



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

---

---

---



**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**  
**SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

**RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES DE ENTRADA  
CON FILTROS VARIANTES EN EL TIEMPO**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIONES

PRESENTA:

ING. AMÉRICO ISRAEL VARGAS ESCAMILLA

DIRECTORES DE TESIS:

DR. VLADIMIR RABINOVITCH LIKHTMAN

M. en C. MARCO ANTONIO ACEVEDO MOSQUEDA



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

## ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 11:00 horas del día 4 del mes de Diciembre del 2009 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E. S. I. M. E. para examinar la tesis titulada:

### "RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES DE ENTRADA CON FILTROS VARIANTES EN EL TIEMPO"

Presentada por el alumno:

<b>VARGAS</b>	<b>ESCAMILLA</b>	<b>AMÉRICO ISRAEL</b>							
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)							
		Con registro: <table border="1"> <tr> <td>A</td> <td>0</td> <td>8</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>8</td> <td>7</td> </tr> </table>	A	0	8	0	2	8	7
A	0	8	0	2	8	7			

aspirante de:

### MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIONES

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

#### LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

  
\_\_\_\_\_  
DR. VLADIMIR RABINOVITCH LIKHTMAN

  
\_\_\_\_\_  
M. EN C. MARCO ANTONIO ACEVEDO MOSQUEDA

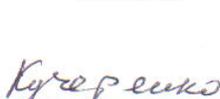
Presidente

  
\_\_\_\_\_  
DR. VLADIMIR KAZAKOV

Segundo Vocal

  
\_\_\_\_\_  
M. EN C. MARCO ANTONIO ACEVEDO MOSQUEDA

Tercer Vocal

  
\_\_\_\_\_  
DR. VALERI VLADIMIROVICH KUCHERENKO

Secretario

  
\_\_\_\_\_  
DRA. MARTHA CECILIA GALAZ LARIOS

Suplente

  
\_\_\_\_\_  
DR. MAURO ALBERTO ENCISO AGUILAR

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

  
\_\_\_\_\_  
DR. JAIME ROBLES GARCIA  




**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

En la Ciudad de México, DF., el día 04 del mes Diciembre del año 2009, el (la) que suscribe Américo Israel Vargas Escamilla alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Telecomunicaciones, con número de registro A080287, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Vladimir Rabinovitch Likhtman y el M. en C. Marco Antonio Acevedo Mosqueda y cede los derechos del trabajo intitulado "Reconstrucción de Señales de Entrada con Filtros Variantes en el Tiempo", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección americk\_ve@yahoo.com.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

---

Américo Israel Vargas Escamilla

# Agradecimientos

Al Instituto Politécnico Nacional y en especial a la Sección de Estudios de Posgrado e investigación por haberme abierto las puertas.

A mis maestros por sus enseñanzas y consejos a lo largo de mi trayectoria como estudiante de Posgrado.

A mis directores de tesis, Dr. Vladimir Rabinovitch y M. en C. Marco Antonio Acevedo Mosqueda por haberme alentado y brindado las herramientas necesarias para realizar este trabajo, así como su amistad.

A mis compañeros de la Maestría, gracias por su amistad que me alentaron a superar momentos difíciles y por compartir grandes momentos.

Sinceramente, Américo Israel Vargas Escamilla.

# Dedicatoria

A mis padres y a mi hija porque han sido las personas más importantes en mi vida y es a ellos a quienes debo lo que soy, a mi madre por haberme dado la vida y procurarme en cada momento con el fin de sacarme adelante y hacer de mi una persona de bien, a mi padre por haberme apoyado en cada decisión que he tomado a lo largo de mi vida y que además de ser mi padre siempre ha estado presente en todo momento como mi mejor amigo.

A mi hermosa hija Naomi por su amor y por ser mi gran inspiración para superarme y ser mejor en la vida día con día.

A mis tías Edelmira y Georgina por su cariño, por apoyarme siempre en los momentos difíciles.

A Erika por haber llegado a mi vida en un momento muy importante para mi y por apoyarme incondicionalmente.

A todos mis familiares y amistades, que de una u otra forma, me ayudaron en los momentos más felices de mi vida.

## **RESUMEN**

El presente trabajo de tesis abarca uno de los problemas más frecuentes en la ingeniería de las comunicaciones, la reconstrucción de señales de entrada de transmisiones de radio reales y llevadas a cabo por la SECTUR, con la implementación de procesamiento digital de señales y considerando a la ionosfera el medio de propagación de las ondas de radio y también el medio que actúa como un filtro que cambia dependiendo del tiempo.

En este trabajo se presentan los resultados de un desarrollo matemático aplicado al procesamiento digital de señales donde se considera un filtro que depende del tiempo y que no puede ser resuelto con la teoría tradicional del procesamiento digital de señales como un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Se presentan también los resultados obtenidos por el método propuesto con el diseño de un programa aplicado a señales reales que fueron transmitidas a través de la ionosfera por el sistema de radiocomunicaciones de la SECTUR.

## **ABSTRACT**

The present thesis work is about one of the most common problems in communications engineering, reconstruction of input signals from a radio transmission system, through digital signal processing and considering ionosphere the means of radio waves propagation as a means to change depending on time.

This paper presents results of a mathematical development applied to digital signal processing where the filter is considered as a filter that depends on time and it can not be solved with the traditional theory of digital signal processing as a invariant linear time system.

Moreover, we present the results obtained by the proposed method to design a program applied to real signals were transmitted through the ionosphere by SECTUR radio communications system.

# CONTENIDO

Introducción.....	vi
Antecedentes.....	viii
Justificación.....	x
Objetivo.....	xi

## **Capítulo 1 Características de la ionosfera, tipos de señales y tipos de filtros..... 1**

1.1 Características de la ionosfera.....	1
1.2 Tipos de señales.....	4
1.2.1 Señales en tiempo continuo.....	4
1.2.2 Señales en tiempo discreto.....	16
1.3 Tipos de filtros.....	24
1.3.1 Filtros en tiempo continuo.....	24
1.3.2 Filtros en tiempo discreto.....	29
1.4 Convolución.....	34
1.4.1 Convolución en tiempo continuo.....	34
1.4.2 Convolución en tiempo discreto.....	37
1.5 Transformada de Fourier discreta.....	39
1.5.1 Transformada rápida de Fourier.....	41
1.6 Índice de correlación.....	42

## **Capítulo 2 Algoritmo matemático de reconstrucción de señales..... 44**

2.1 Generalización de filtros invariantes en el tiempo.....	44
2.2 Reconstrucción de señales de entrada.....	47
2.2.1 Hechos auxiliares de la teoría de operadores pseudo-diferenciales.....	47
2.2.2 Filtros lentamente variantes en el tiempo.....	48
2.3 Método de secciones finitas para la reconstrucción de señales de entrada.....	50
2.3.1 Estabilidad del método de secciones finitas.....	50
2.3.2 Reconstrucción de señales digitales periódicas con filtros variantes en el tiempo.....	51

2.4 Solución por método de aproximaciones sucesivas.....	55
<b>Capítulo 3 Cálculos e ilustración numérica.....</b>	<b>56</b>
3.1 Método de secciones finitas.....	56
3.1.1 Lectura de la señal de salida.....	56
3.2 Construcción del operador inverso.....	59
3.2.1 Coeficientes del operador inverso.....	59
3.2.2 Construcción del operador inverso.....	60
3.2.3 Construcción del sistema de ecuaciones lineales (LES)..	62
3.3 Calculo del segmento característico.....	63
3.3.1 Solución de LES por algoritmo recursivo.....	63
3.3.2 Reconstrucción de señales de entrada por solución de LES.....	64
3.3.3 Reconstrucción de señales de entrada con el operador inverso.....	65
 <b>Capítulo 4 Resultados.....</b>	 <b>56</b>
4.1 Resultados en variación de coeficientes.....	66
4.2 Resultados en señales periódicas.....	68
 <b>Capítulo 5 Conclusiones, recomendaciones y trabajos futuros.....</b>	 <b>56</b>
5.1 Conclusiones.....	72
5.2 Recomendaciones.....	73
5.3 Trabajos futuros.....	74
 <b>REFERENCIAS.....</b>	 <b>75</b>
 <b>APENDICE A. Programa de prueba con el filtro de promedio móvil.....</b>	 <b>78</b>
<b>APENDICE B. Programa en MATLAB para la reconstrucción de señales de entrada.....</b>	<b>79</b>

<b>APENDICE C.</b>	<b>Programa para resolver el sistema de ecuaciones lineales.....</b>	<b>83</b>
<b>APENDICE D.</b>	<b>Programa para el cálculo del índice de correlación entre la señales de entrada, la señales recibidas y las señales reconstruidas .....</b>	<b>86</b>
<b>APENDICE E.</b>	<b>Artículo de 5º. Congreso Internacional de CIIES, México DF, Noviembre 2008. Titulado “Reconstrucción de Señales de entrada en filtros variantes en el tiempo” .....</b>	<b>89</b>

**LISTA DE TABLAS**

<b>Tabla 1.1</b>	Transformación de señales.....	6
<b>Tabla 1.2</b>	Propiedades de la función impulso unitario.....	14
<b>Tabla 4.1</b>	Índice de correlación entre señales periódicas de entrada, salida (recibidas) y reconstruidas.....	71
<b>Tabla 5.1</b>	Índice de correlación entre señales no periódicas salida (recibidas) y reconstruidas.....	76

**LISTA DE FIGURAS**

<b>Figura 1.1</b>	Esquema de propagación por onda corta mediante rebotes sucesivos ionosfera-tierra que permite sobrepasar el horizonte electromagnético.....	2
<b>Figura 1.2</b>	Concentración de electrones en función de la altura.....	3
<b>Figura 1.3</b>	Capas de la ionosfera terrestre.....	4
<b>Figura 1.4</b>	Señal par.....	5
<b>Figura 1.5</b>	Señal impar.....	6
<b>Figura 1.6</b>	Forma de onda diente de sierra.....	8
<b>Figura 1.7</b>	Señal senoidal expresada en términos de una señal de referencia seno y coseno.....	9
<b>Figura 1.8</b>	Señal exponencial.....	10
<b>Figura 1.9</b>	Señal sinusoidal exponencialmente amortiguada.....	10
<b>Figura 1.10</b>	Función escalón unitario.....	12
<b>Figura 1.11</b>	Generación de una función impulso.....	14
<b>Figura 1.12</b>	Ejemplo de función rampa unitaria.....	14
<b>Figura 1.13</b>	Señal sinusoidal periódica en tiempo discreta.....	18
<b>Figura 1.14</b>	Ejemplo de una secuencia exponencial que ilustra un decaimiento $ K  < 1$ .....	19
<b>Figura 1.15</b>	Secuencia sinusoidal exponencialmente decreciente.....	19
<b>Figura 1.16</b>	Funciones escalón unitario en tiempo discreto.....	20
<b>Figura 1.17</b>	Secuencia de rampa unitaria, secuencia general de la rampa y señal general de rampa en tiempo discreto.....	21
<b>Figura 1.18</b>	Funciones impulso unitario en tiempo discreto.....	22
<b>Figura 1.19</b>	Señal par (a) y señal impar (b) en tiempo discreto.....	25
<b>Figura 1.20</b>	Respuesta en amplitud (a), respuesta en fase y respuesta al impulso para un filtro pasa bajas ideal.....	27

<b>Figura 1.21</b>	Respuesta en frecuencia y respuesta al impulso para un filtro pasa bandas ideal.....	28
<b>Figura 1.22</b>	Realización de filtros FIR. (a) Estructura directa: (b) estructura transpuesta.....	32
<b>Figura 1.23</b>	Circuito de una sección puramente recursiva.....	33
<b>Figura 1.24</b>	Señal $s[n]$ filtrada por el filtro de promedio móvil.....	34
<b>Figura 1.25</b>	Respuesta al impulso de un sistema LTI en tiempo continuo.....	35
<b>Figura 1.26</b>	Respuesta al impulso de un sistema en tiempo discreto.....	37
<b>Figura 1.27</b>	Coordenadas de los coeficientes de una transformada de Fourier discreta.....	41
<b>Figura 3.1</b>	Especificaciones típicas de magnitud para un filtro digital pasa bajas.....	61
<b>Figura 4.1</b>	Oscilación introducida en el coeficiente variable $P_0$ .....	67
<b>Figura 4.2</b>	Selectividad del filtro variante en el tiempo.....	68
<b>Figura 4.3</b>	Señales periódicas recibida y reconstruida (a) y (b) respectivamente. Espectro en frecuencia de las señales periódicas recibida y reconstruida (c) y (d) respectivamente.....	69
<b>Figura 4.4</b>	Acercamiento de 500 muestras de las señales periódicas de entrada, recibida y reconstruida.....	70
<b>Figura 4.5</b>	Acercamiento de 300 muestras de las señales periódicas de entrada, recibida y reconstruida.....	70

## INTRODUCCIÓN

El simple hecho de ser seres humanos nos hace desenvolvemos en medios donde tenemos que estar comunicados. Por eso la gran importancia de la transmisión y la recepción de información, y en la época actual donde las computadoras realizan parte importante de la función de nuestra comunicación, es necesario contar con formas de interpretación de la información entre ellas y nosotros como seres que interactuamos con ellas.

Tomando en cuenta un caso particular de las transmisiones inalámbricas terrestres desde una base transmisora fija a una base receptora fija del sistema de transmisiones de la secretaria de turismo (SECTUR), donde se realiza la transmisión de ondas electromagnéticas a través de la ionosfera, por lo cual se consideran las características del comportamiento oscilatorio de dicha capa de la atmósfera, estas características se muestran dependientes del tiempo por la misma naturaleza de la ionosfera.

El criterio de análisis de este tipo de sistema, requiere del desarrollo de nuevas técnicas en el campo del procesamiento digital de señales, este análisis es desarrollado con el uso de una herramienta matemática conocida como la teoría de los operadores pseudodiferenciales. Esta teoría describe con mayor aproximación el comportamiento real de un filtro que depende del tiempo.

La teoría actual de procesamiento digital de señales nos muestra técnicas de reconstrucción de señales, considerando únicamente sistemas invariantes en el tiempo, por lo cual se requiere del desarrollo de técnicas de reconstrucción basadas en un comportamiento más apegado a la naturaleza de los sistemas que dependen del tiempo.

El desarrollo de modelos matemáticos, como el uso de los operadores pseudodiferenciales o el método de secciones finitas que se utiliza y desarrolla en este trabajo para el análisis de filtros invariantes en el tiempo, estas herramientas nos permiten aprovechar el uso del procesamiento digital de señales, con resultados aun en discusión sobre su efectividad, pero con la posibilidad de contar con otra opción, para la solución del problema de la reconstrucción de señales de entrada con filtros variantes en el tiempo en las telecomunicaciones modernas.

La reconstrucción de señales transmitidas en forma de ondas electromagnéticas que sufren una transformación al desplazarse por un medio como lo es el de la ionosfera, nos permite considerar dicha transformación como el cambio que sufre una señal por un filtro. Esta consideración es una proposición para poder resolver el problema particular antes mencionado con el uso de un algoritmo de reconstrucción de señales con filtros digitales variantes en el tiempo.

En el capítulo uno, se abordan los distintos aspectos que deben ser considerados en el análisis para el procesamiento digital de señales, así como los tipos de filtros digitales más comúnmente utilizados y sobre todo de mayor utilidad para el entendimiento de este trabajo. También encontramos la operación matemática característica de las señales que son afectadas por un filtro y la representación espectral de una señal por medio de la transformada de Fourier.

En el capítulo dos, se aborda el desarrollo matemático del método propuesto dando algunas definiciones principales sobre el análisis del problema además se hacen consideraciones acerca de las condiciones de estabilidad del método. Por último se explica la solución que es posible implementar.

El capítulo tres, se enfoca en la explicación detallada de la realización de un programa para la reconstrucción de señales que se explica y desarrolla en el capítulo dos. Este desarrollo del programa, se basa en la construcción de elementos matemáticos que describen el comportamiento del filtro por el cual se transforma la señal que originalmente fue transmitida, y se presenta una solución que es mas práctica para su implementación en un algoritmo de programación, mismo que se desarrolla en MATLAB con un sencillo programa.

El capítulo cuatro, está dedicado a la explicación de los resultados obtenidos con la aplicación del programa diseñado para este modelo propuesto, los resultados son obtenidos de múltiples pruebas realizadas con transmisiones reales proporcionadas por la SECTUR de puntos distantes, como enlaces de radio de una estación base en Guadalajara a otra en Hermosillo, de Acapulco a Zacatecas o de Monterrey a Puebla. Los resultados son considerados para su análisis en señales periódicas, como fueron pulsos de sincronización entre estas estaciones de radio. En el capítulo cinco, se muestran las conclusiones del trabajo realizado, además de la posibilidad de continuar con trabajos futuros al respecto de esta Tesis.

El apéndice A contiene el código del programa en MATLAB para probar el funcionamiento del filtro de promedio móvil en una señal determinada.

El apéndice B contiene el código del programa en MATLAB desarrollado en este trabajo para la reconstrucción de señales de entrada con filtros variantes en el tiempo.

El apéndice C contiene el código del programa en MATLAB para resolver un sistema de ecuaciones lineales con estructura triangular.

El apéndice D contiene el código del programa en MATLAB para calcular el índice de correlación entre las señales de entrada, las señales recibidas y las señales reconstruidas.

En el apéndice E se presenta el artículo publicado en las memorias del quinto congreso internacional de CIIES, en la ciudad de México en Noviembre del 2008, titulado "Reconstrucción de Señales de Entrada en Filtros Variantes en el Tiempo".

Las referencias documentadas, son extraídas de libros especializados en Análisis de Señales, procesamiento digital de Señales, en Análisis de Señales y Sistemas, además de algunos sitios de internet enfocados en las características de la ionosfera.

## ANTECEDENTES

El tratamiento de señales en tiempo discreto ha avanzado de manera irregular por un largo periodo de tiempo. Hasta principios de los años cincuenta el tratamiento de señales se realizaba con circuitos electrónicos o incluso con dispositivos mecánicos.

Aunque las computadoras ya estaban disponibles en entornos de negocios y en laboratorios científicos, estos eran caros y de capacidades relativamente limitadas.

En general, el procesamiento digital de señales surge con el lanzamiento al mercado de los procesadores analógicos de señales desde 1978 con el primer lanzamiento que hace Intel con el modelo 2920 [1].

Pero el rápido avance en la electrónica ha permitido el desarrollo de técnicas de fabricación de avanzados circuitos integrados que han tenido, tienen y seguirán teniendo un gran impacto en la industria y la sociedad.

En nuestros días el avance que se tiene sobre estos circuitos integrados nos permite un gran desarrollo en el procesamiento digital de señales que es utilizado en muchos campos como son la biomedicina, sonar, radar, sismología, procesamiento de audio, voz, comunicaciones, imágenes y video entre otros, usando técnicas matemáticas para realizar transformaciones o extraer información[2].

Uno de los problemas del tratamiento digital de señales al que nos enfrentamos, es la interpretación de señales. Las técnicas conocidas para el tratamiento digital de este problema es usualmente abordado por los filtros digitales lineales e invariantes en el tiempo LTI. La elección de estos filtros viene dada por su gran difusión actual y por ser un capítulo iniciador en el procesamiento digital de señales.

La utilización de los filtros digitales lineales e invariantes en el tiempo para el problema de interpretación de señales ha sido hasta nuestros días una herramienta capaz de resolver muchas de las necesidades de la ingeniería de las telecomunicaciones, pero ante la necesidad que surge con el manejo de variables dependientes del tiempo, surge también la necesidad de herramientas para el procesamiento digital de señales como son los filtros digitales variantes en el tiempo de los cuales existe muy poca información.

La investigación sobre los filtros invariantes en el tiempo está enfocada en otros aspectos, tales como los filtros adaptivos que se derivan de un modelo artificial del aprendizaje humano, como son las redes neuronales que se dan a conocer en su forma aplicada a un problema real con un filtro adaptivo para

eliminar ecos en una línea telefónica en 1960 por Bernard Widrow y Marcial Hoff [3].

Esta es una perspectiva de ingeniería que en general es utilizada para modelado, eliminación de interferencia, eliminación de eco, identificación de sistemas, control adaptivo[4]. Aunque para efectos de uso es necesario tener una señal de referencia utilizada como señal esperada.

Las aplicaciones actuales sobre estos filtros con dependencia del tiempo, no son diseñadas para una forma de reconstrucción de señales, en el sentido estricto de una solución para la interpretación y comprensión de señales transformadas por factores físicos que dependen del tiempo.

Por esta razón, no se cuenta con antecedentes que aborden el problema de la reconstrucción de señales, las cuales son transformadas por filtros que dependen del tiempo, y por lo cual el desarrollo de métodos para la solución de este caso son de una amplia consideración.

## JUSTIFICACIÓN

Las comunicaciones que se realizan por medio de radioenlaces terrestres ya sea de una estación fija a otra, de una unidad móvil a una estación fija o viceversa, representa hoy en día una de las formas más útiles y rentables de comunicación. Sin embargo las características de los medios de propagación que actúan como filtros que dependen del tiempo, representan hoy en día un problema que dificulta la rápida interpretación y comprensión de las transmisiones que se realizan en la actualidad.

El problema de la reconstrucción de señales que son afectadas por filtros que dependen del tiempo, no se resuelve completamente con la teoría del procesamiento digital de señales, actual teoría que es más ampliamente conocida y que se utiliza para sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTS). Por esta razón surge la necesidad de contemplar las características del medio por el cual se propagan las ondas electromagnéticas, dicho medio es determinado por la ionosfera para este trabajo, que es la subcapa de la atmosfera utilizada para la reflexión de las ondas electromagnéticas dada su naturaleza de iones permanentes debido a la fotoionización que provoca la radiación solar.

La capa de la ionosfera es permanente pero no constante, ya que su densidad electrónica depende de la altitud con respecto a la superficie terrestre, y también se ve influenciada por la temperatura, esta característica del medio debe considerarse para su análisis como un filtro variante en el tiempo. Debido a estos elementos de análisis, surge la necesidad de una herramienta matemática que pueda satisfacer la integración de dichos elementos para encontrar una solución al problema de la reconstrucción de señales que son afectadas por filtros que dependen del tiempo.

La necesidad de una mayor aproximación en la reconstrucción de las señales de entrada de una transmisión de radio terrestre, es la causa más importante por la cual surge la inquietud para desarrollar un análisis matemático, aplicado al procesamiento digital de señales. Este enfoque es considerado para filtros que dependen del tiempo a diferencia de la teoría tradicional donde prácticamente todos los análisis se basan en los filtros invariantes en el tiempo. Por consiguiente se desarrollan métodos apoyados en la teoría de los operadores pseudodiferenciales ya que su análisis puede aproximarnos a un mayor entendimiento de la ingeniería que debe ser utilizada para la realización de un eficiente algoritmo de reconstrucción de señales.

## **OBJETIVO GENERAL**

Obtener de manera eficiente la reconstrucción de señales de entrada de radioenlaces terrestres, realizado por el sistema de radiocomunicación de la Secretaria de Turismo (SECTUR), con el desarrollo de un algoritmo matemático implementado al procesamiento digital de señales que se enfoca únicamente en las señales determinísticas y considerando a la ionosfera como un filtro que depende del tiempo, y que afecta a las ondas de radio generadas y transmitidas de una radio estación base a otra.

## **OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

Probar los desarrollos matemáticos propuestos para la reconstrucción de señales, generando los programas para el procesamiento digital de las mismas.

Evaluar la eficiencia de los métodos de reconstrucción de señales propuesto en este trabajo, con señales recibidas y documentadas por el sistema de transmisiones utilizado por la SECTUR.

Realizar una proyección sobre los aspectos a considerar para trabajos futuros que pueden lograr mejorar la perspectiva de eficiencia del método propuesto.

# Capítulo 1

---

---

## **CARACTERÍSTICAS DE LA IONOSFERA, TIPOS DE SEÑALES Y TIPOS DE FILTROS**

### **1.1 CARACTERÍSTICAS DE LA IONOSFERA**

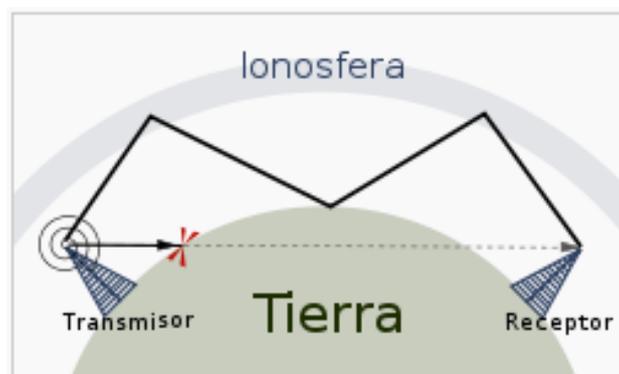
El 12 de diciembre de 1901, Marconi consiguió realizar de forma satisfactoria la primera comunicación radiotelegráfica transatlántica cubriendo una distancia de 3 Km entre Gales y Terranova, en el extremo oriental de Canadá [5]. Unos años antes, Hertz había comprobado experimentalmente la existencia de ondas electromagnéticas, cuya naturaleza era similar a la de la luz. Por este motivo el éxito de Marconi resultaba inexplicable considerando que las ondas electromagnéticas deben propagarse en trayectos rectilíneos y que la esfericidad de la tierra impedía la visibilidad directa. De hecho el éxito inicial fue recibido con cierto escepticismo por la comunidad científica, que en parte dudaba de su veracidad. En el año 1902 otros experimentos realizados por Marconi pusieron de relieve que las comunicaciones a grandes distancias sufrían grandes variaciones si se realizaban durante el día o la noche. Así, experimentos de recepción a bordo de un barco desde una estación base en tierra mostraron que a distancias superiores a 1 Km. las comunicaciones fallaban totalmente durante el día, mientras que durante la noche era posible la recepción a distancias superiores a los 3 Km. Marconi estaba más interesado

en las posibilidades de la explotación comercial de las comunicaciones radiotelegráficas a larga distancia que en la explicación de los fenómenos responsables de éstas, por lo que su actividad se centró en la aplicación práctica de estos hechos más que en la justificación teórica de los mismos[5].

En el mismo año 1902, Kennelly y Heaviside, de forma independiente, postularon la existencia de una capa ionizada en la parte alta de la atmósfera como responsable de la reflexión de las ondas electromagnéticas, explicando, de este modo, el mecanismo de propagación a grandes distancias.

El primer experimento para realizar mediciones exactas de la ionosfera lo llevaron a cabo Appleton y Barnett en Londres en 1925. Consistía en emitir una señal de onda continua y de fase variable con el tiempo. En un receptor próximo se recibía la interferencia de la onda directa y reflejada. A partir de la formación de interferencias constructivas y destructivas les fue posible determinar la altura de la capa ionizada. A esta capa le llamaron capa eléctrica, o abreviadamente capa E. Estudios posteriores revelaron la existencia de capas inferiores y superiores a la capa E, a las que manteniendo el orden alfabético se las denominó D y F respectivamente.

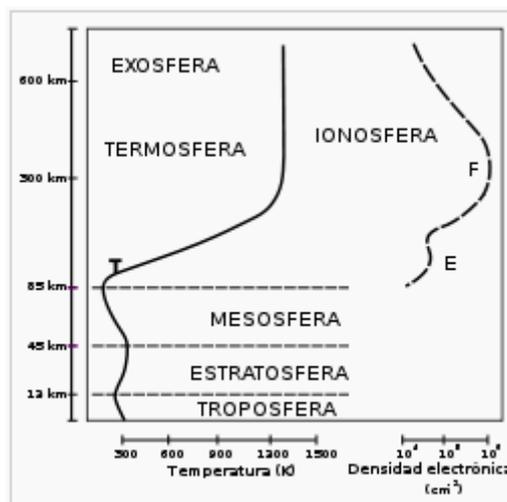
Investigaciones más profundas demostraron que la ionosfera no es un medio estratificado, sino que presenta variaciones continuas con la densidad de electrones ionizados en función de la altura. Por razones históricas se mantiene la nomenclatura de las capas D, E y F designando a cada una de ellas regiones de la ionosfera de altitud creciente. Bajo ciertas condiciones la capa F se desdobra en dos capas, la capa  $F_1$  y la capa  $F_2$ . En la figura 1.1 se muestra la acción reflejante de la ionosfera con las ondas electromagnéticas emitidas desde una estación base transmisora a otra estación base receptora[6].



