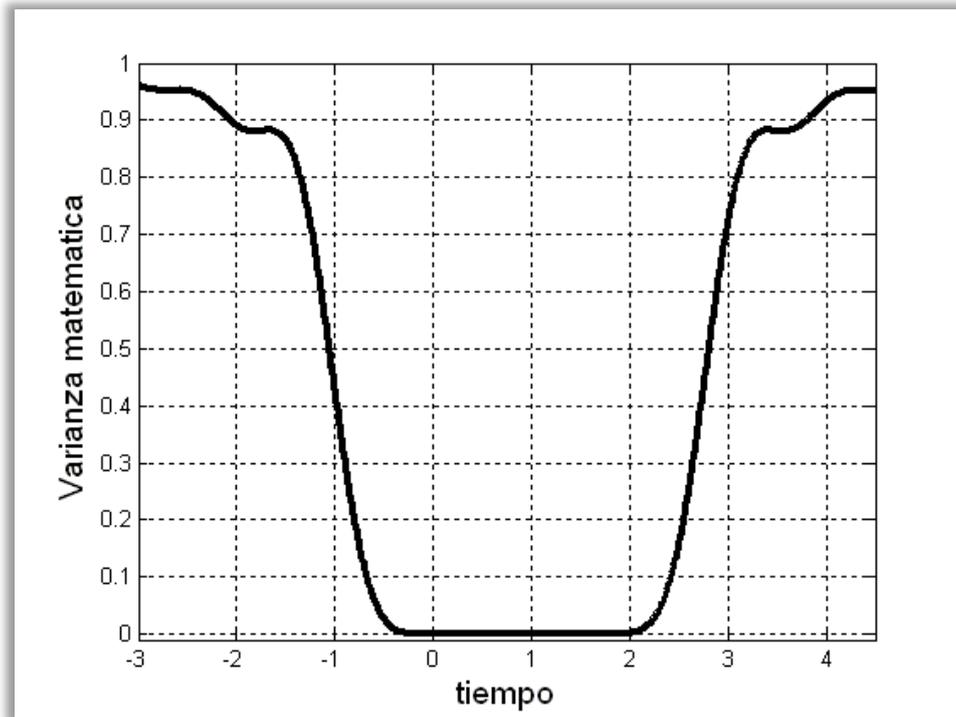


Figura B.10. Função de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolação utilizando un filtro Chebyshev de quinto orden.

B.3 Filtro Chebyshev de sexto orden

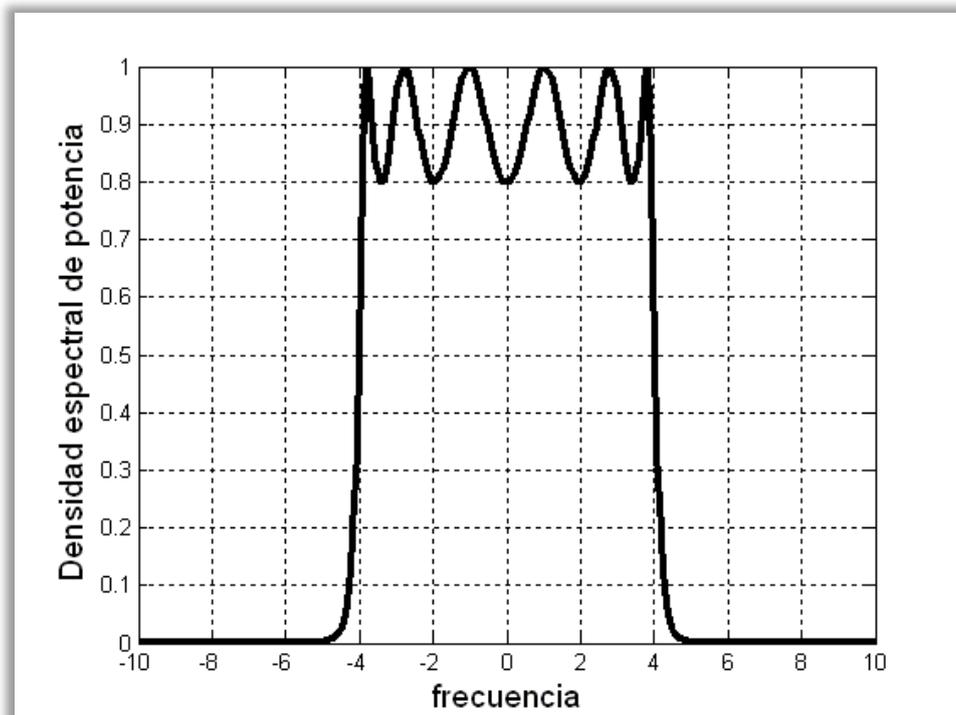


Figura B.11. Densidad espectral de potencia para el filtro Chebyshev de sexto orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 3.93$ rad/seg.

