



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**



**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA  
MECÁNICA Y ELÉCTRICA**

**“SISTEMAS CAÓTICOS APLICADOS EN  
TELECOMUNICACIONES”**

P R O Y E C T O D E  
I N V E S T I G A C I Ó N  
SIP 20091457

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA

P R E S E N T A N

**CISNEROS TAMAYO RICARDO  
ESCAMILLA BOJORGES NIDIA  
PLASCENCIA PACHECO DAVID**

ASESORES:

**DR. ALEJANDRO VIVAS HERNÁNDEZ  
ING. JESÚS HERNÁNDEZ MUÑOZ**

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE 2010

**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**  
**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**  
**UNIDAD PROFESIONAL "ADOLFO LOPEZ MATEOS"**

**TEMA DE TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
POR LA OPCION DE TITULACION  
DEBERA(N) DESARROLLAR**

**INGENIERO EN COMUNICACIONES Y ELECTRONICA**  
**PROYECTO DE INVESTIGACIÓN N° SIP 20091457**  
**C. RICARDO CISNEROS TAMAYO**  
**C. NIDIA ESCAMILLA BOJORGES**  
**C. DAVID PLASCENCIA PACHECO**

**"SISTEMAS CAÓTICOS APLICADOS EN TELECOMUNICACIONES"**

**ANALIZAR LA SINCRONIZACIÓN DE LOS SISTEMAS CAÓTICOS EN TELECOMUNICACIONES.**

- FUNDAMENTOS TEORÍA DE CAOS
- SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS
- SISTEMAS CAÓTICOS APLICADOS EN TELECOMUNICACIONES
- ANÁLISIS DE CIRCUITOS GENERADORES DE CAOS
- CIRCUITOS DE SINCRONIZACIÓN CAÓTICA



**MÉXICO D.F. A 28 DE JUNIO DE 2010**

**ASESORES**

  
**DR. ALEJANDRO VIVAS HERNÁNDEZ**

  
**RICARDO MENESES GONZÁLEZ**

  
**M. EN C. SALVADOR RICARDO MENESES GONZÁLEZ**  
**JEFE DEL DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE**  
**INGENIERÍA EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA**



## Contenido

i.	Relación de figuras .....	4
ii.	Glosario.....	6
iii.	Resumen .....	8
iv.	Abstract .....	9
v.	Introducción .....	10
vi.	Antecedentes.....	11
vii.	Justificación .....	13
viii.	<i>Objetivo general</i> .....	14
Capitulo 1.....		15
Fundamentos: Teoría del Caos .....		15
1.1	Caos, Teoría del Caos .....	16
1.2	Sistemas .....	17
1.3	Métodos de control del caos .....	18
1.4	Donde se aplica la teoría del caos actualmente .....	18
1.5	Efecto Mariposa .....	19
1.6	Atractores .....	20
1.6.1	Atractores extraños .....	20
1.7	Fractales...La geometría del caos.....	21
Capitulo 2.....		23
Sincronización de Sistemas Caóticos .....		23
2.1	Fundamentos de la Sincronización .....	24
2.2	Esquemas de Comunicación Caótica .....	30
2.2.1	Primera Generación.....	31
2.2.2	Segunda Generación.....	34
2.2.3	Tercer Generación .....	36
2.2.4	Cuarta Generación.....	37

---

Capítulo 3.....	40
Sistemas caóticos aplicados en las telecomunicaciones .....	40
3.1    Uso de los sistemas caóticos en las comunicaciones actuales .....	41
3.2    Esquema general de un sistema de comunicaciones usando los sistemas caóticos. .....	43
3.3    Portadoras caóticas.....	44
3.4    Ventajas y desventajas del uso de los sistemas caóticos en las telecomunicaciones.....	45
3.5    Ancho de Banda en los sistemas caóticos aplicados a las telecomunicaciones ....	47
3.6    Encriptación caótica.....	47
Capitulo 4.....	50
Análisis de Circuitos generadores de caos .....	50
4.1    Circuitos Generadores de Caos.....	51
4.2    Circuito de Chua.....	51
4.2.1.    Tipos de diodos de Chua.....	53
4.3    Circuito de Rössler .....	59
4.4    Convertidores de Impedancia.....	61
Capitulo 5.....	64
Circuitos de Sincronización Caótica.....	64
5.1    Simulación del Circuito de Chua .....	65
5.2    Simulación del Circuito Rössler.....	74
Conclusiones.....	76
Referencias .....	78
Publicaciones Derivadas de la realización de la Tesis .....	81

## i. Relación de figuras

### Antecedentes

Fig. vi.1 Atractor de Lorenz..... 11

### Capítulo 1

Fig. 1.1 Atractor de Chua ..... 21

### Capítulo 2

Fig. 2.1 a) Esquema de sincronización b) Trayectoria del esclavo  $X_S$  del esclavo sincronizada con la trayectoria del Maestro  $X_M$ ..... 26

Fig. 2.2 Diagrama a bloques del enmascaramiento caótico..... 31

Fig. 2.3 Circuito para enmascarar un mensaje (receptor)..... 33

Fig. 2.4 Transmisión Via CSK..... 34

Fig. 2.5 Diagrama a Bloques para la segunda generación de sistemas caóticos de comunicación segura. (a) Modulación paramétrica caótica. (b) Modulación Caótica no autónoma. .... 36

Fig. 2.6 El diagrama a bloques para la tercera generación de sistemas de comunicaciones caóticas seguras..... 37

Fig. 2. 7 Diagrama a Bloques de la Sincronización impulsiva ..... 39

Fig. 2.8 Trama de Tiempo ..... 39

### Capítulo 3

Fig. 3.1 Diagrama a bloques del sistema de comunicación..... 43

### Capítulo 4

Fig. 4.1Circuito de Chua..... 52

Fig. 4.2 Orientación de corrientes en el circuito de Chua. .... 52

Fig. 4.3 Circuito equivalente al diodo de Chua utilizando un OPAM en régimen no lineal . 54

Fig. 4.4 Circuito equivalente al Diodo de Chua ..... 55

Fig. 4.5 Primer segmento del diodo de Chua (circuito limitador polarizado en serie) ..... 56