**Figura 1.1** Esquema de propagación por onda corta mediante rebotes sucesivos ionosfera-tierra que permite sobrepasar el horizonte electromagnético.

La causa primordial de ionización de la ionosfera es la radiación solar en la región del espectro de los rayos x y ultravioletas. También contribuyen a la ionización la incidencia de las partículas cargadas (protones y electrones) de origen solar y los rayos cósmicos galácticos. La creación de iones depende de la energía de las radiaciones y de la densidad de moléculas. Para alturas elevadas la energía de la radiación incidente es elevada pero la densidad de moléculas baja, mientras que para alturas más bajas la densidad de moléculas es alta pero la energía de las radiaciones ha sido absorbida en gran parte, de modo que la densidad de ionización máxima se produce en un punto intermedio.

Dado que el grado de ionización es producido directamente por la acción solar una actividad anómala del Sol puede alterar las propiedades de la ionosfera y su capacidad de reflejar las ondas de radio terrestre alterando las comunicaciones en la Tierra [5]. En la figura 1.2 se muestra el comportamiento de la ionosfera por la concentración de electrones en función de la altura en comparación con otras capas de la atmosfera por la temperatura en función de la altura[6].

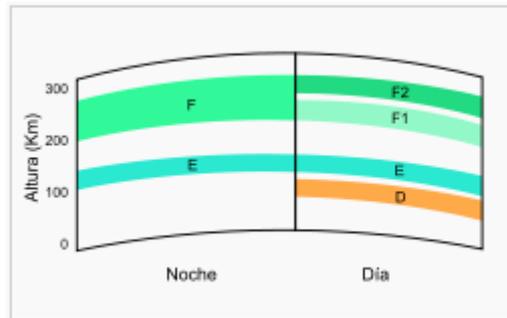


**Figura 1.2** Concentración de electrones en función de la altura.

Dependiendo del grado de ionización de cada nivel de altura pueden encontrarse picos de ionización en capas denominadas "D," "E," "F1," y "F2".

Así tenemos las siguientes capas como se muestran en la figura 1.3 [7]:

- 60 km: capa D. Sólo aparece durante el día y es sumamente absorbente para frecuencias por debajo de unos 10 MHz, protegiendo la superficie terrestre de gran parte de la radiación espacial.



**Figura 1.3** Capas de la ionosfera terrestre.

- 80-110 km: capa E o capa de Kennelly-Heaviside (o capa de Heaviside).
- 180-600 km: capas F o capas de Appleton. Las capas F se elevan por la noche por lo que cambian sus propiedades de reflexión.
  - 180-300 km: capa F1. Esta capa sufre una fluctuación diaria mayor que la F2, por lo que llega a mezclarse con ésta.
  - 300-600 km: capa F2. Es la capa más alta de la ionosfera.

## 1.2 TIPOS DE SEÑALES

### 1.2.1 Señales en tiempo continuo.

#### Señales pares e impares

Primero definiremos las características de simetría par y simetría impar. Por definición, la señal es par si

$$x_e(t) = x_e(-t). \quad (1.1)$$

Una función par tiene simetría con respecto al eje vertical; la señal para  $t < 0$  es la imagen espejo de la señal  $t > 0$ . La función  $x(t) = \cos \omega t$  es par porque  $\cos \omega t = \cos(-\omega t)$ [8]. Otro ejemplo de una función par está dado en la figura 1.4.

Por definición una función es impar si

$$x_o(t) = -x_o(-t). \quad (1.2)$$

Una función impar tiene simetría con respecto al origen. La función  $x(t) = \sin \omega t$  es impar porque  $\sin \omega t = -\sin(-\omega t)$ . Otro ejemplo de señal impar está dado en la figura 1.5.

Cualquier señal puede ser expresada como la suma de una parte par y una impar; que es,

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t), \quad (1.3)$$

Donde  $x_e(t)$  es par y  $x_o(t)$  es impar. Reemplazando  $t$  con  $-t$  en esta ecuación

$$x(-t) = x_e(-t) + x_o(-t) = x_e(t) - x_o(t) \quad (1.4)$$

De (1.1) y (1.2). Sumando (1.3) y (1.4) y despejando  $x_e(t)$

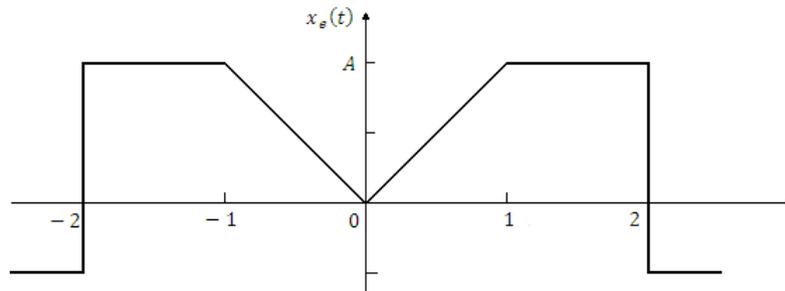
$$x_e(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]. \quad (1.5)$$

Esta ecuación es usada para resolver la parte par de una función  $x(t)$ .  
Sustrayendo (1.4) de (1.3) y despejando  $x_o(t)$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)], \quad (1.6)$$

la cual es usada para encontrar la parte impar de una función.  
El valor promedio  $A_x$  de una señal  $x(t)$  es definida como

$$A_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (1.7)$$



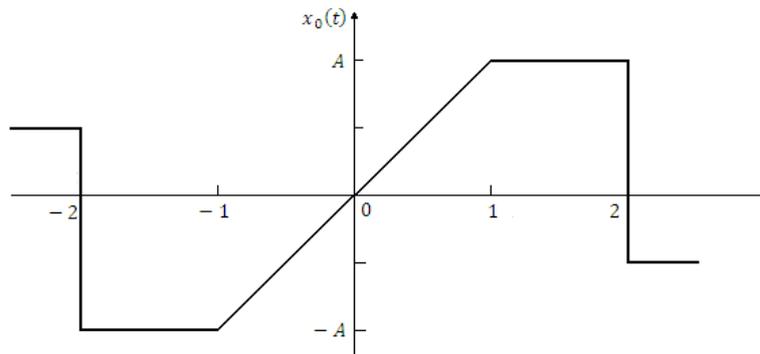
**Figura 1.4** Señal par

El valor promedio de la señal está contenido en la función par, y el valor promedio de una función par es cero.

Las funciones par e impar tienen las siguientes propiedades:

1. La suma de dos funciones par es una función par.
2. La suma de dos funciones impar es una función impar.
3. La suma de una función par y una función impar no es ni una función par ni una impar.
4. El producto de dos funciones par es una función par.

5. El producto de dos funciones impar es una función par.
6. El producto de una función par y una impar es una función impar.



**Figura 1.5** Señal impar

Las transformaciones de las señales son mostradas en la tabla 1.2.

**TABLA 1.1** Transformación de señales [8]

Nombre	$y(t)$
Inversión de tiempo	$x(-t)$
Escala de tiempo	$x(at)$
Desplazamiento de tiempo	$x(t - t_0)$
Inversión de amplitud	$-x(t)$
Escala de amplitud	$Ax(t)$
Desplazamiento de amplitud	$x(t) + B$

### Señales periódicas

A continuación consideraremos la importancia del tema de funciones periódicas. Por definición, una señal en tiempo continuo  $x(t)$  es periódica si

$$x(t) = x(t + T), \quad T > 0 \quad (1.8)$$

Para todo  $t$ , donde la constante  $T$  es periódica. Una señal que no es periódica se dice que es aperiódica. En (1.8), reemplazamos a  $t$  con  $(t + T)$ , resultando en

$$x(t + T) = x(t + 2T)$$

Esta ecuación también es igual a  $x(t)$  de (1.8). Repitiendo esta sustitución, vemos que una función periódica satisface la ecuación

$$x(t) = x(t + nT),$$

donde  $n$  es cualquier entero. Entonces, una señal periódica con periodo  $T > 0$  es también periódica con periodo  $nT$ .

El mínimo valor del periodo  $T > 0$  que satisface la definición  $x(t) = x(t + nT)$  es llamado el *periodo fundamental* de la señal y es denotado como  $T_0$ .

Con  $T_0$  en segundos, la frecuencia fundamental en hertz (el número de periodos por segundo) y la frecuencia fundamental en rad/s está dada por

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \text{ Hz}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \text{ rad/s}, \quad (1.9)$$

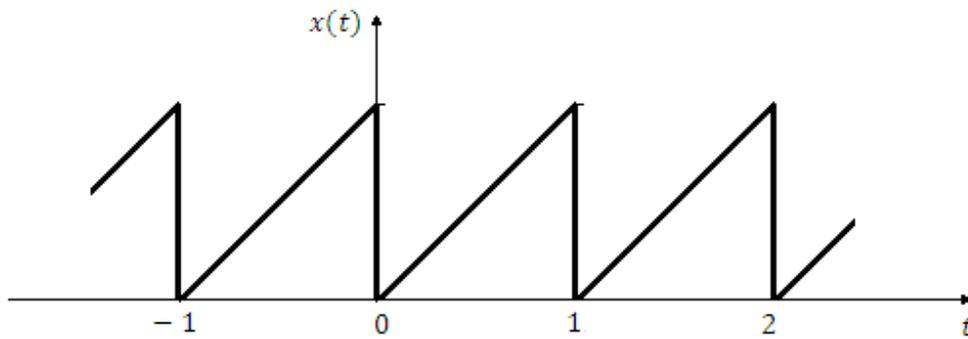
respectivamente

Ejemplos de señales periódicas son las sinusoidales  $x_c = \cos \omega t$  y  $x_s(t) = \sin \omega t$ .

El movimiento de un péndulo de reloj es periódico, como es el voltaje usado por una distribución de potencia eléctrica de ca. Ambas señales son usualmente modeladas como sinusoidales aunque no son exactamente sinusoidales. El movimiento de la tierra es periódico con periodo de un día y el de un año (aproximadamente). Mas señales físicas que son dependientes del movimiento de la tierra, tales como la hora en que sale el sol, las temperaturas promedio, son usualmente modeladas como sinusoidales.

Un tercer ejemplo de una señal periódica esta dado en la figura 1.6. Esta señal, llamado una onda diente de sierra, es útil en barrido de emisión de electrones a través de la cara de un tubo de rayos catódicos (CRT). Si un CRT usa un campo eléctrico para barrer el as de electrones, la señal de la figura 1.6 es un voltaje; si un campo magnético es usado, la señal es una corriente.

Un caso especial de una función periódica es donde  $x(t)$  es igual a una constante. Una constante satisface la definición  $x(t) = x(t + T)$  para cualquier valor de  $T$ . Porque no hay un valor mas pequeño de  $T$ , el periodo fundamental de una señal constante no esta definido. Sin embargo, algunas veces conviene considerar que sea una señal constante  $A$  el caso limite de una señal sinusoidal  $x(t) = A \cos \omega t$ , con  $\omega$  aproximándose a cero. Para este caso el periodo  $T$  es ilimitado.



**Figura 1.6** Forma de onda diente de sierra.

### Señales sinusoidales

El primer modelo de señal de tiempo continuo que consideramos es la señal sinusoidal

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \theta\right) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \theta_s\right) \quad (1.10)$$

donde  $\theta_s = \theta + \pi/2$  y  $T_0$  es la señal periódica. La señal sinusoidal es útil en análisis de señales y sistemas. Por ejemplo, las formas de onda de las señales en un sistema de potencia eléctrico son aproximadamente en forma sinusoidal y extendida para un largo período de tiempo. Así, puede ser modelado como señales sinusoidales, excepto cuando deseamos analizar el efecto de transición. La señal sinusoidal es también útil en proporcionar una visión para el concepto de contenido de frecuencia de la señal, la respuesta en frecuencia, y en anchos de banda de señales y sistemas[9].

Para definir tres parámetros fundamentales de una señal sinusoidal, escribimos la forma del coseno como

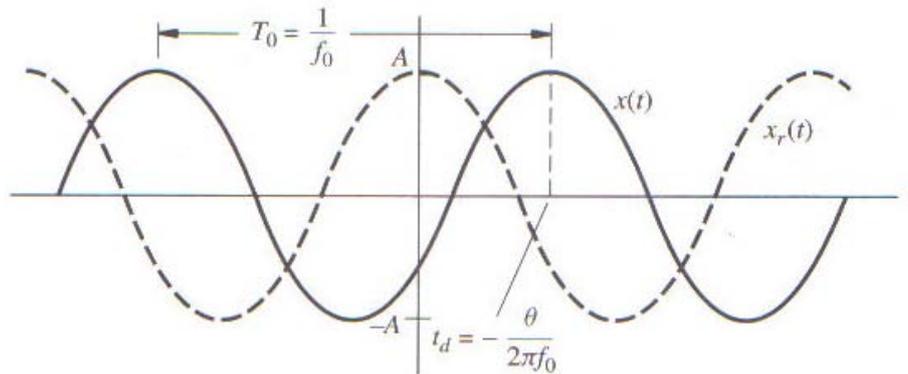
$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad (1.11)$$

El parámetro  $A$  en (1.11) es la amplitud de la señal y tiene unidades consistentes con el tipo de señal (por ejemplo un voltaje tiene unidades de voltios). El parámetro  $f_0 = 1/T_0$  es la frecuencia de la señal y tiene unidades de hertz (abreviado Hz). Una señal tiene frecuencia  $f_0$  Hz repite  $f_0$  veces en 1 segundo. Decimos que contiene  $f_0$  ciclos por segundo. El parámetro  $\theta$  expresado en unidades de radianes, es la fase angular o fase de la señal. Es la diferencia entre los argumentos angulares de la señal coseno especificada y la referencia de la señal coseno

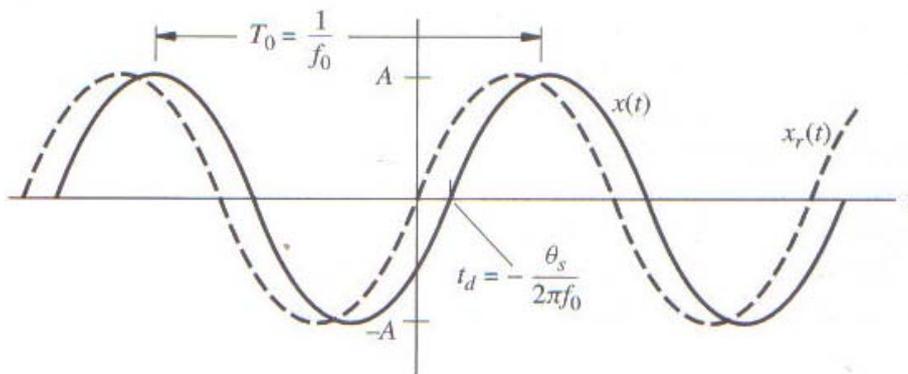
$$x_r(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (1.12)$$

La figura 1.7(a) ilustra el parámetro y el retraso de tiempo de la señal sinusoidal  $x(t)$  cuando es referenciada a una señal coseno. También podemos elegir la señal seno  $x_r(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$  para ser la señal de referencia, como lo hicimos en la segunda forma de la ecuación (1.10). Los parámetros resultantes en el retraso de tiempo son mostrados en la figura 1.7(b).

### Señales exponenciales



$$(a) x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta), x_r(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$



$$(b) x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \theta_s), x_r(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$$

**Figura 1.7** Señal senoidal expresada en términos de una señal de referencia seno y coseno.

La transferencia de energía desde componentes de almacenamiento de energía a componentes de uso de energía frecuentemente producen señales que decrecen exponencialmente con el uso, por ejemplo la descarga de un capacitor a través de una resistencia produce una descarga de corriente con exponencialmente decreciente. Así, un modelo de señal en tiempo continuo útil es la señal exponencial

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \geq t_1 \\ 0 & t < t_1 \end{cases} \quad (1.13)$$

Donde  $\alpha > 0$ . Esta señal está ilustrada en la figura 1.8.

Cuando un sistema contiene más de un componente de almacenamiento de energía, algo de energía puede oscilar entre estos componentes mientras la energía está siendo transferida a un componente de energía útil. Un ejemplo es la descarga de un capacitor a través de una red serie RL que tiene una resistencia pequeña[10]. Esta condición genera señales sinusoidales exponencialmente decrecientes (referidas como *sinusoidales amortiguadas*) expresados por

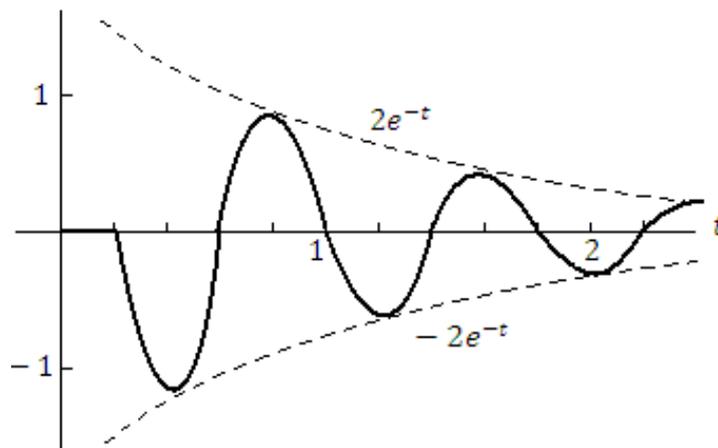
$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} \cos(2\pi f_0 t + \theta) & t \geq t_1 \\ 0 & t < t_1 \end{cases} \quad (1.14)$$

donde  $\alpha > 0$ . Esta señal es mostrada en la figura 1.9 son las dos curvas  $2e^{-t}$  y  $-2e^{-t}$  para  $t \geq 0.2$  juntas. Estas curvas son llamadas de *envolvente* de la señal ya que la señal esta contenida entre ellos.



$$x(t) = \begin{cases} 1.5e^{-1.5(t-0.6)} & t \geq 0.6 \\ 0 & t < 0.6 \end{cases}$$

**Figura 1.8** Señal exponencial.



$$x(t) = \begin{cases} 2e^{-t} \cos[2\pi(1.25)t] & t \geq 0.2 \\ 0 & t < 0.2 \end{cases}$$

**Figura 1.9** Señal sinusoidal exponencialmente amortiguada.

Una importante relación que es utilizada frecuentemente en análisis usando función exponencial compleja es la relación de Euler [11], dada por

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta. \quad (1.15)$$

Reemplazando  $\theta$  en (1.15) con  $-\theta$

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j \sin(-\theta). \quad (1.16)$$

ya que la función coseno es par y la función seno es impar. La suma de (1.15) y (1.16) puede ser expresada como

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad (1.17)$$

y la diferencia de (1.15) y (1.16) puede ser expresado como

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}, \quad (1.18)$$

## Señales de funciones singulares

### Función escalón unitario

La función escalón unitario, denotada como  $u(t)$ , es usualmente empleado para interrumpir otras señales, encendido o apagado. La *funcion escalon unitario* es definida como

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Donde la variable independiente esta denotada como  $\tau$ . En el estudio de señales, escogemos la variable independiente para ser una función lineal de tiempo. Por ejemplo, si  $\tau = (t - 5)$ , el escalón unitario es expresado como

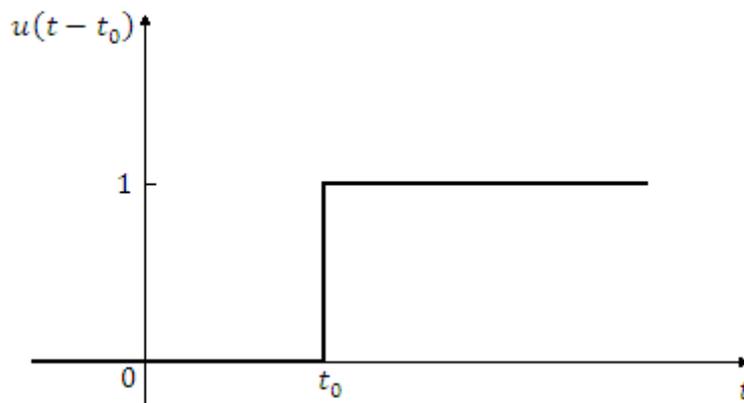
$$u(t - 5) = \begin{cases} 1, & t - 5 > 0 \Rightarrow t > 5 \\ 0, & t - 5 < 0 \Rightarrow t < 5 \end{cases} \quad (1.20)$$

Esta función de escalón unitario tiene un valor de la unidad para  $t > 5$  y un valor de cero para  $t < 5$ .

El escalón unitario general es escrito como

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

Una grafica de  $u(t - t_0)$  esta dada en la figura 1.10 para un valor de  $t_0 > 0$ .



**Figura 1.10** Función escalón unitario.

### Función de impulso unitario [17]

Frecuentemente llamamos al límite de  $g(t)$  en la figura 1.11a como  $\epsilon$  en la *función impulso unitario*. Con  $\delta(t - t_0)$  denotando la función impulso unitario,

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(t). \quad (1.21)$$

La función impulso no es una función en el sentido ordinario, ya que es cero en cualquier punto excepto  $t_0$  donde es ilimitado. Sin embargo, el área bajo la función impulso es bien definida y es igual a la unidad[12]. Basado en estas propiedades, definimos la función impulso unitario  $\delta(t - t_0)$  por las relaciones

$$\delta(t - t_0) = 0, \quad t \neq t_0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (1.22)$$

Dibujamos la función impulso como una flecha vertical como se muestra en la figura 1.11(b), donde el número escrito a lado de la flecha que denota la multiplicación constante de la función impulso unitario. La amplitud de la función impulso en  $t = t_0$  es ilimitada, mientras el factor de multiplicación (la magnitud) es el área bajo la función impulso.

La definición de la función impulso (1.22) no es matemáticamente rigurosa [13]; ahora damos la definición que es. Para cualquier función  $f(t)$  que es continua en  $t = t_0$ ,  $\delta(t - t_0)$  esta definida por la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (1.23)$$

La función impulso es definida más bien por sus características que por sus valores. Las dos definiciones de la función, (1.22) y (2.23), no son equivalentes; el uso de un pulso rectangular en definitiva la función impulso no es matemáticamente rigurosa y debe ser usada con precaución [13]. Sin embargo, (1.22) nos permite derivar en una manera simple no rigurosa algunas de las propiedades de la función impulso (1.23). En suma, (1.22) es útil cuando se aplica la función impulso en análisis de señales y sistemas. Las propiedades de la función impulso unitario son mostradas en la tabla 1.2.

Decimos que la función impulso  $\delta(t - t_0)$  “ocurre” en  $t = t_0$  porque este concepto es útil. Las comillas son usadas ya que la función impulso no es una función ordinaria y es definida rigurosamente solo bajo la integral en (1.23). Si  $f(t)$  es continuo en  $t = t_0$ , entonces

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0). \quad (1.24)$$

El producto de la función en tiempo continuo  $f(t)$  y  $\delta(t - t_0)$  es un impulso con su magnitud igual a  $f(t)$  evaluada en el tiempo  $t_0$ , en el tiempo que ocurrió. Las ecuaciones (1.23) y (1.24) son algunas veces llamados la separación de propiedades de la función impulso.

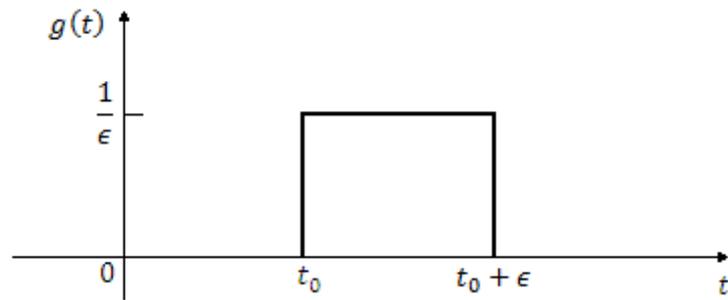
**TABLA 1.2** Propiedades de la función impulso unitario [8]

1.	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0), f(t)$ continuo en $t = t_0$
2.	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)\delta(t)dt = f(-t_0), f(t)$ continuo en $t = -t_0$
3.	$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0), f(t)$ continuo en $t = t_0$
4.	$\delta(t - t_0) = \frac{d}{dt}u(t - t_0)$
5.	$u(t - t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0)d\tau = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$
6.	$\int_{-\infty}^t \delta(at - t_0)dt = \frac{1}{ a } \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right)dt$
7.	$\delta(-t) = \delta(t)$

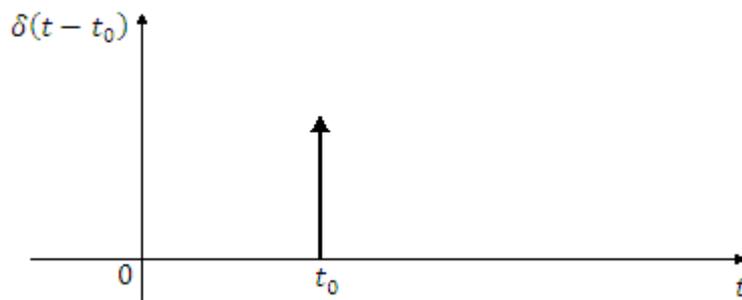
### Función rampa unitaria

En general, escribimos la función rampa como

$$Ar(at - b) = A(at - b)u(at - b) = \begin{cases} A(at - b) & at - b > 0 \\ 0 & at - b < 0 \end{cases} \quad (1.25)$$



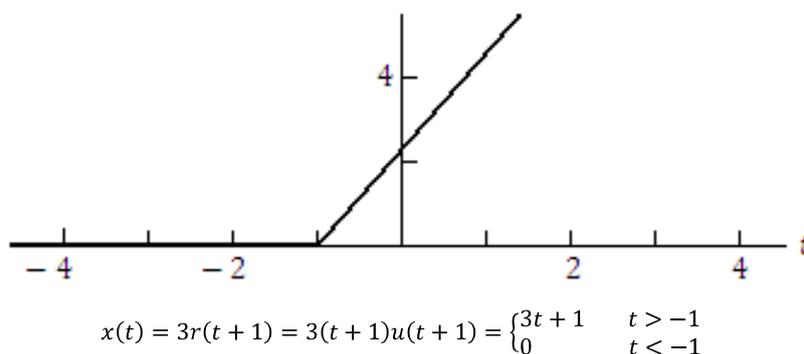
(a)



(b)

**Figura 1.11** Generación de una función impulso.

donde  $a \neq 0$ . Esta función rampa general no es cero para  $t > \frac{b}{a}$  donde  $a$  es positivo y para  $t < \frac{b}{a}$  donde  $a$  es negativo. La porción que no es cero es una rampa con inclinación  $Aa$ . Un ejemplo de la función rampa se muestra en la figura 1.12[8].



**Figura 1.12** Ejemplo de función rampa unitaria.

## Energía y potencia de señales

La energía y potencia de señales son dos señales cuantificables que podemos computarizar para mostrar señales características. Estas no son actualmente medidas de energía y potencia, sin embargo son útiles para caracterizar y comparar señales. Por ejemplo la energía de la señal o la potencia de la señal en diferentes componentes de una señal indican la relativa importancia de los componentes. Proporcionamos motivación para la definición de energía de una señal y de potencia de una señal considerando la energía absorbida en un resistor eléctrico[11]. Asuma que el resistor tiene resistencia  $R$ . Entonces la energía total recibida en el resistor es

$$E_R = \lim_{T \rightarrow \infty} R \int_{-T}^T i^2(t) dt \quad (1.26)$$

ó

$$E_R = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{-T}^T v^2(t) dt \quad (1.27)$$

La energía,  $E_R$ , tiene unidades de joules (J) cuando la unidad de la resistencia, la señal de corriente, y la señal de voltaje son ohms ( $\Omega$ ), amperes (A), y voltios (V), respectivamente. Note también que la energía absorbida depende en ambos, de la resistencia.