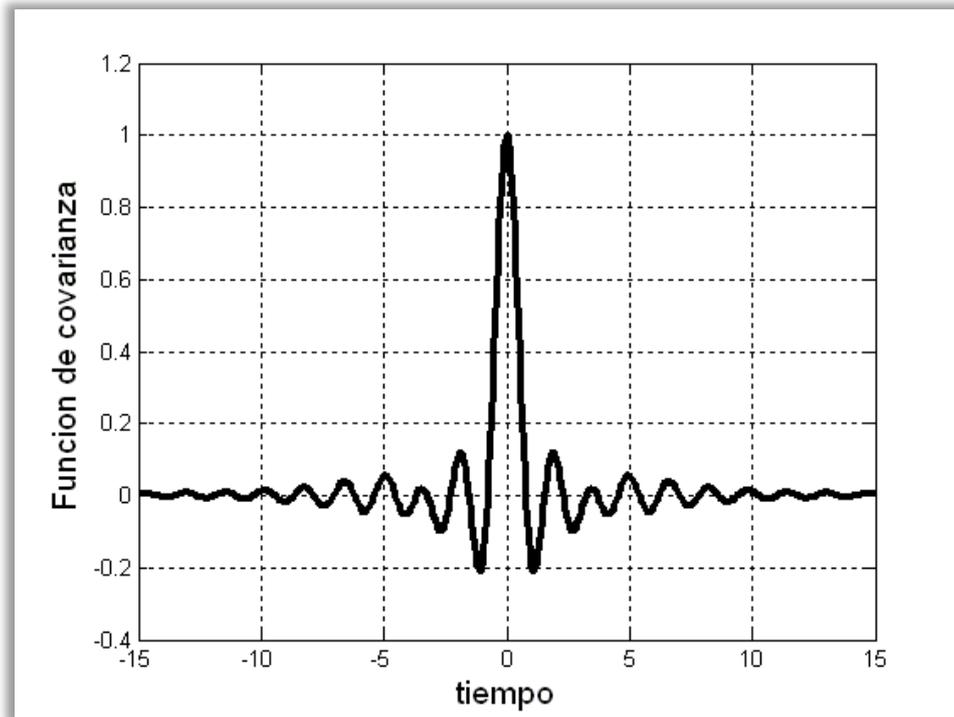


Figura B.12. Función de covarianza para el filtro Chebyshev de sexto orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 3.93$ rad/seg.

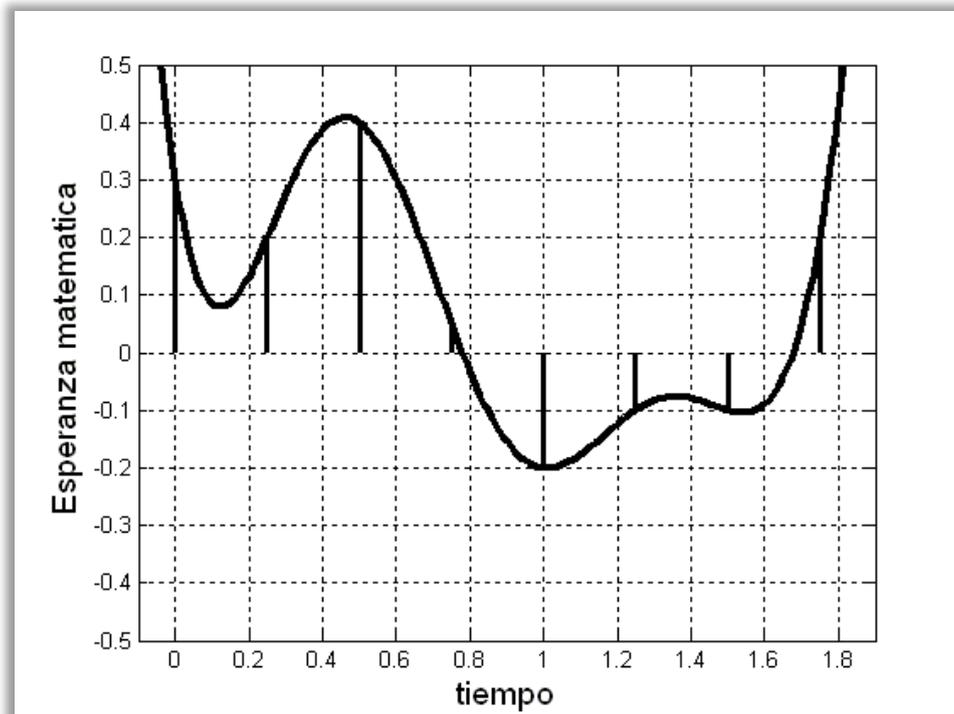


Figura B.13. Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de sexto orden.