Fig. 4.6 Segundo segmento del diodo de Chua. .... 57

Fig. 4.7 Curva del Diodo de Chua..... 58

Fig. 4.8 Circuito de Rössler ..... 59

Fig. 4.9 Convertidor Generalizado de Impedancia ..... 61

**Capítulo 5**

Fig. 5.1 Circuito de Chua.....	65
Fig. 5.2 Circuito de Chua con un OPAM.....	65
Fig. 5.3 a) Señales del Canal 1 y Canal 2 b) Señal en Modo XY .....	66
Fig. 5.4 Diodo de Chua con un OPAM.....	67
Fig. 5.5 a) Señales de respuesta del diodo b) Curva característica .....	67
Fig. 5.6 Diodo de Chua utilizando una configuración de 2 OPAMS.....	68
Fig. 5.7 a) Señales obtenidas del diodo de Chua. b) Curva característica del diodo de Chua. .....	69
Fig. 5.8 Circuito de Chua utilizando dos OPAMS. ....	69
Fig. 5.9 a) Señales del Ch1 y Ch2 b) Atractor de Chua (modo XY).....	70
Fig. 5.10 Diodo de Chua utilizando un circuito limitador polarizado en Serie con un OPAM. .....	71
Fig. 5.11 a) Salida del circuito canales 1 y 2 b) Respuesta del diodo de Chua .....	71
Fig. 5.12 Circuito de Chua utilizando un limitador polarizado en serie en cascada con un OPAM.....	72
Fig. 5.13 Resultados del Circuito. a) Señales de salidas del circuito (canal 1 y canal 2) b) Atractor de Chua (modo XY) en el osciloscopio. ....	73
Fig. 5.14 Circuito Simulado de Rössler .....	74
Fig. 5.15 Señales a) XZ b) XY del atractor de Rössler .....	75
Fig. 5.16 Señales de salida del circuito de Rössler (x, y, z) .....	75

## ii. Glosario

<b>Acoplamiento</b>	Es la forma de unir dos elementos de manera que sus respectivas formas o composiciones los mantengan juntos.
<b>Codebook</b>	Es un documento usado para poner en ejecución un código. Un codebook contiene a tabla de las operaciones de búsqueda para la codificación y descifrar cada palabra o frase; tiene una o más secuencias que la substituyan.
<b>Codificación</b>	Es el proceso por el cual la información de una fuente es convertida en símbolos para ser comunicada.
<b>Criptografía</b>	Rama derivada de las matemáticas utilizada en informática y telemática que utiliza métodos y técnicas con el principal objetivo de cifrar información, mediante la manipulación de algoritmos.
<b>Criptosistema</b>	Un criptosistema, es un sistema que toma información legible para convertirlo en información no legible y viceversa, está formado por conjunto de protocolos, algoritmos de cifrado, procesos de gestión de claves.
<b>Determinista</b>	En matemáticas, un sistema determinista es aquel en el que el azar no interviene en el desarrollo de los estados futuros del sistema, los modelos deterministas producen la misma salida para unas condiciones dadas.
<b>Dinámico</b>	Se refiere a la evolución con respecto al tiempo de un proceso físico. Aplicado a los sistemas, se dice que un sistema es dinámico cuando se trata con sistemas que involucran ciclos de retroalimentaciones internas y tiempos de retardo que afectan el comportamiento de todo el sistema, es una formalización matemática que describe la dependencia temporal de la posición de un punto en el espacio, algunos ejemplos son: modelos matemáticos como la oscilación de un péndulo, el flujo de agua en un tubo, el numero de peces en cada primavera en un lago.
<b>Espacio de Fase</b>	Es una construcción matemática, que permite representar el conjunto de posiciones y velocidades de un sistema de partículas, es decir es la representación de todos los posibles estados en que un sistema se puede representar; cada estado posible del sistema corresponde a un único punto en el espacio de fase.
<b>Homogeneidad</b>	Propiedad de los sistemas lineales, la cual indica que a una entrada le corresponde una y solo una salida, $f(ax) = af(x)$ .

<b>Proceso Estocástico</b>	Concepto matemático que sirve para caracterizar y estudiar todo tipo de fenómenos aleatorios, que evolucionan, generalmente con el tiempo. Se definen como los procesos dependientes de leyes causales y probabilísticas, por lo que están sometidos al azar y son objeto de análisis estadístico. Este tipo de procesos nos servirán para poder comprender la correlación, la cual se entiende estadísticamente como la relación entre varios datos.
<b>Resonancia</b>	La resonancia se produce cada vez que hay una relación entre frecuencias (una de las frecuencias es igual a un múltiplo entero de la otra), y se podría definir como "una oscilación de gran amplitud causada por un estímulo periódico relativamente pequeño".
<b>Sistema</b>	Es un conjunto de elementos que interactúan o entidades interdependientes que forman un todo integrado, conjunto de funciones o elementos relacionados dinámicamente que da como resultado un producto.
<b>Sistema autónomo</b>	En matemáticas, es conocido también como ecuaciones diferenciales autónomas, es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias las cuales no dependen de la variable independiente. En circuitos un sistema autónomo es aquel que no necesita de una fuente externa para ser alimentado.
<b>Superposición</b>	También llamada propiedad aditiva, es la propiedad de los sistemas no lineales que dice que la suma de todas las entradas debe ser igual a la suma de todas las salidas. Si existen $f(x)$ y $f(y)$ , entonces $f(x + y) = f(x) + f(y)$ .



### iii. Resumen

En el presente proyecto se estudia y analiza la sincronización de los sistemas caóticos en las telecomunicaciones iniciando con una breve introducción a lo que sería la teoría del caos, fractales, sistemas caóticos para que posteriormente se aborden las bases teóricas de la sincronización en las cuales se habla un poco de las aplicaciones que se tiene en las telecomunicaciones.

Se estudió y analizo sistemas dinámicos complejos no lineales los cuales producen un comportamiento caótico, sistemas como los de Rössler, Chua, a nivel de hardware, el análisis se trato para sistemas dinámicos continuos, es decir obteniendo las ecuaciones integro diferenciales de cada sistema.

En el modelo de Chua se analizó un circuito de tercer orden autónomo, así como su elemento no lineal el “memristor”, en tres de sus diversas formas, partiendo de la más sencilla a la más compleja al momento de generar caos. Además se analizó el sistema de Rössler, un modelo con tres grados de libertad obteniendo sus ecuaciones de estado.