Definimos ahora la señal de energías asociadas con la señal  $i(t)$  y  $v(t)$  para ser

$$E_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T i^2(t) dt \quad (1.28)$$

y

$$E_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T v^2(t) dt \quad (1.29)$$

Estas no son energías actuales ya que dependen solo de las señales y no de la resistencia. La energía de la señal  $E_i$  es la energía absorbida de la señal de corriente  $i(t)$  si es pasada a través de un resistor de  $1\text{-}\Omega$ . Igualmente,  $E_v$  es la energía absorbida de la señal de voltaje  $v(t)$  si es aplicada por un resistor de  $1\text{-}\Omega$ .

Ahora extendemos las definiciones anteriores de energía en señales de corriente y voltaje para cualquier señal  $x(t)$ , incluyendo señales que toman un valor complejo.

Definición.- la energía en la señal  $x(t)$  es

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (1.30)$$

Enfatizamos que la energía de la señal no es la energía instantánea ya que no depende del componente del sistema asociado con la señal.

La relación de la energía y el intervalo de tiempo para la longitud del intervalo es la potencia promedio en el intervalo. Por lo tanto, llegamos a la siguiente definición para la señal de potencia.

Definición.- la potencia en la señal  $x(t)$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (1.31)$$

La potencia de la señal no es la potencia instantánea ya que no depende del componente del sistema asociado con la señal. Es la potencia promedio en todo el tiempo. Una señal puede ser expresada como la *energía de la señal* o la *potencia de la señal*. Clasificamos las señales de esta manera ya solo se pueden aplicar algunas técnicas de análisis de señales, o son más efectivas para una clase.

Las definiciones de energía y potencia de una señal son:

Definición.- La energía de la señal es finita. Si  $0 < E_x < \infty$  entonces  $x(t)$  es llamada señal de energía.

Definición.- La potencia de la señal es finita. Si  $0 < P_x < \infty$  entonces  $x(t)$  es llamada señal de potencia.

### 1.2.2 Señales en tiempo discreto

Una señal en tiempo discreto puede ocurrir directamente de la salida de una computadora o puede ser el resultado de la naturaleza del sistema considerado. Por ejemplo, en el reembolso de un préstamo, los pagos ocurren solo en el tiempo del pago; Así, la señal representa el pago y es una señal en tiempo discreto [9].

Alternativamente, una señal en tiempo discreto puede consistir de muestras de una señal en tiempo continuo generada por una conversión analógico a digital (A/D). Una conversión A/D si queremos procesar una señal en tiempo continuo por un tiempo discreto o sistema digital (Por ejemplo, procesamiento digital de audio por reproductores de discos compactos).

A veces es conveniente para nosotros representar una señal en tiempo discreto como una función únicamente de un número de muestras  $n$ . Llamamos a esta representación la *secuencia*  $x[n]$  correspondiente a la señal  $x[nT]$ . Es una versión de escala de tiempo modificada de la señal donde el factor de normalización es el espacio  $T$  de la muestra.

### Señales sinusoidales [17]

Las señales sinusoidales y exponenciales complejas contienen muestras de la correspondiente señal en tiempo continuo. El espaciamiento de las muestras es  $T$  segundos. La secuencia senoidal corresponde a una señal sinusoidal en tiempo discreto así

$$x[n] = A \cos(2\pi f_0 nT + \theta)$$

$$x[n] = A \cos(2\pi r_0 n + \theta) \quad \text{para todo } n \quad (1.32)$$

En la ecuación (1.32),  $f_0$  es la frecuencia en Hz,  $A$  es la amplitud, y  $\theta$  es la fase en radianes. Y se puede escribir ya sea la función seno o la función coseno, Sin embargo, convertiremos el seno a coseno ya que la fase especificada es siempre con respecto a la referencia del coseno. En este sentido, solo necesitamos determinar amplitud, fase y frecuencia para definir la señal. El parámetro  $r_0$  es la frecuencia del sinusoidal normalizado por la relación de muestras (o frecuencia de muestreo)  $f_s$ , que es  $r_0 = f_0 nT = f_0/f_s$  y es adimensional.

La secuencia sinusoidal definida por (1.32) consiste de muestras de una señal sinusoidal en tiempo continuo que es periódica, con periodo  $T_0 = 1/f_0$ . Sin embargo, la secuencia sinusoidal no es necesariamente periodica (que, no consiste necesariamente de valores de muestras que ocurren periódicamente). Es periodica igual a  $N$  muestras si y solo si

$$2\pi r_0(n + N) = 2\pi r_0 n + 2\pi i \quad (1.33)$$

Esta ecuación se reduce a

$$i/N = r_0 = f_0 T = \frac{T}{T_0} \quad (1.34)$$

donde  $i$  y  $N$  son enteros. Por lo tanto, para producir una secuencia sinusoidal periódica, la frecuencia normalizada  $r_0$  debe ser racional. Esto también implica que la tasa de espaciamiento de muestras  $T$  para el periodo  $T_0$  sinusoidal muestreado en tiempo continuo debe ser racional. Cuando  $r_0$  es racional y expresado como una fracción con todos los factores comunes removidos, entonces el denominador de la fracción,  $N$ , es el periodo de la secuencia sinusoidal. El numerador de la fracción,  $i$ , es el número de ciclos de la senoidal en tiempo continuo que son medidos por  $N$  muestras. La señal

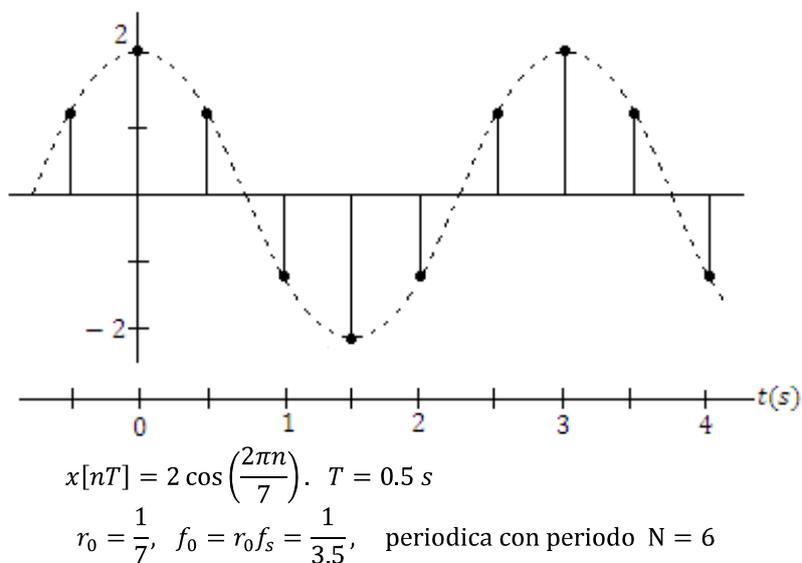
sinusoidal en tiempo discreto corresponde a la secuencia sinusoidal periódica que es ilustrada en la figura 1.13

### Señales exponenciales

Las señales exponenciales en tiempo discreto ocurren en varios sistemas de tiempo discreto. Por ejemplo, representan procesos de crecimiento y decaimiento que ocurren en sistemas económicos, sistemas de población, o en almacenamiento de energía y sistemas de disipación[10]. La secuencia exponencial correspondiente a una señal exponencial en tiempo discreto

$$x[n] = \begin{cases} A(K)^n & n \geq n_1 \\ 0 & n < n_1 \end{cases} \quad (1.35)$$

donde  $K$  es un número real y el proceso de crecimiento y decaimiento comienza en  $t = n_1T$ . El crecimiento o decaimiento en magnitud de la muestra ocurre cuando  $|K| > 1$  o  $|K| < 1$ , respectivamente.

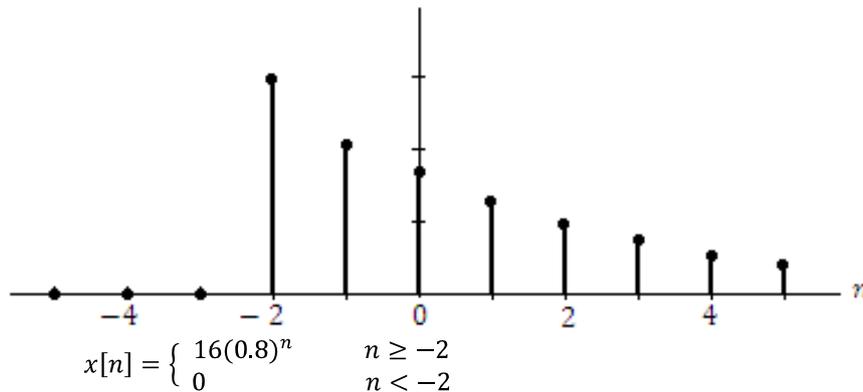


**Figura 1.13** Señal sinusoidal periódica en tiempo discreta.

El crecimiento o decaimiento es oscilatorio si  $K$  es negativo. Estas características son ilustradas por las dos secuencias exponenciales mostradas en la figura 1.14.

Cuando  $K$  es positivo, puede ser expresado como  $K = e^a$  donde  $a = \ln(K)$ . En este caso, la secuencia exponencial puede ser escrita

$$x[n] = \begin{cases} Ae^{an} & n \geq n_1 \\ 0 & n < n_1 \end{cases} \quad (1.36)$$



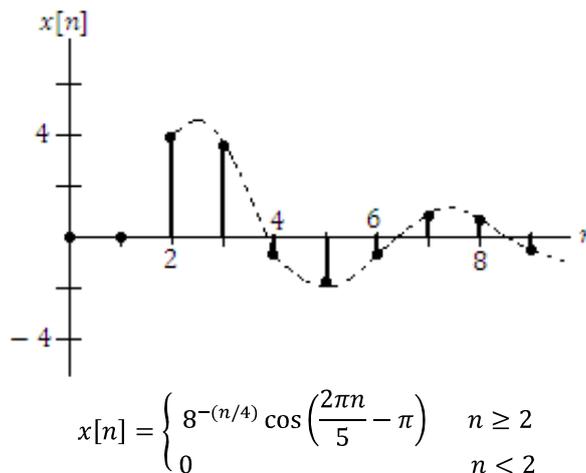
**Figura 1.14** Ejemplo de una secuencia exponencial que ilustra un decaimiento  $|K| < 1$ .

Cuando  $a = \alpha T$ , esta secuencia consiste de muestras de la señal exponencial en tiempo discreto presentada en la sección 1.2.1. Exponentes positivas y negativas son usadas para permitir modelado tanto de valores de señales creciente como decrecientes.

Podemos obtener muestras de una senoidal exponencialmente crecientes o decreciente multiplicando la exponencial en tiempo discreto y la secuencia senoidal en tiempo discreto para dar

$$x[n] = \begin{cases} Ae^{an} \cos(2\pi r_0 n + \theta) & n \geq n_1 \\ 0 & n < n_1 \end{cases} \quad (1.37)$$

Una secuencia senoidal exponencialmente decreciente es ilustrada en la figura 1.15



**Figura 1.15** Secuencia sinusoidal exponencialmente decreciente.

## Señales impulso, rampa y escalón [17],[15]

### Escalón

La función de escalón en tiempo discreto  $u[n]$  es definida por

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq n_1 \\ 0 & n < n_1 \end{cases} \quad (1.38)$$

Recordamos que esta definición aplica solo para un entero  $n$ . La función escalón es ilustrada en la figura 1.16. Los puntos al final de la línea vertical son usados para denotar los valores de la señal discreta, como se muestra en la figura 1.16a[8]. El desplazamiento en tiempo discreto de la función escalón es denotado como  $u[n - n_0]$ , donde  $n_0$  es un entero y

$$u[n - n_0] = \begin{cases} 1 & n \geq n_0 \\ 0 & n < n_0 \end{cases} \quad (1.39)$$

Esta función es también graficada en la figura 1.16b para  $n_0$  positivo.

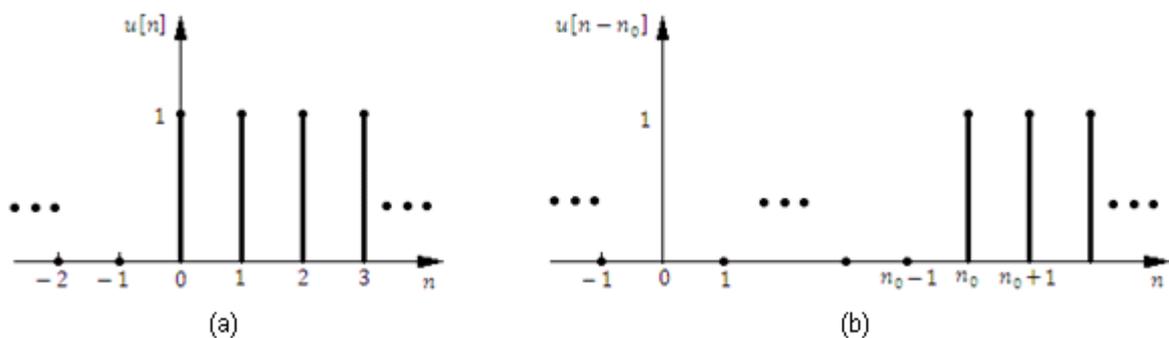


Figura 1.16 Funciones escalón unitario en tiempo discreto.

### Rampa

La *secuencia de la rampa* esta definida por

$$r[n] = nu[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.40)$$

de la cual construimos la señal rampa en tiempo discreto:

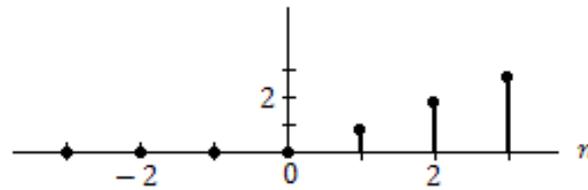
$$r[nT] = nTu[nT] = T\{nu[n]\} = Tr[n] \quad (1.41)$$

La secuencia general de la rampa es

$$Ar[cn - d] = A[cn - d]u[cn - d] \equiv \begin{cases} A(cn - d) & cn - d \geq 0 \\ 0 & cn - d < 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

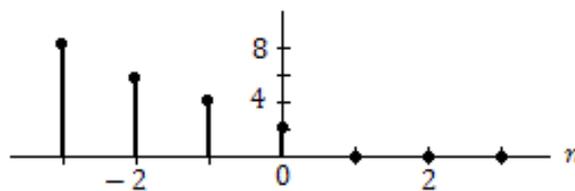
donde  $A, c, y d$  son constantes,  $c$  no es igual cero, y  $d/c$  es un entero. La secuencia de la rampa se muestra en la figura 1.17 solo con dos muestras de la señal y la secuencia general de la rampa[9].

Cualquier secuencia definida por el segmento consiste de valores quedando solo con segmentos en línea directa que pueden ser representados como una suma de secuencias de escalón y rampa.



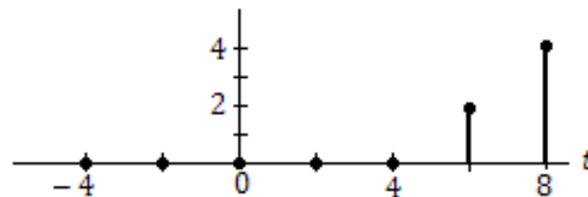
$$r[n] = nu[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

(a) Secuencia de rampa



$$x(n) = 2r[-n + 1] = 2(-n + 1)u[-n + 1] = \begin{cases} -2n + 2 & n \leq 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

(b) Secuencia general de la rampa



$$y[nT] = r[2n - 4] = \begin{cases} 2n - 4 & n \geq 2 \\ 0 & n < 2 \end{cases}, \quad T = 2$$

(c) Señal general rampa

**Figura 1.17.** Secuencia de rampa, secuencia general de la rampa y señal general de rampa en tiempo discreto.

## Impulso

La función de impulso en tiempo discreto  $\delta[n]$ , también llamada la función de muestra unitaria.

Por definición, la función de impulso en tiempo discreto está dada por

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.43)$$

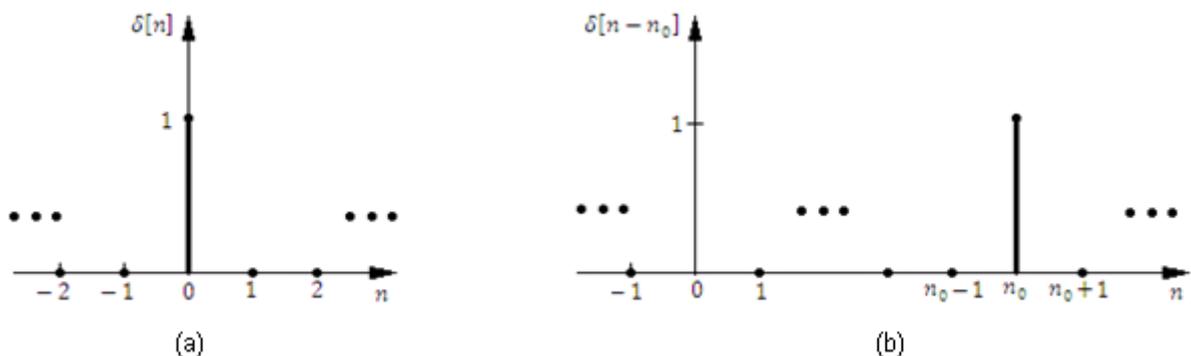
Esta función está graficada en la figura 1.18a. Notemos que la función impulso en tiempo discreto es matemáticamente bien comportada y no presenta los problemas de la función impulso en tiempo continuo[8]. De hecho, la función de impulso unitario en tiempo discreto, puede ser expresada como la diferencia de dos funciones escalón:

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1]. \quad (1.44)$$

Este resultado es visto graficando  $u[n]$  y  $-u[n - 1]$ . La función de pulso unitario desplazada es definida por

$$\delta[n - n_0] = \begin{cases} 1 & n = n_0 \\ 0 & n \neq n_0 \end{cases} \quad (1.45)$$

Y es también graficada en la figura 1.18b, por  $n_0 > 0$ .



**Figura 1.18.** Funciones impulso en tiempo discreto.

El rol de la señal de impulso en el análisis de sistemas en tiempo discreto y es similar al rol de la función impulso en análisis de sistemas en tiempo continuo. Por ejemplo, La convolución de la respuesta al impulso con la señal de salida produce una respuesta de estado cero para un sistema lineal de tiempo discreto e invariante en el tiempo. También la transformada de Fourier en tiempo discreto la respuesta al pulso unitario de un sistema en tiempo discreto

es la respuesta a la frecuencia del sistema. Estas relaciones serán derivadas en subsecuentes subcapítulos.

### Energía y potencia de una señal discreta

La definición para energía y potencia en una señal de tiempo discreto son:

Definición.- la energía en la señal  $x[nT]$  es

$$E_{dx} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[ T \sum_{n=-M}^M |x[nT]|^2 \right] \quad (1.46)$$

Definición.- la potencia en la señal  $x[nT]$

$$P_{dx} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1}{2M+1} \right) \sum_{n=-M}^M |x[nT]|^2 \right] \quad (1.47)$$

Las definiciones de energía de una señal y la potencia de una señal son paralelas a las definiciones presentadas en la sección 1.2.1 para energía y potencia en señales de tiempo continuo. Para energía de una señal mostramos el paralelismo usando una señal en tiempo discreto  $x[nT]$  conteniendo muestras de la señal  $x(nT)$  de la señal  $x(t)$  en tiempo continuo[11]. Esto nos permite usar la definición de una integral para dar  $0 < E_x < \infty$ .

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_{dx} = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[nT]|^2 T = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(nT)|^2 T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x \quad (1.48)$$

La energía de una señal en tiempo discreto es definida como  $0 < E_x < \infty$  y la potencia de una señal en tiempo discreto está definida como  $0 < P_x < \infty$ . Estas definiciones son definiciones similares y paralelas para señales en tiempo continuo[11].

### Señales periódicas y señales no periódicas.

Una señal  $x(n)$  es periódica con periodo  $N(N > 0)$  si y solo si

$$x(n + N) = x(n) \quad \text{para todo } n \quad (1.49)$$

El valor más pequeño de  $N$  para la cual la ecuación (1.49) se mantiene es llamado el periodo (fundamental). Si no hay valor de  $N$  que satisfice la ecuación (1.49), la señal es llamada no periódica o aperiódica, ya hemos observado que la señal de la forma

$$x(n) = A \sin 2\pi f_0 n \quad (1.50)$$

es periódica cuando  $f_0$  es un número racional, que es, si  $f_0$  puede ser expresado,

$$f_0 = \frac{k}{N} \quad (1.51)$$

donde  $k$  y  $N$  son enteros.

La energía de una señal periódica  $x(n)$  en el intervalo  $0 \leq n \leq N - 1$ , es finita si  $x(n)$  toma valores finitos en el periodo. Sin embargo la energía de la señal periódica para  $-\infty \leq n \leq \infty$  es infinita. Por otro lado la potencia promedio de la señal periódica es finita y es igual a la potencia promedio en la señal periódica. Así si  $x(n)$  es una señal periódica con periodo fundamental  $N$  y toma valores finitos, esta potencia está dada por

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \quad (1.52)$$

Por consiguiente, son potencia de las señales periódicas.

### Señales simétricas (pares) y asimétricas (impares).

Una señal  $x(n)$  es llamada simétrica (par) si

$$x(-n) = x(n) \quad (1.53)$$

Por otro lado, una señal  $x(n)$  es llamada antisimétrica (impar) si

$$x(-n) = -x(n) \quad (1.54)$$

Ejemplos de las señales con simetría par e impar son mostrados en la figura 1.19[8].

## 1.3 TIPOS DE FILTROS

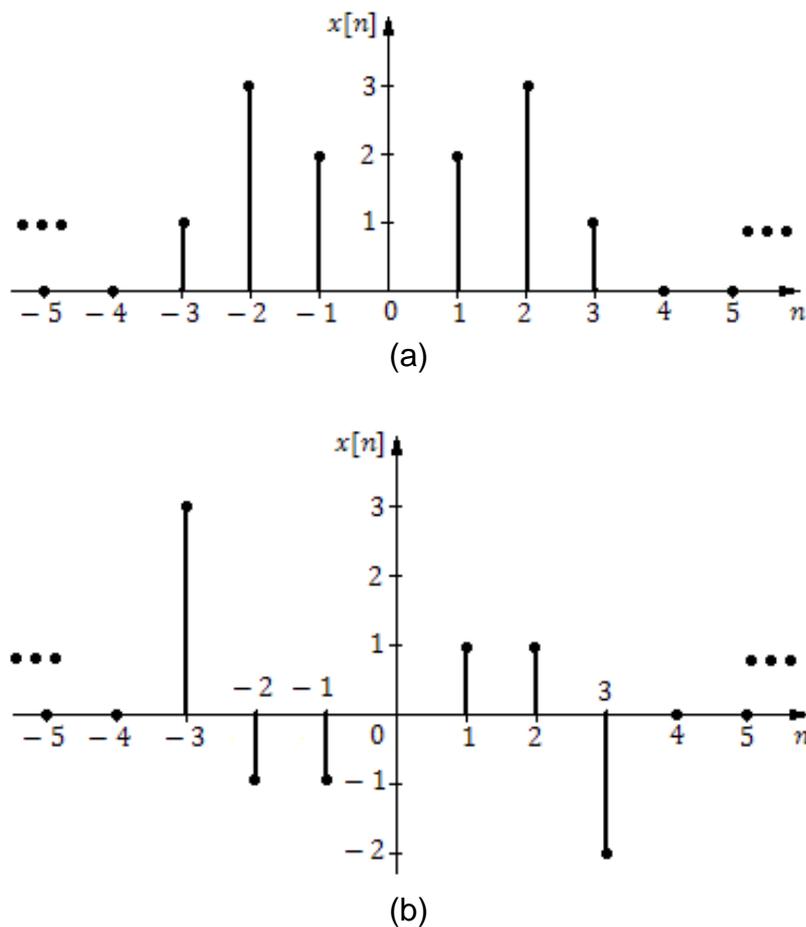
### 1.3.1 Filtros de tiempo continuo

#### Filtros ideales

Se considera una señal recibida que contiene un mensaje y una interferencia adherida. Para reducir la interferencia, nos gustaría construir un filtro que pasa, sin distorsión, solo los componentes de la señal en intervalo de frecuencia extendido por el espectro de la señal del mensaje. Tanto como un filtro elimine

componentes de interferencia teniendo frecuencias fuera del intervalo de frecuencia de paso es llamado un filtro ideal[12].

Los intervalos de frecuencia para el cual los componentes espectrales de la señal de entrada son pasados y no pasados por el filtro, son llamados pasa bandas y para bandas del filtro, respectivamente. El límite entre un pasa bandas y un para bandas es llamado una frecuencia de corte. Los tipos de filtro de interés para nosotros incluye el filtro pasa-bajas (LPF), filtro pasa-altas (HPF), filtro pasa-bandas (BPF), y filtro expulsa bandas (corte). Los nombres son descriptivos de la naturaleza del filtro.



**Figura 1.19.** Señal par (a) y señal impar (b) en tiempo discreto.

**Definición.-** Un filtro pasa bajas ideal pasa todos los componentes de la señal teniendo frecuencias menores que  $B$  Hz sin distorsión y con componentes de la señal completamente atenuadas teniendo frecuencias mayores que  $B$  Hz .

De la definición del filtro pasa bajas ideal y transmisión sin distorsión, vemos que la respuesta en frecuencia para un filtro pasa bajas ideal es

$$H_L(f) = K \prod \left( \frac{f}{2B} \right) e^{-j2\pi f\tau} \quad (1.55)$$

La amplitud correspondiente y la respuesta en fase son mostradas en la figura 1.20. La frecuencia de corte del filtro y el ancho de banda son  $B$ .

La respuesta al impulso del filtro pasa bajas ideal es

$$h_L(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_L(f)] = \mathcal{F}^{-1} \left[ K \prod \left( \frac{f}{2B} \right) e^{-j2\pi f\tau} \right] \quad (1.56)$$

Y encontramos que

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ K \prod \left( \frac{f}{2B} \right) \right] = 2BK \operatorname{sinc}(2Bt) \quad (1.57)$$

Entonces usamos el teorema de desplazamiento en el tiempo para obtener la respuesta al impulso:

$$h_L(t) = 2BK \operatorname{sinc} [2B(t - \tau)] \quad (1.58)$$

La respuesta al impulso es mostrada en la figura 1.20c. Notamos que el filtro pasa bajas ideal es no causal ya que  $h_L(t) \neq 0$  para  $t < 0$ . Esto implica que debemos conocer la señal de entrada en todas las futuras ocasiones. Para producir un filtrado en la señal de salida en cualquier instante de tiempo. Por lo tanto, no podemos implementar el filtro pasa bajas ideal como un filtro físico que procese datos tal como son recibidos.

Definición.- Un filtro pasa bandas ideal pasa todos los componentes de la señal teniendo frecuencias en un ancho de banda  $B$  Hz centrado en la frecuencia de  $f_0$  Hz sin distorsión y con componentes de la señal completamente atenuados teniendo frecuencias fuera de esta banda.

La anterior definición indica que la respuesta en frecuencia de un filtro pasa bandas ideal es

$$H_B(f) = K \left[ \prod \left( \frac{f - f_0}{B} \right) + \left( \frac{f + f_0}{B} \right) \right] e^{-j2\pi f\tau} \quad (1.59)$$

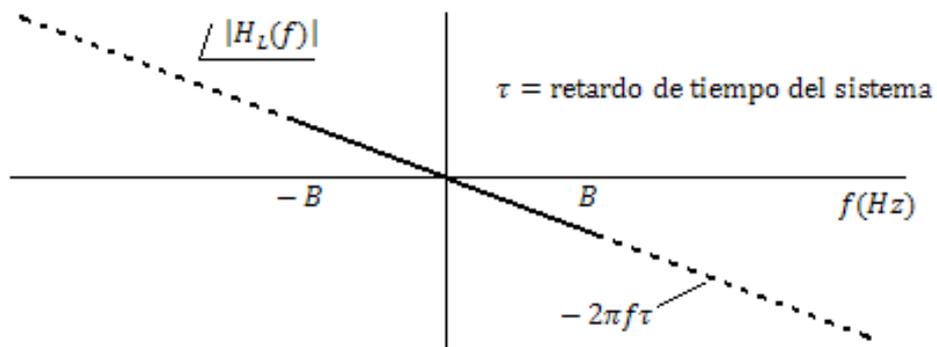
La respuesta de amplitud correspondiente y la respuesta en fase para el pasa bandas ideal son mostrados en la figura 1.21. Las frecuencias del corte del filtro son  $f_0 - B/2$  y  $f_0 + B/2$  y este ancho de banda es  $B$ .