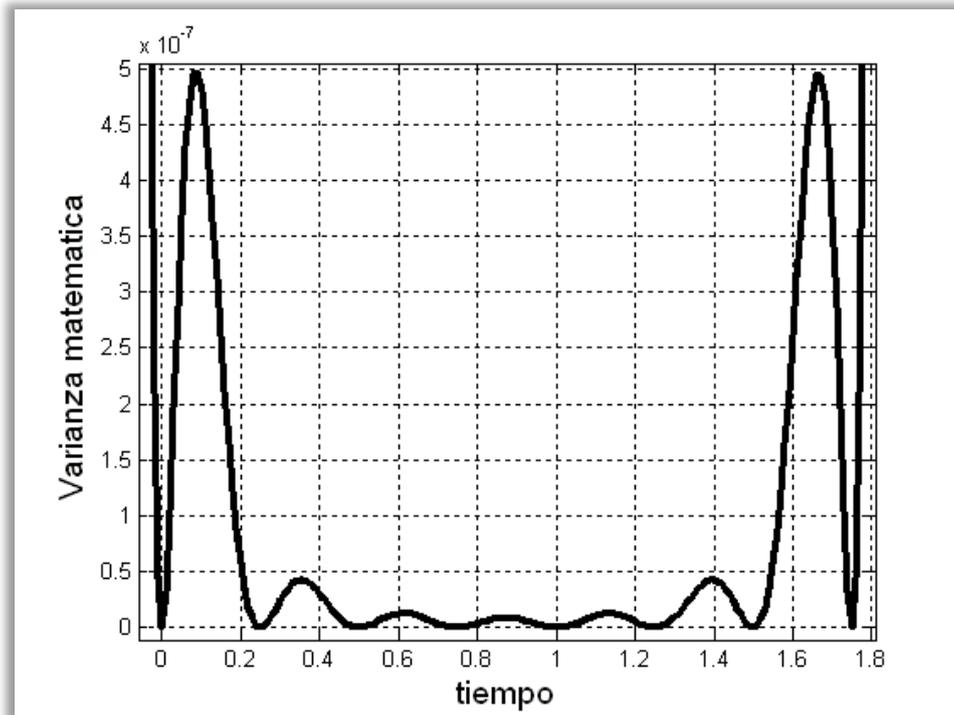


Figura B.14. Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de sexto orden.

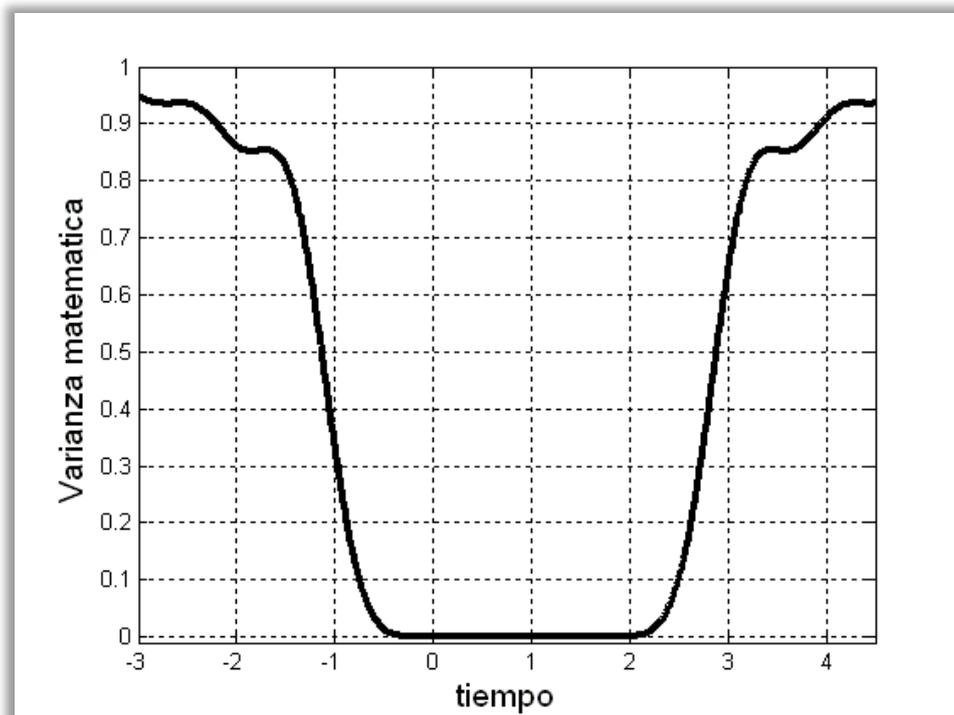


Figura B.15. Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro Chebyshev de sexto orden.