Mediante el uso del software Multisim versión 10.0 se obtuvo el comportamiento de cada uno de los sistemas, en cuanto al sistema de Chua se considero primeramente el diodo y posteriormente se le agrego el oscilador amortiguado para finalmente simular el sistema completo de Chua. También se simulo el circuito de Rössler de tercer orden.

Se investigó las aplicaciones en las cuales se pueden implementar estos tipos de generadores caóticos, pertenecientes a la primera generación según la clasificación de Tao yang en su libro Chaotic Communication Systems.

#### iv. **Abstract**

This project explores and analyzes the synchronization of chaotic systems in telecommunications starting with a brief introduction to what would be chaos theory, fractals, and chaotic systems to subsequently address the theoretical basis of synchronization which speaks some applications that have in telecommunications.

Was studied and analyzed complex nonlinear dynamic systems which produce chaotic behavior, such as the Rössler system, Chua, at the hardware level, the analysis was treatment for dynamical systems, i.e. obtaining the integro differential equations of each system.

Chua The model examined a third order autonomous circuit and its nonlinear element the "memristor" in three of its various forms, starting from the simplest to most complex commission before they were reached the chaos. Moreover Rössler system, a model with three degrees of freedom obtained their equations of state.

Using Multisim software version 10.0 the behavior was obtained by each of the systems, as the system of Chua diode is first considered and then I add the damped oscillator to simulate the entire system finally Chua. Also simulate the circuit of third-order Rössler.

The study investigates the applications in which you can implement these types of chaotic generators belonging to the first generation as classified by Tao Yang in his book Chaotic Communication Systems.

## v. Introducción

Los sistemas caóticos se empezaron a conocer a partir de algunas observaciones del meteorólogo Edward Lorenz quien, en 1963, trabajaba en un programa que pudiera predecir el clima y el comportamiento de la atmósfera. Se dio cuenta que con valores ligeramente diferentes de temperatura predecía comportamientos radicalmente diferentes en el clima. En un inicio se creyó que se trataba de errores numéricos provenientes del cálculo en la computadora. Tiempo después se reunió evidencia de que lo que pasaba era un fenómeno único de alta sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales, que ahora se sabe que caracteriza, entre otras cosas, a un sistema caótico.

El caos es un fenómeno muy amplio y universal existente en varios sistemas no lineales. Por mucho tiempo fue confundido con ruido, no fue hasta que en el campo de la ingeniería se anunció oficialmente su existencia en sistemas eléctricos en el año de 1980.

Por otra parte las comunidades de científicos e ingenieros se dieron cuenta que el caos podía ser controlado. La sincronización entre dos sistemas caóticos idénticos, fue reportada en 1990 por Pécora y Carroll y dos años más tarde se dieron cuenta que el caos podía ser usado en sistemas de comunicación segura, debido a que el caos es extremadamente sensible a las condiciones iniciales.

Debido a esto al final del último siglo comenzaron a buscar posibles aplicaciones del caos como transacciones seguras en Internet, privacidad en telefonía, televisión de paga, encriptación, por mencionar solo algunas; este hecho encamina la iniciación de aplicación del caos en comunicación segura.

Hasta ahora, sistemas de comunicación segura caótica han sido actualizados hasta su cuarta generación. Las primeras tres generaciones intercambian una misma estructura de sincronización caótica.

El principal problema de esta estructura de sincronización es que la señal de sincronización usa un ancho de banda comparable a la señal del mensaje, así la eficiencia de ancho de banda usada es baja. Para superar este problema, la cuarta generación utilizó métodos impulsivos. Esta generación empleó sincronización caótica impulsiva para sincronizar transmisores caóticos y receptores caóticos.

## vi. Antecedentes

Los sistemas caóticos se han vuelto de gran interés en las telecomunicaciones, partiendo de la teoría del caos; la cual involucra un “orden dentro del desorden”, es decir es un sistema dinámico no lineal que a partir de ciertas condiciones iniciales podríamos tener resultados prácticamente impredecibles, dichas condiciones son extremadamente sensibles puesto que la más mínima alteración repercute en su comportamiento, como es el caso de la bolsa de valores, la meteorología, en la dinámica poblacional, etc. Pero por otra parte si conocemos las condiciones iniciales podemos intentar determinar la trayectoria del sistema. Existen varios modelos que describen un comportamiento caótico, Lorenz en 1963 describió tres ecuaciones diferenciales bien definidas [1] al intentar predecir los fenómenos meteorológicos, estas ecuaciones dan lugar al ya muy conocido atractor de Lorenz como el que se muestra en la figura vi.1, por otra parte Chua propuso un sistema de ecuaciones de dinámica no lineal, con respuesta caótica que formulaba un atractor extraño.

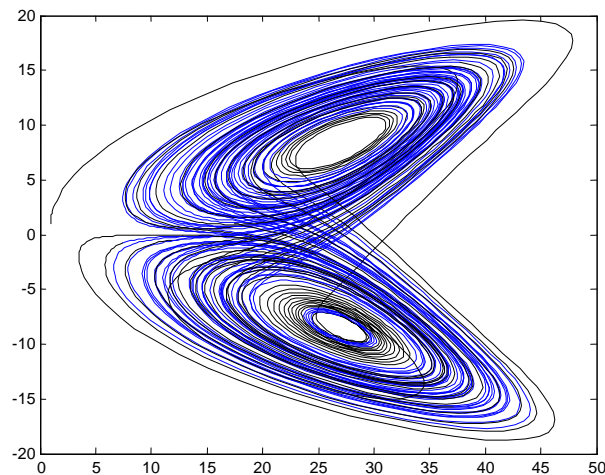


Fig. vi.1 Atractor de Lorenz

El control del caos tiene dos inconvenientes: la supresión y la sincronización del caos [2]. Se podría decir que a simple vista no se puede lograr utilizar un sistema dinámico no lineal en sistemas reales, puesto que sería difícil considerando que las condiciones iniciales son extremadamente sensibles y no es muy factible la reproducción de las mismas para dos sistemas similares.

La parte que concierne a las telecomunicaciones es la sincronización, ya que brinda comunicaciones seguras [3]. Existen dos formas principales de acoplamiento, de forma unidireccional la cual consiste en sistemas Maestro-Esclavo (Master -Slave), donde el maestro es el sistema guía o de referencia y el esclavo es el sistema guiado el cual es dependiente del maestro. En el caso de ser bidireccional ambos sistemas interactúan entre sí y están acoplados uno con el otro creando una sincronización mutua.

