

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO DE
TECNOLOGÍA DIGITAL**

**MAESTRIA EN CIENCIAS CON
ESPECIALIDAD EN SISTEMAS DIGITALES**

**“APLICACIONES DE ESPECTROS DE
ORDEN SUPERIOR”**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS**

PRESENTA:

MENDOZA SANTIAGO JOSÉ JULIO

MAYO 16 DEL 2002

TIJUANA, B.C., MÉXICO



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de TIJUANA, B.C. siendo las 12:00 horas del día 15 del mes de AGOSTO del 2002 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CITEDI para examinar la tesis de grado titulada:

APLICACIONES DE ESPECTROS DE ORDEN SUPERIOR.

Presentada por el alumno:

MENDOZA

Apellido paterno

SANTIAGO

materno

JOSE JULIO

nombre(s)

Con registro:

9	8	0	7	1	4
---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN SISTEMAS DIGITALES

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis


DR. JUAN GARCIA LOPEZ


DR. LUIS ARTURO GONZALEZ HERNANDEZ


DR. SERGIO ANTONIO HERRERA GARCIA


M.C. OSCAR HUMBERTO MONTIEL ROSS




M.C. ERNESTO EDUARDO QUIROZ MORONES

S. E. P.
INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACION Y DESARROLLO
DE TECNOLOGIA DIGITAL
DIRECCION


DR. ALFONSO ANGELES VALENCIA

RESUMEN

Este trabajo trata de la aplicación de técnicas basadas en Espectros de Orden Superior (EOS) a procesamiento digital de señales, poniendo énfasis en el Biespectro. Dos aproximaciones principales se emplean para estimar los Espectros de Orden Superior: el método convencional (Tipo de "Fourier") y la aproximación paramétrica, ésta se basa en los modelos autoregresivo (AR), promedio móvil (MA) y ARMA. Se describe la aplicación del biespectro para la estimación de tiempos de atraso, detección de no linealidades y recuperación de señales.

ABSTRACT

This work is concerned with the application of techniques based on Higher Order Spectra (HOS) to digital signal processing, emphasizing on the bispectrum. Two main approaches are used for estimating higher-order spectra, namely, the conventional ("Fourier" type) and parametric approach, which is based on autoregressive (AR), moving average (MA) and ARMA models. Higher Order Spectra are used for time delay estimation (TDE), to detect certain types of nonlinearities in a time series using a Volterra filter and a signal recovery method using the bispectrum.

CONTENIDO

	página
RESUMEN.....	i
ABSTRACT.....	i
CONTENIDO.....	ii
Índice de figuras.....	iv
Índice de tablas.....	v
Índice de símbolos y acrónimos.....	vi
INTRODUCCIÓN.....	1

CAPÍTULO I. ESPECTROS DE ORDEN SUPERIOR

I.1 Introducción.....	2
I.2 Momentos y cumulantes.....	3
I.2.1 Relaciones entre momentos y cumulantes.....	4
I.2.2 Propiedades de momentos y cumulantes.....	5
I.3 Espectros cumulantes o poliespectros.....	7
I.3.1 Definición.....	7
I.3.2 Variancia, Sesgo, Kurtosis.....	10
I.3.3 Procesos de ruido blanco no Gaussiano.....	10
I.3.4 Sistemas lineales no Gaussianos.....	13
I.3.5 Sistema no lineales.....	15

CAPÍTULO II. MÉTODOS PARA OBTENER LOS POLIESPECTROS

II.1 Introducción.....	17
II.2 Métodos no paramétricos.....	17
II.2.1 Método indirecto.....	18
II.2.2 Método directo.....	19
II.3 Métodos paramétricos.....	20
II.3.1 Solución en forma cerrada.....	20
II.3.2 Solución basada en modelo ARMA.....	21
II.3.3 Obtención de la magnitud y la fase empleando el biespectro.....	24

CAPÍTULO III. ESTIMACIÓN DE TIEMPOS DE ATRASO Y DE PARÁMETROS DE SEÑALES TRANSITORIAS

III.1 Introducción.....	26
III.2 Estimación de tiempos de atraso usando el biespectro.....	26
III.2.1 Método convencional de estimación de tiempos de atraso basado en estadísticos de orden superior.....	27
III.2.2 Método paramétrico de estimación de tiempo de atraso en el dominio del Biespectro.....	28
III.3 Estimación de parámetros de señales transitorias.....	30
III.3.1 Formulación del problema.....	30
III.3.2 Método de estimación paramétrica	31
III.4 Ejemplos.....	33

CAPÍTULO IV. DETECCIÓN DE NO LINEALIDADES EN SERIES TEMPORALES

IV.1 Introducción.....	37
IV.2 Sistemas de Volterra.....	37
IV.2.1 Fórmula general de un sistema no lineal de Volterra.....	37
IV.2.2 Filtros de Volterra de Segundo Orden.....	38
IV.2.3 Identificación teniendo una entrada Gaussiana conociendo la entrada y la salida.....	38
IV.2.4 Ejemplo de simulación	41
IV.3 Detección de acoplamiento cuadrático de fase.....	42
IV.3.1 Ejemplo de Simulación.....	43
IV.4 Método alternativo.....	45
IV.4.1 Ejemplo.....	46

CAPÍTULO V. RECUPERACIÓN DE SEÑALES

V.1 Introducción.....	49
V.2 Reconstrucción de señales usando sólo la fase.....	49
V.2.1 Método de reconstrucción de fase.....	49

V.3 Recuperación de magnitud y fase usando el biespectro.....	51
V.3.1 Algoritmo de recuperación de fase.....	52
V.3.2 Algoritmo Matsuoka-Ulrych.....	52
RESUMEN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	54
REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA.....	55
APÉNDICE A Estadísticos de orden superior de señales Gaussianas.....	58
APÉNDICE B Promedio del producto de variables Gaussianas.....	60
APÉNDICE C Identification of nonlinear system based on the bispectrum and a second order volterra model.....	64

Índice de figuras

Fig. I.2.1 Fdp Gaussiana.....	6
Fig. I.3.1 Definición de espectros de orden superior.....	7
Fig. I.3.2 Simetría de los momentos de tercer orden.....	8
Fig. I.3.3 Simetría de la DEP.....	8
Fig. I.3.4 Regiones de simetría del biespectro.....	9
Fig. I.3.5 (a) Secuencia de covariancia (b) Espectro de potencia (c) Cumulantes de tercer orden (d) Biespectro del proceso aleatorio $x(n) = W(n) - W(n-1)$	12
Fig. I.3.6 Sistema lineal no Gaussiano.....	13
Fig. I.3.7 Sistema lineal con entrada no Gaussiana.....	14
Fig. I.3.8 Sistema no lineal.....	15
Fig. I.3.9 Impulso en el biespectro producido por un sistema no lineal.....	16
Fig. II.2.1 División de las N muestras.....	18
Fig. III.4.1 Estimación de atraso de tiempo empleando correlación cruzada (a) TE 15.9987, 64 muestras b) 16.0059, muestras 128.....	34
Fig. III.4.2 Estimación de atraso de tiempo empleando cumulantes cruzados a) TE 16, 64 muestras b) TE 16, muestras 128.....	35
Fig. III.4.3 Estimación de los ceros de la señal empleando los cumulantes de tercer orden.....	36
Fig. IV.2.1 Sistema de Volterra de Segundo Orden.....	38
Fig. IV.2.2 Función de transferencia parte lineal (a) Verdadera (b) Estimada.....	41

Fig. IV.2.3 Función de transferencia parte cuadrática (a) Verdadera (b) Estimada.....42

Fig. IV.3.1 (a) Espectro de potencia.....44

Fig. IV.3.1 (b) Magnitud del biespectro.....45

Fig. IV.4.1 Espectro de potencia representativo de régimen multimodo en B=570 G (a) y (b), régimen turbulento en B = 779 G (c) y (d).....47

Índice de tablas

Tabla I.2.1 Momentos y cumulantes de F(x)6

Tabla IV.1 Frecuencias del espectro de potencia43

Lista de símbolos y acrónimos

ACF	Acoplamiento cuadrático de fase
AR	Modelo autoregresivo
ARMA	Modelo autoregresivo y promedio móvil
AWGN	Ruido blanco Gaussiano aditivo
c_{k_n}	Cumulantes conjuntos de orden k_n
c_{ss}	Secuencia de covariancia
c_{xy}	Correlación cruzada
c_2^{xy}	Covariancia cruzada
c_3^{xxy}	Cumulante cruzado de tercer orden
D	Tiempo de atraso
DEP	Densidad espectral de potencia
d_m	Amplitud de la exponencial
E[]	Valor esperado del argumento
E[X(n)]	Media
EOS	Espectros de orden superior o Estadísticos de orden superior
ETA	Estimación de tiempos de atraso (Time Delay Estimation)
$F_2\{\cdot\}$	Transformada bidimensional de Fourier
FIR	Respuesta al impulso finita (Finite Impulse response)
FDT	Función de transferencia
f_m	Frecuencia de muestreo
\bar{f}	Frecuencia normalizada ($\bar{f} = f / f_m$)
fdp	Función de densidad de probabilidad
FGC	Función generadora de cumulantes
FGM	Función generadora de momentos
$H_i[\cdot]$	Operador de Volterra
$h_i(\tau_1, \dots, \tau_i)$	Núcleo de transformación de Volterra

$H(e^{j\omega})$	Transformada de Fourier de una secuencia $h(n)$
$H(\omega)$	Función de transferencia
$h(n)$	Respuesta al impulso
$h(t)$	Respuesta al impulso de un sistema continuo
k	Índice frecuencial o variable frecuencial discreta
MA	Modelo promedio móvil (Moving average Model)
m_{k_n}	Momentos conjuntos
N	Número de muestras
n	Variable temporal discreta
p	Valor de atraso más grande posible
PDS	Procesamiento digital de señales
RBI	Ruido blanco ideal
$R_{xx}(\tau)$	Función de autocorrelación de $x(t)$
$R_{xy}(\tau)$	Función correlación cruzada
$S_{xx}(f)$	Función densidad espectral de potencia de $x(t)$
$S_{xy}(f)$	Función densidad espectral de potencia cruzada
$S_2^x(\omega)$	Densidad espectral de potencia o espectro de potencia
$S_3^x(\omega_1, \omega_2)$	Biespectro
S_3^{xy}	Biespectro cruzado
SLIT	Sistema lineal e invariante en el tiempo
SNR	Razón señal a ruido
t	Tiempo continuo ($t = nT$)
T	Período de muestreo
TRF	Transformada rápida de Fourier
TDF	Transformada discreta de Fourier
ω	Frecuencia digital

W-K	Wiener-Khinchine
W(n)	Ruido blanco no Gaussiano
X_n	n variables aleatorias
x(n)	Secuencia discreta finita (real o compleja)
X(k)	TDF de la secuencia x(n)
x(m,n)	Secuencia bidimensional de área finita
X(k,l)	TDF bidimensional
L(n)	Impulso discreto o muestra unitaria
L(t)	Impulso unitario continuo
L(·)	Función Delta Kronecker
$\tilde{\psi}(\cdot)$	Argumento principal de la fase del biespectro
Ψ_3^x	Fase biespectral
$\phi(w)$	Fase del biespectro estimado
J ($w_1 \dots w_n$)	Función característica conjunta
γ_2^x	Variación
γ_3^x	Sesgo
γ_4^x	Kurtosis
$\theta(l)$	Muestras de fase
θ_m	Fase de la exponencial
$\hat{\alpha}$	Solución de norma mínima
:	Media de una variable aleatoria
N^2	Variación de una variable aleatoria
τ	Defasamiento de la secuencias
*	Como superíndice significa conjugación compleja
	Valor absoluto del argumento
τ	Defasamiento en el tiempo
^	Estimación de la variable sobre la cual se coloca

INTRODUCCIÓN

La estimación del espectro de potencia o función Densidad Espectral de Potencia (DEP) de una secuencia discreta, ha sido una herramienta útil por más de treinta años. Los métodos para obtener la DEP se clasifican en convencionales los cuales emplean la transformada discreta de Fourier (TDF) y los conocidos en conjunto como métodos modernos de análisis espectral entre los cuales se utiliza el algoritmo Prony, descomposición en valores singulares, modelos autoregresivos etc. La DEP representa la distribución de la potencia en función de la frecuencia y por lo tanto las relaciones de fase entre las componentes frecuenciales se pierde.

La información contenida en la DEP es la misma que proporciona la autocorrelación (estadístico de segundo orden) de la secuencia, de esta forma la DEP es un espectro de segundo orden.

Los espectros de orden superior (EOS) o espectros cumulantes se definen en función de transformadas discretas de Fourier multidimensionales de estadísticos de orden superior conocidos como cumulantes. Los EOS más comunes son el biespectro y el triespectro.

Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera:

En el capítulo I se definen los espectros de orden superior (EOS) como la transformada discreta de Fourier multidimensional de los cumulantes y su relación con sistemas lineales no Gaussianos y sistemas no lineales. El capítulo II menciona los métodos para estimar los EOS. En el capítulo III, IV y V se exponen algunas aplicaciones de los EOS a: estimación de tiempos de atraso, detección de no linealidades y recuperación de señales. Finalmente, se dan las referencias y los apéndices referidos en el trabajo.

CAPÍTULO

I ESPECTROS DE ORDEN SUPERIOR

I.1 Introducción

La Densidad Espectral de Potencia (DEP), es suficiente para describir estadísticamente un proceso Gaussiano (procesos con funciones densidad de probabilidad conjuntas con distribución Gaussiana), utiliza la estadística de segundo orden (autocorrelación $R_{XX}(\tau)$) de la señal. Sin embargo, la DEP es ciega con respecto a la fase, ya que se demuestra que DEP de una señal real es real y par. Es decir, la fase se pierde. Utilizando Espectros de Orden Superior (EOS) es posible extraer información de la fase así como desviaciones de Gaussianidad.

Motivaciones para el estudio de los EOS

1. Detectar señales no Gaussianas
2. Reconstruir la fase y la magnitud de señales y sistemas
3. Identificar sistemas no lineales o detectar no linealidades en series temporales

Para señales Gaussianas, los EOS de orden mayor a dos son cero. Si algún EOS es diferente de cero, esto indicará la existencia de una señal no Gaussiana (la cual se suma al ruido blanco Gaussiano). El procesamiento de señales no Gaussianas usando EOS, tiene ciertas ventajas en la detección y/o estimación de parámetros.

Los EOS preservan la magnitud y la fase cuando una señal o sistema es de fase no mínima (singularidades fuera del círculo unitario).

Los EOS son útiles para detectar y caracterizar no linealidades en señales y sistemas. Cada tipo de no linealidad tiene que investigarse en cada caso, ya que no existen relaciones generales para datos estacionarios arbitrarios aplicados al sistema no lineal.

En 1965, Brillinger [1] introdujo los EOS en el campo de la estadística. Actualmente, el estudio de los EOS aplicados al Procesamiento digital de Señales (PDS) son liderados por Chrysostomos L. Nikias y Jerry M. Mendel.

I.2 Momentos y cumulantes conjuntos

Sean X_1, X_2, \dots, X_n n variables aleatorias, sus cumulantes conjuntos de orden $r=k_1+k_2+\dots+k_n$ se definen como [2] [3] [4]:

$$c_{k_1, k_2, \dots, k_n} = (-j)^r \frac{\partial^r \ln \phi(w_1, w_2, \dots, w_n)}{\partial w_1^{k_1} \partial w_2^{k_2} \dots \partial w_n^{k_n}} \Big|_{w_1=w_2=\dots=w_n=0} \quad (\text{I.2.1})$$

donde:

$$\Phi(w_1, w_2, \dots, w_n) = E[e^{jw_1 X_1 + \dots + jw_n X_n}], \quad (\text{I.2.2})$$

es la función característica conjunta. Por ejemplo,

$$c_{3,2} = (-j)^5 \frac{\partial^5 \ln \Phi(w_1, w_2)}{\partial w_1^3 \partial w_2^2} \Big|_{w_1=w_2=0}$$

Los momentos conjuntos de orden $r=k_1 + k_2 + \dots + k_n$ se definen como:

$$m_{k_1, k_2, \dots, k_n} = E[X_1^{k_1}, X_2^{k_2}, \dots, X_n^{k_n}] = (-j)^r \frac{\partial^r \Phi(w_1, w_2, \dots, w_n)}{\partial w_1^{k_1} \partial w_2^{k_2} \dots \partial w_n^{k_n}} \Big|_{w_1=w_2=\dots=w_n=0} \quad (\text{I.2.3})$$

donde se observa que los cumulantes conjuntos se pueden expresar en función de los momentos de las variables aleatorias.

Para una sola variable aleatoria X_1 , la función generadora de cumulantes de orden k es:

$$c_k = (-j)^k \frac{\partial^k \ln \Phi(w)}{\partial w^k} \Big|_{w=0}, \text{ donde } \Phi(w) = E[e^{jwX}] \quad (\text{I.2.4})$$

Cuando $k=1$,

$$c_1 = (-j) \frac{d \ln E[e^{j\omega X}]}{d\omega} = (-j) \frac{E[jXe^{j\omega X}]}{E[e^{j\omega X}]} \Big|_{\omega=0} = E[X] = m_1 \quad (I.2.5)$$

Para $k=2$,

$$c_2 = (-j)^2 \frac{d^2 \ln E[e^{j\omega X}]}{d\omega^2} = - \frac{d^2}{d\omega^2} \ln E[e^{j\omega X}] =$$

$$\frac{E[e^{j\omega X}] E[-X^2 e^{j\omega X}] - E[jXe^{j\omega X}] E[jXe^{j\omega X}]}{E[e^{j\omega X}]^2}$$

$$c_2 = E[X^2] - E[X]^2 = m_2 - m_1^2 \quad (I.2.6)$$

utilizando el mismo procedimiento se obtiene:

$$c_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 \quad (I.2.7)$$

$$c_4 = m_4 - 4m_3 m_1 - 3m_2^2 + 12m_2 m_1^2 - 6m_1^4 \quad (I.2.8)$$

Para una variable estocástica (variable aleatoria que varía en función del tiempo) se tiene:

$$m_n^x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = E[(X(n)X(n+\tau_1)\dots X(n+\tau_{n-1}))] \quad (I.2.9)$$

Obsérvese que para $n=2$

$$m_2^x(\tau) = E[(X(n)X(n+\tau))] = R_{XX}(\tau); \text{ donde } \tau \text{ es el defasamiento entre las secuencias.}$$

Similarmente, para los cumulantes de n -ésimo orden de $x(n)$ con $(n-1)$ funciones dimensionales se puede escribir como:

$$c_n^x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = \overset{\Delta}{cum}[X(n), X(n+\tau_1), \dots, X(n+\tau_{n-1})] \quad (I.2.10)$$

I.2.1 Relación entre momentos m_n^x y cumulantes c_n^x para una variable estocástica

Algunas relaciones entre los cumulantes y los momentos se dan enseguida [1]:

$$c_1^x = m_1^x = E[X(n)] = \text{media} \quad (I.2.1.1)$$

$$c_2^x(\tau_1) = m_2^x(\tau_1) - (m_1^x)^2 = \text{covariancia} \quad (I.2.1.2)$$

donde se observa que $c_2^x(\tau_1)$ es una función simétrica alrededor de $\tau_1 = 0$, es decir,

$c_2^x(-\tau_1) = c_2^x(\tau_1)$, por lo que $c_2^x(\tau_1)$ es una función de fase cero, lo que significa que toda la información de la fase de $x(n)$ se pierde en $c_2^x(\tau_1)$. Así mismo,

$$c_3^x(\tau_1, \tau_2) = m_3^x(\tau_1, \tau_2) - m_1^x[m_2^x(\tau_1) + m_2^x(\tau_2) + m_2^x(\tau_1 - \tau_2)] + 2(m_1^x)^3 \quad (\text{I.2.1.3})$$

$$\begin{aligned} c_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = & m_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - m_2^x(\tau_1)m_2^x(\tau_3 - \tau_2) - m_2^x(\tau_2)m_2^x(\tau_3 - \tau_1) \\ & - m_2^x(\tau_3)m_2^x(\tau_2 - \tau_1) - m_1^x[m_3^x(\tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_1) + m_3^x(\tau_2, \tau_3) \\ & + m_3^x(\tau_2, \tau_4) + m_3^x(\tau_1, \tau_2)] + (m_1^x)^2[m_2^x(\tau_1) + m_2^x(\tau_2) + m_2^x(\tau_3) \\ & + m_2^x(\tau_3 - \tau_1) + m_2^x(\tau_3 - \tau_2) + m_2^x(\tau_2 - \tau_1)] - 6(m_1^x)^4 \end{aligned} \quad (\text{I.2.1.4})$$

Casos particulares cuando $m_1^x = 0$

Para $m_1^x = 0$ se tienen los siguientes casos particulares:

$$c_1^x = 0 \quad (\text{I.2.1.5})$$

$$c_2^x(\tau_1) = m_2^x(\tau_1) \quad (\text{autocorrelación}) \quad (\text{I.2.1.6})$$

$$c_3^x(\tau_1, \tau_2) = m_3^x(\tau_1, \tau_2) \quad (\text{I.2.1.7})$$

Por lo que, si $x(n)$ tiene media cero, de las ecuaciones. (I.2.1.6) y (I.2.1.7) los cumulantes de segundo y tercer orden son idénticos a los momentos de segundo y tercer orden respectivamente. Sin embargo, para generar los cumulantes de cuarto orden es necesario conocer los momentos de segundo y cuarto orden, de la ecuación. (I.2.1.4) se tiene:

$$\begin{aligned} c_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = & m_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - m_2^x(\tau_1)m_2^x(\tau_3 - \tau_2) - m_2^x(\tau_2)m_2^x(\tau_3 - \tau_1) \\ & - m_2^x(\tau_3)m_2^x(\tau_2 - \tau_1) \end{aligned} \quad (\text{I.2.1.8})$$

Por lo tanto, de las ecuaciones. (I.2.1.2), (I.2.1.3) y (I.2.1.4) con $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ y $m_1^x = 0$, se obtiene:

$$\gamma_2^x = E[X^2(n)] = c_2^x(0) \quad (\text{Variancia}) \quad (\text{I.2.1.9})$$

$$\gamma_3^x = E[X^3(n)] = c_3^x(0,0) \quad (\text{Sesgo}) \quad (\text{I.2.1.10})$$

$$\gamma_4^x = E[X^4(n)] = 3[\gamma_2^x]^2 = c_4^x(0,0,0) \quad (\text{Kurtosis}) \quad (\text{I.2.1.11})$$

I.2.2 Propiedades de momentos m_n^x y cumulantes c_n^x [1] [4] [5] [6].