B.4 Filtro Chebyshev de séptimo orden

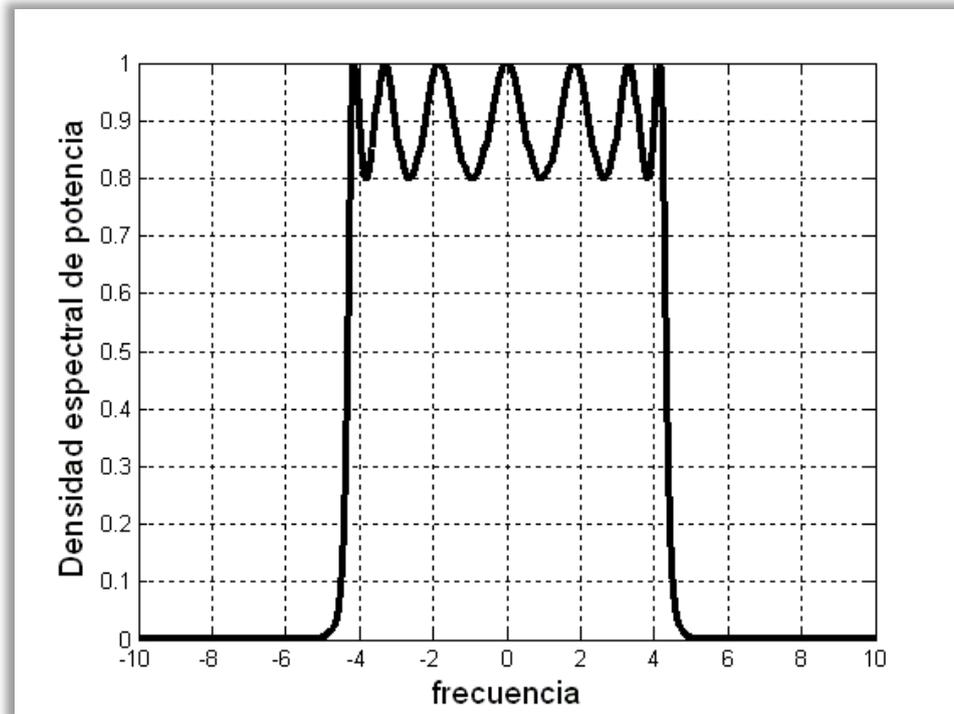


Figura B.16. Densidad espectral de potencia para el filtro Chebyshev de séptimo orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 4.24$ rad/seg.

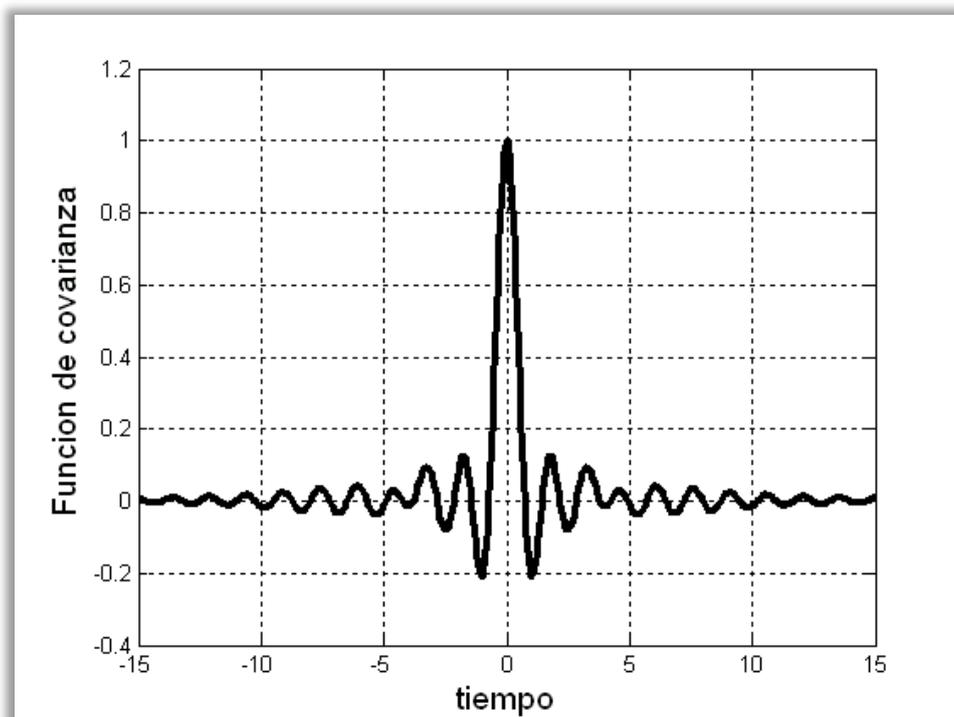


Figura B.17. Función de covarianza para el filtro Chebyshev de séptimo orden con una frecuencia de corte $\omega_c = 4.24$ rad/seg.

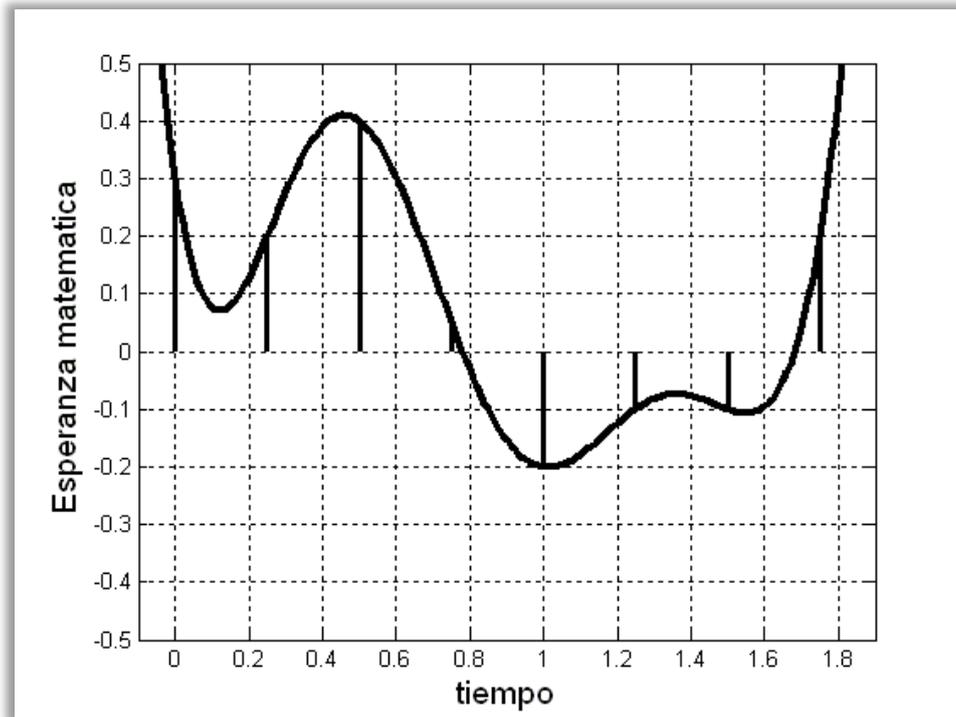


Figura B.18. Función de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de séptimo orden.