La respuesta al impulso del filtro es

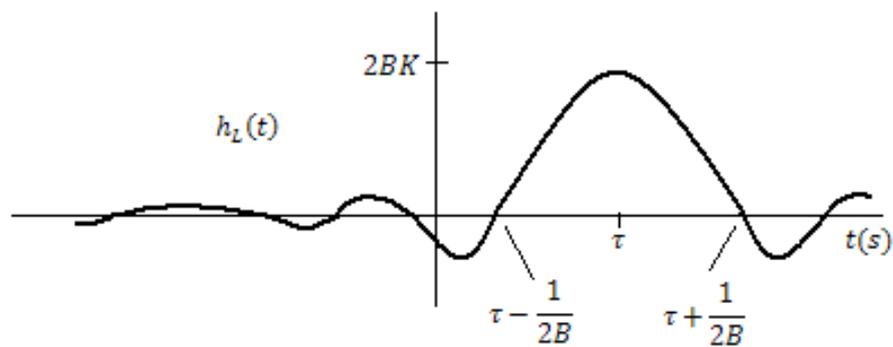
$$h_B(t) = 2BK \operatorname{sinc} [ B(t - \tau) ] \cos [ 2\pi f_0 (t - \tau) ] \quad (1.60)$$



(a) Respuesta en amplitud



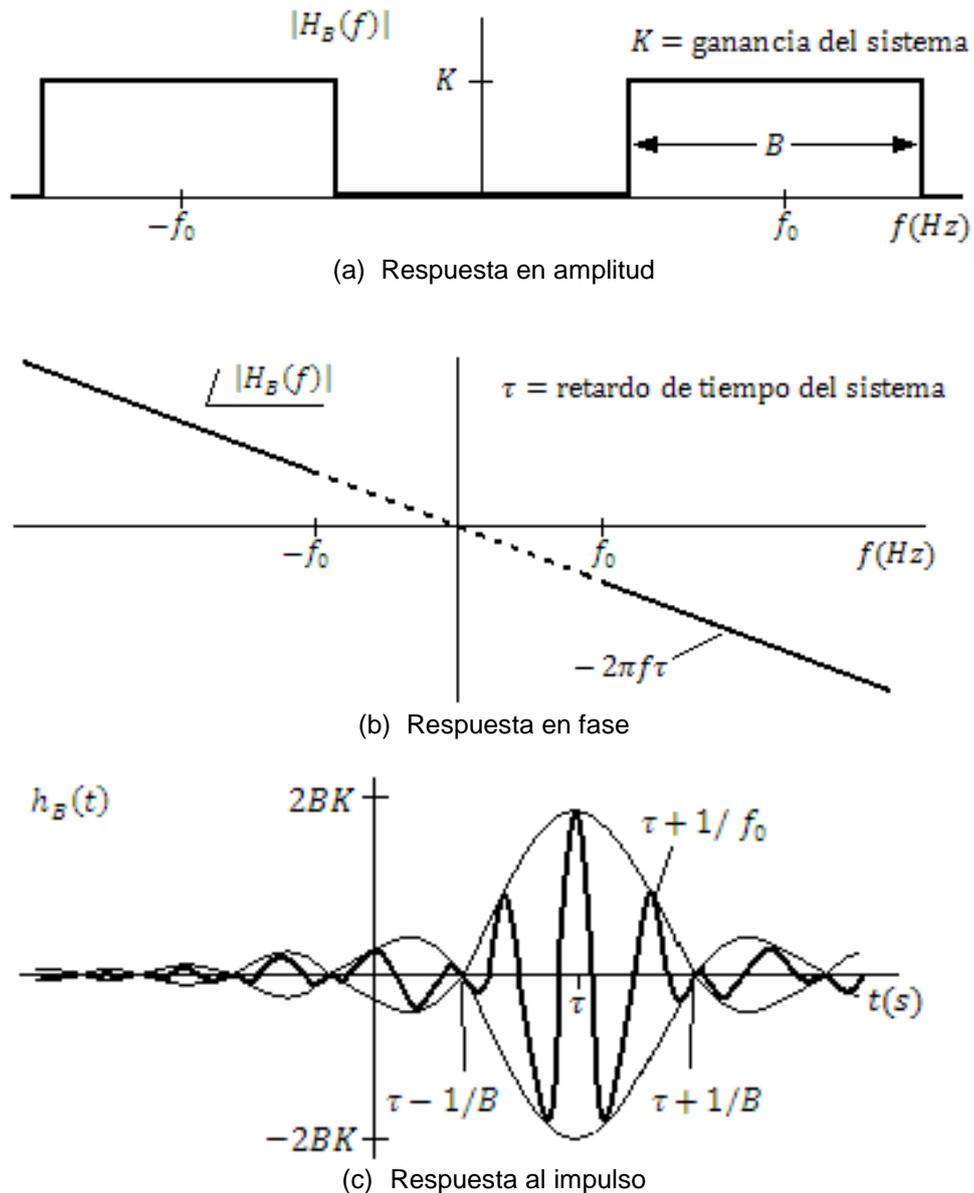
(b) Respuesta en fase



(c) Respuesta al impulso

**Figura 1.20.** Respuesta en amplitud (a), respuesta en fase y respuesta al impulso para un filtro pasa bajas ideal.

Una definición similar puede ser hecha para un pasa altas ideal y un filtro rechaza bandas ideal.



**Figura 1.21.** Respuesta en frecuencia y respuesta al impulso para un filtro pasa-bandas ideal.

### Aproximación de un filtro ideal

Consideramos aproximaciones del filtro ideal que pueden ser implementadas con sistemas físicos. Para una notación sencilla, expresamos la respuesta en frecuencia de estos filtros como una función de  $j\omega$ , que es, la respuesta en frecuencia de un filtro que aparece como

$$H(j\omega) = H_\omega(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.61)$$

Donde  $h(t)$  es la respuesta al impulso del filtro. Esta notación facilita expresar la relación entre la respuesta en frecuencia y la función de transferencia, ya que  $H(j\omega) = H(s) |_{s=j\omega}$ .

Algunas aproximaciones para filtros ideales han sido diseñadas con los años. Algunos intentos por igualar la respuesta a la amplitud tan cerca como sea posible, en algunas formas conocidas, sin considerar la respuesta en fase (por ejemplo, los filtros Butterworth, Chibyshev, y elípticos). La respuesta en fase para estas aproximaciones es una respuesta en fase lineal pero no se iguala a las características de la fase lineal en una forma conocida. Otras aproximaciones intentan igualar la respuesta en fase tan cerca como es posible en alguna forma conocida, sin considerar la respuesta en amplitud (por ejemplo, el filtro Bessel). No es posible igualar arbitrariamente ambas respuestas en amplitud y la respuesta en fase al mismo tiempo en alguna forma conocida. Esto es porque las respuestas en amplitud y fase si son de un filtro causal estable. Por lo tanto, la respuesta en fase para una respuesta en amplitud dada no pueden ser escogidos arbitrariamente, o viceversa[13].

### 1.3.2 Filtros en tiempo discreto

#### Filtros FIR

Los filtros digitales de respuesta al impulso finito (FIR) son sistemas lineales discretos invariantes en el tiempo en los cuales un número de salida, representa una muestra de la señal filtrada, es obtenida por suma de pesos de un conjunto finito de números de entrada, representando muestras de la señal a ser filtradas. Los coeficientes de la suma de pesos constituyen las respuestas de impulsos del filtro y solo un número finito de ellos no toma valores de cero. Este filtro es del tipo de 'memoria finita', esto es, determina sus salidas como una función de datos de entrada de duración limitada. Es frecuentemente llamado un filtro no recursivo porque, igual que el filtro de respuesta al impulso infinito, no requiere un lazo de retroalimentación en sus implementaciones[14].

Las propiedades del filtro de respuesta al impulso finito serán ilustradas por dos simples ejemplos

Se ha considerado una señal  $x(t)$  representado por sus muestras  $x(nT)$ , tomada una frecuencia  $f_s = 1/T$ , y se examina el efecto en su espectro al reemplazar el conjunto  $x(nT)$  por el conjunto  $y(nT)$  definido por la ecuación:

$$y(nT) = \frac{1}{2}[x(nT) + x((n-1)T)] \quad (1.62)$$

Este conjunto es también obtenido muestreando la señal  $y(t)$  tal que:

$$y(T) = \frac{1}{2}[x(t) + x(t - T)] \quad (1.63)$$

Si  $Y(f)$  y  $X(f)$  denotado por la transformada de Fourier de las señales  $y(t)$  y  $x(t)$ , entonces

$$Y(f) = \frac{1}{2}X(f)(1 + e^{-j2\pi fT}) \quad (1.64)$$

Tal operación corresponde a la función de transferencia

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

donde

$$H(f) = e^{-j\pi fT} \cos(\pi fT) \quad (1.65)$$

Esta es llamada el filtro de coseno alzado y conserva los componentes cero y elimina los que están en  $f_s/2$ , como puede ser próximamente verificado.

En la expresión para  $H(f)$  el término complejo  $e^{-j\pi fT}$  representa un retardo  $\tau = T/2$  el cual es el tiempo de propagación de la señal a través del filtro.

Propiedades de los filtros FIR [14].

- (1) El conjunto de entrada  $x(n)$  y la salida  $y(n)$  son relacionadas por una ecuación del siguiente tipo (definición de la relación):

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n - i) \quad (1.66)$$

El filtro definido en este sentido comprende un número finito  $N$  de coeficientes  $a_i$ . Si se es considerado como un sistema discreto su respuesta  $h(i)$  para el conjunto unitario es

$$h(i) = a_i \quad \text{si } 0 \leq i \leq N - 1$$

$$0 \quad \text{en cualquier otra parte}$$

Que es, la respuesta al impulso es simplemente el conjunto de los coeficientes.

- (2) La función de transferencia del filtro es

$$H(f) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{-j2\pi f iT} \quad (1.67)$$

o, expresadas en termino de Z

$$H(Z) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i Z^{-i} \quad (1.68)$$

- (3) La función  $H(f)$ , la respuesta en frecuencia del filtro, es periódica con periodo  $f_s = 1/T$ . Los coeficientes  $a_i (0 \leq i \leq N - 1)$  forman la expansión de series de Fourier de esta función.

La relación de Bessel-Parseval [11]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |S(t)|^2 dt \quad (1.69)$$

permite lo siguiente para ser escrito:

$$\sum_{i=0}^{N-1} |a_i|^2 = \frac{1}{f_s} \int_0^{f_s} |H(f)|^2 df \quad (1.70)$$

- (4) Si los coeficientes son simétricos la función de transferencia puede ser escrita como el producto de dos términos, de los cuales uno es una función real y la otra un número complejo con módulo 1, representando un retardo de propagación constante  $\tau$  el cual es un entero múltiplo de la mitad del periodo de muestreo. Tal filtro se dice que tiene una fase lineal.

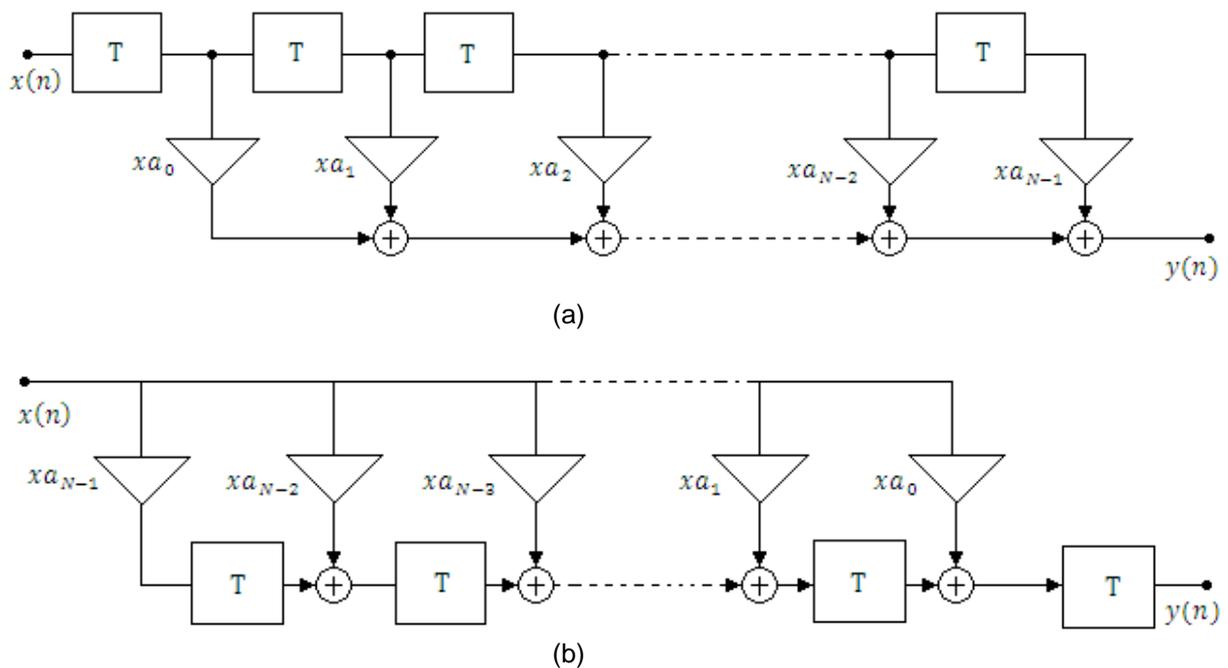
Los filtros FIR son compuestos de circuitos los cuales llevan a cabo las tres operaciones fundamentales de almacenamiento, multiplicación y adición. Estos son colocados para producir a partir de un conjunto de datos  $x(n)$  a un conjunto de salida  $y(n)$  de acuerdo a la ecuación que define el filtro. Como una operación no real puede ser instantánea, la ecuación la cual es implementada en lugar de la ecuación (1.66)

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n - i - 1) \quad (1.71)$$

$N$  memorias de datos son requeridos, y para cualquier números de salida  $N$  multiplicaciones y  $N - 1$  sumas tengan que ser desarrolladas.

Figura 1.22(a) los contornos del filtro en los que es llamado la estructura 'directa'. La transposición del diagrama de este esquema produce la estructura transpuesta. Esta es representada en la figura 1.22(b), donde los mismos operadores son arreglados de diferente manera.

Esta estructura permite la multiplicación de cualquier segmento de datos  $x(t)$  por todos los coeficientes en sucesión. La suma parcial de las memorias colocadas, y, en efecto, en tiempo  $n$  la primera memoria da el número  $a_{N-1}x(n)$ , la siguiente memoria da  $a_{N-1}x(n-1) + a_{N-2}x(n)$  y la última memoria da la suma  $y(n)$ .



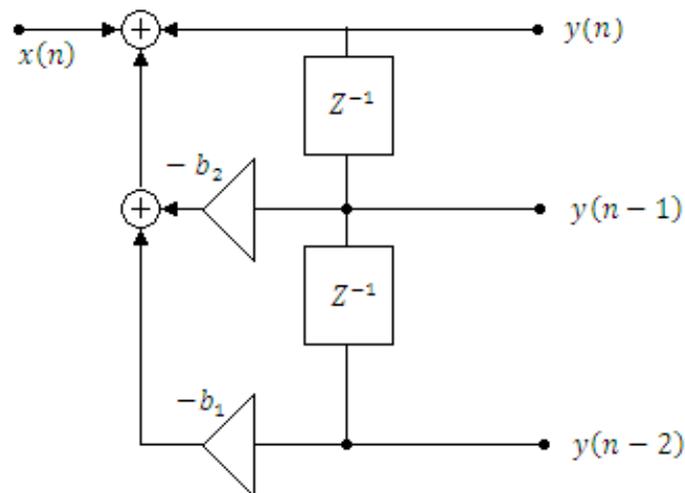
**Figura 1.22** Realización de filtros FIR. (a) Estructura directa: (b) estructura transpuesta.

### Filtros IIR

Los filtros digitales con una respuesta al impulso infinito son sistemas lineales discretos los cuales son gobernados por una ecuación de convolución en un número de términos infinito. En principio, tienen una memoria infinita. Esta memoria es archivada al alimentar la salida de regreso a la entrada, lo cual es por lo cual son llamados filtros recursivos. Cualquier elemento del conjunto de números de salida son calculados por la suma de pesos de un cierto número de elementos del conjunto de entrada y del previo conjunto de salida. En general, esta respuesta al impulso infinito permite mucho más funciones de filtrados selectivo. Para ser obtenido con filtros IIR de similar complejidad[3].

Sin embargo, la retroalimentación complica el estudio de las propiedades y el diseño de estos filtros y deja fenómenos parásitos [15].

Cuando examinamos los filtros IIR es más simple inicialmente para considerarlos en términos de secciones de primero y segundo orden. Estas simples estructuras no son únicamente útiles para introducir las propiedades de los filtros IIR pero también representan el tipo de implementación más frecuentemente usado[16]. De hecho, incluso los filtros IIR más complejos que aparecen en la práctica son generalmente formados de un conjunto de tales secciones, la estructura directa de estos filtros es mostrada en la figura 1.23.



**Figura 1.23** Circuito de una sección puramente recursiva.

En este trabajo no se profundiza sobre este tipo de filtro ya que no será requerido en la realización de los experimentos.

### Filtros wave

La primera aproximación sugerida para la simulación digital de los filtros ladder fue basada en simular elemento por elemento tomando en cuenta las variables wave. Las estructuras generales de un filtro digital pueden ser desarrolladas de esta manera. Un importante rasgo es que sus coeficientes pueden ser representados por un número pequeño de bits. Estos son llamados filtros wave[15].

### Filtro de promedio móvil

El filtro de promedio móvil se define por

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k] \quad (1.72)$$

Dicho sistema se utiliza a menudo en suaves variaciones en datos[17]. Consideramos por ejemplo una señal  $s[n]$  corrompida por un ruido  $d[n]$  para  $n \geq 0$ , resultando en un dato medido dado por

$$x[n] = s[n] + d[n]$$

Nos gustaría reducir el efecto del ruido  $d[n]$  y obtener una mejor estimación de  $s[n]$  de  $x[n]$ . Para este fin, el filtro de promedio móvil de la ecuación (1.72) con frecuencia da razonablemente buenos resultados[18].

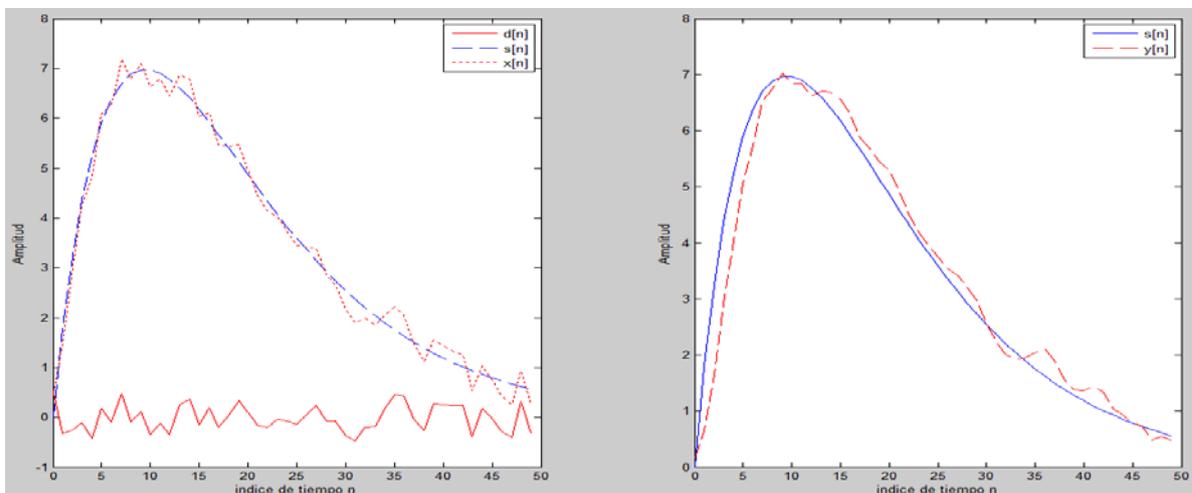


Figura 1.24 Señal  $s[n]$  filtrada por el filtro de promedio móvil.

En el siguiente ejemplo asumimos por simplicidad que la señal original no corrompida es dada por

$$s[n] = 2[n(0.9)^n] \quad (1.73)$$

En la figura 1.24 se muestra las gráficas de las señales generadas por un programa (ver apéndice A), para  $M = 3$ . Durante la ejecución, el programa requiere los datos de entrada, que es el número deseado M de muestras de entrada que se adhieren

## 1.4 CONVOLUCIÓN

### 1.4.1 Convolución en tiempo continuo

Una ecuación relaciona la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo en tiempo continuo. Comenzamos el desarrollo considerando el sistema en la figura 1.25, para el cual

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

Una función de impulso unitario  $\delta(t)$  es aplicada a la entrada del sistema. Recordando la descripción (1.23) de esta señal de entrada; la señal de entrada es cero en todo los valores de tiempo excepto en  $t = 0$ , tiempo en el cual la señal es ilimitada[4].

Con una función impulso en la entrada, denotamos la respuesta del sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI) en la figura 1.22 como  $h(t)$ , que es,

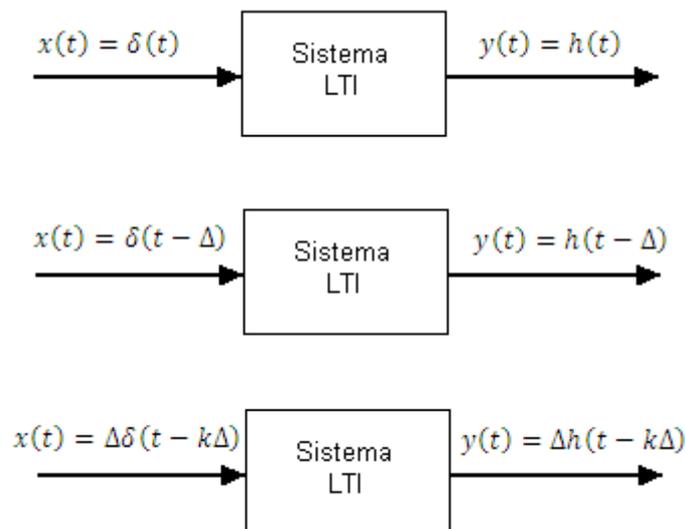
$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

Porque el sistema es invariante en el tiempo, la respuesta a la función impulso desplazada en el tiempo,  $\delta(t - t_0)$ , es dado por

$$\delta(t - t_0) \rightarrow h(t - t_0).$$

Mostramos que la respuesta del sistema para cualquier señal de entrada,  $x(t)$ , es expresada como una integral que involucra solo la función de entrada y la función de respuesta al impulso del sistema,  $h(t)$ . Esta interacción entre la señal de entrada y la función de respuesta al impulso es llamada convolución.

La convolución puede ser visualizada como una extensión aplicada de la superposición. La respuesta al impulso desplazada en tiempo por  $\Delta$  segundos para corresponder al tiempo que el impulso de entrada es aplicado.



**Figura 1.25** Respuesta al impulso de un sistema LTI en tiempo continuo.

De acuerdo al principio de superposición, una respuesta total del sistema LTI para una suma de entradas es la suma de la respuesta de cualquier entrada individual. Sigue que si la suma de pesos, impulsos desplazados en el tiempo

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta \delta(t - k\Delta), \quad (1.74)$$

Entonces la señal de salida es una suma de pesos, respuestas al impulso desplazados en el tiempo

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta h(t - k\Delta), \quad (1.75)$$

Ahora consideramos que los pesos de los impulsos en la función de entrada varíen como una función de tiempo y queda como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k\Delta) \delta(t - k\Delta) \Delta. \quad (1.76)$$

Aplicando las propiedades de linealidad de la multiplicación escalar, vemos que la señal de salida en respuesta a esta entrada es

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k\Delta) h(t - k\Delta) \Delta. \quad (1.77)$$

Si el desplazamiento de tiempo entre impulsos se aproxima a cero, la variable de tiempo discreto  $k\Delta$  se convierte en variable de tiempo continuo que podemos denotar por el símbolo  $\tau$ , el incremento de tiempo  $\Delta$  se convierte en la diferencial de tiempo  $d\tau$ , y la suma se convierte en una integral que queda como

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k\Delta) h(t - k\Delta) \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

En suma, la señal de entrada se convierte en

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k\Delta) \delta(t - k\Delta) \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Podemos también las propiedades básicas para escribir esta señal de entrada como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = v(t)$$

Así que podemos ahora escribir

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau, \tag{1.78}$$

Tiene la forma de una convolución integral. Así decimos que la salida  $y(t)$  es la convolución de la entrada  $x(t)$  y la respuesta al impulso  $h(t)$ . Ya que  $x(t)$  y  $h(t)$  son funciones de tiempo continuo, nos referimos a la operación de la convolución como una convolución continua. La definición general de la convolución continua es

Definición [9].- la convolución continua de las dos funciones  $f_1(\alpha)$  y  $f_2(\alpha)$  es

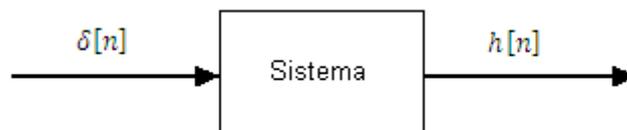
$$f_3(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\beta)f_2(\alpha - \beta)d\beta \equiv f_1(\alpha) * f_2(\alpha) \tag{1.79}$$

Donde  $\alpha$  es la variable independiente y  $\beta$  es la variable dependiente

La notación corta definida en el lado derecho de la ecuación (1.78) es frecuentemente usada para indicar la convolución continua de las dos funciones  $f_1(\alpha)$  y  $f_2(\alpha)$ .

### 1.4.2 Convolución en tiempo discreto

Una ecuación que relaciona la salida de un sistema LTI a su entrada ahora es desarrollada. Consideramos el sistema mostrado en la figura 1.26. Una función impulso unitario  $\delta[n]$  es aplicada a la entrada del sistema. Recordamos que esta entrada es la unidad para  $n = 0$  y es cero en todos los demás valores de  $n$ .



**Figura 1.26** Respuesta al impulso de un sistema en tiempo discreto.

La respuesta al sistema LTI es denotada como  $h[n]$ ; que es, una notación estándar,

$$\delta[n] \rightarrow h[n]. \tag{1.80}$$

Como el sistema es invariante en el tiempo,

$$\delta[n - k] \rightarrow h[n - k]. \quad (1.81)$$

Ya que el sistema es lineal podemos multiplicar cualquier lado de (1.81) por  $x[k]$ , resultando en la relación

$$x[k]\delta[n - k] \rightarrow x[k]h[n - k]. \quad (1.82)$$

Recordamos que la entrada general  $x[n]$  puede ser expresada como una suma de funciones impulso:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k].$$

Porque esta señal de entrada es una suma de funciones impulso, la señal de salida es una suma de las respuestas al impulso en (1.81) y sigue

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]. \quad (1.83)$$

Este resultado es llamado la suma de convolución y es el resultado básico en el estudio de sistemas LTI en tiempo discreto[8]. Denotamos esta suma con un asterisco:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] = x[n] * h[n] \quad (1.84)$$

Sustituyendo  $k = m$  la suma de superposición queda

$$y[nT] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[mT]h[(n - m)T] \quad (1.85)$$

tiene la forma de una suma de convolución. Así decimos que la salida  $y[nT]$  es la convolución de la salida  $h[nT]$ . Ya que  $x[nT]$  y  $h[nT]$  son funciones en tiempo discreto, nos referimos a esta operación de convolución como convolución discreta. La definición general de la convolución discreta es la siguiente

Definición [9].- la convolución discreta de las dos funciones  $f_1[nA]$  y  $f_2[nA]$  es

$$f_3[nA] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1[mA]f_2[(n - m)A] = x[nA] * h[nA] \quad (1.86)$$

donde  $A$  es espacio de la muestra y  $m$  es un índice dependiente usado en la suma.