1. Si el conjunto de variables aleatorias $X(n), X(n + \tau_1), \dots, X(n + \tau_{n-1})$ es conjuntamente Gaussiano, entonces se cumple lo siguiente:

$c_n^x = 0$ para $n > 2$ (apéndice A). Sin embargo $m_n^x \neq 0$ para $n > 2$, por ejemplo: Para la función densidad de probabilidad (fdp) Gaussiana con media cero y variancia uno, ver figura I.2.1, los valores de los momentos para $n=1,2,3,\dots,10$ son los que se muestran en la tabla I.2.1. Obsérvese que $c_n = 0$ para $n > 2$.

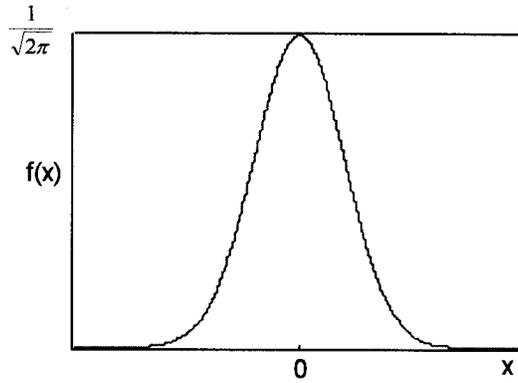


Fig.I.2.1. Fdp Gaussiana $\sigma^2 = 1, \mu = 0$

Tabla I.2.1 Momentos y cumulantes de $F(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

n	m_n	c_n
1	0	0
2	1	1
3	0	0
4	3	0
5	0	0
6	15	0
7	0	0
8	105	0
9	0	0
10	945	0

Los momentos m_n se obtuvieron empleando el programa Maple.

2. El cumulante de dos procesos aleatorios estadísticamente independientes es igual a la suma de los cumulantes de cada proceso o sea:

Si, $z(n) = x(n) + y(n)$ entonces,

$$c_n^z(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) + c_n^y(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \text{ mientras que } m_n^z \neq m_n^x + m_n^y \quad (\text{I.2.2.1})$$

I.3 Espectros de orden superior (EOS), espectros cumulantes o poliespectros

Los espectros de orden superior también conocidos como espectros cumulantes o poliespectros, no sólo revelan la información de amplitud del proceso sino también la información de fase. Esto es importante debido a que la DEP o estadístico de segundo orden (por ejemplo la correlación) es ciega con respecto a la fase.

I.3.1 Definición.

Los EOS se definen en función de los cumulantes como se muestra en la figura I.3.1

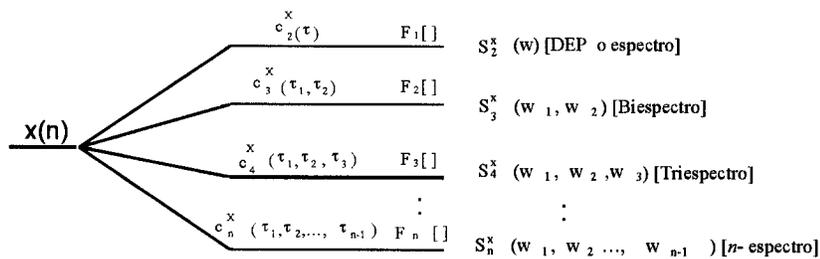


Fig. I.3.1 Definición de espectros de orden superior

El espectro de potencia, el biespectro y el triespectro son casos especiales de los espectros cumulantes de n-ésimo orden [6].

Función de densidad espectral de potencia o espectro de potencia

Función de densidad espectral de potencia es la transformada de Fourier unidimensional del cumulante de segundo orden, es decir:

$$S_2^x(w) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} c_2^x(\tau) e^{-jw\tau} ; |w| < \pi \quad (I.3.1.1)$$

Puesto que la autocorrelación es una función par, o sea $c_2^x(\tau) = c_2^x(-\tau)$ es posible demostrar que para una señal real $S_2^x(w) = S_2^x(-w)$ y que,

$$S_2^x(w) \geq 0 \quad (I.3.1.2)$$

El biespectro

El biespectro es la transformada de Fourier bidimensional del cumulante de tercer orden, o sea :

$$S_3^x(w_1, w_2) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_3^x(\tau_1, \tau_2) e^{j(w_1 \tau_1 + w_2 \tau_2)}, \quad |w_1| < \pi, |w_2| < \pi \text{ y } |w_1 + w_2| < \pi; \quad (\text{I.3.1.3})$$

De la ecuación (I.2.1.3) y las propiedades de los momentos se obtienen las siguientes condiciones de simetría [7].

$$\begin{aligned} c_3^x(\tau_1, \tau_2) &= c_3^x(\tau_2, \tau_1) = c_3^x(-\tau_2, \tau_1 - \tau_2) = c_3^x(\tau_2 - \tau_1, -\tau_1) \\ &= c_3^x(\tau_1 - \tau_2, -\tau_2) = c_3^x(-\tau_1, \tau_2 - \tau_1) \end{aligned} \quad (\text{I.3.1.4})$$

De lo anterior, si se conocen los cumulantes de tercer orden en cualquiera de los sectores del I al IV de la figura I.3.2, esto permitirá encontrar la secuencia del cumulante de tercer orden.

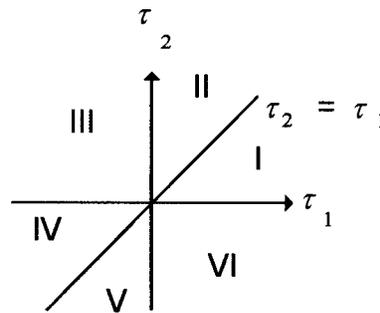


Fig.I.3.2 Simetría de los momentos de tercer orden

Para señales reales sólo se desea conocer un espectro no redundante, por ejemplo para el espectro de potencia, sólo es necesario conocerlo en el intervalo $0 \leq w \leq \pi$ ya que para señales reales la función de DEP es simétrica con respecto al eje $w = 0$ como se muestra en la figura I.3.3.

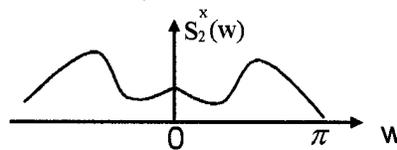


Fig. I.3.3. Simetría de la DEP

De la definición del biespectro en la ecuación (I.3.1.3) y las propiedades de los cumulantes de tercer orden en la ecuación (I.3.1.4) se obtiene:

$$S_3^x(w_1, w_2) = S_3^x(w_2, w_1)$$

$$\begin{aligned}
 &= S_3^x * (-w_2, -w_1) = S_3^x(-w_1 - w_2, w_2) \\
 &= S_3^x(w_1, -w_1 - w_2) = S_3^x(w_2, -w_1 - w_2) \\
 &= S_3^x(-w_1 - w_2, w_1) \tag{I.3.1.5}
 \end{aligned}$$

Por lo que, conociendo el biespectro en la región triangular $w_2 \geq 0, w_1 \geq w_2, w_1 + w_2 \leq \pi$ es suficiente para describir al biespectro para señales aleatorias reales, como se muestra en la figura I.3.4.

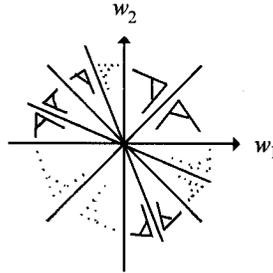


Fig.I.3.4 Regiones de simetría del biespectro

Por lo tanto existen 12 regiones de simetría para el biespectro.

Asimismo, el triespectro cuando ($n=4$) es la transformada de Fourier tridimensional del cumulante de cuarto orden, es decir:

$$S_4^x(w_1, w_2, w_3) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_3=-\infty}^{\infty} c_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-j(w_1 \tau_1 + w_2 \tau_2 + w_3 \tau_3)} \tag{I.3.1.6}$$

$$|w_1| \leq \pi, |w_2| \leq \pi, |w_3| \leq \pi \text{ y } |w_1 + w_2 + w_3| \leq \pi$$

Donde c_4^x es el cumulante de cuarto orden dado en la ecuación (I.2.1.4). Las propiedades de simetría del triespectro son:

$$\begin{aligned}
 S_4^x(w_1, w_2, w_3) &= S_4^x(w_2, w_1, w_3) = S_4^x(w_1, w_3, w_2) \\
 &= S_4^x(w_2, w_3, w_1) = S_4^x(w_3, w_1, w_2) \tag{I.3.1.7}
 \end{aligned}$$

Se menciona en [8] que el triespectro de un proceso real tiene 96 regiones de simetría.

Asimismo, se definen los cumulantes cruzados, por ejemplo,

$$c_3^{xyz}(k, l) = E[x(n)y(n+k)z(n+l)] \tag{I.3.1.8}$$

y el biespectro cruzado será:

$$S_3^{xyz}(w_1, w_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_3^{xyz}(k, l) e^{-jw_1 k} e^{-jw_2 l} \tag{I.3.1.9}$$

I.3.2 Variancia, Sesgo y Kurtosis

Aplicando la transformada inversa de Fourier al poliespectro de orden n definido en la figura I.3.1,

$$c_n^x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} S_n^x(w_1, \dots, w_{n-1}) e^{j(w_1 \tau_1 + \dots + w_{n-1} \tau_{n-1})} dw_1 \dots dw_{n-1} \quad (\text{I.3.2.1})$$

Ahora, tomando $n = 2, 3, 4$ y haciendo $\tau_i = 0, i = 1, 2, \dots, n-1$. se tiene:

$$c_2^x(0) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\pi}^{\pi} S_2^x(w) dw \quad (\text{Variancia}) \quad (\text{I.3.2.2})$$

$$c_3^x(0,0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_3^x(w_1, w_2) dw_1 dw_2 \quad (\text{Sesgo}) \quad (\text{I.3.2.3})$$

$$c_4^x(0,0,0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_4^x(w_1, w_2, w_3) dw_1 dw_2 dw_3 \quad (\text{Kurtosis}) \quad (\text{I.3.2.4})$$

los cuales están en términos de los espectros cumulantes.

Se debe notar que aunque el Sesgo sea igual a cero, esto no implica que el cumulante de tercer orden es cero.

I.3.3 Proceso de Ruido Blanco no Gaussiano

Si $\{W(n)\}$ es un proceso estacionario no Gaussiano con $E\{W(n)\} = 0$ y con una secuencia cumulante de n -ésimo orden .

$$c_n^w(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = cum[W(n), W(n + \tau_1), \dots, W(n + \tau_{n-1})] = \tau_n^w \delta(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \quad (\text{I.3.3.1})$$

Donde τ_n^w es una constante y $\delta(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$ es la función delta de Kronecker $(n-1)$ dimensional, combinando las ecuaciones (I.3.2.4) y (I.3.3.1) se obtiene

$$S_n^w(w_n, \dots, w_{n-1}) = \gamma_n^w \quad (\text{I.3.3.2})$$

el cual es un espectro plano para todas las frecuencias, de las ecuaciones (I.3.2.4), (I.3.3.1) y (I.3.3.2) se tiene:

$$S_2^w(w) = \gamma_2^w \quad (\text{Espectro de Potencia}) \quad (\text{I.3.3.3})$$

$$S_3^w(w_1, w_2) = \gamma_3^w \quad (\text{Biespectro}) \quad (\text{I.3.3.4})$$

$$S_4^w(w_1, w_2, w_3) = \gamma_3^w \quad (\text{Triespectro}) \quad (\text{I.3.3.5})$$

Donde γ_2^w es la Variancia, γ_3^w es el Sesgo y γ_4^w es la Kurtosis de $\{W(n)\}$.

Ejemplo I.1

Encontrar el espectro de potencia y el biespectro. Si,

$$x(n) = W(n) - W(n-1), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Donde $\{W(n)\}$ es un proceso no Gaussiano estacionario independiente e idénticamente distribuido [9] con $E[W(n)] = 0$, $E[W^2(n)] = 1$, $E[W^3(n)] = 1$.

Solución:

Calculando la covariancia o cumulantes de segundo orden de $x(n)$ se tiene:

$$\begin{aligned} c_2^x(\tau) &= E[X(n)X(n-\tau)] \\ &= E[(W(n) - W(n-1))(W(n+\tau) - W(n+\tau-1))] \\ &= 2\delta(\tau) - \delta(\tau-1) - \delta(n+\tau) \end{aligned}$$

Donde $\delta(\tau)$ es la función delta de Kronecker. Así, $c_2^x(\tau)$ queda definida como:

$$c_2^x(\tau) = \begin{cases} 2, & \tau = 0 \\ -1, & \tau = 1, \tau = -1 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

De la misma forma, calculando los cumulantes de tercer orden de $x(n)$, o sea:

$$\begin{aligned} c_3^x(\tau_1, \tau_2) &= m_3^x(\tau_1, \tau_2) \\ &= E[(X(n)X(n+\tau_1)X(n+\tau_2))] \\ &= E[(W(n) - W(n-1))(W(n+\tau_1) \\ &\quad - W(n+\tau_1-1))(W(n+\tau_2) - W(n+\tau_2-1))] \end{aligned}$$

De lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} c_3^x(\tau_1, \tau_2) &= -\delta(\tau_1 - 1, \tau_2) + \delta(\tau_1 - 1, \tau_2 - 1) - \delta(\tau) \\ &\quad + \delta(\tau_1 + 1, \tau_2) + \delta(\tau_1 + 1, \tau_2 + 1) - \delta(\tau_1, \tau_2 + 1) \end{aligned}$$

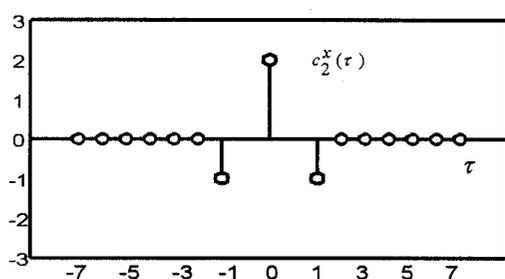
Entonces el espectro de potencia del proceso aleatorio es:

$$S_2^x(w) = \sum_{\tau=1}^{+1} c_2^x(\tau) e^{-jw\tau} = (2 - 2 \cos w)$$

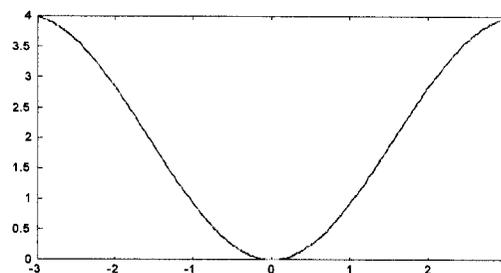
El biespectro está dado por,

$$\begin{aligned} S_3^x(w_1, w_2) &= \left(-e^{-jw_1} + e^{-j(w_1+w_2)} - e^{-jw_2} + e^{jw_1} - e^{j(w_1+w_2)} + e^{jw_2} \right) \\ &= 2j \operatorname{sen} w_1 + 2j \operatorname{sen} w_2 - 2j \operatorname{sen}(w_1 + w_2) \\ &= 2j \{ \operatorname{sen} w_1 + \operatorname{sen} w_2 - \operatorname{sen}(w_1 + w_2) \} \end{aligned}$$

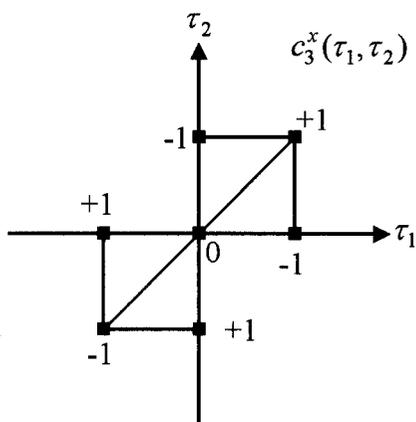
La figura I.3.5 muestra los cumulantes, el espectro y el biespectro, se nota que aunque el Sesgo $c_3^x(0,0,0) = \gamma_3^x = 0$ es cero, los cumulantes de tercer orden $c_3^x(\tau_1, \tau_2)$, generalmente no son cero.



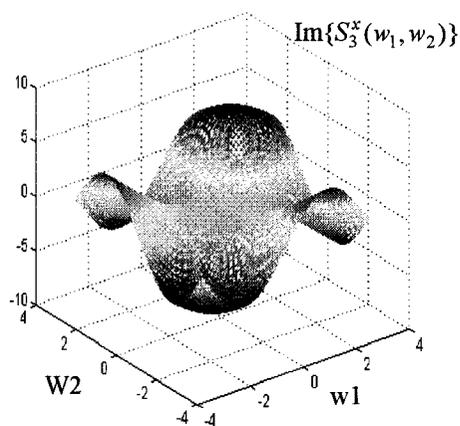
(a) covariancia



(b) espectro de potencia



(c) cumulantes de tercer orden



(d) biespectro imaginario

Fig. I.3.5 (a) Secuencia de covariancia, (b) Espectro de potencia, (c) Cumulantes de tercer orden, (d) Biespectro.

Se observa que la parte real del biespectro es cero. Este ejemplo ilustra que si el Sesgo es cero, no necesariamente implica que el biespectro sea cero, ya que el Sesgo de una señal sólo afecta a la parte real del biespectro.

I.3.4 Sistemas lineales no Gaussianos

Sea el siguiente sistema discreto cuya respuesta a la muestra unitaria es $h(n)$, $x(n)$ es la entrada (no Gaussiana) y $y(n)$ es la salida, ésto se observa en la figura I.3.6.

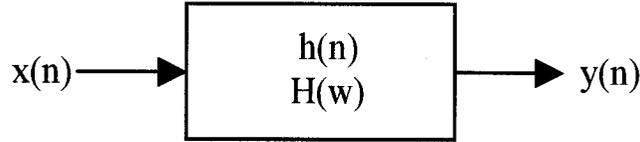


Fig. I.3.6. Sistema lineal no Gaussiano

El EOS de $y(n)$ es $(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$

$S_n^y(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = |S_n^y| e^{jw\theta_y}$, se demuestra que [25]:

$$S_n^y(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = H(w_1)H(w_2)\dots H(w_{n-1})H^*(w_1 + \dots + w_{n-1})S_n^x(w_1, \dots, w_{n-1}) \quad (I.3.4.1)$$

Escribiendo la ecuación (I.3.4.1) en términos de magnitud y fase se tiene:

$$|S_n^y(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})| = |H(w_1)||H(w_2)|\dots|H(w_{n-1})||H^*(w_1 + \dots + w_{n-1})||S_n^x(w_1, \dots, w_{n-1})|$$

$$\theta_y = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-1} - \theta(w_1 + \dots + w_{n-1}) + \theta_x(w_1, \dots, w_{n-1})$$

Si $x(n)$ es una secuencia de ruido blanco no Gaussiana, su espectro cumulante de orden n -ésimo está dado por [25]:

$$S_n^x(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \frac{c_n^x(0)}{(2\pi)^{n-1}} \quad (I.3.4.2)$$

Asimismo se demuestra que:

$$S_3^y(w, 0) = \frac{S_2^y(w)H(0)c_3^x(0)}{(2\pi)c_2^x(0)}, H(0) \neq 0 \quad (I.3.4.3)$$

Ejemplo I.2

Dado $h(n) = \delta(n) - \alpha\delta(n-1)$ en el sistema lineal mostrado en la figura I.3.7.

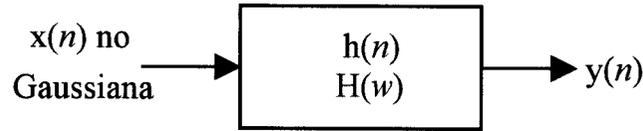


Fig.I.3.7 Sistema lineal con entrada no Gaussiana

Obtener :

- El espectro $S_2^y(w)$
- El biespectro $S_3^y(w_1, w_2)$ y comprobar la ecuación (I.3.4.3).