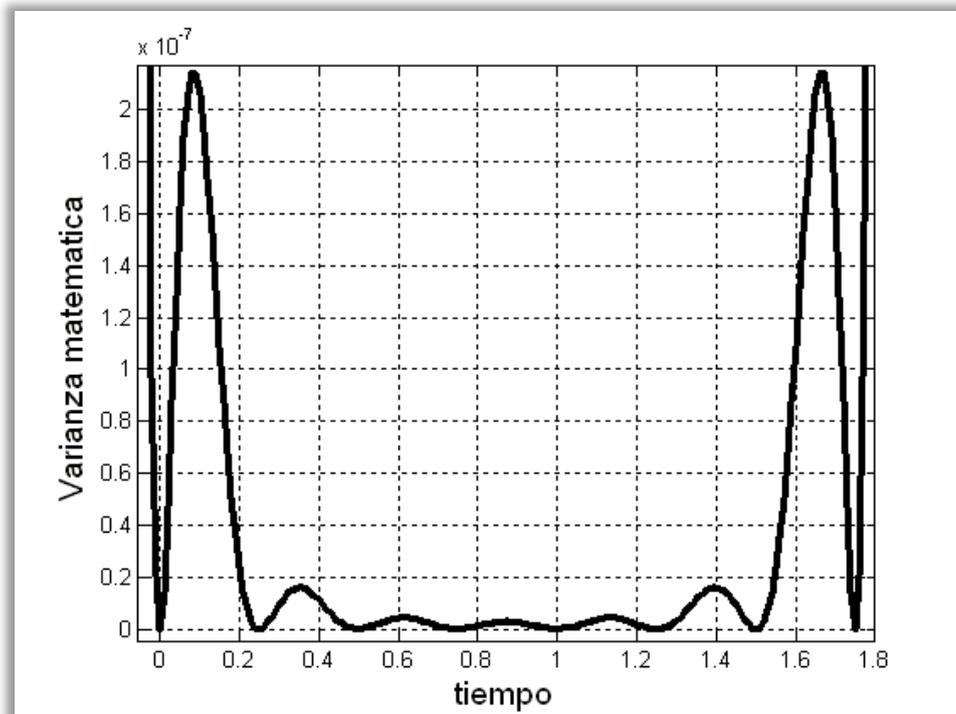


Figura B.19. Función de error de reconstrucción mostrada a detalle para la señal aleatoria propuesta utilizando un filtro Chebyshev de séptimo orden.

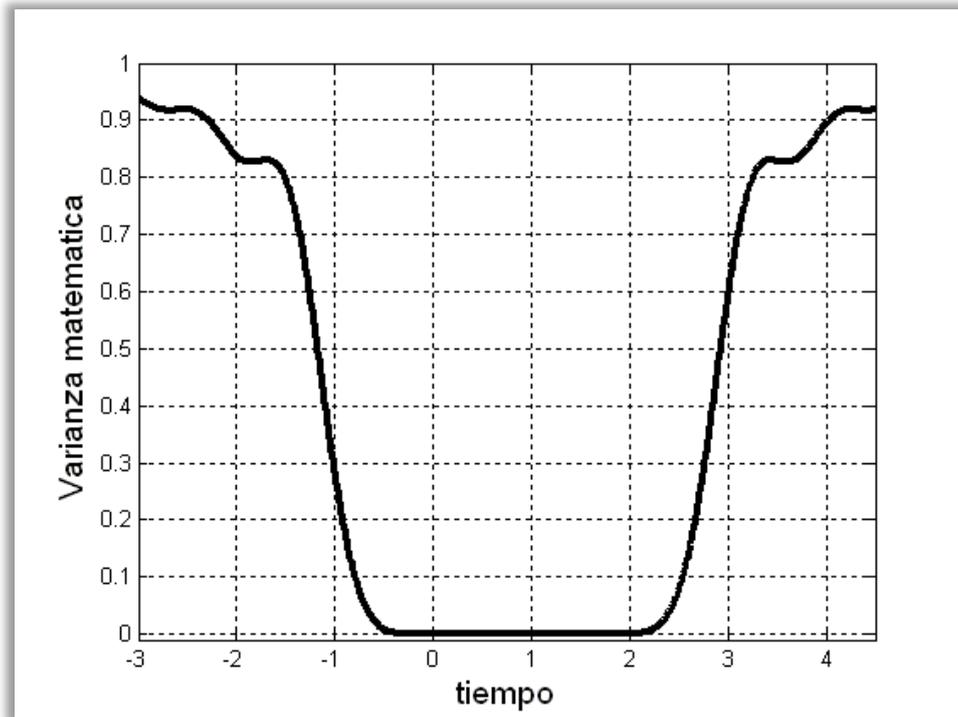


Figura B.20. Función de error de reconstrucción para la señal aleatoria propuesta donde se muestra la zona de extrapolación utilizando un filtro Chebyshev de séptimo orden.