## vii. **Justificación**

Actualmente todos tenemos necesidad de utilizar las telecomunicaciones en menor o mayor medida; dentro de la milicia la seguridad y la confiabilidad en la información ha determinado su desarrollo, porque el que tiene la información tiene el poder, por consecuencia brindar una mejor seguridad a esta es de suma importancia.

En los últimos años se ha demostrado que dos comportamientos caóticos aparentemente con conductas aleatorias pueden lograr empatar en una sola trayectoria, buscando de esta forma una sincronización en sistemas electrónicos.

No haciendo a un lado a las tecnologías actuales, la intención de este trabajo es ofrecer un apoyo a la seguridad en telecomunicaciones utilizando como base la teoría del caos y encriptación; unidas, estas herramientas pretenden establecer una sincronización potencial a nivel de hardware más segura.

Además de los resultados obtenidos se pretende dejar como base esta investigación para su futuro estudio en el campo de comunicaciones y electrónica, ya que es información compleja al interpretar y difícil de obtener, aunado a que estos temas son tratados solo a nivel posgrado debido a que es un campo aun fértil en el área de comunicaciones a nivel licenciatura.

*viii. Objetivo general*

*Analizar la sincronización de los sistemas caóticos en telecomunicaciones.*



# Capítulo 1

---

## Fundamentos: Teoría del Caos



*"El Caos comienza donde la ciencia clásica se detiene"*  
*James Gleick*

En el presente capítulo se tratarán los fundamentos teóricos en los que se basa el desarrollo de este trabajo, primeramente se explica el concepto de la teoría del caos, seguido de el concepto y características de un sistema, continuando con métodos de control de caos, aplicaciones de la teoría del caos actualmente, efecto mariposa, atractores extraños y finalmente fractales.

## 1.1 Caos, Teoría del Caos

Antes de comenzar a analizar las bases de esta teoría es importante que profundicemos en lo que significa caos. Proviene del griego "khaos" que significa abismo o abismo abierto. Por lo tanto es común pensar que el caos es aquello que carece de orden, algo confuso e incoherente. Sin embargo para la teoría del caos el enfoque difiere de los conceptos mencionados ya que en realidad el caos es la misma esencia del orden [4].

Durante muchos años personajes como René Descartes (1596-1650), quien afirmaba que todo fenómeno podría ser explicado conociendo la forma, tamaño y movimiento de los cuerpos que se involucraban, o Isaac Newton (1643-1727) que intentaba reducir el complejo comportamiento del universo a ecuaciones; consolidaron una perspectiva reduccionista del universo en la que todo fenómeno se consideraba ordenado, si su dinámica se puede explicar dentro de un esquema causa y efecto representado por una ecuación diferencial [5]. Para esta perspectiva el *método científico* representaba una valiosa herramienta por lo que resultaba conveniente continuar con dicha metodología.

La introducción del concepto de probabilidad pretende demostrar que las aportaciones de Newton continúan siendo útiles a nivel de átomos y moléculas pero definitivamente no las resuelve [6]. Por otro lado Ludwig Boltzmann (1844-1906) cuestionaba la reversibilidad de los procesos físicos debido a la gran complejidad de moléculas y número de partículas elementales del universo, una disposición ordenada de ellas resultaba ser altamente improbable, lo que significaba que todo el universo se desintegraría fortuitamente en algún momento [7]. Gracias a la estadística, Boltzmann describió como las características de los átomos determinan las propiedades de la materia, fundamentando así la segunda ley de la termodinámica al plantear que existen fenómenos deterministas que pueden ser estocásticos [8].

Sin embargo, a pesar de que ya se tenían nociones de una conducta caótica y aparentemente impredecible en los fenómenos de la naturaleza, no existían grandes aportaciones en esta teoría del caos, no fue sino hasta que Jules Henri Poincaré (1854-1912) explicaba la relevancia de esta conjetura; tomando como base los aportes de Newton en la Mecánica Celeste, se dio cuenta que la propuesta para el movimiento orbital

de dos cuerpos esféricos se volvía inestable al agregar un tercer cuerpo, este problema de los tres cuerpos considerado como uno de los más difíciles en la física matemática [9] no puede ser resuelto con exactitud sino que requiere de una serie de aproximaciones. Y no fue hasta el auge en los sistemas de cómputo que fue posible realizar algoritmos y métodos numéricos que permitieran resolver dichos sistemas, permitiendo encontrar un aparente desorden en los mismos.

El caos definitivamente no es un desorden completo sino un *desorden dentro de un sistema dinámico determinista*, el que siempre es predecible a corto plazo [10]. Otro concepto puntualiza que el caos es un estudio de los sistemas dinámicos no lineales y complejos [11].

## 1.2 Sistemas

Vamos a considerar que sistema es una representación matemática de una entidad física que ante el estímulo de una o varias magnitudes físicas (señales) ofrece como respuesta otras magnitudes (señales) [12]. Ahora bien, los sistemas pueden clasificarse en función de que cumplan o no determinadas propiedades:

**Memoria.** Un sistema es sin memoria cuando la salida en un determinado instante no depende de valores pasados ni futuros de la entrada. Se dice que el sistema tiene memoria cuando incumple esta propiedad.

**Causalidad.** Es también llamado Anticipativo cuando la salida en un determinado instante no depende de valores futuros de entrada.

**Invertibilidad.** Es *Invertible* cuando siempre es posible recuperar la entrada al sistema conociendo la salida.

**Estabilidad.** Existen varios criterios de estabilidad, el más utilizado en el estudio de sistemas es el denominado “entrada acotada, salida acotada”, es decir el sistema es estable si para una entrada dada existe una salida dada.

**Linealidad.** Es lineal si cumple con las condiciones de superposición y homogeneidad.

**Invarianza.** El sistema es invariante, o dicho de otra manera invariante en el tiempo, si el comportamiento del sistema no depende del instante en que se le aplique la excitación.

**Sistema no lineal.** Es aquel que exhibe una desviación de toda correspondencia funcional de proporcionalidad directa; es decir aquel en el que las respuestas no son directamente proporcionales a una variable dada o cuando las interrelaciones entre las

cantidades implicadas se expresan mediante ecuaciones, algunas de las cuales no son lineales [13].