Solución :

$$a) S_2^y(w) = H(w)H^*(w)S_2^x(w)$$

$$h(n) = \delta(n) - \alpha\delta(n-1)$$

$$H(z) = 1 - \alpha z^{-1}$$

$$H(w) = H(z)|_{z=e^{jw}} = 1 - \alpha e^{-jw}$$

$$S_2^x(w) = \frac{c_2^x(0)}{2\pi}$$

$$S_2^y(w) = (1 - \alpha e^{-jw})(1 - \alpha e^{jw}) \frac{c_2^x(0)}{2\pi}$$

Simplificando se obtiene:

$$S_2^x(w) = \left(\frac{c_2^x(0)}{2\pi}\right)(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos w)$$

$$b) S_3^y(w_1, w_2) = H(w_1)H(w_2)H^*(w_1 + w_2)S_2^y(w_1, w_2)$$

$$S_3^y(w_1, w_2) = \frac{c_3^x(0)}{(2\pi)^2} (1 - \alpha e^{-jw_1})(1 - \alpha e^{-jw_2})(1 - \alpha e^{j(w_1+w_2)})$$

obteniendo $S_3^y(w,0)$ se llega a:

$$\begin{aligned} S_3^y(w,0) &= \frac{c_3(0)}{(2\pi)^2} (1 - \alpha e^{-jw_1})(1 - \alpha)(1 - \alpha e^{jw_1}) \\ &= \frac{c_3(0)}{(2\pi)^2} (1 - \alpha)(1 + \alpha^2 - 2\cos \omega) \end{aligned}$$

la expresión anterior se puede escribir en la forma siguiente:

$$S_3^y(w,0) = \frac{c_3^x(0)}{c_2^x(0)} \frac{H(0)}{2\pi} S_2^y(w) \quad ; \quad H(0) \neq 0,$$

con lo cual se comprueba la ecuación (I.3.4.3).

Recuérdese que los EOS se definen en forma general por la siguiente expresión:

$$S_n^x(w_1, \dots, w_{n-1}) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{n-1}=-\infty}^{\infty} c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) e^{-jw\tau_1} e^{-jw\tau_2} \dots e^{-jw\tau_{n-1}} ;$$

$$|w_1| < \pi, |w_2| < \pi, \dots, |w_n| < \pi, |w_1 + \dots + w_{n-1}| < \pi$$

I.3.5 Sistemas no lineales

Sea el siguiente sistema no lineal (SNL) mostrado en la figura I.3.8 en el cual la respuesta al impulso $h(n)$ está dada por:

$$h(n) = x(n) + \alpha x^2(n) \tag{I.3.5.1}$$

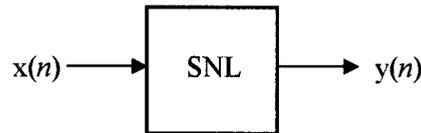


Fig.I.3.8 Sistema no lineal

$$\text{Si } x(n) = A_1 \cos(\beta_1 n + \theta_1) + A_2 \cos(\beta_2 n + \theta_2) \tag{I.3.5.2}$$

Donde θ_1 y θ_2 son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, sustituyendo la ecuación (I.3.5.2) en la ecuación (I.3.5.1) y simplificando se obtiene que $h(n)$ son senoides con los argumentos $(\beta_1, \theta_1), (\beta_2, \theta_2), (2\beta_1, 2\theta_1), (2\beta_2, 2\theta_2), (\beta_1 + \beta_2, \theta_1 + \theta_2)$ y $(\beta_1 - \beta_2, \theta_1 - \theta_2)$, donde los dos últimos términos se dice que tienen acoplamiento cuadrático de fase.

Sean las siguientes señales aleatorias:

$$x_1(n) = \cos(\beta_1 n + \theta_1) + \cos(\beta_2 n + \theta_2) + \cos(\beta_3 n + \theta_3) \tag{I.3.5.3}$$

$$x_2(n) = \cos(\beta_1 n + \theta_1) + \cos(\beta_2 n + \theta_2) + \cos[(\beta_1 + \beta_2)n + (\theta_1 + \theta_2)] \tag{I.3.5.4}$$

donde $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$ debido al acoplamiento y θ_1, θ_2 y θ_3 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Obsérvese que $E[X_1(n)] = E[X_2(n)] = 0$. La autocorrelación de $x_1(n)$ y $x_2(n)$ es:

$c_2^{x_1}(\tau_1) = c_2^{x_2}(\tau_1) = \frac{1}{2}[\cos \beta_1 \tau_1 + \cos \beta_2 \tau_1 + \cos(\beta_1 + \beta_2) \tau_1]$ lo cual implica que $x_1(n)$ y $x_2(n)$ tienen el mismo espectro de potencia; con impulsos en β_1, β_2 y $(\beta_1 + \beta_2)$.

Los cumulantes de tercer orden son:

$$c_3^{x_1}(\tau_1, \tau_2) = 0 \tag{I.3.5.5}$$

$$c_3^{x_2}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{4}[\cos(\beta_2 \tau_1 + \beta_1 \tau_2) + \cos(\beta_3 \tau_1 - \beta_1 \tau_2)] + \cos(\beta_1 \tau_1 + \beta_2 \tau_2) + \cos(\beta_3 \tau_1 - \beta_2 \tau_2) + \cos(\beta_1 \tau_1 - \beta_2 \tau_2) + \cos(\beta_2 \tau_1 - \beta_3 \tau_2); \tag{I.3.5.6}$$

Así, el biespectro de $x_1(n)$ será cero, sin embargo en el biespectro de $x_2(n)$ $S_3^{x_2}(\omega_1, \omega_2)$, aparecerá un impulso en (β_1, β_2) de valor $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$, lo cual implica una relación cuadrática de fase en la señal de salida de un sistema, y con esto se concluye que el sistema es no lineal, ver figura I.3.9.

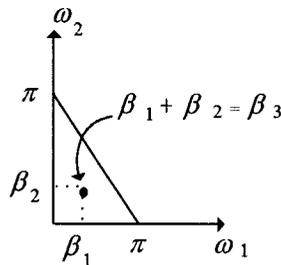


Fig. I.3.9. Impulso en el biespectro producido por un sistema no lineal.

Impulsos en el biespectro de potencia armónicamente relacionados, es decir, $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$, pueden indicar no linealidades, sin embargo el $S_2^x(\omega)$ no muestra relación de fase de componentes armónicos y por lo tanto no distingue $x_1(n)$ de $x_2(n)$. El biespectro sí preserva las relaciones cuadráticas de fase y por lo tanto es útil para detectar no linealidades cuadráticas de fase.

CAPÍTULO

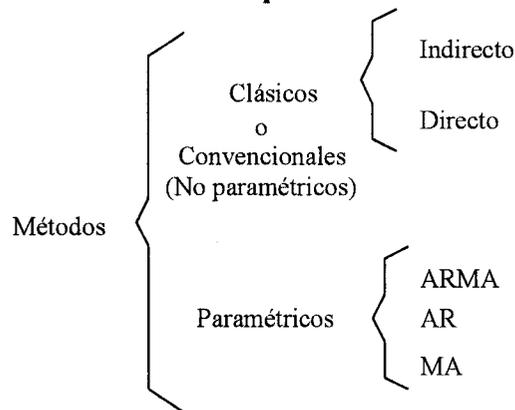
II

MÉTODOS PARA OBTENER LOS POLIESPECTROS

II.1 Introducción

Existen diversas formas para estimar los EOS, dos buenas aproximaciones que se pueden emplear para estimar los EOS son los métodos: convencional (transformada de Fourier), y paramétricos: Autoregresivo (AR), Promedio Móvil (MA), y la combinación de ambos (ARMA).

Estimación de los Espectros de Orden Superior



II.2 Métodos clásicos o convencionales (no paramétricos)

Se emplean para estimar los estadísticos de orden superior (cumulantes y momentos) empleando una colección de datos finita, generando la estimación espectral de orden superior empleando la función de ventaneo multidimensional.

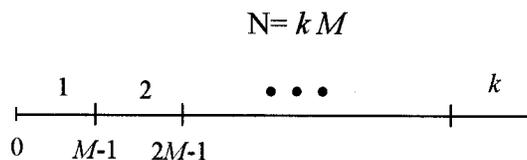
II.2.1 Método Indirecto

Dadas las N muestras de una serie temporal, o sea:

$$x(n) = \{x(1), x(2), \dots, x(N)\} = \{x(n)\}_{n=1}^N \quad (\text{II.2.1.1})$$

Procedimiento:[6],[10].

1. Dividir las N muestras en k segmentos de M muestras cada uno, ver figura II.2.1,



Cada segmento está dado por:

$$x^{(i)}(n); \quad n=0,1,\dots,M-1; \quad i=1,2,\dots,k \quad (\text{II.2.1.2})$$

2. Obtener la media de cada segmento y restársela a los datos.

3. Estimar los momentos de orden superior, es decir:

$$m_n^{(i)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \frac{1}{M} \sum_{k=\alpha}^{\beta} x^{(i)}(n) x^{(i)}(n + \tau_1) \dots x^{(i)}(n + \tau_{n-1}) \quad (\text{II.2.1.3})$$

$$n=2,3,\dots,N; \quad \alpha = \max(0, -\tau_1, \dots, \tau_{n-1}); \quad \beta = \min(M-1, M-1-\tau_1, \dots, M-1-\tau_{n-1})$$

4. Obtener los momentos promedio, o sea:

$$\hat{m}_n^{(i)}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k m_n^{(i)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \quad (\text{II.2.1.4})$$

5. Obtener los cumulantes de orden n .

$$\hat{c}_2^x(\tau) = \hat{m}_2^x(\tau) \quad (\text{II.2.1.5})$$

$$\hat{c}_3^x(\tau_1, \tau_2) = \hat{m}_3^x(\tau_1, \tau_2) \quad (\text{II.2.1.6})$$

$$\begin{aligned} \hat{c}_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = & \hat{m}_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - \hat{m}_2^x(\tau_1) \hat{m}_2^x(\tau_3 - \tau_2) - \hat{m}_2^x(\tau_2) \hat{m}_2^x(\tau_3 - \tau_1) \\ & - \hat{m}_2^x(\tau_3) \hat{m}_2^x(\tau_2 - \tau_1) \end{aligned} \quad (\text{II.2.1.7})$$

6. Estimar los EOS o espectros cumulantes, es decir:

$$S_n^x(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}) = \sum_{\tau_1=-L}^L \cdots \sum_{\tau_{n-1}=-L}^L c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \omega(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \left(e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_{n-1} \tau_{n-1})} \right) \quad (\text{II.2.1.8})$$

donde $L < M-1$ y $\omega(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = d(\tau_1) d(\tau_2) \dots d(\tau_{n-1}) d(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1})$

$\omega(\tau_i)$ es una ventana multidimensional formada por ventanas $d(\tau_i)$ unidimensionales, las cuales deben cumplir ciertas propiedades de simetría y ser cero fuera de la región de validez de los cumulantes, además $F[\omega(\tau_i)] > 0$.

Dos ventanas $d_1(\tau)$ y $d_2(\tau)$ empleadas son:

$$d_1(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left| \text{sen} \frac{\pi\tau}{L} \right| + \left(1 - \frac{|\tau|}{L} \right) \cos \frac{\pi\tau}{L}; & |\tau| \leq L \\ 0 & \end{cases} \quad (\text{II.2.1.9})$$

$$d_2(\tau) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{|\tau|}{L} \right)^2 + 6 \left(\frac{|\tau|}{L} \right)^3; & |\tau| \leq \frac{L}{2} \\ 2 \left(1 - \frac{|\tau|}{L} \right)^3; & \frac{L}{2} \leq |\tau| \leq L \\ 0; & |\tau| > L \end{cases} \quad (\text{II.2.1.10})$$

II.2.2 Método directo

Este método utiliza la transformada rápida de Fourier, es más fácil de implementar y da los mismos resultados que el método indirecto [11].

Procedimiento:

1. Igual a los pasos 1 y 2 del método indirecto, sólo que M debe ser potencia entera de 2, (puede ser necesario agregar ceros a cada segmento).
2. Obtener k TDF de M muestras cada una, o sea:

$$Y^{(i)}(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x^{(i)}(n) e^{-j \frac{2\pi kn}{M}} \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} \quad (\text{II.2.3.1})$$

3. Obtener los espectros de orden superior. Para el biespectro y el triespectro se tiene:

$$S_3^{(i)}(k_1, k_2) = \frac{1}{F^2} Y^{(i)}(k_1) Y^{(i)}(k_2) Y^{(i)*}(k_1 + k_2); \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad F = \frac{1}{NT} \quad (\text{II.2.3.2})$$

$$S_4^{(i)}(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{F^3} Y^{(i)}(k_1) Y^{(i)}(k_2) Y^{(i)}(k_3) Y^{(i)*}(k_1 + k_2 + k_3) \quad (\text{II.2.3.3})$$

4. Obtener el biespectro promedio, o sea:

$$S_3^x(w_1, w_2) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k S_3^{(i)}(k_1, k_2); \quad \text{donde } w_i = \left(\frac{2\pi}{NT} \right) k_i; \quad i=1, 2 \quad (\text{II.2.3.4})$$

II.3 Métodos paramétricos

Cuando se tiene una señal aleatoria como entrada a un sistema, una forma aproximada para identificar este sistema es emplear sistemas lineales invariantes en el tiempo. Si el ruido es Gaussiano, y la entrada al sistema no se conoce, el sistema de fase no mínima se identificará como un sistema de fase mínima. Por lo tanto, la motivación principal cuando se emplean modelos paramétricos con ruido blanco no Gaussiano para la estimación de los EOS es recobrar la respuesta en magnitud y fase del sistema.

Algunos ejemplos empleando estos métodos se dan en la referencia [29].

II.3.1 Solución para un modelo MA

Sea el modelo

$$y(n) = x(n) + w(n) \quad (\text{II.3.1.1})$$

Donde $x(n)$ está dada por el modelo MA(q)

$$x(n) = \sum_{k=0}^q b(k) W(n-k) \quad (\text{II.3.1.2})$$

y $w(n)$ es ruido Gaussiano independiente de $W(n)$. Suponiendo que $W(n)$ es ruido blanco de tercer orden, los cumulantes de tercer orden de $y(n)$ están dados por :

$$\begin{aligned} c_3^y(\tau, p) &= E[y(n)y(n+\tau)y(n+p)] \\ &= \sigma_3^w \sum_{k=0}^{\infty} b(k)b(k+\tau)b(k+p) \end{aligned} \quad (\text{II.3.1.3})$$

Evaluando la ecuación (II.3.1.3) en $\tau = q, p = n$ se obtiene:

$$c_3^y(q, n) = \sigma_3^w b(n)b(q) \quad (\text{II.3.1.4})$$

para $n=0$, la ecuación (II.3.1.4) queda como

$$c_3^y(q,0) = \sigma_3^w b(q) ; b(0)=1 \quad (\text{II.3.1.5})$$

combinando las ecuaciones (II.3.1.4) y (II.3.1.5) y asumiendo que $\sigma_3^w \neq 0$ (por ejemplo, $W(n)$ no es simétricamente distribuida), se obtiene:

$$b(n) = \frac{c_3^y(q,n)}{c_3^y(q,0)} \quad n=0,1,\dots,q \quad (\text{II.3.1.6})$$

La ecuación (II.3.1.6) relaciona la respuesta al impulso del modelo MA y los cumulantes de tercer orden de salida del sistema. Esta fórmula se conoce como $c(q,k)$ [12], y provee una solución en forma cerrada para la estimación de los parámetros MA.

II.3.2 Solución para un modelo ARMA.

Relaciona los modelos paramétricos (ARMA, MA, AR) con los cumulantes.

Modelo ARMA (p,q)

$$\sum_{k=0}^p a(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^q b(k)\omega(n-k) ; \quad a(0)=1 \quad (\text{II.3.2.1})$$

donde $\omega(n)$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y

$$E[\omega(n)\omega(n+\tau_1)\dots\omega(n+\tau_{n-1})] = \sigma_n^w \delta(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \quad (\text{II.3.2.2})$$

o sea que $\omega(n)$ es un ruido blanco de orden n . El espectro de orden superior de entrada y salida del sistema están relacionados como:

$$S_n^x(w_1, \dots, w_{n-1}) = \frac{\sigma_n^w}{(2\pi)^{n-1}} H(w_1) \dots H(w_{n-1}) H^*(w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1}) \quad (\text{II.3.2.3})$$

donde $H(w)$ es la función de transferencia del sistema ARMA, dada por:

$$H(w) = \frac{\sum_{k=0}^q b(k)e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^p a(k)e^{-jwk}} ; \quad a(0)=1 \quad (\text{II.3.2.4})$$

o equivalente a:

$$H(w) = |H(w)| e^{-j\phi_h(w)} \quad (\text{II.3.2.5})$$

de la ecuación (II.3.2.4) y ecuación (II.3.2.5) se obtiene la función de transferencia dada por [13];

$$H(w) = \left[\frac{S_2^x(w)}{\sigma_2^w} \right]^{\frac{1}{2}} e^{j\phi_h(w)} \quad (\text{II.3.2.6})$$

Los parámetros ARMA se calculan de la identidad:

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b(k)z^{-k}}{\sum_{k=0}^p a(k)z^{-k}} = H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \quad (\text{II.3.2.7})$$

Asumiendo que B(z) y A(z) no tienen factores comunes, la ecuación (II.3.2.7) se puede reescribir como:

$$\frac{\sum_{k=0}^q \hat{b}(k)z^{-k}}{\sum_{k=0}^p \hat{a}(k)z^{-k}} = \sum_{k=0}^L \hat{h}(k)z^{-k} ; L > p+q \quad (\text{II.3.2.8})$$

Asumiendo que $p > q$, la ecuación (II.3.2.8) queda como:

$$\{ \dots, 0, \hat{b}(0), \hat{b}(1), \dots, \hat{b}(q), 0, \dots \} = \{ \dots, 0, \hat{a}(0), \hat{a}(1), \dots, \hat{a}(p), 0, \dots \} * \{ \dots, 0, \hat{h}(0), \hat{h}(1), \dots, \hat{h}(L), 0, \dots \} \quad (\text{II.3.2.9})$$

Donde * denota convolución lineal. Como $\hat{b}(k) = 0$ para $k \geq q+1$ y $\hat{a}(0) = 1$ para cualquier $r > p-q$ entonces,

$$\begin{bmatrix} \hat{h}(q+r) & \hat{h}(q+r-1) & \dots & \hat{h}(q+r-p+1) \\ \hat{h}(q+r+1) & \hat{h}(q+r) & \dots & \hat{h}(q+r-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{h}(q+r+p-1) & \hat{h}(q+r+p-2) & \dots & \hat{h}(q+r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}(1) \\ \hat{a}(2) \\ \vdots \\ \hat{a}(p) \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.2.10})$$

también, para $k=0, 1, 2, \dots, q$, se tiene:

$$\sum_{i=0}^p \hat{a}(i)\hat{h}(k-i) = \hat{b}(k) \quad (\text{II.3.2.11})$$

en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \hat{b}(0) \\ \hat{b}(1) \\ \vdots \\ \hat{b}(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{h}(0) & 0 & \dots & 0 \\ \hat{h}(1) & \hat{h}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{h}(q) & \hat{h}(q-1) & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}(1) \\ \vdots \\ \hat{a}(p) \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.2.12})$$

los órdenes de p y q se pueden estimar construyéndose las estimaciones como:

$$\hat{h}(t, s) = (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} dt[\hat{h}(t+i-j); i, j = 1, 2, \dots, s] \quad (\text{II.3.2.13})$$

la cual satisface las condiciones siguientes.

- 1.- $\hat{h}(q, p) \neq 0$
- 2.- $\hat{h}(q+1, p+1) = 0$

Aplicación a un modelo ARMA(p,q)

$$\sum_{k=0}^p a(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^q b(k)w(n-k); \quad a(0) = 1 \quad (\text{II.3.2.14})$$

$$E[w(k)w(k+\tau), \dots, w(k+\tau_{n-1})] = \sigma_n^w(\tau_1, \dots, \tau_n) \quad (\text{II.3.2.15})$$

Se sabe que:

$$S_n^x(w_1, \dots, w_{n-1}) = \frac{\sigma_n^w}{(2\pi)^{n-1}} H(w_1) \dots H(w_{n-1}) H^*(w_1 + w_2 + \dots + w_n) \quad (\text{II.3.2.16})$$

Asimismo:

$$H(w) = \frac{\sum_{k=0}^q b(k)e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^p a(k)e^{-jwk}}; \quad a(0)=1 \quad (\text{II.3.2.17})$$

$$H(w) = |H(w)|e^{j\phi(w)} = \left(\frac{S_2^x(w)}{\sigma_2^w} \right) e^{j\phi(w)} \quad (\text{II.3.2.18})$$

donde $\phi(w)$ es la fase del biespectro estimado, de $S_2^x(w), \sigma_2^w, \phi(w), h(n)$ se obtiene de:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(w)e^{jwn} dw \quad (\text{II.3.2.19})$$

Los parámetros ARMA se obtienen de:

$$H(z) = \frac{B(z)}{H(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (\text{II.3.2.20})$$

En [14] se menciona un método para obtener los parámetros ARMA empleando el biespectro.

II.3.3 Obtención de la magnitud y la fase empleando el biespectro

$$\Psi_3^x(w_1, w_2) = \phi_x(w_1) + \phi_x(w_2) - \phi_x(w_1 + w_2) \quad (\text{II.3.3.1})$$

$$S_3^x(w_1, w_2) = |X(w_1)||X(w_2)||X(w_1) + X(w_2)| \quad (\text{II.3.3.2})$$

$$\phi(w) \quad |X(w)| \quad \Psi_3^x(w_1, w_2) \quad S_3^x(w_1, w_2) \quad (\text{II.3.3.3})$$

$$\phi_x(w) \quad |X(w)| \quad \Psi_3^x(w_1, w_2) \quad (\text{II.3.3.4})$$

$$\log|S_3^x| = \log|X(w_1)| + \log|X(w_2)| + \log|X(w_1) + X(w_2)| \quad (\text{II.3.3.5})$$

Por lo tanto si se resuelve el problema para la fase, también se resolverá el problema para la magnitud. La forma directa de la ecuación (II.3.2.20) es:

$$\Psi_3^x(m, n) = \phi_x(m) + \phi_x(n) - \phi_x(m + n) \quad (\text{II.3.3.6})$$

Definiendo:

$$\Psi = [\Psi_3^x(1,1), \Psi_3^x(1,2), \Psi_3^x(2,3), \dots, \Psi_3^x(N/2, N/2)]^T \quad (\text{II.3.3.7})$$

$$\phi = [\phi_x(1), \phi_x(2), \phi_x(N-1)]^T \quad (\text{II.3.3.8})$$

con el Método Matsuoka-Ulrich, de la ecuación (II.3.3.7) se forma:

$$A\phi = \Psi \quad (\text{II.3.3.9})$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$(N/2)^2 X(N-1)$ para N par, y $\left(\frac{N^2-1}{4}\right) X(N-1)$ para N non

Por mínimos cuadrados se obtiene $\Phi = (A^T A)^{-1} A^T \varphi$. En [14] se da otro método para obtener la magnitud y fase.