APÉNDICE C

PROGRAMAS DE CÓMPUTO:

C.1	Varianza matemática para Filtros RC.....	102
C.2	Varianza matemática para Filtros Chebyshev	105
C.3	Funciones básicas.....	108
C.4	Densidad espectral de potencia y función de covarianza.....	110

Los siguientes programas fueron realizados con el objetivo de calcular los parámetros utilizados en la regla de la esperanza matemática condicional.

C.1 Varianza matemática para Filtros RC

Los siguientes son códigos realizados en matlab y sirven para calcular la varianza matemática condicional que hemos utilizado para calcular el error de reconstrucción para el proceso con muestras de valor: 0.3, 0.2, 0.4, 0.05, -0.2, -0.1, -0.1 y 0.2 respectivamente.

Filtro RC de una etapa

```
clear all;
clc;

% BLOQUE DE DATOS DE ENTRADA
N = 8;           %Numero de Muestras
a = 1;          %Valor de alfa para que el tiempo de covarianza sea igual a 1
T = 0:0.25:1.75; %Tiempo de muestreo
t = -0.1:0.05:1.9;
n = 1;
lon=length(t);

% BLOQUE DE LLENADO DE LA MATRIZ k
for i=1:1:N
    for j=1:1:N
        k(i,j) = exp(-a*abs(T(i)-T(j)));
    end
end

% MATRIZ INVERSA DE LA FUNCION DE COVARIANZA
A = inv(k);

%BLOQUE DE LLENADO DE LA FUNCION MATEMATICA DE VARIANZA
for x=1:1:lon
    for i=1:1:N
        for j=1:1:N
            rt(n,x) = exp(-a*abs(t(x)-T(i))) * A(i,j) * exp(-a*abs(T(j)-t(x)));
            rsuma = 1 - sum(rt,1);
            n = n+1;
        end
    end
end
end
```

Filtro RC de dos etapas

```
clear all;
clc;
clf;

% BLOQUE DE DATOS DE ENTRADA
N = 8;           %Numero de Muestras
a = 2;           %Valor de alfa para que el tiempo de covarianza sea igual a 1
T = 0:0.25:1.75; %Tiempo de muestreo
t = -0.1:0.05:1.9;
n = 1;
lon=length(t);

% BLOQUE DE LLENADO DE LA MATRIZ k
for i=1:1:N
    for j=1:1:N
        k(i,j) = (1+a*abs(T(i)-T(j))) * exp(-a*abs(T(i)-T(j)));
    end
end

%MATRIZ INVERSA DE k
A = inv(k);

% BLOQUE DE LLENADO DE LA FUNCION MATEMATICA DE VARIANZA
for x=1:1:lon
    for i=1:1:N
        for j=1:1:N
            rt(n,x) = (1+a*abs(t(x)-T(i))) * exp(-a*abs(t(x)-T(i))) * A(i,j) * (1+a*abs(T(j)-
t(x))) * exp(-a*abs(T(j)-t(x)));
            rsuma = 1 - sum(rt,1);
            n = n+1;
        end
    end
end
end
```

Filtro RC de tres etapas

```
% BLOQUE DE DATOS DE ENTRADA
N = 8;                %Numero de Muestras
a = 2;                %Valor de alfa para que el tiempo de covarianza sea igual a 1
T = 0:0.25:1.75;     %Tiempo de muestreo
t = -0.1:0.05:1.9;
n = 1;
lon=length(t);

% BLOQUE DE LLENADO DE LA MATRIZ k
for i=1:1:N
    for j=1:1:N
        k(i,j) = (1+a*abs(T(i)-T(j))+((a^2)*((T(i)-T(j))^2)/3))*exp(-a*abs(T(i)-T(j)));
    end
end

%MATRIZ INVERSA DE k
A = inv(k);

% BLOQUE DE LLENADO DE LA FUNCION MATEMATICA DE VARIANZA
for x=1:1:lon
    for i=1:1:N
        for j=1:1:N
            rt(n,x) = (1+a*abs(t(x)-T(i))+((a^2)*((t(x)-T(i))^2)/3))*exp(-a*abs(t(x)-
T(i)))*A(i,j)*(1+a*abs(T(j)-t(x))+((a^2)*((T(j)-t(x))^2)/3))*exp(-a*abs(T(j)-t(x)));
            rsuma = 1 - sum(rt,1);
            n = n+1;
        end
    end
end
end
```