## 1.5 TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

### Definición

La transformada de Fourier en tiempo discreto  $X(e^{j\omega})$  de una secuencia  $x[n]$  es definido por

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (1.87)$$

Por lo tanto seguido de la ecuación (1.87) es la representación de las series de Fourier de la función periódica  $X(e^{j\omega})$ [15]. Como resultado, los coeficientes de Fourier  $x[n]$  pueden ser calculadas de  $X(e^{j\omega})$  usando la integral de Fourier dada por

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (1.88)$$

Llamada la transformada de Fourier inversa en tiempo discreto. La ecuación (1.87) y (1.88) constituyen un par de transformadas de Fourier en tiempo discreto para la secuencia  $x[n]$ .

### Propiedades de la transformada de Fourier discreta. [21]

*Linealidad:* si  $x(n)$  y  $y(n)$  son dos series con el mismo periodo y con las transformaciones  $X(k)$  y  $Y(k)$ , respectivamente, la serie  $v(n) = x(n) + \lambda y(n)$ , donde  $\lambda$  es un escalar, tiene la transformación

$$V(k) = X(k) + \lambda Y(k)$$

Una transformación de  $x(n)$  implica una rotación de la fase de  $X(k)$ . Si la transformación  $X_{n_0}(k)$  de la serie  $x(n - n_0)$  es calculada, entonces

$$X_{n_0}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n - n_0) e^{-j2\pi nk/N} = X(k)e^{-j2\pi n_0 k/N}$$

*Simetria:* Si la serie  $x(n)$  es real, los números  $x(k)$  y  $X(N - k)$  son conjugados complejos:

$$\bar{X}(N - k) = \sum_{n=0}^N x(n) e^{j2\pi n(N-k)/N}$$

Si la serie  $x(n)$  es real y par, entonces es la serie  $X(k)$ . De hecho, si  $x(N - n) = x(n)$ , entonces, por ejemplo, para  $N=2P+1$ :

$$X(N - k) = x(0) + 2 \sum_{n=1}^P x(n) \cos\left(2\pi \frac{nk}{N}\right) = X(k)$$

Si la serie  $x(n)$  es real e impar, la serie  $X(k)$  es puramente imaginaria. En este caso:  $x(N - n) = -x(n)$  y  $x(0) = x(N) = 0$ . Por ejemplo, para  $N = 2P + 1$  este se convierte:

$$X(k) = -2j \sum_{n=1}^P x(n) \sin\left(2\pi \frac{nk}{N}\right) = -X(N - k)$$

Ya que cualquier señal siempre puede ser descompuesta en partes pares e impares, estas dos últimas propiedades de simetría son importantes.

*Convolution circular*[1]: La transformada de un producto de convolución es igual al producto de las transformadas.

Si  $x(n)$  y  $h(n)$  son dos series con periodo  $N$ , la convolución circular  $y(n)$  puede ser definida por la ecuación:

$$y(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) h(n - l) \quad (1.89)$$

Esta es una serie la cual tiene el mismo periodo  $N$ , su transformada es escrita [13]:

$$\begin{aligned} Y(k) &= \sum_{l=0}^{N-1} \left[ \sum_{l=0}^{N-1} x(l) h(n - l) \right] e^{-j2\pi nk/N} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \left[ \sum_{l=0}^{N-1} h(n - l) e^{-j2\pi(n-l)k/N} \right] e^{-j2\pi lk/N} \end{aligned}$$

$$Y(k) = \left( \sum_{n=0}^{N-1} h(n - l) e^{-j2\pi \left[ \frac{(n-l)k}{N} \right]} \right) \left( \sum_{l=0}^{N-1} x(l) e^{\frac{j2\pi(n-l)k}{N}} \right) = H(k)X(k) \quad (1.90)$$

Esta es una importante propiedad de la transformada de Fourier discreta.

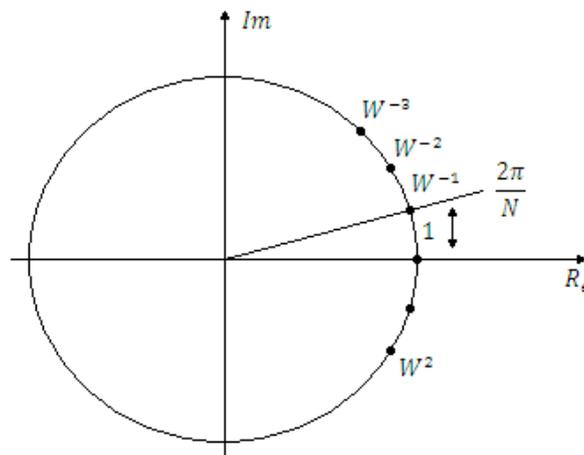
*Relacion de Parseval:* Esta relación determina que la potencia de la señal es igual a la suma de la potencia de sus armónicos [1]. Así

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\bar{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) e^{-j2\pi kn/N} \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \end{aligned} \tag{1.91}$$

### 1.5.1 Transformada rápida de Fourier

Las ecuaciones definen la transformada de Fourier discreta proporciona una relación entre dos series de  $N$  números complejos. Esta es convenientemente escrita en forma de matriz

$$W = e^{-j2\pi/N} \tag{1.92}$$



**Figura 1.27** Coordenadas de los coeficientes de una transformada de Fourier discreta

Las coordenadas del número  $W^n$ , los coeficientes de la transformada de Fourier discreta aparecen en el círculo unitario en el plano complejo como se muestra en la figura 1.25 y son las raíces de la ecuación  $Z^N - 1 = 0$ .

La ecuación matriz para la transformada directa es como sigue:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W^{(N-1)} & W^{2(N-1)} & W^{3(N-1)} & \dots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (1.93)$$

Para la transformada inversa es suficiente remover el factor  $1/N$  y cambiar  $W^n$  para  $W^{-n}$ .

La matriz cuadrada  $T_0$  de orden  $1/N$  exhibe obvios rasgos: filas y columnas con el mismo índice tienen los mismos elementos y estos elementos son potencias de un número básico tal que  $W^n = 1$ . Significativas simplificaciones pueden ser visualizadas bajo estas condiciones, llevando a algoritmos a un cálculo rápido[13].

Un caso importante ocurre cuando  $N$  es una potencia de 2, porque permite los algoritmos los cuales son simples y particularmente efectivos. Estos algoritmos son usados en una descomposición de la serie que va a ser transformada en un número de subconjuntos entrelazados.

## 1.6 ÍNDICE DE CORRELACIÓN

Una medida de similitud entre un par de señales de energía,  $x[n]$  y  $y[n]$ , es dada por la secuencia de la correlación cruzada  $r_{xy}[l]$  definida por

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-l], \quad l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (1.94)$$

El parámetro  $l$  llamado *lag*, indica el desplazamiento de tiempo entre el par. La secuencia de tiempo  $y[n]$  se dice que es desplazada por  $l$  muestras con respecto a la secuencia de referencia  $x[n]$  a la derecha para valores positivos de  $l$ , y desplazada por  $l$  muestras a la izquierda para valores negativos de  $l$ .

El orden de los subíndices  $xy$  en la ecuación (1.94) especifica que  $x[n]$  es la secuencia de referencia la cual se mantiene fija en el tiempo mientras que la secuencia  $y[n]$  es desplazada con respecto a  $x[n]$ [18].

La secuencia de autocorrelación de  $x[n]$  es dada por

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-l] \quad (1.95)$$

De la misma manera la secuencia de autocorrelación  $y[n]$  es dada por

$$r_{yy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]y[n-l] \quad (1.96)$$

Esto implica

$$|r_{xy}[l]| \leq \sqrt{r_{xx}[0]r_{yy}[0]} = \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y} \quad (1.97)$$

donde  $r_{xx}[0] = \varepsilon_x > 0$  y  $r_{yy}[0] = \varepsilon_y > 0$  son energías de las secuencias  $x[n]$  y  $y[n]$ , respectivamente.

La forma normalizada de la correlación es conocida como el índice de correlación y está definido como

$$\rho_{xy}[l] = \frac{r_{xy}[l]}{\sqrt{r_{xx}[0]r_{yy}[0]}} \quad (1.98)$$

y es frecuentemente usada. De la relación de la ecuación (1.98) se deduce que  $|\rho_{xy}[l]| \leq 1$  y es independiente del rango de valores de  $x[n]$  y  $y[n]$ [18].

---

---

## Capítulo 2

# ALGORITMO MATEMÁTICO DE RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES

### 2.1 GENERALIZACIÓN DE FILTROS INVARIANTES EN EL TIEMPO

Vamos a dar algunas definiciones y hechos de la teoría de procesamiento de señales. Los libros estándar en la teoría de procesamiento de señales son [1], [2], [10], [11], [12], [13] y [19].

Las señales digitales complejas (CDS)  $u = \{u(j), j \in \mathbb{Z}\}$  son una sucesión doble de números complejos. A continuación consideramos CDS con una energía finita ya que suponemos que la CDS  $u \in l^2$  el espacio de Hilbert de funciones definidas en  $\mathbb{Z}$  con el producto escalar.

$$(u, v) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j) \bar{v}(j),$$

y la norma

$$\|u\|_2 = \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u(j)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Sea  $A$  un filtro digital lineal transformado en una señal de entrada  $u$  dentro de una señal de salida  $v = Au$ . Consideraremos los filtros lineales como operadores lineales acotados  $A: l^2 \rightarrow l^2$ . La típica y más importante clase de filtros digitales son los filtros invariantes en el tiempo. La propiedad característica de estos filtros es su invariancia con respecto a los desplazamientos. Decimos que el filtro  $A$ , transforma una señal de entrada en la señal de salida y es invariante con respecto a los desplazamiento, si

$$V_k A = A V_k,$$

donde  $V_k u(j) = u(j - k)$ . Se puede demostrar que los filtros digitales invariantes  $A$  actúan como

$$Au(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{j-l} u(l), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

donde  $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  es una sucesión de números complejos. Observe que el operador  $A$  puede ser dado en forma de matriz como

$$Au(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} k_A(j, l) u(l), \quad j \in \mathbb{Z},$$

donde

$$k_A(j, l) = a_{j-l}.$$

A continuación suponemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty. \quad (2.2)$$

Observemos que el problema de la reconstrucción de la señal de entrada por filtros invariantes en el tiempo (2.1) se resuelve por medio de la transformada de Fourier discreta

$$\hat{u}(\xi) = (Fu)(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{-ij\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Sea

$$\hat{a}(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_k e^{-ij\xi} ,$$

y

$$|\hat{a}(\xi)| > c > 0 . \quad (2.3)$$

Entonces la señal de entrada es obtenida de la señal de salida  $v = Au$  donde  $A$  es el filtro (2.1) mediante la formula

$$u(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{v}(\xi)}{\hat{a}(\xi)} e^{ij\xi} d\xi , \quad j \in \mathbb{Z} . \quad (2.4)$$

La generalización directa de los filtros invariantes en el tiempo son los filtros variables en el tiempo descrito por el operador lineal  $A$  de la forma

$$Au(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{j-l}(j)u(l) , \quad j \in \mathbb{Z} . \quad (2.5)$$

donde  $a_k \in l^\infty$  el espacio acotado de funciones complejas definidas en  $\mathbb{Z}$  con norma

$$\|a\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |a(j)| < \infty .$$

Observe que en este caso

$$k_A(j, l) = a_{j-l}(j) , \quad j \in \mathbb{Z} .$$

Supondremos que hay una constante  $c_1 > 0$  tal que

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_l(j)| < \infty . \quad (2.6)$$

El problema de la reconstrucción de señales de entrada  $u \in l^2$  de la señal de salida es mucho mas complicado para filtros variantes en el tiempo y la investigación de este problema es el principal objetivo de este trabajo.

## 2.2 RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES DE ENTRADA

### 2.2.1 Hechos auxiliares de la teoría de operadores pseudodiferenciales

#### Definición 1

Sea  $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \ni (j, \xi) \rightarrow a(j, \xi)$  una función compleja  $2\pi$  – periódica

$$|a|_N = \sup_{(j, \xi) \in \mathbb{Z} \times [0, 2\pi], m \leq N} \left| \frac{d^m a(j, \xi)}{d\xi^m} \right| < \infty, \quad (2.7)$$

para todo  $N \geq 0$ . La clase de dichas funciones es denotada por  $\mathcal{S}$ . Correspondemos a la función  $a \in \mathcal{S}$  un operador pseudodiferencial [20]

$$(Au)(j) = Op(a)u(j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a(j, \xi) \hat{u}(\xi) e^{ij\xi} d\xi, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2.8)$$

donde  $u \in l^2$ , y lo denotamos por la clase de dichos operadores OPS.

El operador  $A$  es llamado operador pseudodiferencial, y la función  $a = \sigma_A$  es llamada el símbolo del operador pseudodiferencial. Estos operadores son operadores pseudodiferenciales sobre el grupo  $\mathbb{Z}$ , y son análogos discretos de conocidos operadores pseudodiferenciales en  $\mathbb{R}$ . Las referencias estándar en la teoría de operadores pseudodiferenciales son [16], [20], [21] y [22].

Observemos que el filtro variante en el tiempo  $A$  de la forma.

$$(Au)(i) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-j}(j)u(j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2.9)$$

donde

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|^k \|a_j\|_{l^\infty} < \infty, \quad (2.10)$$

para cada  $k = \{0\} \cup \mathbb{N}$  es un operador pseudodiferencial con símbolo

$$a(j, \xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j(j) e^{-ij\xi} \in \mathcal{S}.$$

El operador pseudodiferencial ha sido introducido y estudiado en el artículo [23], ver también [21], Capítulo 5. Daremos aquí algunos hechos de esta teoría la cual será utilizada a continuación.

**Proposición 1**

Sea  $a \in \mathcal{S}$ . Entonces  $A = Op(a)$  es un operador acotado sobre  $l^2$ , y

$$\|Au\|_{l^2} \leq C|a|_2\|u\|_{l^2}.$$

**Proposición 2**

Sean  $A, B$  operadores pseudodiferenciales de la clase OPS.

Entonces  $AB$  son operadores pseudodiferenciales de la clase OPS también y  $AB = Op(c)$ , donde

$$c(j, \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a(j, \xi + \eta) b(j + l, \xi) e^{-il\eta} d\eta. \quad (2.11)$$

La fórmula (2.11) produce las siguientes estimaciones:

$$|c|_N \leq C|a|_{N+2}|b|_N, \quad N \in \mathbb{N}_0. \quad (2.12)$$

Se ha demostrado en (2.10) que un operador pseudodiferencial está acotado en el espacio  $l^\infty$ , y el símbolo de  $\sigma_A$  del operador pseudodiferencial puede obtenerse mediante la fórmula

$$\sigma_A(j, \xi) = e^{-ij\xi} A(e^{ij\xi}). \quad (2.13)$$

Esta fórmula demuestra que el *filtro variante en el tiempo*  $A$  puede ser reconstruido si conocemos la señal de salida para todas las señales de entrada de la forma  $e^{ij\xi}$ ,  $\xi \in [0, 2\pi]$  [24].

**2.2.2 Filtros lentamente variantes en el tiempo**

Sea  $a \in \mathcal{S}$ . Introducimos la oscilación  $\omega_k^j(a)$  del símbolo  $a$  con respecto a la variable  $j$  como

$$\omega_k^j(a) = \sup_{j \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \xi \in [0, 2\pi]} \sum_{j=0}^k \left| \frac{\partial_\xi^j a(j + y, \xi) - \partial_\xi^j a(j, \xi)}{|y|} \right|.$$

**Teorema 1**

Sea  $a \in \mathcal{S}$  y

$$|a(j, \xi)| \geq C > 0, \quad (2.14)$$

para todo  $j$  y  $\xi \in [0, 2\pi]$ . Entonces para una oscilación suficientemente pequeña  $\omega_k^j(a) \ll 1$ , el operador  $Op(a)$  es invertible [25].

**Prueba 1.** Colocamos  $B = Op(a^{-1})$ . La condición (2.14) proporciona que  $B \in OPS$ . Aplicando la fórmula (2.11) obtenemos que  $BA = Op(c)$  para  $c$  definido por la fórmula [26][27].

$$\begin{aligned} c(j, \xi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{y \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a^{-1}(j, \xi + \eta) a(j + y, \xi) e^{-iy\eta} d\eta \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{y \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a^{-1}(j, \xi + \eta) e^{-iy\eta} d\eta \right) a(j, \xi) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{y \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a^{-1}(j, \xi + \eta) (a(j + y, \xi) - a(j, \xi)) e^{-iy\eta} d\eta \\ &= 1 + r(j, \xi), \end{aligned}$$

donde

$$r(j, \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{y \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a^{-1}(j, \xi + \eta) (a(j + y, \xi) - a(j, \xi)) e^{-iy\eta} d\eta \quad (2.15)$$

seguido de la Proposición 1, en la que para una oscilación suficientemente pequeña  $\omega_2(a)$

$$\|Op(r)\|_{l^2 \rightarrow l^2} < 1.$$

Así para la oscilación suficientemente pequeña  $\omega_2(a)$  el operador  $A = Op(a)$  tiene el inverso izquierdo [26]

$$A^{-1} = (I + Op(r))^{-1} Op(a^{-1}). \quad (2.16)$$

En la misma manera probar que el operador  $A$  tiene un operador inverso derecho para oscilaciones suficientemente pequeñas  $\omega_2(a)$ . Entonces  $A^{-1}$  es el operador inverso de  $A$ .

Por lo tanto hemos reducido el problema de reconstrucción de señales de entrada  $u \in l^2$  de la señal de salida  $v = Au \in l^2$  a la ecuación

$$u + Op(r)u = Op(a^{-1})v. \quad (2.17)$$

La solución de esta ecuación es obtenida por el método de aproximaciones sucesivas [28]:

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = -Op(r)u_n + Op(a^{-1})v, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

La señal reconstruida  $u$  es estable en  $l^2$  con respecto a pequeñas variaciones de la señal de entrada en  $l^2$ . La formula (2.16) es una extensión de los filtros lentamente variantes en el tiempo y la conocida formula (2.4) de reconstrucción de señales de entrada para los filtros invariantes en el tiempo.

### 2.3 MÉTODO DE SECCIONES FINITAS PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES DE ENTRADA

Sea  $A$  un operador invertible acotado en  $l^2$ . Por lo tanto la ecuación

$$Au(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} k_A(j, l)u(l) = v(j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2.18)$$

tiene una única solución  $u$  para cada función  $v$

#### 2.3.1 Estabilidad del método de secciones finitas

Sea  $P_N$  el operador de multiplicación por la función característica del segmento discreto  $[-N, N]_{\mathbb{Z}} = \{-N, -N + 1, \dots, 0, 1, \dots, N\}$ . Junto con la ecuación (2.18) consideramos la secuencia de secciones finitas[29]

$$A_N u_N = P_N A P_N u_N = P_N v,$$

Este es el sistema lineal de la ecuación

$$A_N u_N(j) = \sum_{l=-N}^N k_A(j, l)u_N(l) = v(j), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N. \quad (2.19)$$

La cuestión crucial es captar la secuencia  $u_N$  tendiendo a  $u$  en  $l^2$  que es

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u - u_N\|_{l^2} = 0. \quad (2.20)$$

Es bien conocido (para ejemplos ver [21]) esa convergencia en (2.20) es proporcionada por la invertibilidad de  $A: l^2 \rightarrow l^2$  y la estabilidad de la secuencia

$A_N$ . Esto significa que los operadores  $A: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^M$  son invertibles para  $N > N_0$  y hay una constante  $C > 0$  tal que sus inversos  $A_N^{-1}$

$$\|A_N^{-1}\| < C \text{ para todo } N > N_0.$$

En este caso decimos que el método de secciones finitas es *estable*.

Consideramos el método de secciones finitas para filtros los cuales son operadores pseudodiferenciales de la forma (2.8).

### Teorema 2

Sea  $A = Op(a) \in OPS$  y la siguientes condiciones se mantienen

(1) Las condiciones del teorema 1 ;

(2) Existen limites

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} a(j, \xi) = a_+(\xi), \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} a(j, \xi) = a_-(\xi).$$

(3)  $[arg a_+(\xi)]_{\xi=0}^{2\pi} = 0, \quad [arg a_-(\xi)]_{\xi=0}^{2\pi} = 0,$

donde  $[arg a_{\pm}(\xi)]_{\xi=0}^{2\pi}$  es el incremento del argumento de la función  $a_{\pm}(\xi)$  si esta cambiando desde "0 a  $2\pi$ ".

### 2.3.2 Reconstrucción de señales periódicas digitales en filtros variantes en el tiempo

En este apartado consideramos el problema de reconstrucción de señales digitales de entrada con valores finitos conociendo la señal de salida. Consideraremos tales señales como una secuencia periódica  $\{u(j)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  con un periodo  $d \in \mathbb{N}$ , que es  $u(j + d) = u(j)$  para cada  $j \in \mathbb{Z}$ .

Sea  $A$  un filtro variante en el tiempo de la forma

$$Au(j) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k(j) V_k u(j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2.21)$$

donde  $a_k$  son  $d$ -funciones periódicas, y  $V_k$  son desplazamientos  $V_k u(j) = u(j - k)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  definido correctamente en la secuencia periódica [28].

Introducimos la transformada discreta de Fourier de la secuencia periódica  $u$  como

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \sum_{j=0}^{d-1} u(j)\gamma_d^{-ij\xi}, \quad \xi \in \mathbb{Z}, \quad (2.22)$$

donde  $\gamma_d = e^{(2\pi i/d)}$

la cual es una raíz primitiva de orden  $d$  de la unidad. Es bien conocido la fórmula para la transformada discreta de Fourier inversa (ver para ejemplo, [2] y [13])

$$u(j) = (F^{-1}\hat{u})(j) = \frac{1}{d} \sum_{\xi=0}^{d-1} \hat{u}(\xi) \gamma_d^{j\xi}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.23)$$

Además, la igualdad de Parseval se mantiene [1]

$$\sum_{\xi=0}^{d-1} |\hat{u}(\xi)|^2 = d \sum_{j=0}^{d-1} |u(j)|^2.$$

Las formulas (2.22) y (2.23) implican que

$$u(j) = \frac{1}{d} \sum_{y=0}^{d-1} \sum_{\xi=0}^{d-1} u(j+y) \gamma_d^{-y\xi}, \quad (2.24)$$

y

$$\widehat{V_j u}(\xi) = \gamma_d^{-y\xi} \hat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}, \quad j = 0, 1, \dots, d-1.$$

Sea  $(j, \xi) \rightarrow a(j, \xi)$  una función definida en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y  $d$ -periódica con respecto de  $j$  y  $\xi$ . La función corresponde al operador pseudodiferencial  $d$ -periódico (operador pseudodiferencial en el grupo  $\mathbb{Z}_d = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ )

$$Au(j) = Op(a)u(j) = \sum_{\xi=0}^{d-1} a(j, \xi) \hat{u}(\xi) \gamma_d^{j\xi}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.25)$$

Definido en la función  $d$ -periódica. La función  $a = \sigma_A$  es llamada el símbolo del operador  $A$

Observe que el filtro variante en el tiempo (2.21) puede ser presentado como un operador pseudodiferencial  $d$ -periódico con símbolo

$$\sigma_A(j, \xi) = \sum_{j=0}^{d-1} a(j) \gamma_d^{-j\xi}, \quad (j, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Denotamos por  $l_d^2$  el espacio de todas las funciones  $d$ -periódicas  $u(j)$  en  $\mathbb{Z}$  con norma

$$\|A\|_{l_d^2 \rightarrow l_d^2} = \left( \sum_{j=0}^{d-1} |u(j)|^2 \right)^{1/2}.$$

### Proposición 3

Sea  $A = Op(a)$  un operador pseudodiferencial  $d$ -periódico. Entonces

$$\|A\|_{l_d^2 \rightarrow l_d^2} \leq \left( d \sum_{y=0}^{d-1} \sum_{\xi=0}^{d-1} |a(j, \xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq d^{3/2} \max_{j \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}}, \xi \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}}} |a(j, \xi)|. \quad (2.26)$$

La estimación (2.26) es obtenida por un cálculo directo con la aplicación de la igualdad de Parseval,

### Proposición 4

Sea  $A = Op(a)$  un operador pseudodiferencial  $d$ -periódico.

Entonces  $AB$  es un operador pseudodiferencial  $d$ -periódico, y  $\sigma_{AB}$  es

$$\sigma_{AB}(j, \xi) = \frac{1}{d} \sum_{y=0}^{d-1} \sum_{\eta=0}^{d-1} a(j, \xi + \eta) b(j + y, \xi) \gamma_d^{-y\eta}, \quad j, \xi \in \mathbb{Z}. \quad (2.27)$$

La formula (2.27) es probada por el cálculo directo.

Denotamos por  $\omega_j(\sigma_A)$  la oscilación de la función  $\sigma_A$  con respecto a la variable  $j \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}}$ , que es

$$\omega_j(\sigma_A) = \max_{j, y \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}}, \xi \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}}} |\sigma_A(j, \xi) - \sigma_A(y, \xi)|.$$

### Teorema 3

Sea que las siguientes condiciones se cumplan:

(i)  $\sigma_A(j, \xi) \neq 0$

Para todo  $(j, \xi) \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}} \times [0, d-1]_{\mathbb{Z}}$ ,

(ii)

$$\omega_j(\sigma_A) \max_{j \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}}} \sum_{\eta=0}^{d-1} |a^{-1}(j, \eta)| < \frac{1}{d^{3/2}}. \quad (2.28)$$

Entonces  $A$  es un operador invertible en  $l_d^2$ , y

$$A^{-1} = (I + T)^{-1}Op(a^{-1}), \quad (2.29)$$

donde  $\|T\|_{l_d^2 \rightarrow l_d^2} < 1$ .

### Prueba 2

Sea  $B = Op(a^{-1})$ . Entonces, aplicando la formula (2.24) obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{AB}(j, \xi) &= \frac{1}{d} \sum_{y=0}^{d-1} \sum_{\eta=0}^{d-1} a^{-1}(j, \xi + \eta) a(j + y, \xi) \gamma_d^{-y\eta} \\ &= \frac{a(j, \xi)}{d} \sum_{y=0}^{d-1} \sum_{\eta=0}^{d-1} a^{-1}(j, \xi + \eta) \gamma_d^{-y\eta} + t(j, \xi) = 1 + t(j, \xi), \end{aligned}$$

donde

$$t(j, \xi) = \frac{1}{d} \sum_{y=0}^{d-1} \sum_{\eta=0}^{d-1} a^{-1}(j, \xi + \eta) (a(j + y, \xi) - a(j, \xi)) \gamma_d^{-y\eta}.$$

Aplicando estimación (2.27) obtenemos que

$$\|T\|_{l_d^2 \rightarrow l_d^2} = \|Op(t)\|_{l_d^2 \rightarrow l_d^2} \leq d^{3/2} \omega_j(\sigma_A) \max_{j \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}}} \sum_{\eta=0}^{d-1} |a^{-1}(j, \eta)|.$$

Por lo tanto

$$BA = I + T,$$

donde  $\|T\|_{l_d^2 \rightarrow l_d^2} < 1$  por la condición (2.29). Por lo tanto el operador

$$A^{-1} = (I + T)^{-1}Op(a^{-1}),$$

es el operador inverso izquierdo de  $A$ . Porque  $l_d^2$  es un espacio dimensional finito,  $A^{-1}$  es el operador inverso de los dos lados de  $A$ .

## 2.4 SOLUCIÓN POR MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

### Comentario

Así obtuvimos un efectivo algoritmo para la reconstrucción de señales de entrada seguido de (2.30) la señal de entrada satisface la ecuación

$$u + Tu = Op(a^{-1})v,$$

donde la función  $Op(a^{-1})v$  puede ser calculado por medio del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (ver para ejemplo [2]), y entonces  $u$  es calculada por el método de secciones finitas

$$u_0 = 0, u_{n+1} = -Tu_n + Op(a^{-1})v, \quad n = 0, 1, \dots$$

**Ejemplo 1** Consideramos un filtro periódico de la siguiente forma

$$f(j) = Au(j) = [u(j-1) + u(j-2) + u(j)]v(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.30)$$

Suponemos que las secuencias  $f(j), v(j), u(j)$  son  $d$ -periódicas.