CAPÍTULO

III ESTIMACIÓN DE TIEMPOS DE ATRASO Y DE PARÁMETROS DE SEÑALES TRANSITORIAS

III.1 Introducción

En diversas situaciones prácticas, como radar, sonar, biomedicina, geofísica, etc, se presenta el problema de estimar los tiempos de atraso y parámetros de señales transitorias, se emplean los EOS basados en estimación de tiempos de atraso (ETA) empleando dos sensores de medición y estimación paramétrica simultánea de exponenciales amortiguadas.

III.2 Estimación de los tiempos de atraso usando el biespectro

Assumiendo que $x(n)$ y $y(n)$ son las señales generadas por dos sensores de medición que satisfacen las ecuaciones:

$$x(n) = s(n) + w_1(n) \quad (\text{III.2.1})$$

$$y(n) = \alpha s(n - D) + w_2(n) \quad (\text{III.2.2})$$

Donde $s(n)$ es una señal desconocida y $\alpha s(n-D)$ representa una forma escalada y atrasada de $s(n)$, $w_1(n)$ y $w_2(n)$ son fuentes de ruido desconocidas. Se requiere estimar el tiempo de atraso D a partir de mediciones de $x(n)$ y $y(n)$ de longitudes finitas. Una forma de resolver el problema de estimación de tiempo es hacer un corrimiento a $x(n)$ con respecto a $y(n)$ y observar las similitudes, la mejor comparación entre ellas es cuando existe un corrimiento igual a D ; para lograr esto, se toma la correlación cruzada entre $x(n)$ y $y(n)$, es decir:

$$c_{xy}(\tau) = E[x(n)y(n + \tau)] = \alpha c_2^s(\tau - D); -\infty < \tau < \infty \quad (\text{III.2.3})$$

además, $w_1(n)$ y $w_2(n)$ tienen media cero e independientes entre sí y con respecto a $s(n)$. Nótese que:

$$c_2^s(\tau) = E[s(n)s(n + \tau - D)] \quad (\text{III.2.4})$$

La correlación cruzada $c_{xy}(\tau)$ de la ecuación (III.2.3) alcanza el valor máximo en $\tau = D$. Sin embargo, en situaciones prácticas debido a la longitud finita de datos registrados y fuentes de ruido que no son exactamente independientes, la $c_{xy}(\tau)$ no necesariamente muestra un máximo en el tiempo de atraso D . Diversas funciones de ventana se han sugerido para suavizar la función de correlación cruzada para poder mejorar la calidad de la estimación del tiempo de atraso [15].

En diversas aplicaciones prácticas, la señal $s(n)$ en las ecuaciones (III.2.1) y (III.2.2) se puede considerar como un proceso no Gaussiano [16], mientras que las fuentes de ruido $w_1(n)$ y $w_2(n)$ pueden ser consideradas como procesos estacionarios Gaussianos con media cero. Bajo estas condiciones, existen ciertas ventajas para comparar similitudes entre $x(n)$ y $y(n)$ en el dominio de EOS tales como el biespectro o triespectro. Para sistemas mecánicos complejos se pudieran tener señales que contienen componentes casi periódicas, estas señales también se pueden considerar como señales no Gaussianas [17].

III.2.1 Método convencional de estimación de tiempos de atraso basado en estadísticos de orden superior

Sea $s(n)$ un sistema aleatorio no Gaussiano con media cero y Sesgo igual a cero, es decir, $E[s^3(n)] \neq 0$. Asumiendo que dos señales recibidas son $x(n)$ y $y(n)$ descritas en las ecuaciones (III.2.1) y (III.2.2) y $w_1(n)$ y $w_2(n)$ son señales Gaussianas con media cero y posiblemente correlacionadas como procesos aleatorios y estadísticamente independientes con $s(n)$. La correlación cruzada de las fuentes de ruido se define como:

$$c_{w_1 w_2}(\tau) = E[w_1(n)w_2(n + \tau)] \quad (\text{III.2.1.1})$$

y se asume ser desconocida. De lo anterior, la correlación cruzada de $x(n)$ y $y(n)$ está dada por:

$$c_{xy}(\tau) = c_2^s(\tau - D) + c_{w_1 w_2}(\tau), \quad -\infty < \tau < \infty \quad (\text{III.2.1.2})$$

En términos de momentos o cumulantes de tercer orden las señales recibidas son:

$$\begin{aligned} m_3^x(\tau, p) &= E[x(n)x(n+\tau)x(n+p)] & \text{(III.2.1.3)} \\ &= m_3^s(\tau, p) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m_3^{xyx}(\tau, p) &= E[x(n)y(n+\tau)x(n+p)] & \text{(III.2.1.4)} \\ &= m_3^s(\tau - D, p) \end{aligned}$$

donde

$$m_3^s(\tau, \rho) = E[s(n)s(n+\tau)s(n+p)] \quad \text{(III.2.1.5)}$$

Esto se debe a que los estadísticos (momentos o cumulantes) de un proceso Gaussiano con media cero son cero. Otras expresiones equivalentes son:

$$\begin{aligned} m_3^y(\tau, p) &= E[y(n)y(n+\tau)y(n+p)] & \text{(III.2.1.6)} \\ &= m_3^s(\tau, p) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m_3^{xyy}(\tau, p) &= E[x(n)x(n+\tau)y(n+p)] & \text{(III.2.1.7)} \\ &= m_3^s(\tau, p - D) \end{aligned}$$

En el dominio de la frecuencia las ecuaciones (III.2.1.3) y (III.2.1.4) son:

$$M_3^x(w_1, w_2) = M_3^s(w_1, w_2) \quad \text{(III.2.1.8)}$$

$$M_3^{xyx}(w_1, w_2) = M_3^s(w_1, w_2)e^{jw_1D} \quad \text{(III.2.1.9)}$$

donde $M_3^x(w_1, w_2)$ es el biespectro de $s(n)$, también se puede escribir como:

$$M_3^x(w_1, w_2) = |M_3^x(w_1, w_2)| e^{j\varphi_3^x(w_1, w_2)} \quad \text{(III.2.1.10)}$$

$$M_3^{xyx}(w_1, w_2) = |M_3^{xyx}(w_1, w_2)| e^{j\varphi_3^{xyx}(w_1, w_2)} \quad \text{(III.2.1.11)}$$

III.2.2 Método paramétrico de Estimación de tiempo de atraso en el dominio del Biespectro.

Considerando la ecuación (III.2.1), se puede escribir como:

$$s(n-D) = x(n-D) - w_1(n-D) \quad \text{(III.2.2.1)}$$

y de la ecuación (III.2.2) se tiene:

$$y(n) = x(n-D) - w_1(n-D) + w_2(n) \quad (\text{III.2.2.2})$$

o de una forma más general,

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha(i)x(n-i) + w_2(n) - w_1(n-D) \quad (\text{III.2.2.3})$$

donde en teoría $\alpha(i) = 0$ para todo $\{i\}$ excepto para $i = D$, $\alpha(D) = 1$. En la práctica, D siempre es finito, entonces se tiene:

$$y(n) = \sum_{i=-p}^{+p} \alpha(i)x(n-i) + w_2(n) - w_1(n-D) \quad (\text{III.2.2.4})$$

donde p es el valor de atraso posible más grande que se pueda esperar.

Si se toma la ecuación (III.2.2.3) para el instante de tiempo $k + \tau$, multiplicando ambos miembros por $x(n)x(n+p)$ y tomando el valor esperado se obtiene:

$$\begin{aligned} E[x(n)y(n+\tau)x(n+p)] &= \sum_{i=-p}^{+p} \alpha(i)E[x(n)x(n-i+\tau)x(n+p)] \\ &\quad + E[x(n)w_2(n+\tau)x(n+p)] \\ &\quad - E[x(n)w_1(n+\tau-D)x(n+\tau)] \end{aligned} \quad (\text{III.2.2.5})$$

o

$$m_3^{xyx}(\tau, p) = \sum_{i=-p}^p \alpha(i)m_3^x(\tau-i, p) + m_3^{xw_2x}(\tau, p) - m_3^{xw_1x}(\tau-D, p) \quad (\text{III.2.2.5})$$

Sin embargo, $m_3^{xw_2x}(\tau, p)$ y $m_3^{xw_1x}(\tau-D, p)$ son cero ya que $w_1(n)$ y $w_2(n)$ son Gaussianas. Por lo tanto, aún cuando las fuentes de ruido están correlacionadas espacialmente con la función de correlación cruzada definida por las ecuaciones (III.2.1.1), (III.2.2.5) toma la forma [18]:

$$m_3^{xyx}(\tau, p) = \sum_{i=-p}^p \alpha(i)m_3^x(\tau-i, p) \quad (\text{III.2.2.6})$$

seleccionando varios enteros para τ y p , se forma un sistema sobredeterminado de ecuaciones. Por ejemplo, si τ tiene un valor entre $-p$ y $+p$, y p se asigna a $\{-1, 0, 1\}$ se produce un conjunto de ecuaciones lineales de la siguiente forma:

$$\mathbf{m}^{xyx} = \mathbf{m}^x \cdot \mathbf{A} \quad (\text{III.2.2.7})$$

donde

$$\mathbf{m}^{xyx} = [m_3^{xyx}(-p,0), m_3^{xyx}(-p+1,0), \dots, m_3^{xyx}(p,0), m_3^{xyx}(-p,1), \dots, m_3^{xyx}(p,1), m_3^{xyx}(-p,-1), \dots, m_3^{xyx}(p,-1)]^T (6p+3) \times 1$$

$$\mathbf{A} = [\alpha(-p), \alpha(-p+1), \dots, \alpha(0), \dots, \alpha(p)]^T (2p+1) \times 1$$

$$\mathbf{m}^x = \begin{bmatrix} m_3^x(0,0) & \cdots & m_3^x(-2p,0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ m_3^x(2p,0) & \cdots & m_3^x(0,0) \\ m_3^x(0,1) & \cdots & m_3^x(-2p,1) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ m_3^x(2p,1) & \cdots & m_3^x(0,1) \\ m_3^x(0,-1) & \cdots & m_3^x(-2p,-1) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ m_3^x(2p,-1) & \cdots & m_3^x(0,-1) \end{bmatrix} (6p+3) \times (2p+1)$$

La solución de la ecuación (III.2.2.7) por mínimos cuadrados está dada por:

$$\mathbf{A}[(\mathbf{m}^x)^T \mathbf{m}^x]^{-1} (\mathbf{m}^x)^T \mathbf{m}^{xyx} \quad (\text{III.2.2.8})$$

III.3 Estimación de parámetros de señales transitorias.

Los estadísticos de orden superior se emplean para estimar los parámetros de señales senoidales amortiguadas exponencialmente y contaminada con ruido blanco Gaussiano.

III.3.1 Formulación del problema.

Asumiendo que la señal observada $x(n)$ se puede representar por una suma finita de exponenciales complejas de la forma

$$x(n) = \sum_{m=1}^L h_m \exp\{b_m n\}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.3.1})$$

donde las constantes complejas se definen como $h_m = d_m e^{j\theta_m}$ y $b_m = -c_m + jw_m$, $c_m > 0$.

Donde d_m y θ_m son la amplitud y las fase inicial de la m -ésima exponencial respectivamente, c_m es el factor de amortiguamiento y w_m es su frecuencia.

Un método de estimación de parámetros empleando cumulantes ha sido propuesto por Swami y Mendel [19].

III.3.2 Método de Estimación Paramétrica.

Este método de estimación de parámetros se emplea cuando la señal transitoria se observa en presencia de ruido, los parámetros $\{b_m\}$ de los momentos de tercer orden se obtienen asumiendo que el número de exponenciales complejas L se desconoce.

Sea el sistema lineal de ecuaciones:

$$\mathbf{m}_3^x \cdot \mathbf{K} = 0 \tag{III.3.2.1}$$

donde

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}(K), \mathbf{K}(K-1), \dots, \mathbf{K}(0)] \text{ es } (K+1) \times 1, K \geq L \tag{III.3.2.2}$$

y

$$\mathbf{m}_3^x = \begin{bmatrix} m_3^{x*}(0,0) & \dots & m_3^{x*}(-K,-K) \\ m_3^{x*}(-1,-1) & \dots & m_3^{x*}(-K-1,-K-1) \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ m_3^{x*}(-K,-K) & \dots & m_3^{x*}(-2K,-2K) \end{bmatrix},$$

definiendo

$$A(l) \triangleq \sum_{m=1}^L \sum_{v=1}^L h_l h_m h_v \cdot \frac{1}{(1 - \exp\{b_l^* + b_m + b_v\})} \tag{III.3.2.3}$$

En [20] se demuestra que si $A(l) \neq 0$ para $l = 1, 2, \dots, L$ entonces la matriz \mathbf{m}_3^x es de rango L y el polinomio $A(z)$ de K -ésimo orden dado por:

$$A(z) = \sum_{i=0}^K \mathbf{K}(K-i) z^{-i}, K > L \tag{III.3.2.4}$$

tiene L raíces en $\exp\{-b_l^*\}, l = 1, 2, 3, \dots, L$ los cuales se encuentran fuera del círculo unitario. Los ceros $(K-L)$ de $A(z)$ se encuentran dentro del círculo unitario si (i) $K \geq L$ y (ii) \mathbf{K} es la solución de *norma mínima* de (III.3.2.1) [21]. La ecuación (III.3.2.1) se puede reescribir como:

$$\mathbf{m}_3^{x*} \mathbf{K} = -\mathbf{m}^x \tag{III.3.2.4a}$$

donde

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}(K-1), \mathbf{K}(K-2), \dots, \mathbf{K}(0)]^T \quad (\text{III.3.2.5})$$

y además

$$\mathbf{m}_3^{xc} = \begin{bmatrix} m_3^{x*}(-2, -2) & \dots & m_3^{x*}(-K-1, -K-1) \\ m_3^{x*}(-3, -3) & \dots & m_3^{x*}(-K-2, -K-2) \\ \vdots & & \\ m_3^{x*}(-K-1, -K-1) & \dots & m_3^{x*}(-2K, -2K) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}^x = [m_3^{x*}(-1, -1), \dots, m_3^{x*}(-K, -K)]^T$$

Para el caso cuando la señal $x(n)$ se encuentra en ruido aditivo, es decir:

$$y(n) = x(n) + w(n), n = 0, \dots, N-1 \quad (\text{III.3.2.6})$$

donde $\{w(n)\}$ es un proceso Gaussiano complejo blanco o coloreado con media cero.

Se cumple que [20].

$$\begin{aligned} m_3^y(\tau, \tau) &= m_3^x(\tau, \tau) + m_3^w(\tau, \tau) + m_2^{w*w*}(0) \cdot m_1^x \\ &\quad + 2m_2^w(\tau)(m_1^x)^* + m_2^{x*x*}(0) \cdot m_1^w \\ &\quad + 2m_2^x(\tau)(m_1^w)^* \end{aligned} \quad (\text{III.3.2.7})$$

Obteniendo el promedio de (III.3.2.7), los términos cruzados desaparecen, quedando el término $m_3^y(\tau, \tau) = m_3^x(\tau, \tau)$. La ecuación (III.3.2.4a) se puede reescribir como:

$$\mathbf{m}_3^{y*} \mathbf{K} = -\mathbf{m}^y \quad (\text{III.3.2.8})$$

donde \mathbf{m}^y se define análogamente como \mathbf{m}^x .

El algoritmo de estimación de parámetros puede resumirse de la siguiente manera [20]:

Sea $\{y^{(i)}(0), \dots, y^{(i)}(N-1)\}$ un ensamble de datos de la forma siguiente:

$$y^{(i)}(n) = x(n - D_i) + w^{(i)}(n), i = 1, 2, \dots, M; n = 0, 1, \dots, N-1$$

donde $\{w^{(i)}(n)\}$ son diferentes tipos de ruido con propiedades estadísticas idénticas y los D_i corrimientos enteros de fase lineal.

- 1.- Restar el valor promedio a cada dato (i).
- 2.- Estimar el ensamble promedio de la secuencia del momento de tercer orden, es decir:

$$\mathbf{m}_3^x(-\tau, -\tau) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{m}_3^{y(i)}(-\tau, -\tau) \quad (\text{III.3.2.9})$$

donde

$$\mathbf{m}_3^{y(i)}(\tau, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{s_1}^{s_2} y^{(i)}(n) y^{(i)*}(n+\tau) y^{(i)*}(k+\tau) \quad (\text{III.3.2.10})$$

con

$$s_1 = \max(0, -\tau)$$

$$s_2 = \min(N-1, N-1-\tau)$$

3.- Formar la matriz \mathbf{m}_3^y y obtener su rango empleando el algoritmo de descomposición en valores singulares (DVS).

4.- Sea \hat{L} el rango de la matriz \mathbf{m}_3^y . Obtener la solución por mínimos cuadrados de (III.3.2.7). Debido a que la variancia de la estimación empleando los datos inmersos en ruido, emplea la DVS para resolver la ecuación (III.3.2.8), se tiene:

$$\mathbf{K} = - \sum_{m=1}^{\hat{L}} t_m^{-1} \mathbf{q}_m (\mathbf{p}_m^*)^T \cdot \mathbf{m}^y \quad (\text{III.3.2.11})$$

donde $t_m, m = 1, 2, \dots, \hat{L}$ son los valores singulares de \mathbf{m}_3^{yc} y \mathbf{q}_m y $\mathbf{p}_m, m = 1, 2, \dots, \hat{L}$ son los eigenvalores de $((\mathbf{m}_3^{yc})^H) \cdot \mathbf{m}_3^{yc}$ y $(\mathbf{m}_3^{yc} \cdot (\mathbf{m}_3^{yc})^H)$, respectivamente. La solución (III.3.2.11), es una solución de mínimos cuadrados truncada, basada en los eigenvalores que corresponden a los valores más grandes de \mathbf{m}_3^{yc} . Ya que el rango efectivo de la matriz ahora se conoce, cuando la señal transitoria se observa en ruido auditivo se emplea la estimación de momentos de tercer orden.. Un criterio estadístico para la determinación del rango se puede emplear como el que se introduce por Konstantinides y Yao [22].

III.4 Ejemplos

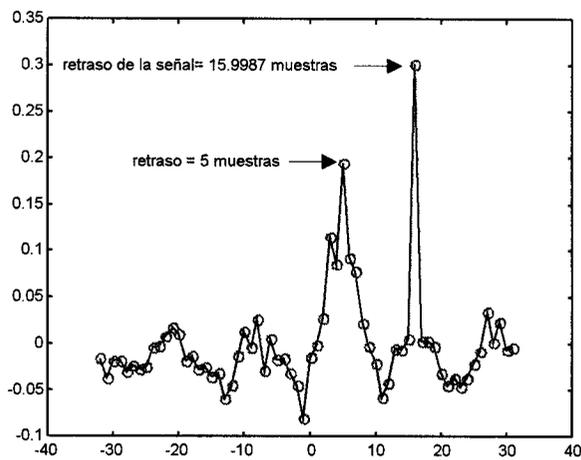
Ejemplo 1

Se crean las señales independientes e idénticamente distribuidas s_1 y s_2 con media cero, exponencialmente distribuidas con variancia unitaria y Sesgo dos. La señal s_2 es igual a la señal s_1 a excepción de un atraso (atraso de 16 muestras). La primera señal se contamina con ruido blanco Gaussiano para obtener un SNR de 0 dB. La señal s_2 se contamina con ruido Gaussiano coloreado y se obtiene al pasar el ruido a través de un filtro MA,

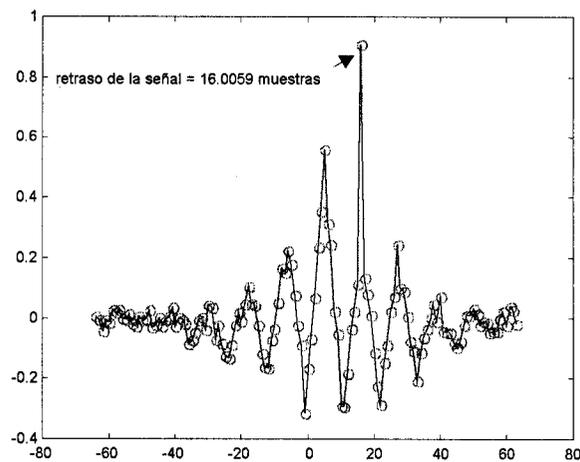
[1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1] , el tamaño de la señal es de 4096 muestras (2^{12}) , obteniendo los vectores s_1, s_2

En las figura III.4.1 a y b muestra las dos señales contaminadas con ruido, la correlación del ruido muestra un pico en el retraso de cinco muestras, la señal de retraso esta en 16 muestras.