**Sistema Complejo.** Es aquel que está compuesto por muchas partes y, de hecho, el campo de las matemáticas que se conoce como teoría de la complejidad, está integrado por una gran cantidad de temas complementarios traslapados entre sí; se podría decir que es un sistema con muchos grados de libertad no equivalentes entre sí y, a diferencia del caos que es el estudio de cómo los sistemas simples pueden generar conductas complicadas, la complejidad es el estudio de cómo los sistemas complejos pueden generar conductas sencillas, lo que quedaría ejemplificado por la sincronización de los sistemas biológicos desde las luciérnagas hasta las neuronas [14].

### 1.3 Métodos de control del caos

Siempre hemos estado obsesionados por el control, creemos que cuantas más técnicas desarrollemos, más control tendremos sobre el mundo. Es lo que ocurre en la Tierra: es un sistema caótico, siempre cambiante y adaptándose, pero si nos excedemos el sistema cambiará impredeciblemente o colapsará. Un ejemplo son los problemas con la capa de ozono, el aumento de la temperatura global y el deshielo, problemas con los recursos como el petróleo, etc.

Aprender a vivir en el caos no significaría aprender a controlarlo, ni a predecirlo. Al contrario: hemos de enfocar la cuestión desde el punto de vista de que nosotros también somos parte del caos, no nos podemos considerar como elementos aparte. Desde esa perspectiva lo que podemos hacer es vivir de la creatividad del caos, sin intentar imponernos: si conseguimos realmente formar parte del sistema, el concepto de sujeto y objeto desaparecerán.

Por otra parte, el control de caos consiste en el diseño de estrategias que permiten asignar dinámicas deseadas a sistemas caóticos. En el control de caos existen dos problemas básicos: supresión y sincronización de caos. La supresión de caos consiste en la estabilización de las trayectorias de un sistema caótico alrededor de algún punto de equilibrio o en una órbita periódica, y es importante debido a que las oscilaciones erráticas de un sistema caótico son impredecibles y pueden producir daños. La sincronización de caos consiste en un régimen en el cual los sistemas caóticos acoplados (uno llamado maestro y otro esclavo), después de un tiempo de transición, exhiben oscilaciones caóticas idénticas.

### 1.4 Donde se aplica la teoría del caos actualmente

La Teoría de Caos nos permite comprender fenómenos de la naturaleza, las caprichosas formas que exhibe y los patrones de conducta a los que obedece. Más allá de esto,

aparece también como una herramienta valiosa para entender el comportamiento de la conducta humana y social, los fenómenos económicos, así como la evolución de la tecnología y de la actividad industrial. Ante estas perspectivas no parece que estemos lejos que utilicemos esta teoría como modelo para explicar la conducta de los sistemas que nos rodean y de los cuales formamos parte.

Los principios de la Teoría del Caos se han utilizado con éxito para describir y para explicar fenómenos naturales y artificiales diversos. Por citar algunos ejemplos; predecir ataques epilépticos, el comportamiento de los mercados financieros, modelar sistemas de producción, fabricar reportes meteorológicos, crear Fractales, etc.

La teoría del caos tiene amplia aplicación en esta era moderna de la ciencia y la tecnología. La comunicación y la administración pueden ver un cambio de paradigma, así como en varias otras áreas de negocio. Las investigaciones y estudios en esta área por parte de académicos, puede ser extremadamente útil para las empresas y el mundo financiero.

Por otra parte dentro del campo de las comunicaciones y la electrónica la sincronización caótica es de gran interés práctico, ya que mediante ella es posible realizar importantes aplicaciones para cifrado de información en telecomunicaciones en servicios tales como: Enlaces de comunicación militar y empresas privadas, transacciones financieras, operaciones comerciales con firmas electrónicas por internet entre otros. La motivación de utilizar sistemas caóticos en cifrado de información se debe a la característica de impredecibilidad de este tipo de sistemas, lo cual proporciona un alto nivel de seguridad [15].

## 1.5 Efecto Mariposa

Hablar del efecto mariposa es hacer referencia a la noción de sensibilidad a las condiciones iniciales en la teoría del caos, su nombre proviene de un antiguo proverbio chino *“el aleteo de una mariposa se puede sentir al otro lado del mundo”*. Esto es, que cuando tenemos un sistema o un fenómeno natural y dadas unas condiciones iniciales, estás al tener la más mínima variación podrían desencadenar una respuesta en el cual el sistema evoluciona en una forma totalmente diferente, Einstein también lo mencionó en una de sus citas *“Hasta la más pequeña gota de rocío caída del pétalo de una rosa al suelo, repercute en la estrella más lejana”*.

Si analizamos como tal el “efecto mariposa” tenemos tres aspectos susceptibles a ser analizados primero, cambios minúsculos conducen a resultados divergentes. Segundo, por otro lado una situación que no podemos presagiar, sabemos que el efecto puede ser muy grande, pero no podemos saber en qué consistirá, dónde o cuándo ocurrirá. Tercero, una situación de descontrol: no podemos tener un control de la influencia de la causa sobre el efecto, es decir no podemos evitar que, de aletear, se produzca un huracán al

otro lado del mundo. Cabe mencionar que este nombre también fue aludido a Edward Lorenz al intentar hacer una predicción del clima atmosférico [16].

## 1.6 Atractores

Si observamos fenómenos generales del mundo real nos percatamos que ciertos tipos de comportamiento concebibles simplemente no ocurren. El péndulo de un reloj en buen estado no se moverá suavemente a veces y violentamente otras sino que todos los movimientos oscilatorios serán parecidos. No encontramos tampoco que en Centro América se alcance temperaturas extremas bajo cero. Los estados de cualquier sistema que ocurren reiteradamente, o que lo hacen de modo aproximado, pertenecen a un grupo restringido que se conoce como atractores [17].

Una manera de visualizar el movimiento caótico, o cualquier tipo de movimiento, es hacer un diagrama de fases del movimiento, este consiste en la construcción de un espacio que tiene tantas dimensiones como el número de variables necesarias para especificar el estado del sistema dinámico dado. Cada dirección o eje coordinado representa una de las variables que componen al sistema. Graficando el valor numérico de cada una de las variables en un tiempo dado, el punto que se obtiene proporciona una descripción del estado del sistema en ese tiempo, o sea cada punto en el espacio representa un estado particular del sistema dinámico. Algunas veces el movimiento representado con estos diagramas de fases no muestra una trayectoria bien definida sino que esta se encuentra errada alrededor de algún movimiento bien definido. Cuando esto sucede se dice que el sistema es atraído hacia un tipo de movimiento, es decir que hay un atractor.