El operador puede ser representado en la forma (2.30) con

$$a(j, \xi) = e^{\frac{2\pi i}{d}\xi} + e^{-\frac{2\pi i}{d}\xi} + v(j) = 2 \cos \frac{2\pi}{d}\xi + v(j).$$

Sea  $v(j)$  el cual satisface la estimación

$$v(j) > 2 + \delta$$

para algún  $\delta > 0$ . Entonces el operador  $A$  es invertible.

Denotamos por  $\omega(v)$  la oscilación de la función  $v$  que es

$$\omega(v) < \sup_{j \in \mathbb{Z}} |v(j+1) - v(j)|.$$

Entonces, si  $\omega(v)$  es suficientemente pequeño el procedimiento presentado antes puede ser aplicado para la solución de la ecuación (2.30).

## Capítulo 3

---

---

# CÁLCULOS E ILUSTRACIÓN NUMÉRICA

### 3.1 MÉTODO DE SECCIONES FINITAS

En esta sección explicaremos el desarrollo del trabajo caracterizado por los conceptos explicados en los capítulos anteriores con el uso de un programa de computación para el procesamiento digital de señales (PDS) conocido como MATLAB (Laboratorio de Matemáticas). Con dicho software desarrollamos el algoritmo explicado en el capítulo 2. Los conceptos utilizados son encontrados en el capítulo 1.

#### 3.1.1 Lectura de la señal de salida

La primera fase consiste en captar una señal recibida después de pasar por un sistema en tiempo continuo escrito tradicionalmente como  $y(t)$ , esta se puede observar en la figura 1.23. La gran diferencia y objetivo principal de este trabajo, es el hecho de que el análisis de la señal recibida no será tomado de un sistema LTI. Sino de un sistema lineal pero variante en el tiempo.

Posteriormente convertimos la forma de una secuencia en tiempo continuo  $y(t)$  en una secuencia de tiempo discreto  $y(n)$  como se explica en la sección 1.2.1 del capítulo 1.

Recordando el método propuesto en el capítulo 2, nuestra secuencia tradicionalmente llamada  $y(n)$  será nombrada en nuestro trabajo para efectos de comprensión como una secuencia  $v(j)$  para diferenciar el procedimiento de los realizados con filtros lineales e invariantes en el tiempo. Basados en la ecuación (2.1), se desarrollo el algoritmo de reconstrucción de señales de entrada con filtros variantes en el tiempo.

### Procedimiento del programa en MATLAB

Consideramos tratar la solución de los filtros variantes en el tiempo con la teoría de operadores pseudodiferenciales, la cual es propuesta como una herramienta para el análisis de este problema y es desarrollada en el capítulo 2. La solución que proponemos corresponde a la ecuación (2.20), donde al conjunto  $u(j)$ , el cual llamamos la secuencia discreta de la señal de entrada,  $k_A(j, l)$  es nuestro filtro como operador pseudodiferencial desarrollado y representado en forma de matriz.

El análisis de la señal recibida como el conjunto  $v(j)$  en el programa MATLAB se realiza mediante la lectura de un archivo en formato de audio (.WAV), con la función

```
'[s,fsx,nx] = wavread('nombre_de_archivo.wav');'
```

donde 's' representa el nombre de la variable en la cual se guarda el archivo en forma discreta para obtener un vector en MATLAB, 'fsx' representa la frecuencia de muestreo de la señal analizada y, 'nx' representa el formato de número de bits en el cual fue guardado (este puede ser de 8, 16 o 32 bits), en nuestro caso se utilizó el estándar de 16 bits para lectura de archivos de audio y una frecuencia de muestreo de  $fsx \geq 2f_{smax}$  como lo indica el teorema de Nyquist-Shannon.

Posteriormente se descompuso al vector en sus dos componentes principales, el vector derecho y el izquierdo con la función de MATLAB [15]

```
'x = s(:, 1);'
```

Donde '1' corresponde al vector izquierdo donde se encuentran los componentes de baja frecuencia pero en particular los componentes de voz, los cuales son de mayor interés para este trabajo.

Recordando el método de secciones finitas para reconstrucción de señales explicado en la sección 2.3 del capítulo 2. El método que se refiere a realizar cortes por secciones de la señal recibida, para posteriormente multiplicar cada sección con el segmento característico del operador inverso determinado en (2.17). Posteriormente aplicando la relación de igualdad, entre los elementos de la ecuación (2.18), podemos establecer la operación que se debe realizar en el programa para implementarlo en MATLAB correspondiente a la construcción de dicha igualdad.

Como resultado del análisis realizado en el capítulo 2, basándonos en la ecuación (2.20), la cual resulta ser solución del algoritmo implementado, determinamos el siguiente procedimiento con funciones elementales de MATLAB.

```
Z=size(x);           % Z es la longitud de el vector x
can=Z/[2000 1];     % la variable "can" es el tamaño de una sección del
vector x
tam=2000;          % tamaño de la sección
for yu=1:1:can;    % inicia ciclo for para tomar valores de todas las
secciones
xn=0;              % se inicializa el vector xn con el valor de cero
dife=provdife;
    for xn=1:1:tam;
        x1(xn)=x(dife+xn); % se genera otro vector del tamaño de la sección
    end
provdife=provdife+xn;
```

En el fragmento del programa antes descrito, se realiza el corte en secciones finitas de la señal recibida como se explica en la sección 2.3.1.

A continuación recordando y considerando la convergencia descrita en la ecuación (2.21), y estableciendo un operador inverso en la forma de la ecuación (2.31), donde se realiza un operador matriz de tres diagonales y recordando la forma de la ecuación (2.20), generamos un sistema de ecuaciones lineales; donde  $u_N$  corresponde al segmento característico desconocido en el sistema, es decir, las  $N$  incógnitas.

## 3.2 CONSTRUCCIÓN DEL OPERADOR INVERSO

### 3.2.1 Coeficientes del operador inverso

Hasta ahora no existe aún una teoría para el diseño de filtros variantes en el tiempo, por lo cual nos basamos en las proposiciones dadas en el capítulo 2. Además de la relación que existe entre los procesos ondulatorios con los que se caracteriza el comportamiento de la ionosfera como se muestra en la figura 1.1. Estas características en su mayoría pueden ser representados por la suma de funciones senos y cosenos [14], siendo este un comportamiento de análisis valido en la ionosfera, capa de la atmósfera en la cual se basa este trabajo y de la cual está enfocado el funcionamiento del método propuesto.

Quedando la proposición para los coeficientes de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 P_0(j) &= \sum_k^i a_{0k} \cos(c_{0k} j) + b_{0k} \sin(c_{0k} j) > 0 \\
 P_1(j) &= \sum_k^i a_{1k} \cos(c_{1k} j) + b_{1k} \sin(c_{1k} j) > 0 \\
 P_2(j) &= \sum_k^i a_{2k} \cos(c_{2k} j) + b_{2k} \sin(c_{2k} j) > 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

```

z=1;
for m=1:1:length(x1);
    v(m)=ak.*cos(pi/32*z)+bk.*sin(pi/32*z);
    z=z+1;
end
P1=diag(v); %vector diagonal

```

Después se generan dos vectores en forma diagonal adicionales para generar una matriz de tres diagonales. Al igual que en el fragmento del programa anterior el vector diagonal es nombrado por la variable ' P1 ' los dos vectores adicionales serán llamados ' P2 ' y ' P3 '. Estos vectores son generados por la combinación de elementos de la proposición (3.1).

### 3.2.2 Construcción del operador inverso

Recordando la estructura del operador inverso definido en (2.17), la construcción de dicho operador esta basado en los coeficientes obtenidos en la sección anterior.

$$OP = P_1 + P_2 + P_3;$$

donde 'OP' es la variable que contiene a la matriz de convolución (3.2).

El fragmento del programa descrito anteriormente, genera una matriz de tres diagonales que corresponden a los coeficientes de un filtro que cambia dependiendo del tiempo discreto con la característica de la operación de convolución, de la posición de la muestra  $u(j)$  procesada, donde  $j = 1, 2, 3, \dots, N$ . Esta matriz representa al operador pseudodiferencial inverso de la ecuación (2.17), para la señal de entrada  $u \in l^2$  que nos aproxima a la señal de salida  $v = Au \in l^2$ .

### Estabilidad del operador inverso

La señal reconstruida  $u'(j)$  será una aproximación a la señal de entrada  $u(j)$ , dependiendo de los coeficientes del filtro variante en el tiempo en forma del operador inverso propuesto en el ejemplo 1 de la sección 2.3.2 del capítulo 2.

Ahora, recordando la operación básica donde un filtro actúa en una señal  $x(n)$  descrita en la ecuación (1.78) y referido en el método para un desarrollo en forma de matriz en (2.1), y que se caracteriza por la operación de convolución explicada también en la sección 1.3.2 del capítulo 1.

Construimos la matriz de convolución, aunque la relación se diferencia en los coeficientes variantes del filtro, ya que, la típica y comúnmente conocida estructura de la convolución corresponde a los filtros lineales e invariantes en el tiempo.

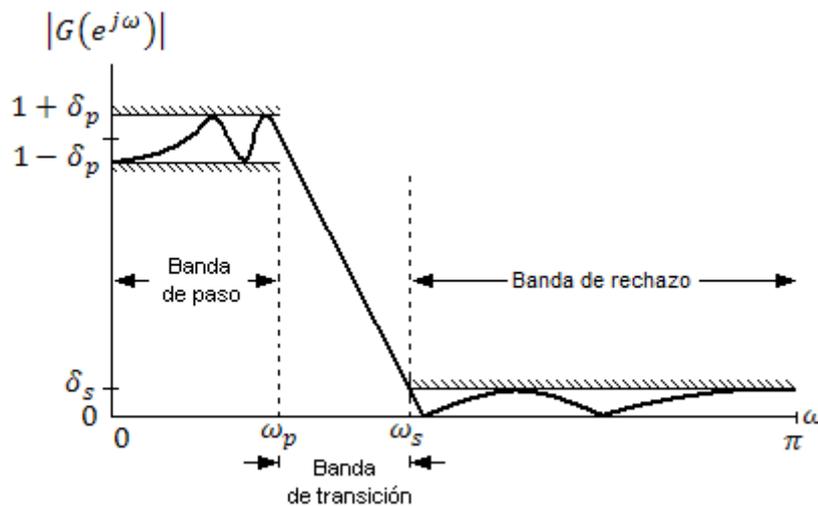
En nuestro caso la construcción de la matriz de convolución se mantiene, aunque, con la diferencia de que el sistema es variante en el tiempo, como lo establecemos en la ecuación (2.5). Definimos su forma aplicada al método de secciones finitas en la ecuación (2.19) del capítulo 2, por lo cual, la matriz queda conformada como se muestra en (3.2) [16].

donde  $P_0(j)$ ,  $P_1(j)$  y  $P_2(j)$  son coeficientes del filtro, el valor que adquiere cada  $P_k(j)$  depende de la variación en  $u(j)$  donde  $j = 0, 1, 2, \dots, N$  y  $N \in \mathbb{Z}$ . Para este caso.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ P_1(2) & P_0(2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ P_2(3) & P_1(3) & P_0(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2(4) & P_1(4) & P_0(4) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_2(N-1) & P_1(N-1) & P_0(N-1) & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_2(N) & P_1(N) & P_0(N) & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

La estabilidad del filtro variante en el tiempo es obtenida utilizando los parámetros del filtro de promedio móvil, el cual es descrito por la ecuación (1.83), con la diferencia en que la variación del filtro se presenta únicamente en uno de los tres coeficientes que conforman la reconstrucción de cada una de las muestras de la señal  $u(j)$  como se mostrara más adelante en el capítulo 4. Ya que de ser utilizado en los tres coeficientes se complica el control en la selectividad de sus espectros y en consecuencia los resultados no son favorables cuando menos hasta los últimos resultado obtenido.

La funcionalidad del filtro de promedio móvil dio como resultado una variación controlada del filtro, con un enfoque de selectividad caracterizado por un filtro pasa-bajas frecuencias. Como se muestra en la figura 3.1 [18]



**Figura 3.1** Especificaciones típicas de magnitud para un filtro digital pasa bajas.

Como está indicado en la figura 3.1, en el pasa-banda definido por  $0 \leq \omega \leq \omega_p$ , requiere que la magnitud se aproxime a la unidad con un error de  $\pm\delta_p$ . La frecuencia  $\omega_p$  y  $\omega_s$  son, respectivamente, llamados la frecuencia de corte pasa banda y la frecuencia de rechazo banda. Los límites de tolerancia en el

filtro pasa-bandas y rechaza bandas,  $\delta_p$  y  $\delta_s$ , son usualmente llamados los *valores pico de onda*. Observe que la respuesta en frecuencia  $G(e^{j\omega})$  de un filtro digital es una función periódica de  $\omega$ , y la respuesta en magnitud de un filtro digital de coeficientes reales es incluso una función de  $\omega$ . Como un resultado, las especificaciones del filtro digital son dadas solo por el rango  $0 \leq |\omega| \leq \pi$ .

En el programa MATLAB realizamos las operaciones características de matrices que se requieren en la matriz de convolución con coeficientes variantes en el tiempo para la construcción de un sistema de ecuaciones lineales, las cuales consisten en la multiplicación de el vector transpuesto desconocido  $u(j)$  como la variable desconocida  $x_j$  que multiplica a la matriz de convolución de coeficientes que varían en el tiempo [16].

### 3.2.3 Construcción del sistema de ecuaciones lineales (LES).

Haciendo un cambio de variables para facilitar la comprensión de la caracterización del sistema de ecuaciones lineales en arreglos de polinomios tradicionales donde  $a_N$  representa valores escalares de cada coeficiente del filtro variante en el tiempo quedando como sigue

$$P_0(j) = a_0(j), \quad P_1(j) = a_1(j) \quad y \quad P_2(j) = a_2(j) \quad (3.3)$$

Además la variable desconocida que es nuestra señal de entrada se muestra en la forma tradicional de una variable desconocida  $x_N$  como

$$u_N = x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_N \quad (3.4)$$

Quedando el sistema de ecuaciones lineales de la forma siguiente

$$\begin{aligned} a_0(1)x_1 + 0 + 0 &= v_1 \\ a_1(2)x_1 + a_0(2)x_2 + 0 &= v_2 \\ a_2(3)x_1 + a_1(3)x_2 + a_0(3)x_3 &= v_3 \\ a_2(4)x_2 + a_1(4)x_3 + a_0(4)x_4 &= v_4 \\ \vdots + \vdots + \vdots &= \vdots \\ a_2(N)x_{N-2} + a_1(N)x_{N-1} + a_0(N)x_N &= v_N \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para el sistema de ecuaciones lineales resultante en (3.5), como solución  $v_N$  (considerado para su análisis en MATLAB como un vector), existe una única

solución característica para dicho sistema [30], ya que de no existir solución para el sistema no existiría la respectiva operación inversa de nuestro operador pseudodiferencial lo cual no cumpliría con el procedimiento descrito en el capítulo 2.

Como bien sabemos el objetivo de este trabajo es reconstruir la señal de entrada que denominamos  $u(j)$ , la cual es desconocida para nosotros, a partir de la aplicación del operador pseudodiferencial inverso que caracteriza al sistema determinado por la teoría de operadores pseudodiferenciales (presentada en la sección 2.2 del capítulo 2, y que actúa sobre la señal de salida, la cual conocemos perfectamente y que además suponemos, es el resultado de la señal desconocida, afectada por el medio físico por el cual se desplaza la señal.

Considerando a este conjunto de transformaciones el operador directo del modo

$$A_N u_N = v_N \quad (3.6)$$

El siguiente paso es encontrar el operador inverso que nos proporcione la mejor aproximación de la señal de entrada el cual se definirá obteniendo el resultado del sistema de ecuaciones lineales construido en este apartado.

### 3.3 CALCULO DEL SEGMENTO CARACTERÍSTICO

Ya que hemos construido el sistema de ecuaciones lineales de (3.5) que resuelve el problema de la estimación de la señal de entrada  $u_N$ . A continuación resolvemos dicho sistema utilizando un algoritmo recursivo. Se obtiene una solución de la señal de entrada de la forma (3.6), y como se menciona en la ecuación (2.19) esta aproximación corresponde al segmento característico del sistema de ecuaciones propuesto y construido anteriormente.

#### 3.3.1 Solución de LES por algoritmo recursivo

Las características del sistema de ecuaciones lineales corresponden a la forma  $Ax = b$  quedando expresado para este trabajo como sigue.

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad Au(j) = v(j) \quad (3.7)$$

Observe que la característica de la matriz del sistema de ecuaciones lineales corresponde a una matriz triangular, la cual se resuelve de manera muy sencilla por medio de una secuencia recursiva [30], quedando el cálculo de la solución del sistema de ecuaciones lineales de (3.5). Recordando las

sustituciones de (3.3) y (3.4). Esta solución nos muestra la relación de la señal de salida con el operador inverso desarrollado en el procedimiento de este capítulo.

Considerando que existe una solución única del sistema de ecuaciones lineales en la matriz que representa un operador pseudodiferencial, decimos, por lo tanto, que su operador inverso también existe. Hecho que se demuestra con la solución del sistema de ecuaciones lineales como se muestra en (3.8).

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{v_1}{a_0(1)} \\
 x_2 &= \frac{v_2 - a_1(2)x_1}{a_0(2)} \\
 x_3 &= \frac{v_3 - a_2(3)x_1 - a_1(3)x_2}{a_0(3)} \\
 &\vdots = \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 x_N &= \frac{v_N - a_2(N)x_{N-2} - a_1(N)x_{N-1}}{a_0(N)} \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

De acuerdo al análisis realizado en la sección 2.3 definimos la expresión general del sistema inverso quedando de la siguiente forma

$$u_N = A_N^{-1}v_N \tag{3.9}$$

La elección del operador inverso se determina con el análisis de los espectros de frecuencia del operador propuesto asegurándonos de que el operador inverso cumpla con las condiciones de un filtro pasa bajas caracterizado en la figura 3.1.

### 3.3.2 Reconstrucción de señales de entrada por solución del (LES)

La señal de entrada que se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones lineales construido en la sección 3.3.1, puede ser considerada nuestra señal reconstruida, pero si la solución que se obtiene corresponde a una señal que no satisface una mayor aproximación de la señal de entrada, analizamos la variación del espectro de la señal reconstruida, así observamos que la señal

obtenida por la solución del sistema de ecuaciones lineales puede en realidad describir el comportamiento de operador inverso y se analizan la respuesta en frecuencia de los coeficientes resultantes.

Después de analizar dichos coeficientes y además la solución del sistema generado, podemos deducir si el operador propuesto tiene el comportamiento del operador inverso que satisface la reconstrucción de la señal de entrada, o tiene el comportamiento característico del operador directo que afecta a la señal de entrada.

### 3.3.3 Reconstrucción de señales de entrada por el operador inverso

En el caso en el que la matriz construida cumple con las características del comportamiento del operador inverso y además cumple con las características que se especificaron en el capítulo 2. La solución puede ser expresada de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ P_1(2) & P_0(2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ P_2(3) & P_1(3) & P_0(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2(4) & P_1(4) & P_0(4) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_2(N-1) & P_1(N-1) & P_0(N-1) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_2(N) & P_1(N) & P_0(N) & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Entonces la solución puede obtenerse con la multiplicación directa del operador pseudodiferencial inverso construido en la sección 3.2.2, y la señal recibida  $v(j)$  [16].

Ahora estamos realizando la operación específica en la sección 2.2, la cual corresponde a un operador en forma de matriz de coeficientes variantes en el tiempo. Y de esta manera obtenemos el desarrollo del algoritmo que se caracteriza por filtros que dependen del tiempo llevándolo a una relación lineal en un sistema de ecuaciones.

# Capítulo 4

---

---

## RESULTADOS

### 4.1 RESULTADOS EN VARIACIÓN DE COEFICIENTES

Recordando la proposición (3.1) del capítulo 3, donde los coeficientes toman valores correspondientes a una combinación de factores dentro de una función que denota la suma de senos y cosenos, hecho que se justifica con la teoría de Joseph Fourier [20] para prácticamente cualquier señal periódica.

El valor que toman los coeficientes depende del tiempo y de los parámetros de la proposición (3.1). Pero en general la función está condicionada a un rango de valores como se especifican en la sección 2.2.2, por lo tanto de no cumplirse esas condiciones el procedimiento no será eficiente.

Las condiciones más considerables que se tomaron en cuenta son

- 1) Los coeficientes no pueden tomar valores de cero o negativos.
- 2) La oscilación que se introduce por la variación de tiempo en la función debe ser lenta ya que el medio que se analiza tiene un comportamiento lento.
- 3) El sistema debe ser invertible.

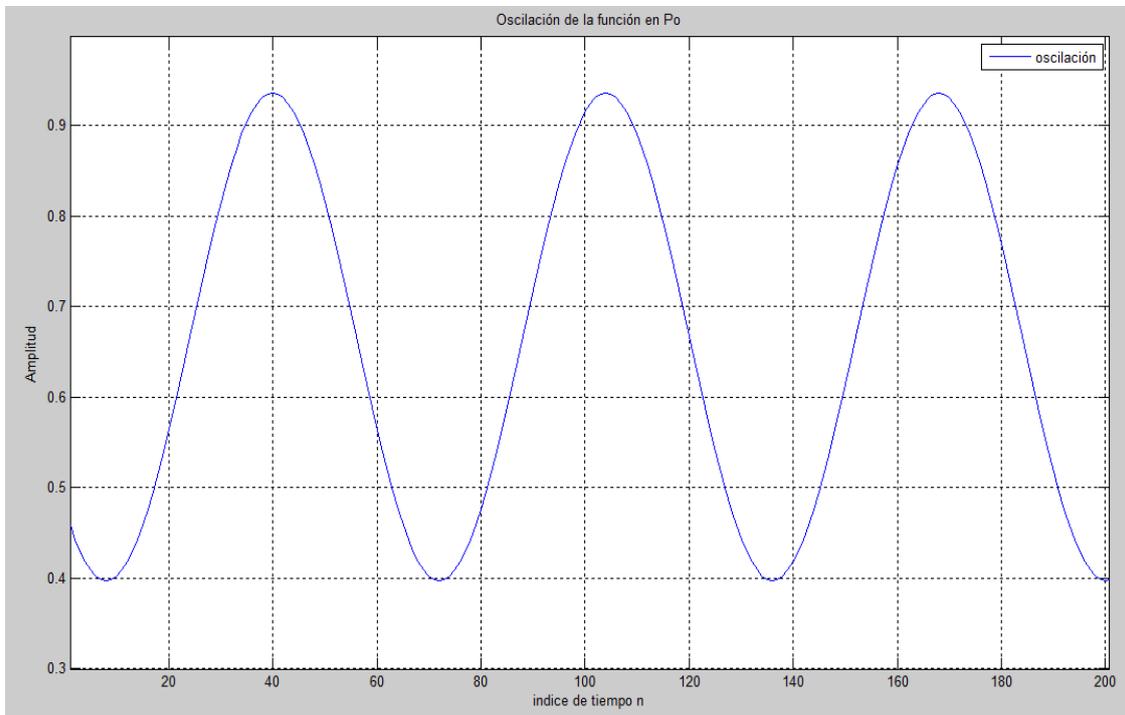
Los resultados mostrados son aquellos que dieron una mayor aproximación de la señal y que reflejaron una mayor estabilidad en la reconstrucción de la señal de entrada.

$$P_0(j) = a_k \cos\left(\frac{\pi}{32} j\right) + b_k \sin\left(\frac{\pi}{32} j\right) > 0, \quad a_k = b_k = \left(\frac{1}{7}\right)$$

$$P_1(j) = \frac{1}{3} > 0$$

$$P_2(j) = \frac{1}{3} > 0$$

La variación de los valores que toma el coeficiente  $P_0$  corresponde a una oscilación equivalente, esta se muestra graficamente en la figura 4.1.



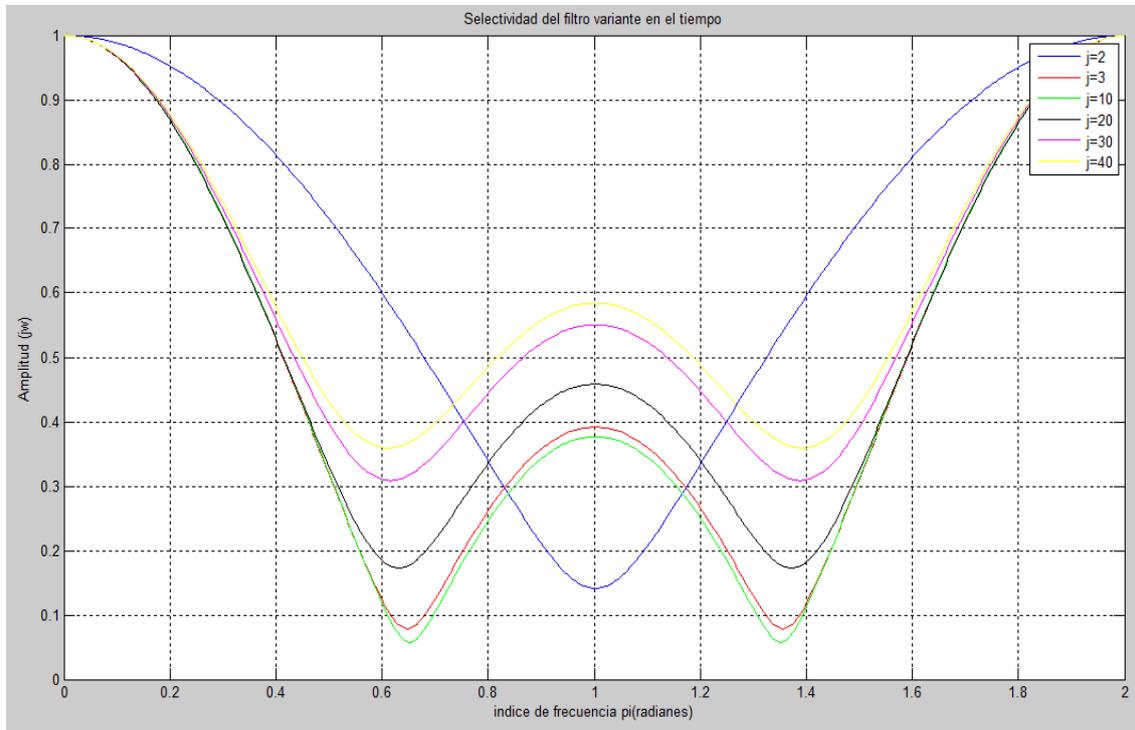
**Figura 4.1** Oscilación introducida en el coeficiente variable  $P_0$ .

La combinación de coeficientes antes mostrada, nos proporciona una respuesta en frecuencia para cada uno de los puntos en  $u(j)$  como se muestra en la figura 4.1.

La selectividad de cada  $a(j, \xi)$  que varía en el tiempo discreto como se muestra en la figura 4.2, donde la magnitud del espectro del filtro esta normalizada a 1. La escala de frecuencia se encuentra en  $\pi \text{ rads}$ . y la selectividad se define en un rango de  $[0, \pi]$ .

En la figura 4.2 tambien podemos observar la selectividad del filtro que corresponde a cada variación de tiempo y que en general se mantiene estable

para la caracterización de un filtro pasa-bajas, aunque es suficiente tomar en cuenta la gráfica que va de  $0$  a  $\pi$ , donde la curva de caída corta el paso de frecuencias aproximadamente en un valor en la escala de magnitud de  $0.7071$ , con respecto a la escala de  $\pi$  *rads*. Además ya que de  $\pi$  a  $2\pi$  solo se repite en forma de espejo no se considera este segmento de la gráfica.



**Figura 4.2** Selectividad del filtro variante en el tiempo.

La razón por la cual se estabiliza la selectividad del operador pseudodiferencial inverso en un comportamiento de filtro pasa-bajas, es porque en su mayoría las señales además de transformarse por las condiciones del medio por el cual se desplazan, se contaminan con algunos tipos de ruido, que en general contienen componentes espectrales de altas frecuencias.

En los resultados se observó que la oscilación debe ser lenta ya que los cambios rápidos no permitían una variación más amplia de valores que describan con más claridad el tipo de oscilación, pero cabe mencionar, que los cambios demasiado lentos no dan buenos resultados ya que tiende a un sistema parecido a los filtros invariantes en el tiempo.