MÉTODO BASADO EN LA CORRELACIÓN CRUZADA



a)

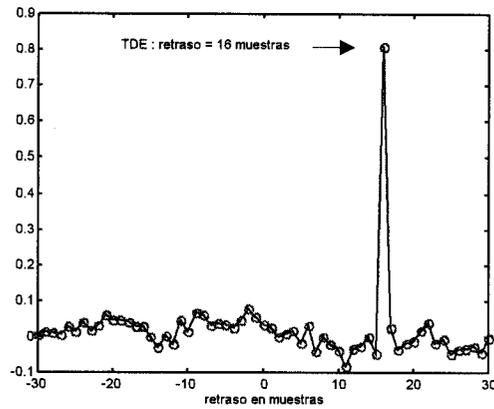


b)

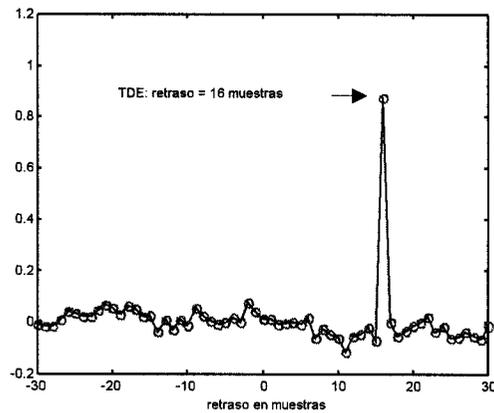
Fig.III.4.1 Estimación de atraso de tiempo empleando correlación cruzada
(a) ET 15.9987 , 64 muestras b) ET 16.0059, muestras 128

Ejemplo 2

MÉTODO BASADO EN CUMULANTES CRUZADOS



a)



b)

Fig.III.4.2 Estimación de atraso de tiempo empleando cumulantes cruzados
a) ET 16, 64 muestras b) ET 16, muestras 128

La idea básica en la estimación de tiempos de atraso es localizar el pico en la correlación cruzada en las dos señales.

Ejemplo 3

El propósito de este ejemplo es demostrar el funcionamiento de los métodos de estimación de parámetros basados en momentos de tercer orden de señales transitorias observadas en ruido. En este ejemplo, N es el número de muestras, factores de

amortiguamiento $\{c_i\}$, frecuencias w_i y γ_2^w es la variancia del ruido Gaussiano complejo.

El SNR se define como $\text{SNR} \Delta \left(\frac{1}{\gamma_2^w} \right)$.

La ecuación empleada es la siguiente [22]:

$$Y(n) = e^{b_1 k} + e^{b_2 k} + W(n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots, 63$$

donde

$$b_1 = -0.2 + j2\pi(0.42)$$

$$b_2 = -0.1 + j2\pi(0.52)$$

y $w(n)$ es ruido coloreado generado pasando un proceso Gaussiano complejo a través de un filtro FIR con respuesta al impulso:

$$h(n) = \sum_{i=0}^{15} a(i)\delta(n-i)$$

$$\mathbf{a} = [a(0), \dots, a(15)]^T = [0.5, 0.6, -0.7, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0, 0, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5]^T$$

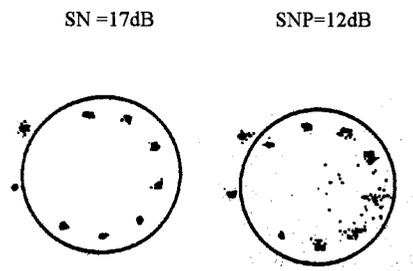


Fig.III.4.3 Estimación de los ceros de la señal empleando los cumulantes de tercer orden

CAPÍTULO IV DETECCIÓN DE NO LINEALIDADES EN SERIES TEMPORALES

IV.1 Introducción.

Debido a que los sistemas físicos reales en general son no lineales, no se aplica el principio de superposición. Por ejemplo, en un proceso no lineal con una excitación Gaussiana tiene como resultado una serie temporal estacionaria no Gaussiana debido a las operaciones no lineales.

IV.2 Sistemas de Volterra.

La fórmula general de un sistema no lineal de Volterra provee resultados en la identificación de parámetros de ciertos tipos de sistemas de Volterra.

IV.2.1 Fórmula general de un sistema no lineal de Volterra

Una serie temporal $y(n)$ no lineal, se puede considerar como la salida de una sistema no lineal cuya entrada es un proceso aleatorio estacionario $x(n)$. El sistema discreto de Volterra de p -ésimo orden se representa por los primeros $p+1$ términos de una serie de Volterra [23].

Si la salida $y(n)$ es la respuesta de un filtro discreto de Volterra variante en el tiempo de p -ésimo orden cuya entrada es $x(n)$ es decir:

$$y(n) = h_0 + \sum_i^p H_i[x(n)] = h_0 + \sum_i \sum_{(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i)} h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) x(n - \tau_1) \dots x(n - \tau_i) \quad (\text{IV.2.1.1})$$

donde $H_i[\cdot]$ denota el operador de Volterra de i -ésimo orden, y $h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i)$ es el núcleo de transformación de Volterra del sistema, los cuales están acotados y separados cada τ_i , y son funciones simétricas de sus argumentos, para sistemas causales $h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) = 0$ para

cualquier $\tau_i < 0$. Cuando $x(n)$ es un proceso aleatorio con media cero, a $H_i[\cdot]$, $i > 1$, se le conoce como componente "cuadrático" ($H_2[\cdot]$), "cúbico" ($H_3[\cdot]$) etc.

IV.2.2 Filtros de Volterra de segundo orden

Suponiendo que una serie temporal se puede representar por un modelo de Volterra de segundo orden, es decir:

$$y(n) = \sum_{\tau_1} h_1(\tau_1)x(n-\tau_1) + \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} h_2(\tau_1, \tau_2)x(n-\tau_1)x(n-\tau_2) \quad (\text{IV.2.2.1})$$

Donde $y(n)$ es un proceso aleatorio estacionario con media cero. La ecuación (IV.2.2.1) se puede ver como un sistema lineal $h_1(\tau)$ y un sistema cuadrático $h_2(\tau_1, \tau_2)$ en paralelo.

El problema de identificación consiste en determinar la respuesta al impulso $h_1(\tau)$ y el núcleo de transformación de la serie $h_2(\tau_1, \tau_2)$ como se muestra en la figura IV.2.1.

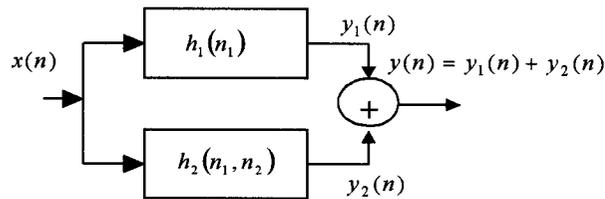


Fig. IV.2.1 Sistema de Volterra de segundo orden.

IV.2.3 Identificación teniendo una entrada Gaussiana conociendo la entrada y la salida

Sea $x(n)$ un proceso estacionario Gaussiano con media cero. Empleando la ecuación (IV.2.2.1) y la figura. IV.2.1. entonces [24]:

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) \quad (\text{IV.2.3.3})$$

$$y_1(n) = \sum_{\tau_1} h_1(\tau_1)x(n-\tau_1) \quad (\text{IV.2.3.4})$$

$$y_2(n) = \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} h_2(\tau_1, \tau_2) x(n-\tau_1)x(n-\tau_2), \quad (\text{IV.2.3.5})$$

el valor medio de la salida está dado por:

$$m_1^y = E[y(n)] = E[y_1(n)] + E[y_2(n)] \quad (\text{IV.2.3.6})$$

como

$$E[y_1(n)] = \sum_{\tau_1} h_1(\tau_1)E[x(n - \tau_1)] = 0$$

$$\therefore m_1^y = \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} h_2(\tau_1, \tau_2)E[x(n - \tau_1) \cdot x(n - \tau_2)] \quad (\text{IV.2.3.7})$$

como $E[x(n)] = 0$ y $y(n)$ es un proceso estacionario, entonces:

$$m_1^y = \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} h_2(\tau_1, \tau_2)c_2^x(\tau_1 - \tau_2) \quad (\text{IV.2.3.8})$$

donde $c_2^x(\tau)$ es la secuencia de covariancia (o autocorrelación) de $x(n)$.

Sea $H_2(w_1, w_2)$ la transformada de Fourier de $h_2(\tau_1, \tau_2)$, es decir:

$$H_2(w_1, w_2) = \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} h_2(\tau_1, \tau_2)e^{-j(w_1\tau_1 + w_2\tau_2)} \quad (\text{IV.2.3.9})$$

y sea $S_2^x(w)$ la transformada de Fourier de $c_2^x(\tau)$ (espectro de potencia de $x(n)$), es decir:

$$S_2^x(w) = \sum_{\tau} c_2^x(\tau)e^{-jw\tau} \quad (\text{IV.2.3.10})$$

combinando las ecuaciones (IV.2.3.9), (IV.2.3.10) y (IV.2.3.8) se convierte en:

$$m_1^y = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} \iint H_2(w_1, w_2)e^{j[w_1\tau_1 + w_2\tau_2]} dw_1 dw_2 \int S_2^x(w)e^{jw(\tau_1, \tau_2)} dw \quad (\text{IV.2.3.11})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int H_2(w, -w)S_2^x(w)dw \quad (\text{IV.2.3.12})$$

Ahora, calculando el espectro cruzado $S_2^{xy}(w)$ entre la entrada y la salida donde $c_2^{xy}(\tau)$ es la covariancia cruzada de los procesos de entrada y la salida, es decir:

$$c_2^{xy}(\tau) = E[x(n + \tau)\{y(n) - m_1^y\}] \quad (\text{IV.2.3.13})$$

$$= E[n(k + \tau)y_1(n)] \quad (\text{IV.2.3.14})$$

$$= \sum_{\tau_1} h_1(\tau_1)c_2^x(\tau + \tau_1) \quad (\text{IV.2.3.15})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int H_1(w)S_2^x(-w)e^{-jw\tau} dw \quad (\text{IV.2.3.16})$$

Donde $H_1(w)$ es la transformada de Fourier de $h_1(\tau)$. En (IV.2.3.16) se toma el cumulante de tercer orden del proceso Gaussiano $x(n)$ como cero. El espectro cruzado es la transformada de Fourier de $c_2^{xy}(\tau)$, se puede mostrar [25],[26] que es igual a :

$$S_2^{xy}(w) = H_1(-w)S_2^x(w) \quad (\text{IV.2.3.17})$$

Por lo que, para un proceso Gaussiano como entrada a un sistema Volterra de segundo orden, el término lineal del sistema se puede identificar calculando el espectro de potencia de la entrada y el espectro cruzado de la entrada y la salida, es decir,

$$H_1(-w) = \frac{S_2^{xy}(w)}{S_2^x(w)} \quad (\text{IV.2.3.18})$$

El cumulante cruzado de tercer orden entre la entrada y la salida está dado por:

$$c_3^{xy}(\tau_1, \tau_2) = E[x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)\{y(n) - m_1^y\}] \quad (\text{IV.2.3.19})$$

$$= E[x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)y_2(n)] - m_1^y E[x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)y_2(n)] \quad (\text{IV.2.3.20})$$

Empleando (IV.2.3.8) y tomando X_1, X_2, X_3, X_4 como variables aleatorias Gaussianas conjuntas con media cero, es decir (apéndice B):

$$E\{X_1 X_2 X_3 X_4\} = E\{X_1 X_2\}E\{X_3 X_4\} + E\{X_1 X_3\}E\{X_2 X_4\} + E\{X_1 X_4\}E\{X_2 X_3\}, \quad (\text{IV.2.3.21})$$

Obteniendo [23],

$$c_3^{xy}(\tau_1, \tau_2) = 2 \sum_{n_1} \sum_{n_2} h_2(n_1 - \tau_1, n_2 - \tau_2) c_2^x(n_1) c_2^x(n_2) \quad (\text{IV.2.3.22})$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^2} \iint H_2(-w_1, -w_2) e^{j(w_1\tau_2 + w_2\tau_1)} S_2^x(w_1) S_2^x(w_2) dw_1 dw_2 \quad (\text{IV.2.3.23})$$

De donde, el biespectro cruzado $S_3^{xy}(w_1, w_2)$ es:

$$S_3^{xy}(w_1, w_2) = F_2\{c_3^{xy}(\tau_1, \tau_2)\} \quad (\text{IV.2.3.24})$$

$$= 2H_2(-w_1, -w_2) S_2^x(w_1) S_2^x(w_2) \quad (\text{IV.2.3.25})$$

Donde $F_2\{\}$ denota la transformada bidimensional de Fourier. La ecuación (IV.2.3.25) indica que la componente cuadrática del sistema de Volterra de segundo orden puede ser identificado calculando el espectro de potencia de la entrada y el biespectro cruzado de la salida, o sea:

$$H_2(-w_1, -w_2) = \frac{S_3^{xy}(w_1, w_2)}{2S_2^x(w_1)S_2^x(w_2)} \quad (\text{IV.2.3.26})$$

Por lo tanto, cuando se tiene como entrada un proceso Gaussiano con media cero, y se puede calcular la correlación y los cumulantes de tercer orden, se tiene un método de identificación de un sistema no lineal de segundo orden tipo Volterra.

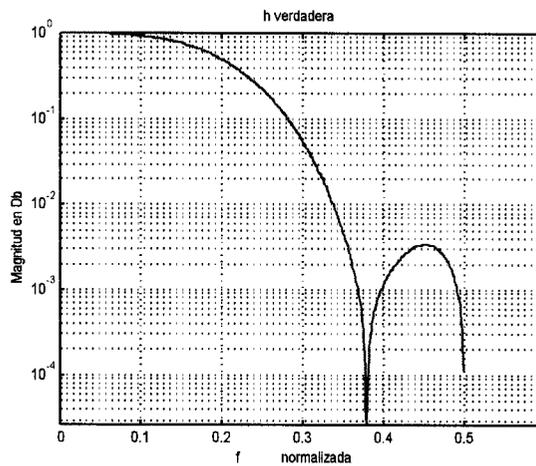
IV.2.4 Ejemplo de simulación

Para identificar un sistema no lineal empleando un método no paramétrico, la parte lineal se obtiene implementando un filtro FIR de orden 11 (12 coeficientes) y con una frecuencia de esquina de 0.2. La parte cuadrática se implementa con otro filtro FIR de orden 12 con una frecuencia de 0.1, y el núcleo de la transformación q se obtiene por la relación:

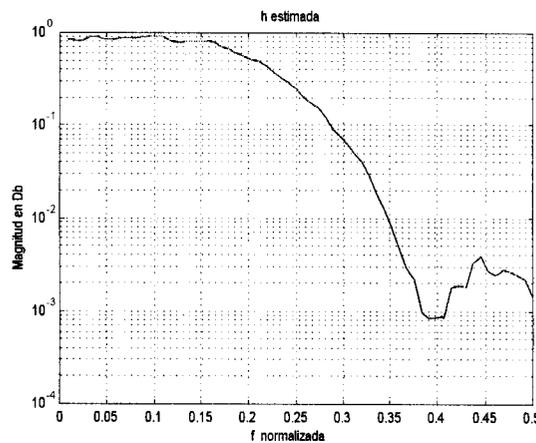
$$q = h^T h$$

donde h es el vector de coeficientes del filtro FIR unidimensional.

La señal de excitación, los filtros FIR y la implementación de la ecuación (IV.2.3.18) y la ecuación (IV.2.3.26) se llevaron a cabo en la plataforma de Matlab y el toolbox de HOSA (Higher Order Spectral Analysis) [27-31]. Las funciones de transferencia estimada y verdadera obtenidas para la parte lineal se muestran en la figura IV.2.2.



(a)



b)

Fig. IV.2.2 Función de transferencia parte lineal a) Verdadera , b) Estimada

Las funciones de transferencia estimada y verdadera obtenidas para la parte q cuadrática se muestran en la figura IV.2.3.

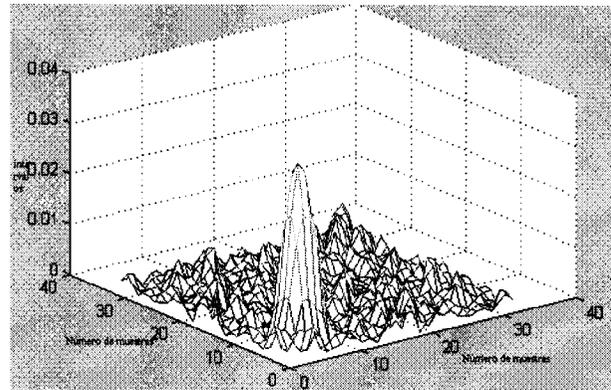
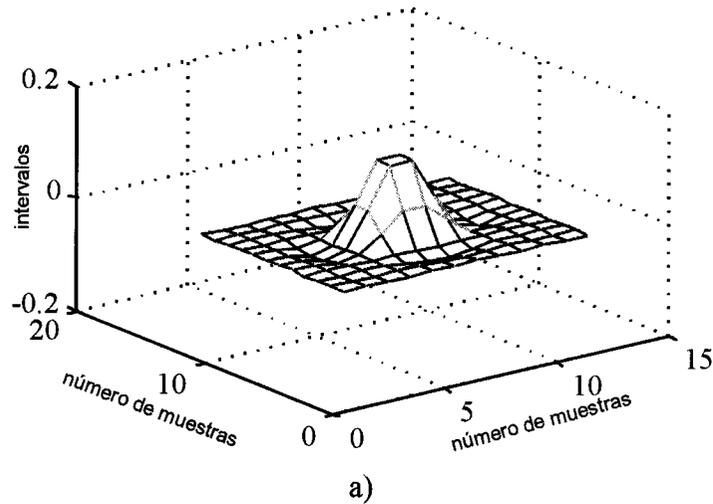


Fig. IV.2.3 Función de transferencia parte cuadrática, a) Verdadera, b) Estimada

Se puede observar que para la parte lineal las funciones de transferencia verdadera y estimada son bastante similares. Así mismo la parte cuadrática en la figura IV.2.3 se muestra una gráfica en tercera dimensión la cual da una mejor vista de la respuesta en frecuencia.

IV.3 Detección de acoplamiento cuadrático de fase

En ciertos casos, cuando existe la interacción entre dos componentes armónicas de un proceso, se da una contribución de potencia al sumarse o restarse las frecuencias de las mismas. Este fenómeno, el cual surge debido a no linealidades de segundo orden, lo que

conlleva a una cierta relación de fase llamada Acoplamiento Cuadrático de Fase (ACF), un ejemplo común es la modulación en amplitud.

Este acoplamiento de fase se puede generar solamente si las componentes armónicas están relacionadas. Por ejemplo, tres frecuencias están armónicamente relacionadas cuando una de ellas es la suma o la diferencia de las otras dos. Un caso especial es cuando tenemos dos componentes y una de ellas, es dos veces la frecuencia de la otra. En ciertas aplicaciones se requiere saber si los picos en posiciones armónicamente relacionados en el espectro de potencia están acoplados en fase.

Ya que el espectro de potencia suprime todas las relaciones de fase, no es posible saber si se tiene ACF.

IV.3.1 Ejemplo de simulación

Sea el proceso [32]

$$x(n) = \sum_1^6 \cos(\lambda_i n + \phi_i) \quad (\text{IV.3.1})$$

Donde $\lambda_1 > \lambda_2 > 0, \lambda_4 > \lambda_5 > 0, \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_6 = \lambda_4 + \lambda_5$; $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_5$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de 0 a 2π y $\phi_6 = \phi_4 + \phi_5$.

En la ecuación (IV.3.1), $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ tienen posiciones relacionadas armónicamente, solamente la componente λ_6 está acoplada en fase con λ_4 y λ_5 , mientras que λ_3 es una componente armónica independiente. El espectro de potencia de $x(n)$ consiste de impulsos en $\lambda_i, i=1,2,..6$ como se muestra en la figura (IV.3.1). Observando el espectro de potencia no se puede decir si las componentes armónicamente relacionadas tienen una relación de acoplamiento cuadrático de fase. Para los siguientes valores indicados en la Tabla IV.1

Tabla IV.1

f_1	0.12
f_2	0.30
f_3	$f_1 + f_2$
f_4	0.19
f_5	0.17
f_6	$f_4 + f_5$

donde; $w_i = 2\pi \bar{f}_i$

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5$ y ϕ_6 son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas definidas en $[0, 2\pi]$

$$\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$$

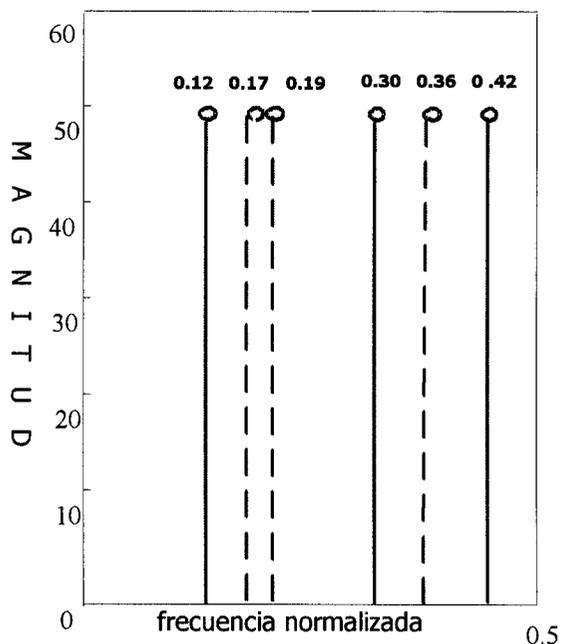


Fig. IV.3.1 Espectro de potencia de $x(n)$.