Hay varios tipos de atractores hacia los cuáles los sistemas dinámicos en evolución tienden a converger. La mayoría de los sistemas no-lineales tienden hacia atractores de estado estable en los que nada ocurre, como en un péndulo en reposo. Un segundo tipo es el atractor de ciclo límite (limit cycle attractor). En estos se observan la interminable repetición del mismo comportamiento, como el péndulo oscilante. Los atractores más interesantes son los caóticos o atractores extraños.

### 1.6.1 Atractores extraños

De una manera muy general, se puede decir que los atractores extraños son estados a los que un sistema dinámico es atraído. Muchos sistemas frecuentemente parecen muy caóticos como para poder reconocer un patrón a simple vista, pero, usando ciertos procedimientos es posible obtener representaciones gráficas de ellos. Los atractores extraños viven en el espacio de fases (phase space); este es un espacio hipotético que tiene tantas dimensiones como el número de variables necesarias para especificar un estado de un sistema dinámico dado. Las coordenadas de un punto en el espacio fase son un grupo de valores simultáneos de las variables [17].

En el espacio de fase el completo estado conocimiento de acerca de un sistema dinámico es que en determinado momento colapsa en un punto. Ese punto es el sistema dinámico en ese instante. Al siguiente instante el sistema habrá cambiado y el punto se moverá. La historia del sistema puede ser graficada por el punto en movimiento, trazando su órbita a través del espacio fase con el paso del tiempo [18].

Los atractores extraños son como magnetos que restringen las variables sistémicas dentro de ciertos límites, lo que origina un patrón recurrente [19]. Estos sistemas circulan siguiendo un cierto tipo de ciclo; aunque es posible identificar claramente un patrón, las rutas nunca se repiten exactamente de la misma manera ni se intersectan. Un atractor caótico muestra una forma y tiene límites definidos pero dentro de estos límites el comportamiento del sistema es impredecible. Las variaciones en el comportamiento se reflejan a sí mismas a una escala decreciente y dentro del rango de posibilidades, es decir los atractores extraños muestran una estructura fractal [20]. Como el que es mostrado en la Figura 1.1, y que es tratado posteriormente.

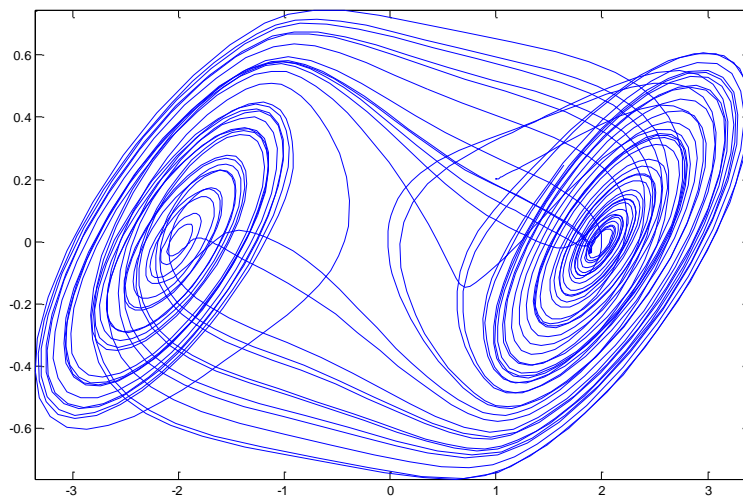


Fig. 1.1 Atractor de Chua

## 1.7 Fractales...La geometría del caos

Hace 2500 años que se creó la geometría de las rectas y de las curvas, la geometría euclidiana, que describe el mundo regular creado por el hombre y en donde aparecen elementos regulares basados en líneas, rectas y curvas sencillas. Ahora bien, la geometría de la naturaleza como lo son las nubes, las montañas, el relieve de la tierra no se puede describir con la geometría clásica, pero dentro de su naturaleza se observa una irregularidad con un orden asombroso, su forma se va repitiendo a distintas escalas dentro del mismo objeto como las hojas de un helecho o un copo de nieve; Benoît Mandelbrot uno de los creadores de la geometría fractal llamo a esta propiedad

“autosemejanza” y fue el también nombre Fractal para decidir este tipo de irregularidades, autorregulares y auto semejantes.

La longitud fractal no tiene el mismo sentido en objetos de longitud entera, es decir podemos medir una corteza de un árbol utilizando una escala en metros a medirla en milímetros. La naturaleza posee leyes matemáticas y el ser humano puede encontrarlas. Hace algunos años se creía que el mundo funcionaba como un reloj y que las ecuaciones diferenciales de Newton podían describir todos los fenómenos naturales y aunque dichas ecuaciones nos permiten representar la órbita de la tierra alrededor del sol y predecir los eclipses, estas ecuaciones no pueden presagiar el comportamiento de las partículas en un arroyo de agua, para tratar de solucionar este tipo de comportamiento se creó el análisis estadístico de cantidades promediadas.

El universo está poblado de sistemas que se comportan de manera caótica, utilizar el espacio de fase del sistema no es útil para ver el orden dentro del caos, es como si de una radiografía del sistema se tratase, porque cada punto representa al sistema en un momento dado y aparecen ciertos atractores a los que se acerca el sistema.

El caos y los fractales buscan la estructura profunda de la irregularidad, los fractales sustituyen un nuevo lenguaje para poder describir las formas del caos.

Dadas estas bases teóricas, se procede a abordar el tema de la sincronización, que como se mencionó es uno de los problemas básicos en el control de caos.

A faint, grayscale background image of a butterfly attractor, a classic example of a chaotic system. The attractor consists of two large, rounded lobes that meet at a central point, with a complex, swirling internal structure. The overall shape is reminiscent of a butterfly's wings.

## Capítulo 2

---

# Sincronización de Sistemas Caóticos



*"Los físicos se complacen en pensar que basta decir:  
Estas son las condiciones iniciales. Pero ¿qué sucede a continuación?"  
Richard P. Feynman*

El presente capítulo tiene como finalidad presentar diversos métodos para la sincronización de dos sistemas caóticos, así mismo pretende dar una visión de los diversos esquemas de comunicación caótica.