## 4.2 RESULTADOS EN SEÑALES PERIÓDICAS

### Pruebas

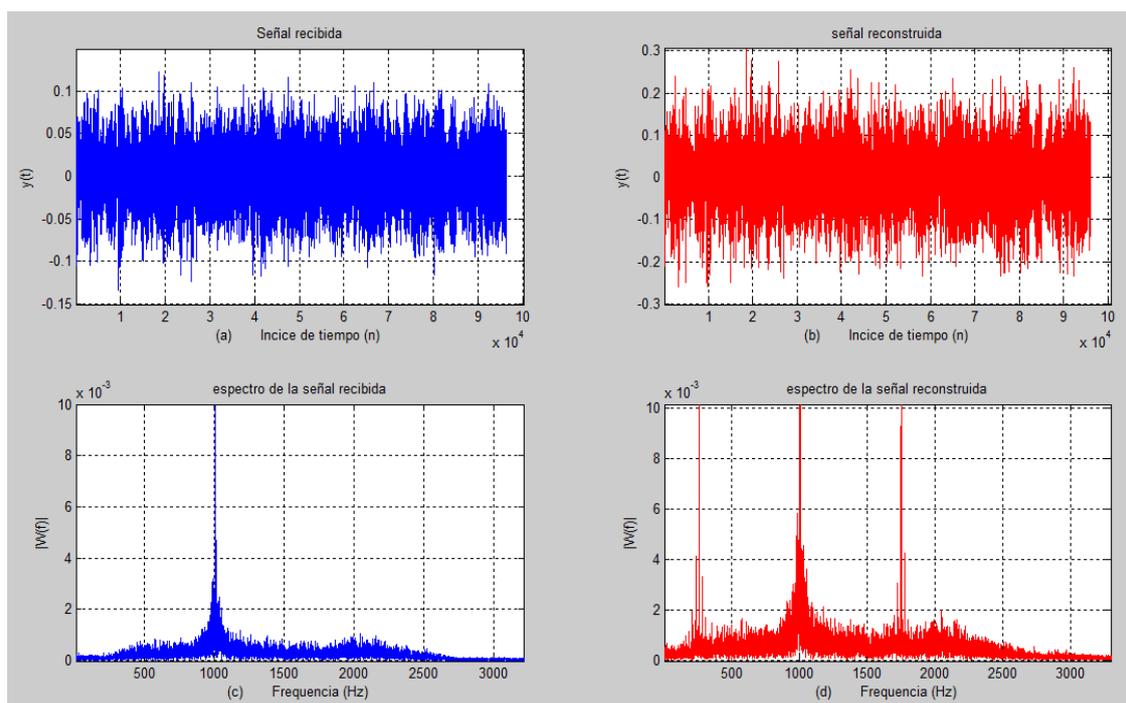
La segunda fase de los resultados consiste en reconstruir a partir de los resultados en la variación de coeficientes de la sección 4.1, en señales

periódicas recibidas de algún sistema de transmisión con el algoritmo propuesto en el capítulo 2, y desarrollado en el capítulo 3, específicamente una serie de pulsos de sincronización en banda base.

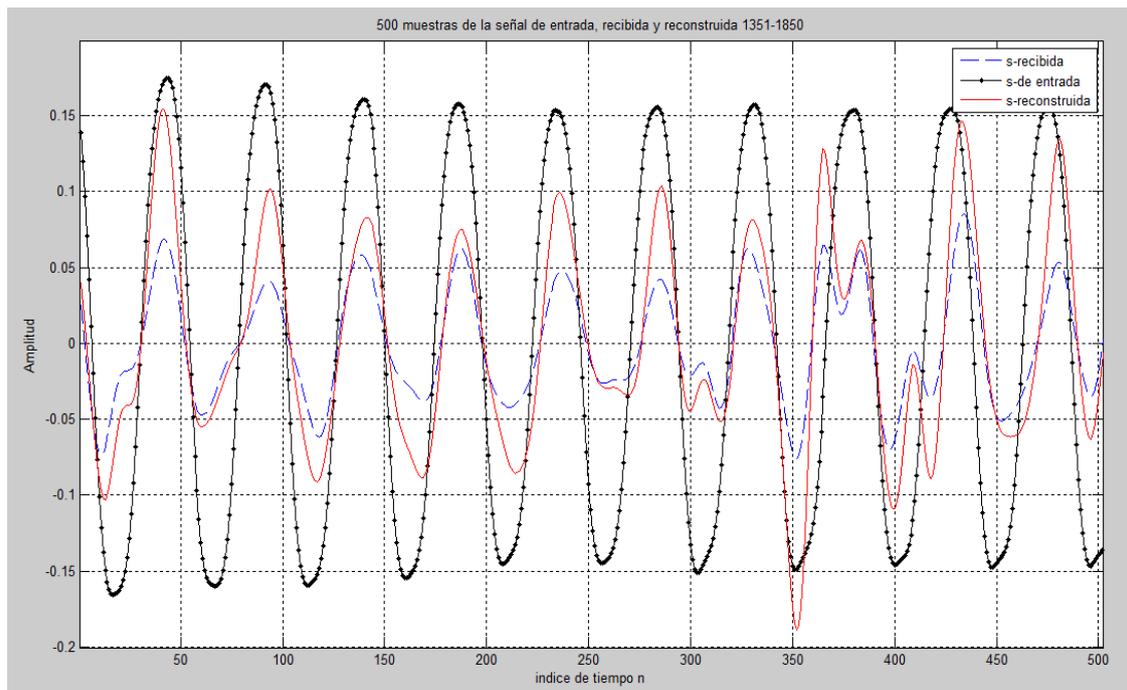
Las señales periódicas son obtenidas de la Secretaria de Turismo. Esta señal representa un tono de 24 kHz y se muestra gráficamente en la figura 4.3(a), también se muestra su espectro en frecuencia 4.3(c) la señal reconstruida 4.3(b) y el espectro en frecuencia de la señal reconstruida 4.3(d) .

En la figura 4.7 observamos un acercamiento de las señales de entrada, recibida y reconstruida de manera simultánea. A diferencia de las señales no periódicas, el procedimiento se aproxima incluso en la amplitud de la señal original de entrada, de manera que obtenemos una mayor aproximación en la reconstrucción de señales periódicas.

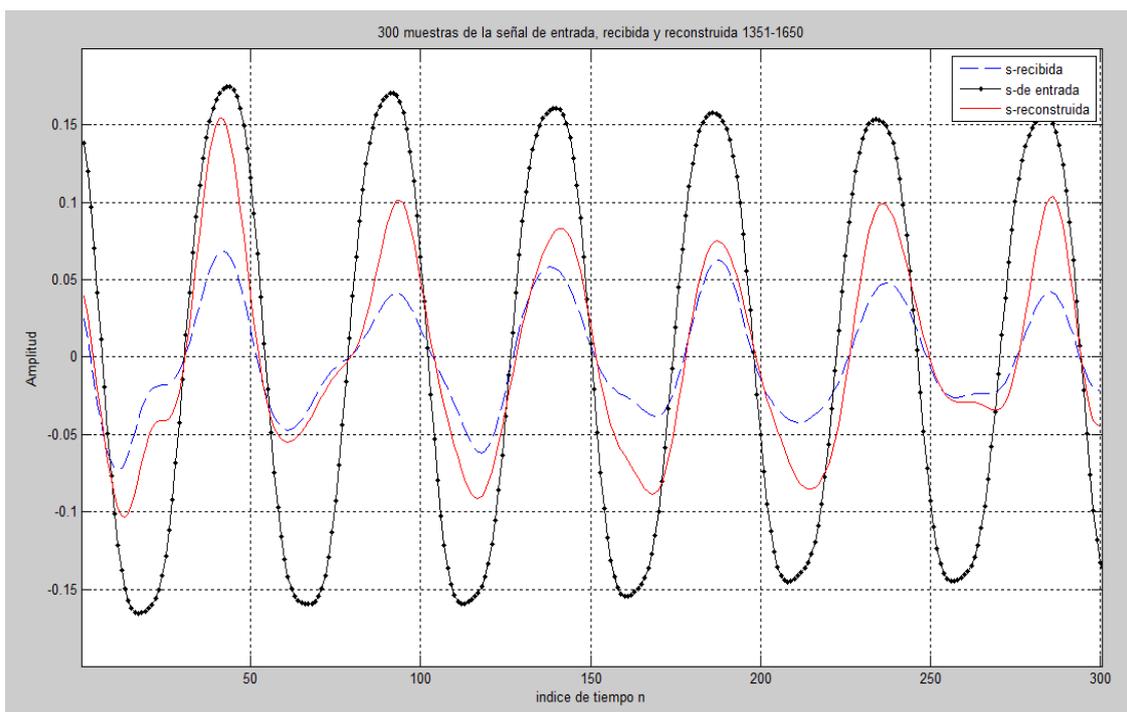
De la figura 4.4 y 4.5 observamos que la línea continua con puntos intermedios, la línea discontinua y la línea continua simple corresponden a la señal de entrada original, la señal recibida y la señal reconstruida respectivamente.



**Figura 4.3** Señales periódicas recibida y reconstruida (a) y (b) respectivamente. Espectro en frecuencia de las señales periodicas recibida y reconstruida (c) y (d) respectivamente.



**Figura 4.4** Acercamiento de 500 muestras de las señales periódicas de entrada, recibida y reconstruida.



**Figura 4.5** Acercamiento de 300 muestras de las señales periódicas de entrada, recibida y reconstruida.

La tabla 4.2 nos muestra la relación de similitud entre las señales de entrada con la señal recibida (de salida) y entre la señal de entrada y la señal reconstruida denotada por el símbolo  $\rho_{xy}[l]$  como se denota en la ecuación (1.108).

**TABLA 4.1** Índice de correlación entre señales de entrada, señales de salida y señales reconstruidas.

No. de prueba	Muestras	$\rho_{xy}[L]$ de la señal de entrada y la señal recibida	$\rho_{xy}[L]$ de la señal de entrada y la señal reconstruida
1	10000-10700	0.5877	0.5885
2	10330-10360	0.7285	0.7446
3	100000-100200	0.3540	0.3547
4	100000-101000	0.9136	0.9243
5	100000-101000	0.3530	0.3561
6	100000-101000	0.7114	0.7114
7	100000-101000	0.4941	0.5037
8	66000-66400	0.8593	0.8566
9	66000-66400	0.2955	0.3166

La señal reconstruida es más aproximada a la señal de entrada basado en el criterio del índice de correlación, descrito en la sección 1.5. Los cálculos del índice de correlación se muestran en la tabla 4.1.

De la tabla 4.1 deducimos que el algoritmo para la reconstrucción de señales de entrada utilizado en señales periódicas, es útil para obtener una mayor aproximación de la señal de entrada dado que dicho criterio del índice de correlación es más aproximado al valor de 1 en la mayoría de los experimentos para el caso de las señales periódicas, siendo esta la referencia de similitud entre dos señales distintas como se explica en la sección 1.5, para nuestro caso referido a la señal de entrada y la señal reconstruida.

La aproximación que se obtiene de la señal original con este método de reconstrucción de señales es mínima, orientándonos en el criterio del índice de correlación, por lo tanto, es posible determinar algún otro método de comparación y complementar la teoría de este trabajo para obtener mejores resultados en experimentos posteriores.

## Capítulo 5

---

---

# CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

## 5.1 CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos nos permiten concluir que el algoritmo desarrollado e implementado en este trabajo, es útil para reconstruir la señal de entrada en un sistema de transmisión, definido para este trabajo como un radioenlace terrestre, el cual sufre un deterioro en función del comportamiento oscilatorio que caracteriza al medio por el cual se desplaza la transmisión. La ionosfera es el medio característico por el cual la señal transmitida se deforma y transforma en otra señal que fue recibida por el receptor del radioenlace.

La reconstrucción de la señal obtenida es tan solo una aproximación de la señal de entrada, por lo cual el estudio de este método no concluye con este trabajo, ya que surgen algunas definiciones que aun no han sido estudiadas. Estas definiciones pueden en el futuro complementar la eficiencia de este método, continuando con el desarrollo de una teoría para el diseño de filtros variantes en el tiempo implementado por este algoritmo.

La efectividad del procedimiento utilizado depende fundamentalmente del tipo de función que caracteriza la variación que depende del tiempo, es decir, el tipo de filtro que sea utilizado. En cuanto más aproximado sea el comportamiento del filtro al que puede tener la naturaleza de la ionosfera, será mayor la aproximación que se obtendrá de la señal reconstruida con la señal de entrada al sistema, y por el cual la señal de entrada original se deforma y obtenemos como resultado de esta deformación la señal recibida en el receptor, entonces, la señal reconstruida obtenida a partir de la señal a la salida del sistema de transmisión, definido como un radioenlace terrestre. Será entonces aun más aproximada a la señal original de entrada.

La cantidad de coeficientes que se utilizan en este trabajo es muy pequeño, de tres para ser exactos, esto implica que la selectividad del filtro es un tanto burda y como recordaremos, entre mayor cantidad de coeficientes la selectividad y descripción del filtro es mejor. Por lo tanto, concluimos que el uso futuro de una mayor cantidad de coeficientes puede resultar en una mayor eficiencia en la reconstrucción de la señal de entrada, aunque, resultaría evidente que el tiempo de procesamiento sería un poco mayor.

## 5.2 RECOMENDACIONES

Para la utilización e implementación de el método de reconstrucción de señales de entrada propuesto en este trabajo es necesario considerar algunas recomendaciones, como el hecho de que es un método experimental y aun en desarrollo, por lo cual su eficiencia aun esta a discusión ya que es necesario continuar con el estudio de dicho método, para el complemento de la teoría que lo describa con más amplitud su comportamiento.

Es importante hacer la recomendación, que para continuar con el estudio de los filtros variantes en el tiempo es necesario considerar factores que encontramos en la teoría de los filtros lineales e invariantes en el tiempo LTI, pero que aun no se determinan en esta generalización de dichos filtros y que requieren de un estudio detallado para el cálculo de estos factores.

Por la importancia que estas herramientas del procesamiento digital de señales representan y para una mayor eficiencia en su utilización se requiere de la especificación del medio que influye en la transformación de las señales y que depende del tiempo, por ejemplo especificado en este trabajo como la ionosfera para la transmisión de ondas electromagnéticas. Ya que este método no aplica para todos los medios físicos de transmisión.

### 5.3 TRABAJOS FUTUROS

Los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo, revelaron algunas incógnitas, dejando abierta la posibilidad de dar un seguimiento a las proposiciones realizadas.

Una de las proposiciones para dar continuidad al desarrollo de esta teoría es desarrollar el método para la reconstrucción de señales de entrada de esta tesis para la reconstrucción de imágenes, como un caso multidimensional específico.

Una segunda proposición es el estudio del factor de la ecuación (2.15) que corresponde a un factor residual. Este factor surge con la definición de una proyección lineal de los componentes del operador pseudodiferencial con los respectivos componentes del operador pseudodiferencial inverso, y significa que, existe una parte de la señal que no se recupera y que influye en una pérdida de energía que debe ser contemplada en el cálculo del operador pseudodiferencial inverso como se muestra en la expresión (2.16).

Cabe mencionar que el método que desarrollamos en este trabajo solo esta enfocado para señales determinísticas por lo cual una tercera proposición para un trabajo futuro es implementar técnicas que abarquen la reconstrucción de señales aleatorias basados en el método utilizado en este trabajo.

Estas consideraciones han sido realizadas con propósitos de mejorar el método propuesto y desarrollado en este trabajo y así, en el futuro poder extender las aplicaciones y la teoría que explique con mayor detalle el desarrollo de este enfoque.

---

---

## REFERENCIAS

---

---

- [1] David J. DeFatta, Joseph G. Lucas, William S. Hodgkiss, Digital Signal Processing a System design approach, Ed. John Wiley & Sons. 1988. pags. 43-58, 247-251.
- [2] P. Bremaud, Mathematical Pricipie of Signal Proccesing, Fourier and Wavelet Analysis, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 2002.
- [3] Simon Haykin, Thomas Kailath, Adaptive Filter Theory, Fourth Edition, Prentice Hall, 2002, pags. 320,436, 579.
- [4] Saeed V. Vaseghi, Advanced Signal Processing and Digital Noise Reduction, John & Sons, 1996. pags. 71,-75, 214,216 346-353.
- [5] K. Rawer, Wave Propagation in the Ionosfere, Kluwer Academic Publishers, 1993 pags. 4-23,.
- [6] <http://es.wikipedia.org/wiki/Ionosfera>
- [7] <http://perso.wanadoo.es/frs88/tpn/desc/ionosfer.htm>
- [8] Charles L. Phillips, Signals, Systems, and Transforms, Ed Prentice Hall, 2003 by Person Education, Inc pags. 24-55, 93-105, 445-475, 495-504.
- [9] Gordon E. Carlson, Signal and Linear System Analysis, Second Edition, John Wiley & Sons, 1998 pags. 51-76, 101-110, 375-386, 401-409.
- [10] John G, Proakis, Dimitris G. Manolukis, Tratamiento Digital de Señales, Prentice Hall, 2007. pags. 12-14, 16, 465-470.
- [11] Douglas K. Lindner, Introduction to Signal and Systems, Mc Graw-Hill international edition, 1999, pags. 133, 768, 773, 769.

- 
- [12] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Inc., 1975 pags. 82-87, 94,95, 186-188.
- [13] Maurice Bellanger, Digital Processing of Signals Theory and Practice, Third Edition, Ed. John Wile & Sons, LTD, 2000 pags. 41-48, 105-112, 153-171, 183-191, 238-343.
- [14] Thomas J. Caucicchi, Digital Signal Processing, Jhons & Sons, Inc. 2000, pags. 407, 529, 611.
- [15] H. Baher, Analog and Digital Signal Processing, Jhons & Sons, Inc. 1990. Pags. 8-11.
- [16] Craig Marven and Gillian Ewers, A simple Approach to digital Signal Processing, Jhons & Sons, 1996, pags. 90-99, 120,121.
- [17] Edward W. Kamen, Bonnie S. Heck, Fundamentos de señales y sistemas usando la web y Matlab, Tercera Edicion, Ed. Prentice Hall, 2008 pags. 1-19, 27-29
- [18] Sanjit K. Mitra, Digital Signal Processing, A computer-Based Approach, Ed. McGRAW-HILL, 2001 pags. 64, 65, 89-92, 117-120, 255,256.
- [19] M. Vetterli, J. Kovacevic, Wavelets and Sub-Band Coding, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ. 1995
- [20] V,S. Rabinovich, An introductory Course on Pseudodifferential Operators, Centro de Matemáticas Aplicadas, 1998.
- [21] Rabinovich, S. Roch, B. Silbermann, Limit Operators and its Applications in the Operators Theory, In ser. Operator Theory: Advances and Applications, vol 150, Birkhauser, 2004
- [22] M. E. Taylor, Pseudodifferential Operators, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1981.
- [23] V. S. Rabinovich, S. Roch, Pseudodiference operators on weighted spaces, and application to discrete Schrödinger operators, Acta Aplicandue Math. 2004, pags. 55-96.
- [24] Alan V. Oppenheim, Ronald. W. Schafer, John R. Buck, Tratamiento de señales en tiempo discreto, Segunda Edicion, Ed. Prentice Hall. 2000 pags. 62-70.
- [25] M. Lindner, V. S. Rabinovich, S. Roch, Finite section of Band operators with slowly oscillating coefficients, Linear Algebra and its Aplications (2004) pags. 19-26.
- [26] V. S. Rabinovich, S. Roch, Reconstruction of Input Signals in Time-Varying Filters Article, Taylor & Francis, 2006.

- [27] V. S. Rabinovich, S. Roch, J. Roe, Fredholm indices of band dominated operators, *Integral Equations and Operator Theory*, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland (2004), pags. 221-238.
- [28] V. S. Rabinovich, S. Roch, B. Silbermann, Algebras of approximation sequences: Finite Section of band-dominated operators. *Acta Aplicande Mathematical*, 1-3, vol. 65, 2001, pags. 315-332.
- [29] V.S Rabinovich, S. Roch, B. Silbermann, Fredholm theory and finite section method for band-dominated operators. *Integral Equations and Operators Theory* (1998), pags. 452-495.
- [30] Carl D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear algebra*, Society for Industrial andApplied Mathematics Philadelphia, 2000 pags. 5-16, 162-170.

---

---

## Apéndice **A**

---

---

### PROGRAMA DE PRUEBA CON EL FILTRO DE PROMEDIO MOVIL

En este apéndice se muestra el programa utilizado para obtener las graficas de la Figura 1.24, el cual está realizado en el programa para procesamiento de señales MATLAB.

```
clear all;
clc;
R=50;
d=rand(R,1)-0.5;
m=0:1:R-1;
s=2*m.*(0.9.^m);
x=s+d';
subplot(1,2,1);
plot(m,d,'r-',m,s,'b--',m,x,'r:');
xlabel('indice de tiempo n'); ylabel('Amplitud')
legend('d[n]','s[n]','x[n]','r-','b--','r:');
b=ones(3,1)/3;
y=filter(b,1,x);
subplot(1,2,2);
plot(m,s,'b-',m,y,'r--');
legend('s[n]','y[n]','b-', 'r--');
xlabel('indice de tiempo n'); ylabel('Amplitud')
```

## Apéndice **B**

---

### PROGRAMA EN MATLAB PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES DE ENTRADA

#### Para señales periódicas

Este Apéndice abarca el programa encargado de aplicar el algoritmo propuesto por este trabajo para la reconstrucción tanto señales periódicas como de algunas pruebas con señales no periódicas.

```

clc;
clear all;
[s,fsx,nx] = wavread('señal recibida.wav');
x=s(:,1); %señal recibida
Z=size(x);
can=Z/[2000 1];
dife=0;
provdife=0;
tam=2000;
seg=1;
lim=2000;

```

```

%%%%%%%%%%
%                               Vector diagonal central h(0)                               %
%%%%%%%%%%

```

```

z=1;
for m=1:1:lim;
    v(m)=(1/3 + (1/7-1/3).*cos((pi/32)*z))+(1/3 + (1/7-1/3).*sin((pi/32)*z));
    %v(m)=1/3;
    z=z+1;
end
A=diag(v); %vector diagonal

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               Vector diagonal 1  h(1)                               %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

z=1;
for mi=1:1:lim-1;
    %v1(mi)=(1/3 + (1/7-1/3).*cos((pi/16)*z))+(1/3 + (1/7-1/3).*sin((pi/16)*z));
    v1(mi)=1/3;
    z=z+1;
end
vaux=lim;
vaux2=vaux-1;
Z=zeros(1,vaux2); % -1 cero
ZF=zeros(1,vaux); % completo
ZC=Z';
B=diag(v1); %diagonal fila 2;
B=[B ZC];
B=[ZF; B];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               Vector diagonal 2  h(2)                               %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

z=1;
for mt=1:1:lim-2;
    v2(mt)=1/3;
    z=z+1;
end
vaux=lim;
vaux2=vaux-2;
Z=zeros(1,vaux2); % -1 cero
ZF=zeros(1,vaux); % completo
ZC=Z';
C=diag(v2); %diagonal fila 2;
C=[C ZC ZC];
C=[ZF; ZF; C];

OP=A+B+C;
sw=0;
for yu=1:1:can;
dife=provdife;
    for xn=1:1:tam;
        x1(xn)=x(dife+xn); %tamaño de sección
    end
end

```

```

    end
    provdife=provdife+xn;
    sol=OP*x1';
    sw=[sw; sol];
    end
    x=x(1:length(sw));
    y=y(1:length(sw));
    subplot(2,2,1);
    plot(x,'b')
    hold on;
    grid on;
    title('Señal recibida')
    xlabel('(a) Incice de tiempo (n)')
    ylabel('y(t)')
    subplot(2,2,2);
    plot(sw,'r')
    grid on;
    title('señal reconstruida')
    xlabel('(b) Indice de tiempo (n)')
    ylabel('y(t)')

    fs1 = fsr2;           % Frecuencia de muestreo
    T1 = 1/fs1;          % tiempo de la muestra
    L1 = length(x);      % longitud de la señal
    t1 = (0:L1-1)*T1;    % tiempo del vector
    NFFT1 = 2^nextpow2(L1); % siguiente potencia de 2 de la longitud de y
    Y1 = fft(x,NFFT1)/L1;
    f1 = fs1/2*linspace(0,1,NFFT1/2);

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Grafica un solo lado de la banda de frecuencias. %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    subplot(2,2,3)
    plot(f1,2*abs(Y1(1:NFFT1/2)),'b')
    hold on;
    grid on;
    title('espectro de la señal recibida')
    xlabel('(c) Frecuencia (Hz)')
    ylabel('|W(f)|')

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % espectro de la señal reconstruida %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    fs2 = fsr2;           % Frecuencia de muestreo
    T2 = 1/fs2;          % tiempo de la muestra
    L2 = length(sw);      % longitud de la señal
    t2 = (0:L2-1)*T2;    % tiempo del vector
    NFFT2 = 2^nextpow2(L2); % siguiente potencia de 2 de la longitud de y
    Y2 = fft(sw,NFFT2)/L2;

```

---

```
f2 = fs2/2*linspace(0,1,NFFT2/2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%           Grafica un solo lado de la banda de frecuencias.           %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

subplot(2,2,4)
plot(f2,2*abs(Y2(1:NFFT2/2)),'r')
hold on;
grid on;
title('espectro de la señal reconstruida')
xlabel('(d)   Frecuencia (Hz)')
ylabel('|W(f)|')
```

## Apéndice C

### PROGRAMA PARA RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Este Apéndice muestra el programa utilizado para resolver el sistema de ecuaciones lineales que se genera con la señal de salida del sistema es decir la señal recibida con el filtro variante en el tiempo con el uso del algoritmo descrito en este trabajo.

```

clc;
clear all;
[s,fsx,nx] = wavread('señal recibida.wav');
x=s(:,1); %señal recibida
Z=size(x);
can=Z/[2000 1];
dife=0;
provdife=0;
tam=2000;
seg=1;
lim=2000;

%%%%%%%%%%%%%%
%                               Vector diagonal central h(0)                               %
%%%%%%%%%%%%%%
z=1;
for m=1:1:lim;
    v(m)=(1/3 + (1/7-1/3).*cos((pi/32)*z))+(1/3 + (1/7-1/3).*sin((pi/32)*z));
    z=z+1;

```

```

end
A=diag(v); %vector diagonal

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               Vector diagonal 1  h(1)                               %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

z=1;
for mi=1:1:lim-1;
    %v1(mi)=(1/3 + (1/7-1/3).*cos((pi/16)*z))+(1/3 + (1/7-1/3).*sin((pi/16)*z));
    v1(mi)=1/3;
    z=z+1;
end
vaux=lim;
vaux2=vaux-1;
Z=zeros(1,vaux2); % -1 cero
ZF=zeros(1,vaux); % completo
ZC=Z';
B=diag(v1); %diagonal fila 2;
B=[B ZC];
B=[ZF; B];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               Vector diagonal 2  h(2)                               %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

z=1;
for mt=1:1:lim-2;
    v2(mt)=1/3;
    z=z+1;
end
vaux=lim;
vaux2=vaux-2;
Z=zeros(1,vaux2); % -1 cero
ZF=zeros(1,vaux); % completo
ZC=Z';
C=diag(v2); %diagonal fila 2;
C=[C ZC ZC];
C=[ZF; ZF; C];
OP=A+B+C;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               Solución del sistema de ecuaciones lineales                               %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
sol=0
soltemp=0
vartemp=1
soltemp=OP(1,:);
sol(1)=x(1)/v(1);
x(0)=0;

```

```
z=1
for xa=2:1:lim;
    z=z+1;
    soltemp=OP( xa,:);
    sol(xa)=(x(xa)-(1/3)*sol(xa-1)-(1/3)*sol(xa-2))/v(xa);
end;
```

## Apéndice D

---

### **PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DEL ÍNDICE DE CORRELACIÓN ENTRE LAS SEÑALES DE ENTRADA, LAS SEÑALES RECIBIDAS Y LAS SEÑALES RECONSTRUIDAS.**

Este Apéndice muestra el programa utilizado tanto para calcular el índice de correlación entre la señal de entrada del sistema es decir la señal original con la señal a la salida del sistema, así como para el cálculo del índice de correlación entre la señal de entrada al sistema y la señal reconstruida con el uso del algoritmo descrito en este trabajo.

```
clc;
clear all;
[s,fsx,nx] = wavread('señal recibida.wav');
x=s(:,1); %señal recibida
Z=size(x);
can=Z/[2000 1];
dife=0;
provdife=0;
tam=2000;
seg=1;
lim=2000;
```

```

%%%%%%%%%%%%%%
%                               Vector diagonal central h(0)                               %
%%%%%%%%%%%%%%
z=1;
for m=1:1:lim;
    v(m)=(1/3 + (1/7-1/3).*cos((pi/32)*z))+(1/3 + (1/7-1/3).*sin((pi/32)*z));
    %v(m)=1/3;
    z=z+1;
end
A=diag(v); %vector diagonal

%%%%%%%%%%%%%%
%                               Vector diagonal 1  h(1)                               %
%%%%%%%%%%%%%%
z=1;
for mi=1:1:lim-1;
    %v1(mi)=(1/3 + (1/7-1/3).*cos((pi/16)*z))+(1/3 + (1/7-1/3).*sin((pi/16)*z));
    v1(mi)=1/3;
    z=z+1;
end
vaux=lim;
vaux2=vaux-1;
Z=zeros(1,vaux2); % -1 cero
ZF=zeros(1,vaux); % completo
ZC=Z';
B=diag(v1); %diagonal fila 2;
B=[B ZC];
B=[ZF; B];

%%%%%%%%%%%%%%
%                               Vector diagonal 2  h(2)                               %
%%%%%%%%%%%%%%
z=1;
for mt=1:1:lim-2;
    v2(mt)=1/3;
    z=z+1;
end
vaux=lim;
vaux2=vaux-2;
Z=zeros(1,vaux2); % -1 cero
ZF=zeros(1,vaux); % completo
ZC=Z';
C=diag(v2); %diagonal fila 2;
C=[C ZC ZC];
C=[ZF; ZF; C];

OP=A+B+C;
sw=0;
for yu=1:1:can;
dife=provdife;

```

```

for xn=1:1:tam;
    x1(xn)=x(dife+xn); %tamaño de sección
end
provdife=provdife+xn;
sol=OP*x1';
sw=[sw; sol];
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               INDICES DE CORRELACIÓN                               %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[c1,lags]=xcorr(x,y);
Ex=dot(x,x);
Ey=dot(y,y);
xy= (max(abs(c1)));
lcorrxy=xy/(sqrt(Ex*Ey))    % Índice de correlación entre la señal
                           % original y la señal recibida a la salida

[c2,lag2]=xcorr(y,sw);
Ey=dot(y,y);
Esw=dot(sw,sw);
ysw= (max(abs(c1)));
lcorrsw=ysw/(sqrt(Ey*Esw)) %Índice de correlación entre la señal original
                           % y la señal reconstruida a la salida

```

## Apéndice **E**

---

---

### **ARTÍCULO DE 5o. CONGRESO INTERNACIONAL DE CIIES, MEXICO DF, NOVIEMBRE 2008. TITULADO: “RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES DE ENTRADA EN FILTRO VARIANTES EN EL TIEMPO”**

Este apéndice está dedicado a la presentación del artículo presentado en ponencia y publicado en las memorias del Quinto Congreso Internacional de CIIES, llevado a cabo en la Ciudad de México el mes de Noviembre del año 2008.