La secuencia de momentos de tercer orden $c_3^x(\tau_1, \tau_2)$ de $x(n)$ se puede obtener como

$$c_3^x(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{4} \{ \cos(\lambda_5 \tau_1 + \lambda_4 \tau_2) + \cos(\lambda_6 \tau_1 - \lambda_4 \tau_2) + \cos(\lambda_4 \tau_1 + \lambda_5 \tau_2) \\ + \cos(\lambda_6 \tau_1 - \lambda_5 \tau_2) + \cos(\lambda_4 \tau_1 - \lambda_6 \tau_2) + \cos(\lambda_5 \tau_1 - \lambda_6 \tau_2) \} \quad (\text{IV.3.2})$$

Se observa en la ecuación (IV.3.2) que solamente aparecen las componentes acopladas en fase. Por otro lado, en la figura (IV.3.2) cuando se evalúa el biespectro en la región triangular definidas por las líneas $w_2 = 0, w_1 = w_2$ y $w_1 + w_2 = \pi$ muestran un impulso en (λ_4, λ_5) , lo cual indica que sólo este par está acoplado en fase.

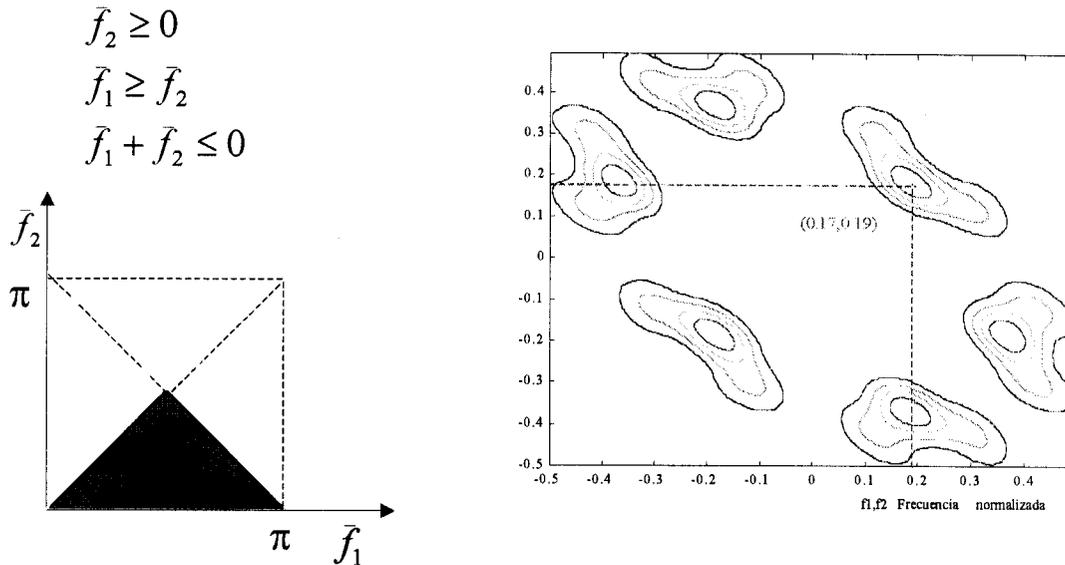


Fig. IV.3.2 Magnitud del biespectro

De esta manera, sólo las componentes acopladas en fase contribuyen a la secuencia de los momentos de tercer orden de un proceso, el biespectro es una herramienta para detectar acoplamiento cuadrático de fase y elimina las componentes que no están acopladas en fase. Cuando las relaciones de fase son del mismo tipo que las relaciones de frecuencia, se dice que se tiene acoplamiento cuadrático de fase, es decir, para la señal $x(n)$ dada por:

$$\begin{aligned} x(n) = & A_1 \cos(w_1 n + \phi_x) + A_2 \cos(w_2 n + \phi_2) + A_3 \cos((w_1 + w_2)n + \phi_3) \\ & + A_4 \cos(w_4 n + \phi_4) + A_5 \cos(w_5 n + \phi_5) + A_6 ((w_4 + w_5)n + (\phi_4 + \phi_5)) \end{aligned} \quad (IV.3.3)$$

Los primeros tres términos están armónicamente relacionados, pero no tienen acoplamiento cuadrático de fase. Los últimos tres términos sí tienen acoplamiento cuadrático de fase. En el apéndice C se da el artículo relacionado a este tema y presentado en el Congreso Internacional ISIE 2000.

IV.4 Método alternativo

Las técnicas convencionales para estimación del biespectro tales como el método directo e indirecto se consideraron en el capítulo II, Kim y Powers [33] consideran la siguiente definición equivalente del biespectro de un proceso estocástico $x(n)$,

$$S_3^x(w_1, w_2) = E\{X(w_1)X(w_2)X^*(w_1 + w_2)\} \quad (IV.4.1)$$

donde $X(w)$ es la transformada de Fourier de $x(n)$. Por otro lado, si la suma o diferencia de la componente se genera a través de interacción no lineal, entonces la fase existe y el promedio estadístico hará que el valor del biespectro sea diferente de cero.

Si las componentes en λ_1, λ_2 y $(\lambda_1 + \lambda_2), (\lambda_1 - \lambda_2)$ en el espectro de la señal son modos excitados espontáneamente, cada una será caracterizada por fases aleatorias estadísticamente independientes. Así, del promedio estadístico en IV.4.1 el biespectro tendrá un valor de cero.

La magnitud cuadrática de la bicoherencia se define como:

$$|b(w_1, w_2)|^2 \triangleq \frac{|S_3^x(w_1, w_2)|^2}{S_2^x(w_1)S_2^x(w_2)S_2^x(w_1 + w_2)} \quad (IV.4.2)$$

donde $S_2^x(w)$ es el espectro de potencia de $x(n)$. Para un grado mayor de coherencia de fase $b(w_1, w_2)$ en los pares de frecuencias (λ_1, λ_2) es cercano a la unidad. Esto indica que la interacción cuadrática se ha llevado a cabo. Por otro lado, un valor de $b(w_1, w_2)$ cercano a cero indica grados bajos de coherencia, es decir, el modo de dominio del espectro de potencia en las frecuencias $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2$ son probablemente excitados independientemente en lugar de ser modos acoplados cuadráticamente.

IV.4.1 Ejemplo [33]

La detección y cuantificación de acoplamiento cuadrático de fase empleando el espectro de la bicoherencia se demuestra a través de una aplicación a los datos de fluctuación del plasma. Las fluctuaciones de densidad del plasma se registran con dos puntas de prueba a una distancia Δs de separación. Sea $x(n)$ y $y(n)$ los datos grabados en la puntas de prueba y sea $S_2^{xy}(w) = X(w)Y^*(w) = |S_2^{xy}(w)e^{j\theta_{xy}(w)}|$ el espectro cruzado de $x(n)$ y $y(n)$, donde $X(w)$ y $Y(w)$ son la transformada de Fourier de $x(n)$ y $y(n)$ respectivamente. La parte de interés en particular es el espectro de fase $\theta_{xy}(w)$ la cual se puede interpretar como corrimiento de fase de cada componente espectral w que experimenta un movimiento de distancia Δs entre las dos puntas. Así, $\theta_{xy}(w) = k(w)\Delta s$ donde $n(w)$ es el número de onda para una frecuencia

dada. Por lo que, de los picos en $|S_2^{xy}(w)|$ se puede determinar la frecuencia de los modos presentes en el plasma, y del espectro de fase se puede determinar el número de onda $n(w)$.

Las gráficas de $|S_2^{xy}(w)|$ y $\theta_{xy}(w)$ contra frecuencia para dos campos magnéticos diferentes ($w = 2\pi f$) se muestran en la figura IV.4.1.

El espectro a $B=570$ g en la figura IV.4.1 (a) es de interés, ya que muestra los diversos picos en $f_a = 28.5kHz$, $f_b = 52.5kHz$, $f_c = 81kHz$, $f_d = 133.5kHz$ y $f_e = 162kHz$. Donde se nota que las siguientes relaciones de frecuencia se mantienen:

$$f_a = f_c - f_b, f_d = f_c + f_b \text{ y } f_e = 2f_c$$

De la figura IV.4.1 (b) se puede verificar que los números de onda en la siguiente relación se mantiene:

$$n_a = n_c - n_b, n_d = n_c + n_b \text{ y } n_e = 2n_c$$

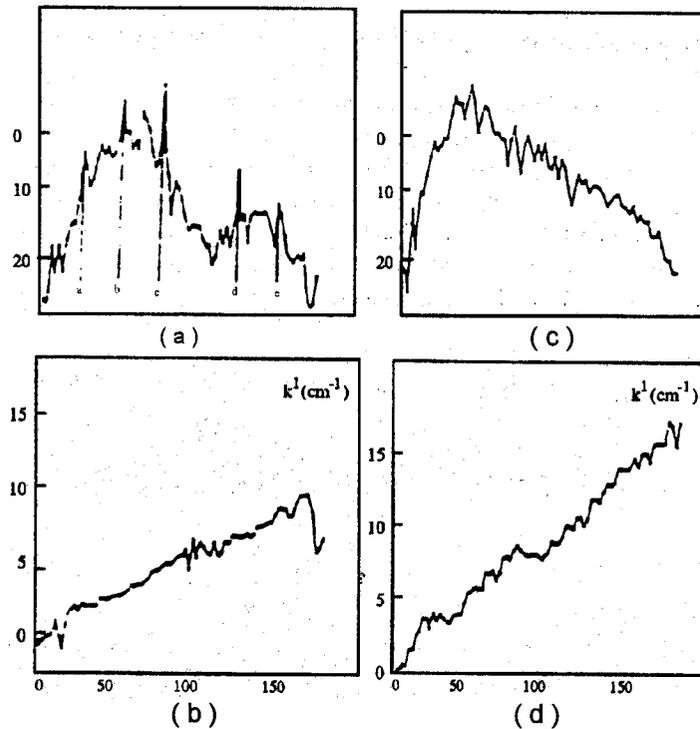


Fig. IV.4.1 [33] Espectro de potencia representativo de régimen multimodo en $B=570$ G (a) y (b), régimen turbulento en $B=779$ G (c) y (d).

Para determinar si los modos a,b,c,d, y e son modos acoplados o no, la magnitud cuadrática de la bicoherencia se calcula de la siguiente manera. La longitud de los datos $N=8192$ dividido en 64 registros de 128 muestras cada una. La transformada rápida de Fourier se emplea para generar la transformada de Fourier de cada registro. El biespectro se generó formando el triple producto de las transformadas de Fourier de cada registro a las frecuencias w_1, w_2 y $w_2 + w_2$ y después sacando el promedio del triple producto correspondiente a cada registro.

CAPÍTULO

V RECUPERACIÓN DE SEÑALES

V.1 Introducción.

Los métodos no paramétricos para la estimación de los espectros de orden superior son algoritmos los cuales recuperan la magnitud y la fase de una señal a partir de su biespectro. Los métodos son no paramétricos ya que no se ajustan a un modelo paramétrico (MA, AR o ARMA) para recuperar la señal. Estos métodos de recuperación de señales requieren un conocimiento previo del biespectro y triespectro.

V.2 Reconstrucción de señales usando sólo la fase.

Un proceso estacionario no Gaussiano se puede modelar como la respuesta de un sistema lineal invariante en el tiempo (SLIT) excitado por una señal de entrada de ruido blanco no Gaussiano. Por otro lado, el espectro de potencia se puede emplear para estimar la respuesta de magnitud del sistema. Se requiere un espectro de orden superior para estimar tanto la fase como la respuesta de magnitud. Existen diversos algoritmos para la recuperación de fase para los espectros de orden superior [35],[36].

V.2.1 Método de Reconstrucción de Fase

Sea

$$x(n) = h(n) * e(n) \tag{V.2.1}$$

un proceso estacionario de tercer orden , donde $e(n)$ es ruido no Gaussiano con sesgo diferente de cero γ_e , y sea $h(n)$ la respuesta al impulso de un SLIT de fase no mínima de una exponencial compleja. Entonces:

$$S_3^x(w_1, w_2) = \gamma_e H(w_1)H(w_2)H(-w_1 - w_2) \quad (V.2.2)$$

donde $S_3^x(w_1, w_2)$ es el biespectro de $x(n)$ y $H(w)$ es la respuesta en frecuencia del sistema.

Sea $\theta(w), \psi(w_1, w_2)$ las fases de $H(w)$ y $S_3^x(w_1, w_2)$ respectivamente, se consideran frecuencias discretas, es decir, $w = (2\pi / N)n$, $n \in [0, \dots, N - 1]$ entonces,

$$\psi(n, l) = \theta(n) + \theta(l) + \theta(-n - l) \quad (V.2.3)$$

Basándose en las fases consecutivas de partes del Biespectro, se tiene:

$$\psi(n, l) - \psi(n, l + 1) = \theta(-n - l) - \theta(-n - l - 1) + \theta(l) - \theta(l + 1) \quad (V.2.4)$$

y haciendo $m = -n - l$ se tiene:

$$\theta(m) = \theta(m - 1) + \psi(-l - m, l) - \psi(-l - m, l + 1) + \theta(l + 1) - \theta(l) \quad ; \quad m \neq l + 1 \quad (V.2.5)$$

reescribiendo la ecuación (V.2.5) en forma cerrada como:

$$\theta(m) = \theta(0) + \sum_{k=1}^m [\psi(-l - k, l) - \psi(-l - k, l + 1)] + m\theta_0 \quad (V.2.6)$$

donde

$$\theta_0 = \theta(l + 1) - \theta(l) \quad (V.2.7)$$

de la ecuación (V.2.3) se tiene:

$$\theta_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\psi(n, l + 1) - \psi(n, l)] \quad (V.2.8)$$

Las muestras de fase $\theta(l)$ y $\theta(l + 1)$ se pueden estimar combinando las ecuaciones (V.2.5) y (V.2.8). la muestra de fase $\theta(0)$ se iguala a cero, lo que introduce una constante multiplicativa correspondiente en el tiempo que es real y compleja para sistemas reales y complejos respectivamente.

Sea $\tilde{\psi}(n, l)$ el argumento principal de la fase del Biespectro $\psi(n, l)$, por ejemplo, $\psi(n, l) = \tilde{\psi}(n, l) + 2\pi I(n, l)$, donde $I(n, l)$ es una función que toma valores enteros. Evaluando el lado derecho de (V.2.6) y (V.2.8) empleando $\tilde{\psi}(n, l)$ se tiene:

$$\hat{\theta}(m) = \sum_{n=1}^m [\psi(-l - n, l) - \psi(-l - n, l + 1)] - 2\pi \sum_{n=1}^m I(-l - n, l) + m\theta_0$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2\pi}{N} m \sum_{n=0}^{N-1} [I(-l-n, l+1) - I(-l-n, l)] \\
 & = \theta(m) + 2\pi I_1(m) + \frac{2\pi}{N} I_2(l)m
 \end{aligned} \tag{V.2.9}$$

donde $I_1(\cdot)$ y $I_2(\cdot)$ son funciones que toman valores enteros. Por lo tanto, si los argumentos principales de las fases biespectrales se emplean en lugar de las fases, la fase resultante diferirá de la verdadera por un múltiplo entero de 2π , lo cual no afecta la fase y una componente de fase lineal de la forma $(2\pi/N)I_2(l)m$, afecta como un corrimiento circular igual a $I_2(l)$.

El algoritmo propuesto se resume a lo siguiente:

Dada una señal $x(n)$, $0 \leq n \leq L-1$:

- 1.- Estimar el biespectro discretizado de $x(n)$, $S_3^x(n, l)$ empleando cualquier método [37].
- 2.- Calcular el argumento principal de las fases de dos partes consecutivas del biespectro $S_3^x(n, l)$ y $S_3^x(n, l+1)$ las cuales se denotan por $\tilde{\varphi}(n, l)$ y $\tilde{\varphi}(n, l+1)$ respectivamente. Donde $0 \leq n \leq N-1$ y N es del tamaño de la FFT.
- 3.- Estimar la fase de Fourier de $h(n)$, denotada por $\theta(n)$, $n=1, \dots, N-1$ y basado en las ecuaciones (V.2.6) y (V.2.8) poniendo $\theta(0) = 0$.

V.3 Recuperación de la fase y magnitud empleando el biespectro.

Para una señal lineal no Gaussiana conociendo su espectro de orden superior (espectro de orden mayor de dos) permite recuperar la magnitud (con un factor de escala) y su fase (con corrimiento de fase lineal).

Sea $S(w)$ la transformada de Fourier de $x(n)$, entonces la siguiente ecuación relaciona la fase del biespectro $\Psi_3^x(w_1, w_2)$ a la fase de Fourier $\phi_x(w)$.

$$\Psi_3^x(w_1, w_2) = \phi_x(w_1) + \phi_x(w_2) - \phi_x(w_1 + w_2) \tag{V.3.1}$$

y por otro lado la magnitud biespectral se relaciona a la magnitud de Fourier mediante,

$$|S_3^x(w_1 + w_2)| = |X(w_1)| \cdot |X(w_2)| \cdot |X(w_1 + w_2)| \tag{V.3.2}$$

El problema es ahora recuperar $\phi_x(w)$ ($|S_3^x(w)|$) de $\Psi_3^x(w_1, w_2)$ ($|S_3^x(w_1 + w_2)|$). Tomando el logaritmo de ambos lados de (V.3.2) se obtiene:

$$\ln |S_3^x(w_1 + w_2)| = \ln |S(w_1)| + \ln |S(w_2)| + \ln |S(w_1 + w_2)| \quad (\text{V.3.3})$$

Comparando (V.3.1) y (V.3.3) muestra que los algoritmos de recuperación de fase se pueden emplear como algoritmos para recuperar la magnitud y viceversa, considerando que, $|S(w)| \neq 0$.

V.3.1 Algoritmos de Recuperación de Fase

Una de las características del biespectro es que preserva la fase de Fourier de una señal. La fase biespectral $\Psi_3^x(w_1, w_2)$ se puede calcular de:

$$\hat{\Psi}_3^x(w_1, w_2) = \text{arctang} \frac{\text{Im}[S_3^x(w_1, w_2)]}{\text{Re}[S_3^x(w_1, w_2)]} \quad (\text{V.3.4})$$

donde $S_3^x(w_1, w_2)$ es el biespectro y $\text{Re}[\cdot], \text{Im}[\cdot]$ denota la parte real e imaginaria respectivamente. Aún cuando se ignoraran los errores de estimación que resultan de los métodos de estimación del biespectro, el cálculo de la fase $\hat{\Psi}_3^x(w_1, w_2)$ difiere de la fase verdadera $\Psi_3^x(w_1, w_2)$ por $2\pi k(w_1, w_2)$ donde $k(w_1, w_2)$ sólo puede tomar valores enteros.

V.3.2 Algoritmo Matsuoka-Ulrych [34]

Los algoritmos de recuperación de fase empleando el biespectro pueden ser utilizados como algoritmos de recuperación de magnitud empleando (V.3.3). La ecuación (V.3.1) puede tomar la forma discreta siguiente:

$$\Psi_3^x(m, n) = \phi_x(m) + \phi_x(n) - \phi_x(m+n) \quad (\text{V.3.5})$$

Para recuperar la fase se requiere reconstruir $\phi_x(m), m = 0, 1, \dots, N$ de $\Psi_3^x(m, n)$. Se sugiere la ecuación recursiva [6]:

$$\phi_x(w) = \frac{2 \int_0^w \phi_x(\lambda) d\lambda - \int_0^w \psi_3^x(\lambda, w - \lambda) d\lambda}{w} \quad (\text{V.3.6})$$

la cual se modifica para cálculos digitales, resultando la expresión:

$$\phi_x(n) = \frac{2 \sum_{i=0}^{n-1} \phi_x(i) - S(n)}{n-1}, n = 2, 3, \dots, N \quad (\text{V.3.7})$$

$$\text{donde } S(n) = \sum_{i=0}^n \psi_3^x(i, n-i) \quad (\text{V.3.8})$$

El término $n=0$ corresponde a $w = 0$ y $n = N$ corresponde a $w = \pi$. Las dos condiciones iniciales $\phi_x(0)$ y $\phi_x(1)$, se requieren especificar, el valor de $\phi_x(0)$ puede ser cero o $\pm \pi$ y se determina de $\psi_3^x(0,0)$. Por otro lado la estimación de $\phi_x(1)$ se obtiene de:

$$\phi_x(1) = \sum_{n=2}^N \frac{S(n) - (SN - 1)}{n(n-1)} + \frac{\phi_x(N)}{N} \quad (\text{V.3.9})$$

donde $\phi_x(N)$ se puede poner a un valor cero o $k\pi$.

Empleando la fórmula recursiva [10]:

$$\phi_x(n) = \sum \psi_3^x(i,1) + \phi_x(0) + n\phi_x(1) \quad (\text{V.3.9})$$

donde las condiciones iniciales se determinan de la forma anterior. Definiendo ahora:

$$\Phi = [\phi_x(1), \phi_x(2), \dots, \phi_x(N-1)]' \quad (\text{V.3.10})$$

$$\Psi = [\psi_3^x(1,1), \psi_3^x(1,2), \dots, \psi_3^x(2,2), \psi_3^x(3,3), \dots, \psi_3^x(N/2, N/2)]'$$

el método Matsuoka-Ulrych forma el siguiente conjunto de ecuaciones empleando la ecuación (V.3.5) se obtiene:

$$\mathbf{A}\Phi = \Psi \quad (\text{V.3.11})$$

donde \mathbf{A} es una matriz aumentada .

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{V.3.11})$$

de tamaño $(N/2)^2 \times (N-1)$ para N par y $(N^2 - 1)/4 \times (N-1)$ para N impar. El vector de fase desconocido se obtiene empleando la solución de mínimos cuadrados de:

$$\Phi = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \Psi \quad (\text{V.3.12})$$

Este algoritmo es un método no recursivo que emplea todos los valores disponibles del biespectro.