## 2.1 Fundamentos de la Sincronización

La sincronización es una de las dinámicas unidas más fascinantes que un sistema puede presentar. Un sistema está completamente sincronizado cuando todos sus elementos evolucionan idénticamente en el tiempo. Los procesos de sincronización son frecuentes en la naturaleza y están presentes en diferentes contextos.

Uno de los rasgos más sobresalientes de los sistemas caóticos es su dependencia con las condiciones iniciales del sistema, que hace que la más mínima diferencia en la descripción del estado del sistema provoque cambios que hacen distintos a sistemas complejos que originalmente, eran parecidos.

La sincronización, que puede ser entendida como el ajuste de ritmos entre dos o más osciladores debido a sus interacciones, es un fenómeno presente tanto en sistemas naturales como artificiales y es un típico ejemplo de auto-organización. El análisis del fenómeno de sincronización de sistemas dinámicos ha sido objeto de un área de investigación muy activa desde su primera observación por el científico holandés Christian Huygens en 1673 quien observó sincronización en dos péndulos acoplados.

El estudio sistemático moderno, tanto experimental como teórico, de este fenómeno fue iniciado por Edward Appleton, Balthasar Van der Pol y Andronov y Vitt que observaron sincronización en generadores eléctricos. Cobra popularidad hace aproximadamente 20 años, tiempo en el cual se produjeron diversidad de artículos y libros que tratan de una u otra manera sobre la sincronización en sistemas que van desde los biológicos tales como luciérnagas, grillos, cigarras, hormigas, sistemas ecológicos, diferentes comportamientos en poblaciones humanas, células cardíacas, neuronas en el sistema nervioso y en la relación fisiológica entre el corazón y pulmones, pasando por sistemas químicos (osciladores bioquímicos) y llegando a sistemas artificiales como circuitos electrónicos, etc.

Los grandes trabajos sobre la sincronización del caos se atribuyen a Fujisaka, Picovsky y Afraimovich [Afraimovich et al. 1986; Fujisaka & Yamada 1983; Picovsky 1984] y a Pecora & Carroll [Pecora & Carroll 1990] quienes presentaron los primeros ejemplos sobre la sincronización unidireccional de sistemas caóticos acoplados [21].

Sin embargo, tras el trabajo de Pecora y Carroll, se ha mostrado que dos comportamientos caóticos imprevisibles, que inicialmente evolucionan sobre trayectorias diferentes, pueden fundirse en una única trayectoria común si se acoplan adecuadamente. El desarrollo de los sistemas de comunicaciones utilizando caos nació a partir de esa idea y se ha afianzado, a través de trabajos fundamentales de un número importante de investigadores.

Los circuitos se presentan como una herramienta de una gran utilidad para estudiar una gran variedad de procesos, actuando como complemento entre el experimento en sí y la simulación numérica por computadora. Entre las ventajas que ofrece la simulación con circuitos se encuentran tanto el alto grado de desarrollo de componentes electrónicos como el bajo costo de los dispositivos. Y son varios los ejemplos de circuitos electrónicos utilizados para el estudio de Caos; el sistema de Lorenz, Rössler y Chua son algunos de ellos que se tratarán más adelante.

El significado de sincronización de caos se refiere al proceso en el que se involucran dos (o varios) sistemas caóticos (equivalentes o no equivalentes) ajustando sus propiedades para que tiendan a un comportamiento común (periódico o ruidoso) [22]. Este fenómeno de sincronización inicialmente hace que los sistemas evolucionen sobre atractores diferentes para que finalmente puedan lograr empatar, acoplarse y coincidir en una misma trayectoria [23, 24]. Es sorprendente que la sincronización entre dos sistemas caóticos aparece cuando se considera la dependencia de la dinámica caótica en las condiciones iniciales del sistema.

Hay que destacar que hay una gran variedad de esquemas de acoplamiento que conducen al régimen de sincronización. Dependiendo de la configuración particular del acoplamiento, podemos distinguir dos casos principales: *acoplamiento unidireccional* y *acoplamiento bidireccional*.

- Acoplamiento unidireccional.

El sistema global está formado por dos subsistemas acoplados según una configuración de tipo *maestro-esclavo*. Eso implica que el comportamiento del sistema esclavo depende del comportamiento del sistema maestro, mientras que este último no se ve influido por el comportamiento del sistema esclavo. Como resultado, el sistema esclavo se encuentra forzado a seguir la dinámica (o una función propia de la dinámica) del maestro. Dicho de otro modo, cuando la evolución de uno de los dos sistemas no es alterada por el acoplamiento la configuración resultante es un acoplamiento unidireccional.

- Acoplamiento bidireccional.

Aquí ambos subsistemas son acoplados con otro, o cuando los dos subsistemas son conectados de tal forma que sus trayectorias están mutuamente influenciadas por el comportamiento del otro. Esta situación ocurre en fisiología, entre el sistema cardiaco y el respiratorio también se da en láseres con retroalimentación.

Es sorprendente que la sincronización entre dos sistemas caóticos aparece cuando se considera la dependencia de la dinámica caótica en las condiciones iniciales del sistema.

Cuando las condiciones iniciales en los sistemas caóticos, al tener la más mínima variación en el sistema, provoca que se obtengan resultados y evolucione en un sistema más complejo que al que originalmente se tenía, esto hace que a simple vista sea difícil la sincronización en sistemas caóticos reales, ya que en la práctica no es posible igualar las condiciones iniciales o hacer dos sistemas totalmente idénticos, para poder lograr la sincronización; se pueden crear sistemas muy parecidos pero siempre existirá un margen de error.

En telecomunicaciones la sincronización brinda comunicaciones seguras [25]. Existen dos formas principales de acoplamiento, de forma unidireccional la cual consiste en sistemas Maestro-Esclavo (Master -Slave) ver figura 2.1, donde el maestro es el sistema guía o de referencia y el esclavo es el sistema guiado el cual es dependiente del maestro. En el caso de ser bidireccional ambos sistemas interactúan entre sí y están acoplados uno con el otro creando una sincronización mutua.