# Reconstrucción de señales de entrada en filtros variantes en el tiempo

Vladimir Rabinovich<sup>1</sup>, Américo Israel Vargas Escamilla<sup>2</sup>

Maestría en Ingeniería de Telecomunicaciones, SEPI-ESIME Zacatenco, IPN, México, DF.

Teléfono (55) 1711-1092 E-mail: avargase0200@ipn.mx

*Resumen* — El presente artículo es un trabajo de investigación enfocado en el procesamiento digital para la reconstrucción de señales de entrada desconocidas, por medio de la aplicación de filtro digitales variantes en el tiempo a las señales de salida, el objetivo principal es de obtener la señal original que fue introducida por algún medio como puede ser un canal o algún dispositivo de comunicación aplicando algoritmos de filtrado digital a la señal de salida de dicho canal o dispositivo y reconstruirla en su totalidad obteniendo la señal original. Los filtros son del tipo variantes en el tiempo los cuales nos representan una mayor dificultad en su análisis pero una mayor eficiencia en el procesamiento de las señales que dependen del tiempo.

*Palabras Clave* — Filtros, reconstrucción, señales, operadores pseudo-diferenciales

*Abstract* — This paper is a work of research based on unknown output signal reconstruction by digital processing, using digital time-varying filters on output signals. The main objective is to obtain the original signal which was introduced by some way such as a channel or communication device applying and implementing digital filtering algorithms to the output signals in the channel or device and obtain a total reconstruction of an input signal getting the original signal. The filters type are time-varying which represent to us a major difficulty in the analysis but greater efficiency in the signals processing depend on time.

*Keywords* — Filters, reconstruction, signals, pseudo-difference operator

## 1. INTRODUCCIÓN

Vamos a dar algunas definiciones y hechos de la teoría de procesamiento de señales. Los libros estándar en la teoría de procesamiento de señales son [4], [5], [1], [14].

Las señales digitales complejas (SDC)  $u = \{u(j), j \in \mathbb{Z}\}$  son una sucesión doble de números complejos. En lo que sigue consideramos SDC con una energía finita es que suponemos que la SDC  $u \in l^2$  el espacio de Hilbert de funciones definidas en  $\mathbb{Z}$  con el producto escalar.

$$(u, v) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j) \bar{v}(j),$$

y la norma

$$\|u\|_2 = \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u(j)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Sea  $A$  un filtro digital lineal transformado en una señal de entrada  $u$  dentro de una señal de salida  $v=Au$ . Consideraremos los filtros lineales como operadores lineales acotados  $A: l^2 \rightarrow l^2$ . La típica y mas importante clase de filtros digitales son filtros invariantes en el tiempo. La propiedad característica de estos filtros es su invariancia con respecto a los desplazamientos. Decimos que el filtro  $A$ , transformada una señal de entrada en la señal de salida es invariante con respecto a los desplazamiento, si

$$V_h A = A V_h,$$

donde  $V_h u(j) = u(j - h)$ . Se puede demostrar que los filtros digitales invariantes  $A$  actúan como

$$Au(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{j-l} u(l), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

donde  $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  es una sucesión de números complejos. Note que el operador  $A$  puede ser dado en forma de matriz como

$$Au(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} k_A(j, l) u(l), \quad j \in \mathbb{Z},$$

donde

$$k_A(j, l) = a_{j-l}.$$

En lo que sigue suponemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty. \quad (2)$$

Note que el problema de la reconstrucción de la señal de entrada por filtros invariantes del tiempo (1) se resuelve por medio de la transformada de Fourier discreta

$$\hat{u}(\xi) = (Fu)(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{-ij\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Sea

$$\hat{a}(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_k e^{-ij\xi} ,$$

y

$$|\hat{a}(\xi)| > c > 0 . \quad (3)$$

Entonces la señal de entrada es obtenida de la señal de salida  $v=Ay$  donde  $A$  es el filtro (1) mediante la formula

$$u(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{y}(\xi)}{\hat{a}(\xi)} e^{ij\xi} d\xi , \quad j \in \mathbb{Z} . \quad (4)$$

La generalización directa de los filtros invariantes en el tiempo son los filtros variables en el tiempo descrito por el operador lineal  $A$  de la forma

$$Au(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{j-l}(j)u(l) , \quad (5)$$

donde  $a_k \in l^\infty$  el espacio acotado de funciones complejas definidas en  $\mathbb{Z}$  con norma

$$\|a\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |a(j)| < \infty .$$

Note en este caso

$$k_A(j, l) = a_{j-l}(j) , \quad j \in \mathbb{Z} .$$

Supondremos que hay una constante  $c_1 > 0$  tal que

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_l(j)| < \infty . \quad (6)$$

El problema de la reconstrucción de señales de entrada  $u \in l^2$  de la señal de salida es mucho mas complicado para filtros variantes en el tiempo y la investigación de este problema es el principal objetivo de este artículo.

## 2 RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES EN FILTROS VARIANTES EN EL TIEMPO.

### 2.1 Hechos auxiliares de la teoría de operadores pseudo-diferenciales.

**Definición 1** Sea  $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \ni (j, \xi) \rightarrow a(j, \xi)$  una función compleja  $2\pi$ -periódica con respecto a  $\xi \in \mathbb{R}$  tal que

$$|a|_N = \sup_{(j, \xi) \in \mathbb{Z} \times [0, 2\pi], m \leq N} \left| \frac{d^m a(j, \xi)}{d\xi^m} \right| < \infty , \quad (7)$$

para todo  $N \geq 0$ . La clase de dichas funciones es denotada por  $\mathcal{S}$ . Correspondemos a la función  $a \in \mathcal{S}$  un operador pseudo-diferencial

$$(Au)(j) = Op(a)u(j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{y \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a(j, \xi) \hat{u}(\xi) e^{ij\xi} d\xi , \quad j \in \mathbb{Z} , \quad (8)$$

donde  $u \in l^2$ , y lo denotamos por OPS la clase de dichos operadores.

El operador  $A$  es llamado operador pseudo-diferencial, y la función  $a = \sigma_A$  es llamado el símbolo del operador pseudo-diferencial. Estos operadores son operadores pseudo-diferenciales sobre el grupo  $\mathbb{Z}$ , y son análogos discretos de conocidos operadores pseudo-diferenciales en  $\mathbb{R}$ . Las referencias estándar en la teoría de operadores pseudo-diferenciales son [12], [13].

Note que el filtro variante en el tiempo  $A$  de la forma.

$$(Au)(i) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-j}(j)u(j) , \quad j \in \mathbb{Z} , \quad (9)$$

donde

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|^k \|a_j\|_{l^\infty} < \infty , \quad (10)$$

para cada  $k = \{0\} \cup \mathbb{N}$  es un operador pseudo-diferencial con símbolo

$$a(j, \xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j(j) e^{-ij\xi} \in \mathcal{S} .$$

El operador pseudo-diferencial ha sido introducido y estudiado en el artículo [10], ver también [11], Capítulo 5. Daremos aquí algunos hechos de esta teoría la cual ha sido utilizada a continuación.

**Proposición 2** Sea  $a \in \mathcal{S}$ . Entonces  $A = Op(a)$  es un operador acotado sobre  $l^2$ , y

$$\|Au\|_{l^2} \leq C \|a\|_2 \|u\|_{l^2} .$$

**Proposición 3** Sean  $A, B$  operadores pseudo-diferenciales de la clase OPS. Entonces  $AB$  son operadores pseudo-diferenciales de la clase OPS también y  $AB = Op(c)$ , donde

$$c(j, \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a(j, \xi + \eta) b(j + l, \xi) e^{-i\eta} d\eta . \quad (11)$$

La fórmula (11) implica las siguientes estimaciones:

$$|c|_N \leq C|a|_{N+2}|b|_N, \quad N \in \mathbb{N}_0. \quad (12)$$

Se ha demostrado en (10) que un operador pseudo-diferencial está acotado en el espacio  $l^\infty$ , y el símbolo de  $\sigma_A$  del operador pseudo-diferencial puede obtenerse mediante la fórmula

$$\sigma_A(j, \xi) = e^{-ij\xi} A(e^{ij\xi}). \quad (13)$$

Esta fórmula demuestra que el *filtro variante en el tiempo*  $A$  puede ser reconstruido si conocemos la señal de salida para todas las señales de entrada de la forma  $e^{ij\xi}$ ,  $\xi \in [0, 2\pi]$ .

### 2.2 Filtros lentamente variantes en el tiempo

Sea  $a \in \mathcal{S}$ . Introducimos la oscilación  $\omega_k^j(a)$  de el símbolo  $a$  con respecto a al variable  $j$  como

$$\omega_k^j(a) = \sup_{j \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \xi \in [0, 2\pi]} \sum_{j=0}^k \left| \frac{\partial_\xi^j a(j+y, \xi) - \partial_\xi^j a(j, \xi)}{|y|} \right|.$$

**Teorema 4** Sea  $a \in \mathcal{S}$  y

$$|a(j, \xi)| \geq C > 0, \quad (14)$$

para todo  $j$  y  $\xi \in [0, 2\pi]$ . Entonces para un suficientemente pequeña  $\omega_k^j(a) \ll 1$ , el operador  $Op(a)$  es invertible.

**Prueba.** Colocamos  $B = Op(a^{-1})$ . La condición (14) proporciona que  $B \in OPS$ . Aplicando formula (11) obtenemos que  $BA = Op(c)$  para  $C$  definido por la formula.

$$\begin{aligned} c(j, \xi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a^{-1}(j, \xi + \eta) a(j+y, \xi) e^{-iy\eta} d\eta \\ &+ \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{y \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a^{-1}(j, \xi + \eta) e^{-iy\eta} d\eta \right) a(j, \xi) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{y \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a^{-1}(j, \xi + \eta) (a(j+y, \xi) - a(j, \xi)) e^{-iy\eta} d\eta \\ &= 1 + r(j, \xi), \end{aligned}$$

donde

$$r(j, \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{y \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a^{-1}(j, \xi + \eta) (a(j+y, \xi) - a(j, \xi)) e^{-iy\eta} d\eta \quad (15)$$

Satisface la estimación

$$|r(j, \xi)| \leq \frac{\omega_0^j(a)}{2\pi} \sum_{y \in \mathbb{Z}} |y| (1+y^2)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \left( 1 + \frac{d^2}{d\eta^2} \right) a^{-1}(j, \xi + \eta) \right| d\eta d\theta. \quad (16)$$

Formula (16) implica la estimación

$$|r(j, \xi)| \leq C \omega_0^j(a) |a|_4$$

con la constante  $C$  independiente de  $a$  la misma manera uno puede probar que

$$|r|_2 \leq C \omega_2^j(a) |a|_6.$$

seguido de la Proposición 2 que para un suficientemente pequeña  $\omega_2(a)$  o

$$\|Op(r)\|_{l^2 \rightarrow l^2} < 1.$$

Así para el suficientemente pequeño  $\omega_2(a)$  el operador  $A = Op(a)$  tiene el inverso izquierdo

$$A^{-1} = (I + Op(r))^{-1} Op(a^{-1}). \quad (17)$$

En la misma manera probar que el operador  $A$  tiene un operador inverso derecho para suficientemente pequeños  $\omega_2(a)$ . Entonces  $A^{-1}$  es el operador inverso de  $A$ .

Por lo tanto hemos reducido el problema de reconstrucción de señales de entrada  $u \in l^2$  de la señal de salida  $v = Au \in l^2$  a la ecuación

$$u + Op(r)u = Op(a^{-1})v. \quad (18)$$

La única solución de esta ecuación es obtenida por el método de aproximaciones sucesivas:

$$u_0 = 0, u_{n+1} = -Op(r)u_n + Op(a^{-1})v, n = 0, 1, \dots, \dots$$

La señal reconstruida  $u$  es estable en  $l^2$  respecto de pequeñas variaciones de la señal de entrada en  $l^2$ . Formula (17) es extensión sobre filtros variantes en el tiempo lentamente la bien conocida formula (4) de reconstrucción de señales de entrada para los filtros invariantes en el tiempo.

### 3 MÉTODO DE SECCIÓN FINITA PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES DE ENTRADA

Sea  $A$  un operador invertible acotado en  $l^2$ . Por lo tanto la ecuación

$$Au(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} k_A(j, l) u(l) = v(j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (19)$$

tiene una única solución  $u$  para cada función  $v$

Sea  $P_N$  el operador de multiplicación por la función característica del segmento discreto  $[-N, N]_{\mathbb{Z}} =$

$\{-N, -N + 1, \dots, 0, 1, \dots, N\}$ . Junto con la ecuación (19) consideramos la secuencia de secciones finitas

$$A_N = P_N A P_N u_N = P_N v,$$

Ese es el sistema lineal de la ecuación

$$A_N u_N(j) = \sum_{l=-N}^N k_A(j, l) u_N(l) = v(j), j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N. \quad (20)$$

La cuestión crucial es captar la secuencia  $u_N$  tendiendo a  $u$  en  $l^2$  que es

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u - u_N\|_{l^2} = 0. \quad (21)$$

Es bien conocido (ver para ejemplo [3], [2], [11]) esa convergencia (22) es proporcionada por invertibilidad de  $A: l^2 \rightarrow l^2$  y la *estabilidad* de la secuencia  $A_N$ . Este significa que los operadores  $A: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^M$  son invertibles para  $N > N_0$  y hay una constante  $C > 0$  tal que sus inversos  $A_N^{-1}$

$$\|A_N^{-1}\| < C \text{ para todo } N > N_0.$$

En este caso decimos que el método de la sección finita es *estable*.

Consideramos el método de la secciones finita para filtros los cuales son operadores pseudo-diferenciales de la forma (8).

**Teorema 5** Sea  $A = Op(a) \in OPS$  y la siguientes condiciones se mantienen:

- (1) Las condiciones del teorema 4 ;
- (2) Existen limites

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} a(j, \xi) = a_+(\xi), \lim_{j \rightarrow -\infty} a(j, \xi) = a_-(\xi).$$

$$(3) \quad [\arg a_+(\xi)]_{\xi=0}^{2\pi} = 0, [\arg a_-(\xi)]_{\xi=0}^{2\pi} = 0,$$

donde  $[\arg a_{\pm}(\xi)]_{\xi=0}^{2\pi}$  es el incremento del argumento de la función  $a_{\pm}(\xi)$  si  $\xi$  esta cambiando desde 0 a  $2\pi$ .

### 3.1 Reconstrucción de señales periódicas digitales en filtros variantes en el tiempo

En este capítulo consideramos el problema de reconstrucción de señales digitales de entrada con valores finitos conociendo la señal de salida. Consideraremos tales

señales como una secuencia periódica  $\{u(j)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  con un periodo  $d \in \mathbb{N}$ , que es  $u(j + d) = u(j)$  para cada  $j \in \mathbb{Z}$ .

Sea  $A$  un filtro variante en el tiempo de la forma

$$Au(j) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k(j) V_k u(j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (22)$$

donde  $a_k$  son  $d$ -funciones periódicas, y  $V_k$  son desplazamientos  $V_k u(j) = u(j - k)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  definido correctamente en la secuencia periódica.

Introducimos la transformada discreta de Fourier de la secuencia periódica  $u$  como

$$\hat{u}(\xi) = Fu(\xi) = \sum_{j=0}^{d-1} u(j) \gamma_d^{-ij\xi}, \quad \xi \in \mathbb{Z}, \quad (23)$$

donde

$$\gamma_d = \exp\left(\frac{2\pi i}{d}\right)$$

es una raíz primitiva de orden  $d$  de la unidad. Es bien conocido la formula para la transformada discreta de Fourier inversa (ver para ejemplo, [1])

$$u(j) = (F^{-1}\hat{u})(j) = \frac{1}{d} \sum_{\xi=0}^{d-1} \hat{u}(\xi) \gamma_d^{j\xi}, j \in \mathbb{Z}. \quad (24)$$

Además, la igualdad de Parseval se mantiene

$$\sum_{\xi=0}^{d-1} |\hat{u}(\xi)|^2 = d \sum_{j=0}^{d-1} |u(j)|^2.$$

Las formulas (23) y (24) implican que

$$u(j) = \frac{1}{d} \sum_{y=0}^{d-1} \sum_{\xi=0}^{d-1} u(j+y) \gamma_d^{-y\xi}, \quad (25)$$

y

$$\widehat{V_j u}(\xi) = \gamma_d^{-y\xi} \hat{u}(\xi), \xi \in \mathbb{Z}, j = 0, 1, \dots, d-1.$$

Sea  $(j, \xi) \rightarrow a(j, \xi)$  una función definida en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y  $d$ -periódica con respecto de  $j$  y  $\xi$ . Corresponde a la función  $a$  el operador pseudo-diferencial  $d$ -periodico (operador pseudo-diferencial en el grupo  $\mathbb{Z}_d = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ )

$$Au(j) = Op(a)u(j) = \sum_{\xi=0}^{d-1} a(j, \xi) \hat{u}(\xi) \gamma_d^{j\xi}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (26)$$

Definido en la función  $d$ -periódica. La función  $a = \sigma_A$  es llamada el símbolo del operador  $A$

Note que el filtro variante en el tiempo (22) puede ser presentado como un operador pseudo-diferencia  $d$ -periódico con símbolo

$$\sigma_A(j, \xi) = \sum_{j=0}^{d-1} a(j) \gamma_d^{-j\xi}, \quad (j, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Denotamos por  $l_d^2$  el espacio de todas las funciones  $d$ -periódicas  $u(j)$  en  $\mathbb{Z}$  con norma

$$\|A\|_{l_d^2 \rightarrow l_d^2} = \left( \sum_{j=0}^{d-1} |u(j)|^2 \right)^{1/2}.$$

**Proposición 7** Sea  $A = Op(a)$  un operador pseudo-diferencial  $d$ -periódico. Entonces

$$\|A\|_{l_d^2 \rightarrow l_d^2} \leq \left( d \sum_{y=0}^{d-1} \sum_{\xi=0}^{d-1} |a(j, \xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq d^{3/2} \max_{j \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}}, \xi \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}}} |a(j, \xi)|. \quad (27)$$

La estimación (27) es obtenido por un cálculo directo con la aplicación de la igualdad de Parseval,

**Proposición 8** Sea  $A = Op(a)$  un operador pseudo-diferencial  $d$ -periódico. Entonces  $AB$  es un operador pseudo-diferencial  $d$ -periódico, y  $\sigma_{AB}$  es

$$\sigma_{AB}(j, \xi) = \frac{1}{d} \sum_{y=0}^{d-1} \sum_{\eta=0}^{d-1} a(j, \xi + \eta) b(j + y, \xi) \gamma_d^{-y\eta}, \quad j, \xi \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

La formula (28) es probado por el cálculo directo.

Denotamos por  $\omega_j(\sigma_A)$  la oscilación de la función  $\sigma_A$  con respecto a la variable  $j \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}}$ , que es

$$\omega_j(\sigma_A) = \max_{j, y \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}}, \xi \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}}} |\sigma_A(j, \xi) - \sigma_A(y, \xi)|.$$

**Teorema 9** Sea que las siguientes condiciones se cumplan:

(i) 
$$\sigma_A(j, \xi) \neq 0$$

Para todo  $(j, \xi) \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}} \times [0, d-1]_{\mathbb{Z}}$ ,

(ii) 
$$\omega_j(\sigma_A) \max_{j \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}}} \sum_{\eta=0}^{d-1} |a^{-1}(j, \eta)| < \frac{1}{d^{3/2}}. \quad (29)$$

Entonces  $A$  es un operador invertible en  $l_d^2$ , y

$$A^{-1} = (I + T)^{-1} Op(a^{-1}), \quad (30)$$

donde  $\|T\|_{l_d^2 \rightarrow l_d^2} < 1$ .

**Prueba.** Sea  $B = Op(a^{-1})$ . Entonces, aplicando la formula (25) obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{AB}(j, \xi) &= \frac{1}{d} \sum_{y=0}^{d-1} \sum_{\eta=0}^{d-1} a^{-1}(j, \xi + \eta) a(j + y, \xi) \gamma_d^{-y\eta} \\ &= \frac{a(j, \xi)}{d} \sum_{y=0}^{d-1} \sum_{\eta=0}^{d-1} a^{-1}(j, \xi + \eta) \gamma_d^{-y\eta} + t(j, \xi) = 1 + t(j, \xi), \end{aligned}$$

donde

$$t(j, \xi) = \frac{1}{d} \sum_{y=0}^{d-1} \sum_{\eta=0}^{d-1} a^{-1}(j, \xi + \eta) (a(j + y, \xi) - a(j, \xi)) \gamma_d^{-y\eta}.$$

Aplicando estimación (27) obtenemos que

$$\|T\|_{l_d^2 \rightarrow l_d^2} = \|Op(t)\|_{l_d^2 \rightarrow l_d^2} \leq d^{3/2} \omega_j(\sigma_A) \max_{j \in [0, d-1]_{\mathbb{Z}}} \sum_{\eta=0}^{d-1} |a^{-1}(j, \eta)|.$$

Por lo tanto

$$BA = I + T,$$

donde  $\|T\|_{l_d^2 \rightarrow l_d^2} < 1$  por la condición (29). Por lo tanto el operador

$$A^{-1} = (I + T)^{-1} Op(a^{-1}),$$

es el operador inverso izquierdo de  $A$ . Porque  $l_d^2$  es un espacio dimensional finito  $A^{-1}$  es el operador inverso de los dos lados de  $A$ .

#### 4. CONCLUSIONES

Así, obtuvimos un efectivo algoritmo para la reconstrucción de señales de entrada. Seguido de (30) la señal de entrada satisface la ecuación.

$$u + Tu = Op(a^{-1})v,$$

donde la función  $Op(a^{-1})v$  puede ser calculado por medio del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (ver para ejemplo [1]), y entonces  $u$  es calculada por el método de aproximaciones sucesivas

$$u_0 = 0, u_{n+1} = -Tu_n + Op(a^{-1})v, \quad n = 0, 1, \dots$$

**Ejemplo 1** Consideramos un filtro periódico de la siguiente forma

$$f(j) = Au(j) = u(j+1) + u(j-1) + v(j)u(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (31)$$

Suponemos que las secuencias  $f(j), v(j), u(j)$  son  $d$ -periódicas. El operador puede ser representado en la forma (30) con

$$a(j, \xi) = e^{\frac{2\pi i}{d}\xi} + e^{-\frac{2\pi i}{d}\xi} + v(j) = 2 \cos \frac{2\pi}{d}\xi + v(j).$$

Sea  $v(j)$  el cual satisface la estimación

$$v(j) > 2 + \delta$$

para algún  $\delta > 0$ . Entonces el operador  $A$  es invertible.

Denotamos por  $\omega(v)$  la oscilación de la función  $v$  que es

$$\omega(v) < \sup_{j \in \mathbb{Z}} |v(j+1) - v(j)|.$$

Entonces, si  $\omega(v)$  es suficientemente pequeño el procedimiento presentado antes puede ser aplicado para la solución de la ecuación (31).

## REFERENCIAS

[1] P. Bremaud, Mathematical Principle of Signal Processing, Fourier and Wavelet Analysis, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 2002

[2] A. Böttcher, B. Silbermann, Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices.-Springer-Verlag, New York 1999

[3] I. Gohberg, I. Feldman, Convolution Equations and Projection Methods for Their Solutions-Nauka, Moskva 1971 (Russian, Engl. Transl. : Am. Math. Soc. Transl. of Math Monographs 41, Providence, R.I., 1974

[4] A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Inc., 1975

[5] A. Papoulis, (1984) Signal Analysis, McGraw-Hill, New York,

[6] V.S.Rabinovich, S.Roch, B.Silbermann, Fredholm theory and finite section method for band-dominated operators. Integral Equations and Operator Theory 30 (1998), 452-495

[7] V.S.Rabinovich, S.Roch, B.Silbermann, Algebras of approximation sequences: Finite Section of band-dominated

operators. Acta Applicande Mathematicae, 1-3, vol.65, 2001, 315-332

[8] V.S.Rabinovich, S.Roch, J. Roe, Fredholm indices of band-dominated operators, Integral Equations and Operator Theory, 49 (2004), 221-238, Birkhäuser Verlag Basel/ Switzerland

[9] M. Lindner, V.S. Rabinovich, S. Roch, Finite section of band operators with slowly oscillating coefficients, Linear Algebra and its Applications 390 (2004), p. 19-26

[10] V.S. Rabinovich, S. Roch, Pseudo-difference operators on weighted spaces, and applications to discrete Schrödinger operators, Acta Applicandue Math. 84: 55-96, 2004

[11] V.S.Rabinovich, S. Roch, B. Silbermann, Limit Operators and its Applications in the Operator Theory, In ser. Operator Theory: Advances and Applications, vol 150, Birkhauser, 2004

[12] M.A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlín Heidelberg New York Tokio

[13] M.E.Taylor, *Pseudodifferential Operators*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1981

[14] M. Vetterli, J. Kovacevic, Wavelets and Sub-Band Coding, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ. 1995