RESUMEN

El presente trabajo define los espectros de orden superior (EOS) como la transformada de Fourier multidimensional de los cumulantes, y se mencionan los métodos no paramétricos y paramétricos para su estimación. Asimismo, se expone la teoría correspondiente al uso de los EOS para obtener la estimación de tiempos de atraso, detección de no linealidades en series temporales y la recuperación de señales.

CONCLUSIONES

Las conclusiones que se obtienen del presente estudio son las siguientes:

1. Aunque los poliespectros fueron introducidos en 1965 por Brillinger, las aplicaciones de los EOS es un campo relativamente nuevo y de actual investigación [39],[40],[41].
2. Dada una secuencia de datos, es necesario probar varios algoritmos para determinar cuál de ellos da los mejores resultados.
3. La herramienta HOSA (Higher Order Spectral Analysis) de MatLab es útil para comprobar la teoría de los diferentes algoritmos expuestos en este trabajo.
4. La estimación de tiempos de atraso se obtuvo usando el método convencional de la correlación cruzada, asimismo, se empleó los EOS en su estimación. Los resultados mostrados en las figuras III.4.1 y II.4.2 respectivamente, permiten concluir que el uso de los EOS es menos sensible al ruido y al número de muestras empleadas.
5. Es posible utilizar los EOS para detectar desviaciones de Gaussianidad ya que los cumulantes de orden mayores de dos son cero para señales Gaussianas, en el Apéndice A puede verse la demostración y se comprueba utilizando el programa Maple según se observa en la tabla I.2.1.
6. Es posible identificar sistemas no lineales del tipo Volterra usando el biespectro cruzado, de acuerdo a los resultados de simulación presentados en las figuras IV.2.2 y IV.2.3. Asimismo es posible detectar acoplamiento cuadrático de fase de acuerdo a los resultados de simulación del ejemplo IV.3.1.

RECOMENDACIÓN:

Con respecto al capítulo V, el cual trata la teoría de la aplicación de los EOS a recuperación de señales, se recomienda un estudio más profundo de esta aplicación para desarrollar algunos ejemplos, ya que por limitación de tiempo no fué posible llevarlo a cabo en el presente estudio.

Referencias y Bibliografía

- [1] Brillinger, D.R., "An Introduction to Polyspectra," *Ann. Math. Statist.*, 36, pp.1351-1374, 1965.
- [2] Papoulis, A. L., *Probability Random Variables and Stochastic Processes*, New York: McGraw-Hill, 1984.
- [3] Rosenblatt, M., "Cumulants and Cumulants Spectra," in *handbook of Statistics*, 3, pp.369-382, D.R Brillinger and P.R Krishnaiah (eds.), Elsevier Science Publisher B.V., 1983.
- [4] Shiryayev, A.N., "Some Problems in the Spectral Theory of Higher-Order Moments I," *Theory Probl. Appl.*, 5, pp.265-284, 1960.
- [5] Sinai, Y. G., "On Higher-Order Spectral Measures of Ergodic Stationary Processes," *Theory Prob. Appl.*, 8, pp.429-436, 1963
- [6] Brillinger, D.R., and M. Rosenblatt, "Asymptotic Theory of Estimates of k-th Order Spectra, in *Spectral Analysis of Time Series*," B. Harris (ed.), New York: Wiley, pp.153-188, 1967
- [7] Raghuveer M. R. and C. L. Nikias, "Bispectrum Estimation for short length data," in *Proc. ICASSP'85*, pp.1352-1355, 1985.
- [8] Pflug, A. L., E. Ioup and R. L Field, "Properties of Higher-Order Correlations and Spectra for Band Limited, Deterministic Transients," *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(2). pp.975-988, February, 1992.
- [9] Lii, K.S., and M.R. Rosenblatt, "Estimation and Deconvolution when the Transfer Function has zeros," *J. Theoretical Probability*, 1(1), pp.93-113, January, 1988.
- [10] Nikias, C.L., and M.R Raghuveer, "Bispectrum Estimation: A digital Signal Processing Framework proceedings IEEE, 75(7), pp.869-892, July 1987.
- [11] J.W.A. Fackrell S. Maclaughlin, and P.R White, "Bicoherence Estimation Using the Direct Method: part 1 – Theoretical Considerations," *Applied Signal Processing*, 1996.
- [12] Giannakis, G.B., "Cumulants: A Powerfull Tool in Signal Processing," *Proc. IEEE*, V.75, pp. 1333-1334, 1987.
- [13] Lii, K,S, " Non-Gaussian ARMA Model Identification and Estimation," *Proc. Bus . and Econ, Statistics (ASA)*, pp.135-144, 1982.

-
- [14] J.G. Proakis, Ch.M. Rader, F.Ling, C.L. Nikias, "Advanced Digital Signal Processing," Macmillan Publishing Co., New York, 1992.
- [15] Carte, G.C., "Coherence and time Delay Estimation," *Proceeding of the IEEE*, 75(2), February, 1987.
- [16] Sato, T., and K Sasaki, "Holographic Passive Sonar," *IEEE Trans, Sonics Ultrason*, SU-24, pp.193-200, May, 1977.
- [17] Sasaki and Sato, T, "Biespectral Holography ," *Journal of Acoustic. Soc. Amer.*, 62, pp.4004-408, 1977.
- [18] Pan, R., and C.L. Nikias, "Harmonic Decomposition Method in cumulants Domains," *Proceedings ICASSP'88*, pp.2356-2359, New York, 1988
- [19] Swami, A., J. M. Mendel, "Cumulant Based Approach to the Harmonic Retrieve problem," *IEEE Trans. on Signal Processing*, pp.39(50), pp1099-1109, May, 1991.
- [20] Papadopoulo, C. K., and C.L. Nikias, "Parameter Estimation of Exponentially Signal and signal Processing 38(8), pp.1424-1445, August, 1990.
- [21] Kumarasan, R., and D. W. Tufts, "Estimating the parameters of Exponentially Damped Sinusoids and Pole-Zero Modeling in Noise," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-30, pp.833-840, December, 1982.
- [22] Konstantinides, R., and K. Yao, "Statical Analysis of Effective Singular Values in Matrix Rank Determination" *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-24, pp.757-763, may, 1988.
- [23] Schetzen, M., "The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems", New York: 1980.
- [24] Tick, L. J., "The Estimation of Transfer functions of Quadratic systems," *Technometrics*, 3 (4), pp.562-567, November, 1961.
- [25] Juan García López, *Procesamiento Digital de Señales*. Editorial. CIC-IPN, 1999, pp.33-35.
- [26] Athanasios Papoulis *Probability, Random Variables, and Processes*, Third, Edition, 1984, pp.155.
- [27] Chrysostomos L. Nikias/ Athina P. Petropulu, *Higher order spectra analysis*. Printence Hall Signal Processing series, 1993, pp. 447-451.

- [28] John G. Proakis, Charles M. Rader, Fuyun. Ling, Chrysostomos L. Nikias, *Advanced Digital Signal Processing*, Macmillan, Publishing company, 1992, pp.550-554
- [29] Anantharam Swami, Jerry M. Mendel, Chrysostomos L. Nikias, *Matlab Higher Order Spectral Analysis Toolbox*, The Mathworks Inc, Dec. 1995, pp.70-73,
- [30] Chrysostomos L. Nikias and Mysore R. Raghuvver,"Bispectrum Estimation: A Digital Signal Processing Framework", IEEE, 1987, pp.871-874.
- [31] Chrysostomos L. Nikias and Jerry M. Mendel, *Signal Processing with Higher-Order Spectra*, IEEE, 1993.
- [32] Raghuvver M. R. and C. L. Nikias,"Bispectrum Estimation: A Parametric Approach." IEEE Trans. On Acoustic Speech and Signal Processing, ASSP-33 (4). October, 1985.
- [33] Kim, Y.C., and E.J Powers," Digital Bispectral Analysis and of Self-Excited Fluctuations Spectra ," Phys. Fluids, 21(8), pp.1452-1453, Agust, 1978.
- [34] Matsuoka, T., and T.J. Ulrych, Phase Estimation Using the Bispectrum," *Proceeding of IEEE*, 72, pp.1403-1411, October, 1984.
- [35] D.R Brillinge,"The identification of a particular nonlinear time series system," Biometrika, vol 64, pp.509-515, 1977.
- [36] S.A Dianat and M.R. Raghuvver,"Fast algorithms for phase and magnitud reconstruction from biespectra," Opt. Eng., vol. 29, no. 5, pp. 504-512, 1990
- [37] C.L. Nikias and A Petropulu , *Higher-Order Spectra Analysis: A Nonlinear Signal Processing Framework*. Englewood Cliffs, NJ: Printice-Hall , 1993
- [38] V.P. Leonov and A. N. Shiryaev,"On a method of calculation of semi-invariants," Theory Prob. Appl., vol. 4, pp. 319-328. 1959.
- [39] B. Chen and A. Petropulu, "Frequency Domain Blind MIMO System Identification Based on Second and Higher Order Statistics," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 49, pp. 1677--1688, no. 8 2001.
- [40] G. Krieger, I. Rentschler, G. Hauske, K. Schill, and C. Zetsche, "Object and scene analysis by saccadic eye-movements: An investigation with higher-order statistics," Spat. Vis., vol. 13, no. 2--3, pp. 201--214, 2000.
- [41] K. V. Cartwright, "Blind phase recovery in general QAM communication systems using alternative higher order statistics," IEEE Signal Processing Letters, vol. 6, no. 12, pp. 327-329, Dec. 1999.

APÉNDICE A

ESTADÍSTICOS DE ORDEN SUPERIOR DE SEÑALES GAUSSIANAS

En este apéndice se demuestra que los cumulantes de una función de densidad de probabilidad Gaussiana son cero para ordenes mayores de dos [32]).

La función densidad de probabilidad de un proceso Gaussiano continuo con media μ y variancia σ^2 es:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp[-(x - \mu)^2 / (2\sigma^2)]$$

Para saber cuáles son los cumulantes del proceso, primero se calcula la función generadora de momentos (FGM) y a partir de esta la función generadora de cumulantes (FGC).

La FGM $M(t)$ es la transformada de Laplace de la función de densidad de probabilidad en ambos lados [32].

$$M(t) = E(e^{tx}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 + tx} dx$$

$$\text{si } y = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \sigma t \Rightarrow dy = \frac{dx}{\sigma}; x = \sigma y + \mu + \sigma^2 t,$$

Así,

$$M(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y+\sigma t)^2 + t\sigma y + t\mu + \sigma^2 t^2} dy$$

$$M(t) = (e^{\frac{1}{2}t^2\sigma^2 + t\mu}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

pero $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1$ función de densidad de probabilidad normal con $\mu = 0; \sigma^2 = 1$

$$\therefore M(t) = e^{\frac{t^2\sigma^2}{2} + t\mu} \tag{A.1}$$

de donde la Función Generadora de Cumulantes es $K(t) = \ln M(t)$, obteniéndose:

$$K(t) = \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 \tag{A.2}$$

Ahora, de la FGC los cumulantes conjuntos se determinan realizando una expansión de potencias de la forma [62]:

$$K(t) = c_1 t + c_2 \frac{t^2}{2!} + c_3 \frac{t^3}{3!} + \dots c_r \frac{t^r}{r!} + \dots \quad (\text{A.3})$$

donde c_1 es el primer cumulante y c_2 es el segundo cumulante y así sucesivamente.

Comparando las ecuaciones A.2 y A.3 se observa que:

$$\begin{aligned} c_1 &= \mu \\ c_2 &= \sigma^2 \\ c_r &= 0 \quad r \geq 3 \end{aligned}$$

de anterior, los cumulantes de tercer orden o orden mayor que dos, es decir, $c_3(0,0)$, $c_4(0,0,0)$ y así sucesivamente son cero para procesos Gaussianos.

Para generalizar este resultado, considerando primero la función de autocorrelación $R(\tau)$ de un proceso con media cero, la autocorrelación de este proceso es igual al cumulante de segundo orden $c_2(\tau)$. El valor máximo posible de $c_2(\tau)$ es cuando $\tau = 0$ de donde:

$$c_2(\tau) \leq c_2(0) \quad \forall \tau$$

de lo anterior, $c_2 = 0$ entonces $c_2(\tau) = 0 \quad \forall \tau$. Un argumento similar se puede aplicar al cumulante de tercer orden, lo cual resulta en $c_3(0,0) = 0$ entonces $c_3(\tau_1, \tau_2) = 0 \quad \forall \tau_1, \tau_2$. Como $c_3(0,0)$ es el sesgo de la señal, significa que las señales con sesgo cero no tienen cumulantes de tercer orden.

APÉNDICE B

PROMEDIO DEL PRODUCTO DE VARIABLES GAUSSIANAS [38]

Sea X una variable aleatoria, entonces:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right], \quad (\text{B-1})$$

normalizando X , es decir:

$$Y = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} \quad (\text{B-2})$$

entonces:

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \quad (\text{B-3})$$

Y es una variable aleatoria normalizada debido a que, $E[Y]=0$ y $V[Y]=1$. Si $Y_1, Y_2, \dots, Y_{2N+1}$ ($N=1,2,\dots$) son variables aleatorias conjuntas normalizadas, entonces:

$$E[Y_1 Y_2 \dots Y_{2N}] = \sum \prod E[Y_i] E[Y_j] \quad (\text{B-4})$$

y

$$E[Y_1 Y_2 \dots Y_{2N+1}] = 0; N=0,1,2,\dots \quad (\text{B-5})$$

donde la notación $\sum \prod$ es la suma de todas las posibles particiones de $Y_1 Y_2 \dots Y_{2N}$ en pares. El número de términos es $[(2N)! / N! 2^N]$. Por ejemplo, para $N=2$,

$$E[Y_1 Y_2 Y_3 Y_4] = E[Y_1 Y_2] E[Y_3 Y_4] + E[Y_1 Y_3] E[Y_2 Y_4] + E[Y_1 Y_4] E[Y_2 Y_3] \quad (\text{B-6})$$

El número de términos en ésta expresión es:

$$\frac{(2N)!}{(N)! 2^N} = \frac{4!}{2! 2^2} = 3 \quad (\text{B-7})$$

Para demostrar este resultado, considérese $p(y_1, y_2, \dots, y_N)$ como la función densidad de probabilidad conjunta (fdpc) de N variables aleatorias, Y_1, Y_2, \dots, Y_N . La función característica de la función de densidad de probabilidad conjunta es:

$$M_Y(a_1, a_2, \dots, a_N) = E[\exp[j(a_1 y_1, a_2 y_2, \dots, a_N y_N)]]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_N p(y_1, y_2, \dots, y_N) \exp(j \sum_{i=1}^N a_i y_i) \quad (\text{B-8})$$

Desarrollando la función característica empleando la serie de Taylor se obtiene:

$$M_Y(a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{k_1}^{\infty} \sum_{k_2}^{\infty} \dots \sum_{k_N=0}^{\infty} c_{k_1 k_2 \dots k_N} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_N^{k_N} \quad (\text{B-9})$$

En la que,

$$c_{k_1 k_2 \dots k_N} = \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_N!} \frac{\partial^{k_1}}{\partial a_1^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial a_2^{k_2}} \dots \frac{\partial^{k_N}}{\partial a_N^{k_N}} M_Y(a_1, a_2, \dots, a_N) \Big|_{a_1=a_2=\dots=a_N=0} \quad (\text{B-10})$$

De la ecuación (B-8), se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{k_1}}{\partial a_1^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial a_2^{k_2}} \dots \frac{\partial^{k_N}}{\partial a_N^{k_N}} M_Y(a_1, a_2, \dots, a_N) \Big|_{a_1=a_2=\dots=a_N=0} \\ &= E[Y_1^{k_1} Y_2^{k_2} \dots Y_N^{k_N}] j^{k_1} j^{k_2} \dots j^{k_N} \end{aligned} \quad (\text{B-11})$$

sustituyendo en la ecuación (B-9),

$$M_Y(a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{k_1}^{\infty} \sum_{k_2}^{\infty} \dots \sum_{k_N=0}^{\infty} E[Y_1^{k_1} Y_2^{k_2} \dots Y_N^{k_N}] (j)^N \frac{(ja_1)^{k_1} (ja_2)^{k_2} \dots (ja_N)^{k_N}}{k_1! k_2! \dots k_N!} \quad (\text{B-12})$$

donde los términos para $k_1 = k_2 = \dots = k_N = 1$ es:

$$E[Y_1 Y_2 \dots Y_N] (ja_1)(ja_2) \dots (ja_N) = E[Y_1 Y_2 \dots Y_N] (j)^N (a_1, a_2, \dots, a_N) \quad (\text{B-13})$$

Este término tiene el promedio que se requiere. También, es el único término en la expansión de la ecuación B-12. Se obtiene otra expansión de la función característica para el caso especial cuando Y_1, Y_2, \dots, Y_N son variables aleatorias normalizadas. Entonces se obtiene el resultado deseado igualando los términos en la nueva expansión que contiene el producto $(a_1 a_2 \dots a_N)$ con el término de la ecuación B-13.

Si Y_1, Y_2, \dots, Y_N son variables aleatorias conjuntas normalizadas, su función característica se puede demostrar que es:

$$M_Y(a_1, a_2, \dots, a_N) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E[Y_i Y_j] a_i a_j \right) \right] \quad (\text{B-14})$$

Ahora, empleando la expansión:

$$e^x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} \quad (\text{B-15})$$

La ecuación (B-14) se convierte en:

$$M_Y(a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(-\frac{1}{2}\right)^p \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E[Y_i Y_j] a_i a_j \right]^p \quad (\text{B-16})$$

los primeros términos de la ecuación (B-16) son:

$$\begin{aligned} M_Y(a_1, a_2, \dots, a_N) = & 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N E[Y_{k_1} Y_{k_2}] a_{k_1} a_{k_2} \\ & + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N \sum_{k_3=1}^N \sum_{k_4=1}^N E[Y_{k_1} Y_{k_2}] E[Y_{k_3} Y_{k_4}] a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} + \dots \end{aligned} \quad (\text{B-17})$$

De acuerdo a lo anterior, sólo se requieren los términos que contienen el producto $(a_1 a_2 \dots a_N)$. Se nota, que los términos de la expansión de la ecuación (B-16), contiene solamente productos de números pares de a's. Así, si las ecuaciones (B-16) y (B-12) son iguales, se requiere que los coeficientes del término de la ecuación (B-13) sea cero si N es impar. Por lo que, se ha demostrado que:

$$E[Y_1 Y_2 \dots Y_{2N+1}] = 0 \quad N=0,1,2,\dots \quad (\text{B-18})$$

Esta es la ecuación (B-5). Para el caso cuando particular cuando N es par, sea $N=2M$, se nota que únicamente los términos de la ecuación (B-16) que contiene productos de la forma $a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_{2M}}$ son aquellos para los cuales $P=M$. Esos términos son:

$$\frac{1}{M!} \left(-\frac{1}{2}\right)^M \sum_{k_1=1}^{2M} \sum_{k_2=1}^{2M} \dots \sum_{k_M=1}^{2M} E[Y_{k_1} Y_{k_2}] \dots E[Y_{k_{2M-1}} Y_{k_{2M}}] a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_{2M}} \quad (\text{B-19})$$

Como sólo se necesitan los términos para los cuales $k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_{2M}$, la ecuación B-13 tiene ésta forma. Eliminando los términos de la ecuación (B-19) no deseados, se obtienen los términos requeridos y se pueden escribir como:

$$\frac{1}{M!} \left(-\frac{1}{2}\right)^M (a_1 a_2 \dots a_{2M}) \sum E[Y_{k_1} Y_{k_2}] \dots E[Y_{k_{2M-1}} Y_{k_{2M}}] \quad (\text{B-20})$$

la suma es sobre todos los términos para los cuales $k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_{2M}$. Esta suma tiene diversos términos con el mismo valor. Para simplificar la ecuación (B-20), se nota que $Y_{k_i} Y_{k_j} = Y_{k_j} Y_{k_i}$. Hay 2^M términos en la sumatoria de la ecuación (B-20) que son idénticos, ya que cada término es el producto de M pares. También se nota que intercambiando el orden de los productos de un término, no afecta su valor. Esto se debe a que:

$$E[Y_{k_1} Y_{k_2}] E[Y_{k_3} Y_{k_4}] = E[Y_{k_3} Y_{k_4}] E[Y_{k_1} Y_{k_2}] \quad (\text{B-21})$$

Como cada término es el producto de M pares, existen M! permutaciones. Por lo que hay M! términos en la sumatoria de la ecuación (B-20) que son idénticos, sumando todos los términos idénticos la ecuación (B-20) se reescribe como:

$$(-1)^M (a_1 a_2 \cdots a_{2M}) \sum \prod E[Y_{k_i} Y_{k_j}] \quad (\text{B-22})$$

donde $\prod E[Y_{k_i} Y_{k_j}]$ significa que $E[Y_{k_1} Y_{k_2}] E[Y_{k_3} Y_{k_4}] \cdots E[Y_{k_{2M-1}} Y_{k_{2M}}]$, y la suma de todas las distintas maneras para formar el producto. Igualando las ecuaciones (B-22) y (B-13) se obtiene:

$$E[Y_1 Y_2 \cdots Y_{2M}] = \sum \prod E[Y_i Y_j] \quad (\text{B-23})$$

ésta es la ecuación (B-4).