C.2 Varianza matemática para Filtros Chebyshev

El siguiente código al igual que los anteriores funciona para calcular la varianza matemática condicional. Nótese que en este caso los únicos parámetros a cambiar son el orden del filtro y la frecuencia de corte.

```
clear all;
clc;

ep=0.5;
orden = 1;           %Orden del filtro
wc= 0.63;           %Frecuencia de corte
NM = 8;             %Numero de muestras
T=0:0.25:1.75;     %Tiempo de muestreo
Mu = [0.3,0.2,0.4,0.05,-0.2,-0.1,-0.1,0.2]; %Valor de las muestras

nt=1501;
Dt=0.01;
nw=1001;
Dw=0.02;
Dw2=0.01;

kyj=0;
for l=1:nw
    w(l)=(l-1)*Dw2;
    kxj=(1/(1+(ep*cos(orden*acos(w(l)/wc))^2)));

    if (l==0 | l==nw)           %Integral del Espectro
        kyj=kyj+kxj;
    elseif mod(l,2) == 0
        kyj=kyj+2*kxj;
    else
        kyj=kyj+4*kxj;
    end
end
sig2=(kyj*Dw2)/(3*pi)
```

```

% MATRIZ DE COVARIANZA
for m=1:NM
  for j=1:NM
    kyj=0;
    for l=1:nw
      w(l)=(l-1)*Dw2;
      kxj=(1/(1+(ep*cos(ordena*cos(w(l)/wc))^2))*cos(w(l)*(T(m)-T(j))));

      if (l==0 | l==nw)                                %Integral del Espectro
        kyj=kyj+kxj;
      elseif mod(l,2) == 0
        kyj=kyj+(2*kxj);
      else
        kyj=kyj+(4*kxj);
      end
    end
    Kx(m,j)=(kyj*Dw2)/(3*sig2*pi);
  end
end
A=inv(real(Kx));

Tinic=-3;
for n=1:nt
  tx(n)=Tinic+(n-1)*Dt;
  Var(n)=1;
  for m=1:NM
    kyi=0;
    for l=1:nw
      w(l)=(l-1)*Dw2;
      kxi=(1/(1+(ep*cos(ordena*cos(w(l)/wc))^2))*cos(w(l)*(tx(n)-T(m))));

      if (l==0 | l==nw)                                %Integral del Espectro
        kyi=kyi+kxi;
      elseif mod(l,2) == 0
        kyi=kyi+2*kxi;
      else
        kyi=kyi+4*kxi;
      end
    end
    K2i=(kyi*Dw2)/(3*sig2*pi);                          %Calculo de la Integral K2i
  end
  for j=1:NM;
    kyj=0;
    for l=1:nw
      w(l)=(l-1)*Dw2;
      kxj=(1/(1+(ep*cos(ordena*cos(w(l)/wc))^2))*cos(w(l)*(T(j)-tx(n))));
    end
  end
end

```

```

    if (l==0 | l==nw)                                %Integral del Espectro
        kyj=kyj+kxj;
    elseif mod(l,2) == 0
        kyj=kyj+2*kxj;
    else
        kyj=kyj+4*kxj;
    end
end
end
K2j=(kyj*Dw2)/(3*sig2*pi);                          %Calculo de la Integral K2j
Var(n)=Var(n)-(K2i*A(m,j)*K2j);                    %Varianza condicional
end
end
end

figure
plot(tx,Var)      % Se grafica el valor de la funcion evaluada contra el vector tiempo
axis([-3, 4.5, -0.01,1])
xlabel('tiempo')
ylabel('Varianza matematica')
grid on

```

C.3 Funciones básicas

La función del siguiente código es generar funciones básicas en cada muestra del proceso a reconstruir, al final la suma de todas y cada una de estas funciones va a proporcionar lo que conocemos como esperanza matemática condicional.

```
clear all;
clc;

ep=0.5;           %Amplitud del rizo
orden = 1;        %Orden del filtro
wc= 0.63;         %Frecuencia de corte
NM=4;            %Numero de muestras
T=[0,0.25,0.75,1.5]; %Tiempo de muestreo

nt=1501;
Dt=0.01;
nw=1001;
Dw=0.02;
Dw2=0.01;

kyj=0;
for l=1:nw
    w(l)=(l-1)*Dw2;
    kxj=(1/(1+(ep*cos(orden*acos(w(l)/wc))^2)));

    if (l==0 | l==nw)           %Integral del Espectro
        kyj=kyj+kxj;
    elseif mod(l,2) == 0
        kyj=kyj+2*kxj;
    else
        kyj=kyj+4*kxj;
    end
end
sig2=(kyj*Dw2)/(3*pi)

% MATRIZ DE COVARIANZA
for m=1:NM
    for j=1:NM
        kyj=0;
        for l=1:nw
            w(l)=(l-1)*Dw2;
            kxj=(1/(1+(ep*cos(orden*acos(w(l)/wc))^2))*cos(w(l)*(T(m)-T(j))));

            if (l==0 | l==nw)           %Integral del Espectro
                kyj=kyj+kxj;
            elseif mod(l,2) == 0
                kyj=kyj+(2*kxj);
            else
                kyj=kyj+(4*kxj);
            end
        end
    end
end
```

```

    end
    Kx(m,j)=real((kyj*Dw2)/(3*sig2*pi));
end
end
Kx
A=inv(Kx)

Tinic=-3;
for n=1:nt
    tx(n)=Tinic+(n-1)*Dt;
    Fb1(n)=0;
    Fb2(n)=0;
    Fb3(n)=0;
    Fb4(n)=0;
    for m=1:NM
        kyj=0;
        for l=1:nw
            w(l)=(l-1)*Dw2;
            kxj=(1/(1+(ep*cos(orden*acos(w(l)/wc)))^2))*cos(w(l)*(tx(n)-T(m)));

            if (l==0 | l==nw)                %Integral del Espectro
                kyj=kyj+kxj;
            elseif mod(l,2) == 0
                kyj=kyj+2*kxj;
            else
                kyj=kyj+4*kxj;
            end
        end
        end
        K2i=(kyj*Dw2)/(3*sig2*pi); %Calculo de la Integral
        j=1;
        Fb1(n)=Fb1(n)+(K2i*A(m,j));          %Funcion básica
        j=2;
        Fb2(n)=Fb2(n)+(K2i*A(m,j));
        j=3;
        Fb3(n)=Fb3(n)+(K2i*A(m,j));
        j=4;
        Fb4(n)=Fb4(n)+(K2i*A(m,j));
    end
end

figure
plot(tx,Fb1,tx,Fb2,tx,Fb3,tx,Fb4)
grid on
xlabel('tiempo')
ylabel('Funcion basica')
axis([-3, 4.5, -3, 3])
legend('Funcion basica en T = 0','Funcion basica en T = 0.25','Funcion basica en T = 0.75','Funcion basica en T = 1.5')