Sustituyendo la ecuación (A-2) y la ecuación (B-4), se obtiene:

$$E \left[\left(\frac{X_1 - \bar{X}_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{X_2 - \bar{X}_2}{\sigma_2} \right) \cdots \left(\frac{X_{2N} - \bar{X}_{2N}}{\sigma_{2N}} \right) \right] = \sum \prod \left(\frac{X_i - \bar{X}_i}{\sigma_i} \right) \left(\frac{X_j - \bar{X}_j}{\sigma_j} \right) \quad (\text{B-24})$$

multiplicando ambos lados de ésta ecuación por el producto $\sigma_1 \sigma_1 \cdots \sigma_{2N}$, se obtiene:

$$E[(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2) \cdots (X_{2N} - \bar{X}_{2N})] = \sum \prod E[(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)] \quad (\text{B-25})$$

De la misma manera, sustituyendo la ecuación (B-2) en la ecuación (B-5) se obtiene:

$$E[(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2) \cdots (X_{2N+1} - \bar{X}_{2N+1})] = 0 \quad (\text{B-26})$$

Para ilustrar ésta última ecuación, cuando N=1. Se tiene:

$$E[(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)(X_3 - \bar{X}_3)] = 0 \quad (\text{B-27})$$

expandiendo el producto, se obtiene:

$$E[X_1 X_2 X_3] = E[X_1] E[X_2 X_3] + E[X_2] E[X_1 X_3] + E[X_3] E[X_1 X_2] - 2E[X_1] E[X_2] E[X_3] \quad (\text{B-28})$$

APENDICE C

IDENTIFICATION OF NONLINEAR SYSTEMS BASED ON THE BISPECTRUM AND A SECOND ORDER VOLTERRA MODEL

Juan García López, José Julio Mendoza Santiago
Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital (CITEDI)
Av. del Parque 1310, Mesa de Otay, Tijuana, B.C., México.
Tel: (66) 23-13-44 ext. 125, e-mail: jgarcial@citedi.mx, jmendoza@citedi.mx

Abstract

A second order Volterra model is used to obtain the identification of a non linear system. The identification problem is to determine the impulse response of the linear part and the kernel of the second-order Volterra model by using the bispectrum.

A simulation platform will be used to obtain results applied to a nonlinear system.

1. Introduction

Most of the traditional digital signal processing techniques are based on second-order statistics, such as the power spectrum and the autocorrelation function $R_{xx}(\tau)$.

The power density spectrum describes a Gaussian process (a stochastic process with a probability density jointly function with Gaussian distribution), that uses the second order statistics (autocorrelation) of the signal, however, the power spectrum cannot detect the phase. Higher order spectral (HOS) are useful to identify the nonlinearity of a system under a random input.

Some motivations to study higher order spectra are:

1. To detect non Gaussian signals
2. To reconstruct the phase and magnitude of signals or systems.
3. To identify a nonlinear system or characterize nonlinearities in time series.

It can be shown that for Gaussian signals, all HOS greater than two are zero. If the HOS for order larger than two are different from zero, that means that there is a non Gaussian signal. The signal processing of white non Gaussian signals based on HOS has certain advantages in detecting and/or estimating parameters.

The HOS preserve the phase and magnitude when a signal or system is a minimum phase (singularities inside the unit circle).

The HOS are useful when we try to identify the nonlinearities of a signal or system. Each type of nonlinearity has to be investigated as a special case, since there is not a general relation for stationary random data passing through a nonlinear system.

2. Moments and joint cumulants

Let be X_1, X_2, \dots, X_n a set of n random variables, their joint cumulants of order $r=k_1+k_2+\dots+k_n$ are defined as :

$$c_{k_1, k_2, \dots, k_n} = (-j)^r \frac{\partial^r \ln \phi(w_1, w_2, \dots, w_n)}{\partial w_1^{k_1} \partial w_2^{k_2} \dots \partial w_n^{k_n}} \quad (1)$$

; $w_1 = w_2 = \dots = w_n = 0$

Where,

$$\phi(w_1, w_2, \dots, w_n) E[e^{jw_1 X_1 + \dots + jw_n X_n}] \quad (2)$$

is the joint characteristic function.

For example,

$$c_{3,2} = (-j)^5 \frac{\partial^5 \ln \phi(w_1, w_2)}{\partial w_1^3 \partial w_2^2} ; w_1 = w_2 = 0$$

The joint moment of order $r = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ is given by ,

$$m_{k_1, k_2, \dots, k_n} = E[X_1^{k_1}, X_2^{k_2}, \dots, X_n^{k_n}] = (-j)^r \frac{\partial^r \ln \phi(w_1, w_2, \dots, w_n)}{\partial w_1^{k_1} \partial w_2^{k_2} \dots \partial w_n^{k_n}} ; w_1 = w_2 = \dots = w_n = 0 \quad (3)$$

from the above definitions we can see that there is a relation between cumulants and moments.

For only one random variable X_1 , the cumulant generating function is :

$$c_k = (-j) \frac{\partial^k \ln \phi(w)}{\partial w^k} \quad (4)$$

; $w = 0$ where $\phi(w) = E[e^{jwX}]$

when $k=1$,

$$c_1 = (-j) \frac{d \ln E[e^{jwX}]}{dw} = (-j) \frac{E[jXe^{jwX}]}{E[e^{jwX}]} ; w = 0 \quad c_1 = E[X] = m_1$$

for $k=2$,

$$c_2 = (-j)^2 \frac{d^2 \ln E[e^{jwX}]}{dw^2} = \frac{d^2}{dw^2} \ln E[e^{jwX}] = \frac{E[e^{jwX}] E[-X^2 e^{jwX}] - E[jXe^{jwX}] E[jXe^{jwX}]}{E[e^{jwX}]^2} ; w = 0$$

$$c_2 = -E[X^2] + E[X]^2 = (-j)^2 [E[X^2] - E[X]^2] = E[X^2] - E[X]^2 = m_2 - m_1^2 \quad (5)$$

Applying the same procedure, c_3 and c_4 are obtained as:

$$c_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 \quad (6)$$

$$c_4 = m_4 - 4m_3 m_1 - 3m_2^2 + 12m_2 m_1^2 - 6m_1^4 \quad (7)$$

For an stochastic variable (random variable that changes with time) the moments are given as: $m_n^x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = E[X(n)X(n+\tau) \dots X(n+\tau_{n-1})]$

Note that for $n=2$

$m_2^x(\tau) = E[x(n)x(n+\tau)] = R_{xx}(\tau)$; where τ is the shift phase between each sequence.

3. Relation between cumulants (c_n^x) and moments (m_n^x) for an stochastic variable.

Some relations between cumulants and moments are given as follow:

$$c_1^x = m_1^x = E[X(n)] = \text{mean value} \quad (8)$$

$$c_2^x(\tau) = m_2^x(-\tau) - (m_1^x)^2 = \text{covariance sequence} \quad (9)$$

$$c_3^x(\tau_1, \tau_2) = m_3^x(\tau_1, \tau_2) - 1^x [m_2^x(\tau_1) + m_2^x(\tau_2) + m_2^x(\tau_1 - \tau_2)] + 2(m_1^x)^3, \text{ etc.} \quad (10)$$

4. Higher order spectra definition (HOS) or cumulant spectra

The HOS are defined in terms of cumulants, this is shown in Fig . 1.

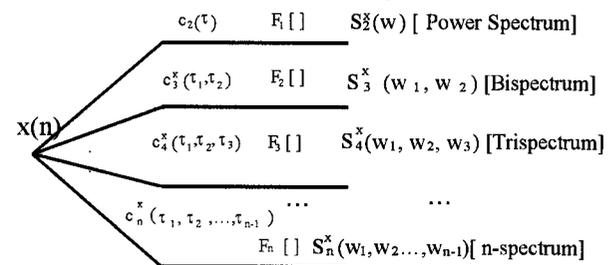


Fig.1 HOS definitions

Some HOS are: The power spectral density function or simply the power spectrum, is the unidimensional Fourier transform of the second order cumulant, hence:

$$S_2^x(w) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} c_2^x(w) e^{-jw\tau} ; |w| < \pi \quad (11)$$

Remember that the autocorrelation is the second order cumulant.

Bispectrum

The bispectrum is the bidimensional Fourier transform of the third-order cumulant, hence:

$$S_3^x(w_1, w_2) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_3^x(w_1, w_2) e^{-jw\tau_1} e^{-jw\tau_2}$$

$$; |w_1| < \pi; |w_2| < \pi; |w_1 + w_2| < \pi; \quad (12)$$

5. General formula for a nonlinear Volterra System.

A nonlinear time series $y(n)$ can be considered to be the output of a nonlinear system with an stochastic stationary input $x(n)$.

The Volterra discrete system of p -th order is represented by the first $p+1$ terms of the Volterra series [1] whose input is $x(n)$, that is:

$$y(n) = h_0 + \sum_i^p H_i[x(n)] \quad (13)$$

$$= h_0 + \sum_i \sum_{(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i)} h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) x(n-\tau_1) \dots x(n-\tau_i)$$

Where $H_i[\cdot]$ is the Volterra operator i -th order, and $h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i)$ is the kernel of the Volterra system, which are bounded and discrete at each

τ_i , they are symmetrical functions of its arguments, for casual systems $h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) = 0$ for any $\tau_i < 0$.

When $x(n)$ is a random process with zero mean, $H_1[\cdot]$ corresponds to a general linear model, and successive terms $H_i[\cdot]$, $i > 1$, are referred as the "quadratic" ($H_2[\cdot]$), "cubic" ($H_3[\cdot]$) components etc.

Second-order Volterra filter

Suppose that a time series is represented by the second order Volterra model.

$$y(n) = \sum_{\tau_1} h_1(\tau_1) x(n-\tau_1) + \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} h_2(\tau_1, \tau_2) x(n-\tau_1) x(n-\tau_2) \quad (14)$$

Where $y(n)$ is a stationary random process with zero mean. Eq. (14) can be viewed as a parallel connection of a linear system $h_1(\tau)$ and a quadratic system $h_2(\tau_1, \tau_2)$.

The identification problem is to determine the impulse response $h_1(\tau)$ and the kernel $h_2(\tau_1, \tau_2)$ as illustrated in Fig.2.

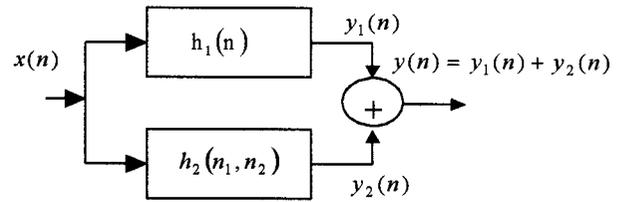


Fig. 2 Second order Volterra system.

6. Identification assuming Gaussian input and access to both input and output

Let $x(n)$ be a stationary zero mean Gaussian process. Using eq. (14) and Fig.2, then [2]

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) \quad (15)$$

$$y_1(n) = \sum_{\tau_1} h_1(\tau_1) x(n-\tau_1)$$

$$y_2(n) = \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} h_2(\tau_1, \tau_2) x(n-\tau_1) x(n-\tau_2)$$

The mean value of the output is given by:

$$m_1^y = E\{y(n)\} = E\{y_1(n)\} + E\{y_2(n)\}$$

$$= \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} h_2(\tau_1, \tau_2) E\{x(n-\tau_1) x(n-\tau_2)\}$$

since $E[x(n)] = 0$ and is a stationary process, then

$$m_1^y = \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} h_2(\tau_1, \tau_2) c_2^x(\tau_1 - \tau_2) \quad (16)$$

Where $c_2^x(\tau)$ is the sequence of covariance (or autocorrelation) of $x(n)$. Let $H_2(w_1, w_2)$ be the Fourier transform of $h_2(\tau_1, \tau_2)$, that is,

$$H_2(w_1, w_2) = \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-j(w_1\tau_1 + w_2\tau_2)} \quad (17)$$

and $S_2^x(w)$ is the Fourier transform of $c_2^x(\tau)$, then,

$$S_2^x(w) = \sum_{\tau} c_2^x(\tau) e^{-jw\tau}, \quad (18)$$

from eqs.. (17) and (18), eq. (16) becomes:

$$\begin{aligned} m_1^y &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} \iint H_2(w_1, w_2) e^{j[w_1\tau_1 + w_2\tau_2]} dw_1 dw_2 \\ &\quad \int S_2^x(w) e^{jw(\tau_1 - \tau_2)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int H_2(w, -w) S_2^x(w) dw \end{aligned} \quad (19)$$

Now, the cross-spectrum $S_2^{xy}(w)$ between the input and output is computed as follows. Let c_2^{xy} be the cross covariance of the input and output process. Then :

$$\begin{aligned} c_2^{xy}(\tau) &= E\{x(n+\tau)[y(n) - m_1^y]\} \\ &= E\{x(n+\tau)y_1(n)\} \\ &= \sum_{\tau_1} h_1(\tau_1) c_2^x(\tau + \tau_1) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int H_1(w) S_2^x(-w) e^{-jw\tau} dw \end{aligned} \quad (20)$$

Where $H_1(w)$ is the Fourier transform of $h_1(\tau)$. In eq. (20) it was assumed that third order cumulant sequence of the Gaussian process $x(n)$ is zero. The cross spectrum between $x(n)$ and $y(n)$ is the Fourier

transform of $c_2^{xy}(\tau)$, it can be shown [3],[4] that is equal to:

$$S_2^{xy}(w) = H_1(w) S_2^x(w) \quad (21)$$

Hence, if a Gaussian process is the input to the second Volterra system, the linear part can be

identified by:

$$H_1(w) = \frac{S_2^{xy}(w)}{S_2^x(w)} = \frac{X^*(f)Y(f)}{|X(f)|^2} \quad (22)$$

The cross third order cumulant between the input and output is given by:

$$\begin{aligned} c_3^{xxy}(\tau_1, \tau_2) &= E\{x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)[y(n) - m_1^y]\} \\ &= E\{x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)y_2(n)\} \\ &\quad - m_1^y E\{x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)y_2(n)\} \end{aligned} \quad (23)$$

From eq. (16) and the fact that if X_1, X_2, X_3, X_4 are zero mean jointly Gaussian random variables, then,

$$\begin{aligned} E\{X_1 X_2 X_3 X_4\} &= E\{X_1 X_2\} E\{X_3 X_4\} \\ &\quad + E\{X_1 X_3\} E\{X_2 X_4\} + E\{X_1 X_4\} E\{X_2 X_3\} \end{aligned}$$

Hence [1],

$$\begin{aligned} c_3^{xxy}(\tau_1, \tau_2) &= 2 \sum_{n_1} \sum_{n_2} h_2(n_1 - \tau_1, n_2 - \tau_2) \\ &\quad c_2^x(n_1) c_2^x(n_2) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^2} \iint H_2(-w_1, -w_2) e^{j(w_1\tau_2 + w_2\tau_1)} \\ &\quad S_2^x(w_1) S_2^x(w_2) dw_1 dw_2 \end{aligned} \quad (24)$$

Where, the cross bispectrum

$S_3^{xxy}(w_1, w_2)$ is,

$$\begin{aligned} S_3^{xxy}(w_1, w_2) &= F_2\{c_3^{xxy}(\tau_1, \tau_2)\} \\ &= 2H_2(-w_1, -w_2) S_2^x(w_1) S_2^x(w_2) \end{aligned} \quad (25)$$

Where $F_2\{\}$ denotes the bidimensional Fourier transform. Eq. (25) indicates that the quadratic component of the second order

Volterra system can be identified by computing the power spectrum of the input and the cross bispectrum between input and output; that is,

$$H_2(-w_1, -w_2) = \frac{S_3^{xxy}(w_1, w_2)}{2S_2^x(w_1)S_2^x(w_2)} \quad (26)$$

It has been shown that, if an input $x(n)$ is a zero mean Gaussian process and if the input and output are accessible to obtain correlations and third order cumulant, then this provides a method for identification of a second order nonlinear system.

7. Simulation example

To validate the exposed non parametric method to identify a non linear system, the linear part is implemented by a finite impulse response filter (FIR) order 11 (12 coefficients) and corner frequency of 0.2. The quadratic part was implemented by a 12 order FIR filter with a corner frequency of 0.1, the bidimensional kernel q is obtained by:

$$q = h^T h \quad (27)$$

where h is the coefficient vector of the unidimensional FIR filter.

The excitation signal, the FIR filters and the implementation of eqs. (22) and (26) were carried out in the Matlab platform and the Higher Order Spectral Analysis (HOSA) toolbox.

The true and the estimated transfer function (TF) for the linear part are shown in Fig. 1

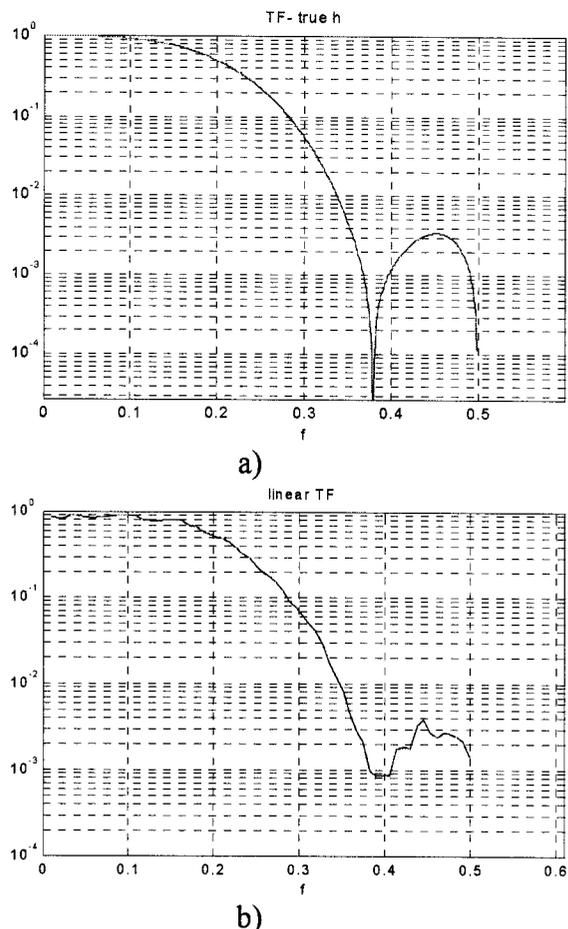
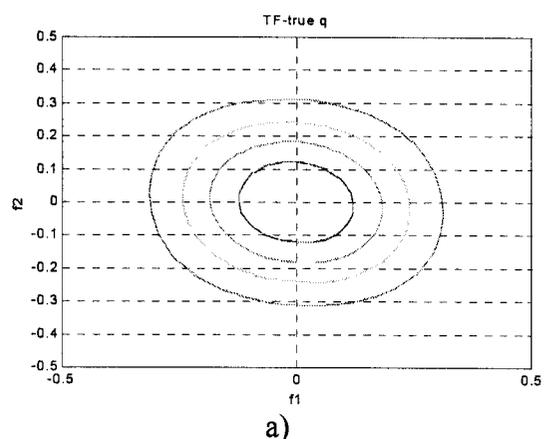


Fig. 1. Linear TF, a) True , b) Estimated

The true and the estimated TF for the quadratic part are shown in Fig. 2.



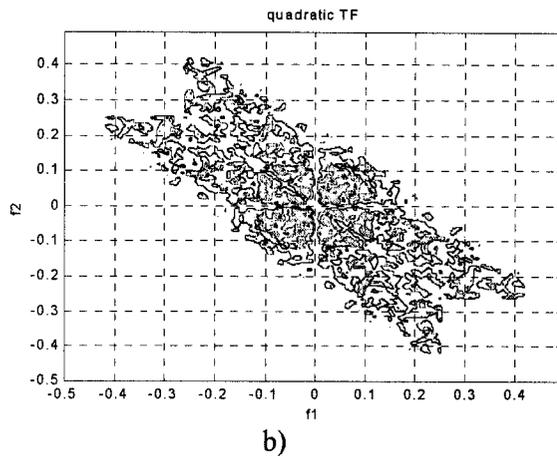


Fig.2 Quadratic TF, a) True , b) Estimated

As is observed, the true and the estimated linear part are quite similar. The quadratic part at first look, do not seem to be the same, however, in Fig.2, the plots are shown as contour plots, that means level curves. Otherwise, a 3-D plot of the quadratic TF can give a better view of the frequency response.

Conclusion:

According with the obtained results shown in Figs. 1 and 2, the procedure of a non parametric identification, of a non linear second-order Volterra system, whose mathematical development is exposed in this paper, is validated.

As it can be observed, the true and the estimated linear system match closely. For the quadratic system the estimate does not match closely.

References:

- [1] Schetzen, M., *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*, New York: 1980.
- [2] Tick, L. J., *The Estimation of Transfer functions of Quadratic systems*, *Technometrics*, 3 (4), pp.562-567, November, 1961.
- [3] Juan García López, *Procesamiento Digital de Señales*. Editorial. CIC-IPN, 1999, pp.33-35.
- [4] Athanasios Papoulis *Probability, Random Variables, and Processes*, Third Edition, 1984, p.155
- [5] Chrysostomos L. Nikias/ Athina P. Petropulu *Higher order spectra analysis* Printence Hall Saignal Processing series 1993, pp. 447-451.
- [6] John G. Proakis, Charles M. Rader, Fuyun Ling, Chrysostomos L.Nikias, *Advanced digital signal processing*, Macmilan, Publishing company, 1992, pp,550-554
- [7] Anantharam Swami, Jerry M. Mendel, Chrysostomos L. Nikias, *Matlab Higher Order Spectral Analysis Toolbox*, The Mathworks Inc, Dec. 1995, pp.70-73,
- [8] Chrysostomos L. Nikias and Mysore R. Raghuveer, "Bispectrum Estimation: A Digital Signal Processing Framework", IEEE, 1987, pp.871-874
- [9] Chrysostomos L. Nikias and Jerry M. Mendel, *Signal Processing with Higher-Order Spectra*, IEEE, 1993.