```

C.4 Densidad espectral de potencia y función de covarianza

A continuación se presenta el código de dos parámetros fundamentales para calcular la esperanza matemática condicional. La forma que tomen la densidad espectral de potencia y la función de covarianza nos proporciona información acerca de cómo será la función básica y con ello cómo será la reconstrucción del proceso.

```
clear all;
clc;

ep=0.5;           %Amplitud del rizo
orden = 1;        %Orden del filtro
wc=0.63;          %Frecuencia de corte

nt=301;
Dt=0.1;
nw=1001;
Dw=0.02;
Dw2=0.01;

funcion = @(w) (1./(1+(ep.*cos(orden.*acos(w./wc))).^2)); %Se define la integral
sig = (1/(2*pi))*quad(funcion,-40,40) % Se evalua la varianza
st=(1/(1+(ep*cos(orden*acos(0/wc)))^2));

%DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA
for r=1:401
    w1(r)=-10+(r-1)*0.05;
    sw1(r)=(1/(1+(ep*cos(orden*acos(w1(r)/wc)))^2));
end
plot(w1,sw1) % Se grafica el valor de la funcion evaluada contra el vector tiempo
axis([-10, 10, 0,1])
grid on
```

```

%FUNCION DE COVARIANZA TCov
tyj=0;
for m=1:nt
    tau(m)=(m-1)*Dt;
    kyj=0;
    for l=1:nw
        w(l)=(l-1)*Dw2;
        kxj=(1/(1+(ep*cos(orden*acos(w(l)/wc))^2))*cos(w(l)*tau(m)));

        if (l==0 | l==nw)                                %Integral del Espectro
            kyj=kyj+kxj;
        elseif mod(l,2) == 0
            kyj=kyj+2*kxj;
        else
            kyj=kyj+4*kxj;
        end
    end
    cov(m)=(kyj*Dw2)/(3*sig*pi);                          %Calculo de Fcovarianza

    if (m==0 | m==nt)                                    %Integral de Fcovarianza
        tyj=tyj+abs(cov(m));
    elseif mod(m,2) == 0
        tyj=tyj+abs(2*cov(m));
    else
        tyj=tyj+abs(4*cov(m));
    end
end
tc=(tyj*Dt/3)                                           %Calculo de Tiempo de covarianza

figure
plot(tau,cov)      % Se grafica el valor de la funcion evaluada contra el vector tiempo
axis([0, 30, -0.25,1])
grid on

```

REFERENCIAS

- [1] B. P. Lathi, "Modern Digital and Analog Communication Systems", 3rd Edition, Oxford University Press, 1998. pp. 251-253.
- [2] Tarmo Anttalainen, "Introduction Telecommunications Network Engineering", 2nd Edition, Artech House.
- [3] C. E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication", Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp.379-423, 623-656, July, 1948.
- [4] C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise", Proc. IRE, Vol. 37, pp. 10-21, 1949.
- [5] Shoichiro Nakamura, "Métodos Numéricos Aplicados con Software", Prentice Hall, 1992.
- [6] J. Stoer & R. Burlisch, "Introduction to Numerical Analysis", 2nd Edition, Springer, 1980.
- [7] A. V. Balakrishnan, "A note on the sampling principle for continuous signals", IRE Trans. on Inf. Theory, Vol. IT-3, pp.169-176, 1957.
- [8] R. E. Ziemer & W. H. Tantrer, "Principios de Comunicaciones: Sistemas Modulación y Ruido", 1^a Edición, Trillas, Enero, 1981.
- [9] Peebles P. Z., "Probability, Random Variables & Random Signal Principles", 2nd Edition, 1994 McGraw-Hill.
- [10] S. Haykin, "Communication Systems", 4th Edition, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [11] Leon W. Couch II, "Sistemas de Comunicación Digitales y Analógicos", 5a. Edición, Prentice Hall, México, 1998.
- [12] H. Cramer, *Mathematical and Methods of Statistics*, Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1946.
- [13] R. L. Stratanovich, *Topics in the Theory of Random Noise*, Vol. 1, New York: Gordon and Breach, 1963.