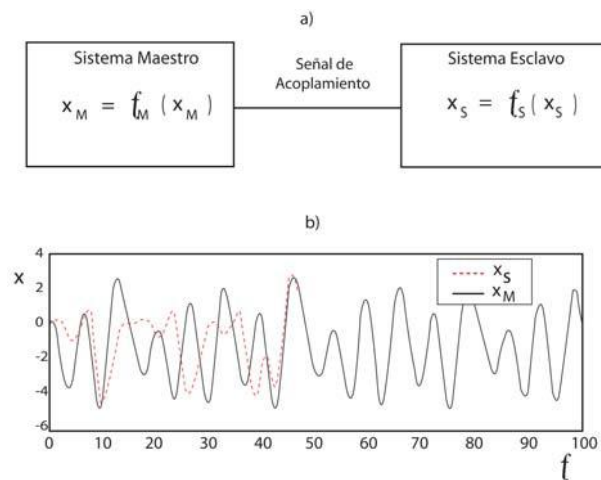


Fig. 2.1 a) Esquema de sincronización b) Trayectoria del esclavo  $X_S$  del esclavo sincronizada con la trayectoria del Maestro  $X_M$

La sincronización entre dos sistemas, se consigue cuando uno de los sistemas modifica su comportamiento y sigue la trayectoria del otro sistema, o ambos oscilan en una nueva trayectoria común [26]. El acoplamiento podrá ser de dos tipos difusivo o conductivo [27, 28].

La aparición y la robustez de los estados de sincronización ha sido establecida mediante diferentes esquemas de acoplamiento, tales como el método de Pecora y Carroll [He & Vaidya 1992; Pecora & Carroll 1990, 1991], la realimentación negativa [Kapitaniak 1994], acoplamiento esporádico [Amritkar & Gupte 1993], descomposición activa-pasiva [Kocarev & Parlitz 1995; Parlitz et al. 1996].

En el contexto de sistemas caóticos acoplados, diferentes clases de sincronización han sido estudiadas recientemente. Sincronización idéntica ó completa [29,30,31], sincronización en fase [Maza et al. 2000; Rosa et al. 1998; Rosenblum et al. 1996], sincronización de retardo [Rosenblum et al. 1997], sincronización generalizada [Kocarev & Parlitz 1996; Rulkov et al. 1995], sincronización de retardo intermitente [Boccaletti & Valladares 2000], sincronización de fase imperfecta [Zaks et al. 1999], y finalmente la casi sincronización [Femat & Solis-Perales 1999].

### Sincronización Completa o idéntica SC (complete or identical synchronization)

Cuando uno trata con sistemas idénticos acoplados, la sincronización aparece como la igualdad de las variables de estado, mientras que evoluciona en el tiempo. Para el acoplamiento, debemos distinguir entre dos diferentes situaciones. Cuando la evolución de uno de los sistemas acoplados es inalterada por el acoplamiento, tenemos como resultado el acoplamiento unidireccional o maestro-esclavo. Por el contrario nos referimos a un acoplamiento bidireccional cuando ambos sistemas son conectados de manera tal que influyen mutuamente en su comportamiento. Dentro de esta clasificación la apariencia y robustez de los estados de sincronización ha sido establecida por medio de varios esquemas de acoplamiento diferentes, como el de Pecora y Carroll [31-33], la retroalimentación negativa [34], la conducción esporádica [35], la descomposición activa-pasiva [36,37], el acoplamiento difusivo y algunos otros métodos híbridos [38].

### La configuración Pécora and Carroll (PC)

Iniciamos considerando un sistema caótico cuya evolución temporal está dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{z} = F(z) \quad (2.1)$$

Aquí  $z \equiv \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  es un vector de estado n-dimensional definiendo un vector de campo  $F: R^n \rightarrow R^n$ . El esquema PC consiste al suponer un sistema dinámico de Ec. 2.1, y descomponiendo el maestro en tres subsistemas.

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= f(u, v) \\ \dot{v} &= g(u, v) \end{aligned} \right\} \text{Maestro} \quad (2.2)$$

$$\dot{w} = h(u, w) \text{ Esclavo}$$

Donde  $u \equiv \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ,  $v \equiv \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ,  $w \equiv \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$  y  $n = m + k + l$ . El primer subsistema de Ec. 2.2 define el sistema maestro, considerando el segundo subsistema de Ec. 2.2 que representa el sistema esclavo, su evolución es guiada por la trayectoria del maestro utilizando la señal  $u$ .

Así la sincronización completa es definida como una identidad entre las trayectorias del sistema respuesta  $w$  y una réplica  $w'$  de esta  $w' = h(u, w')$  para la misma señal de conducción caótica  $u(t)$ . La existencia de CS implica que la respuesta del sistema es asintóticamente estable ( $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , siendo  $e(t)$  el error sincronización dado por  $e(t) = \|w - w'\|$ ). En otras palabras, el sistema olvida sus condiciones iniciales, evolucionando en un atractor caótico. Este tipo de sincronización se puede lograr siempre que los exponentes de Lyapunov del sistema esclavo bajo las órdenes del maestro (los exponentes condicionales de Lyapunov) sean negativas, es decir el sistema es conservativo. Como condición se cumple solo si  $u$  es una señal de sincronización.

### Configuración APD (active-passive decomposition method)

Este método se considera un sistema caótico autónomo y es rescrito como un sistema no autónomo.

$$\dot{x} = f(x, s(t)) \quad (2.3)$$

En donde  $s(t)$  es la señal de conducción  $s = h(x)$  o  $s = h(x)$ , y  $f: R^n \rightarrow R^n$ . La sincronización completa se refiere a la relación entre el sistema Ec. 2.3 y una réplica (el sistema de respuesta) que es conducida por la misma señal  $s(t)$ . Cabe mencionar que esta última afirmación no excluye un comportamiento caótico de  $s(t)$ , ya que es conducido por una señal caótica  $s(t)$ .

Para poder ilustrar mejor esta configuración, L. Kokarev y U. Parlitz [36] analizaron el sistema propuesto por Lorenz.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10x + s(t) \\ \dot{y} &= 28x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - 2.666z \end{aligned} \quad (2.4)$$

Conducido por  $s = h(x) = 10y$ , se puede comprobar mediante el uso de los exponentes de Lyapunov que el sistema se sincroniza con su copia para todos los tipos considerados de la señal de conducción  $s(t)$ .

En comparación con la configuración *PC* que solo puede lograr sincronizarse un número finito de formas para un sistema caótico dado, *APD* permite elegir libremente la señal de conducción  $s(t)$ , o alternativamente la función  $h(x)$  lo que la hace muy poderosa y en general extrema flexibilidad en aplicaciones.

### Sincronización en un sistema no idéntico de baja dimensión

Se ha visto que cuando sistemas caóticos idénticos son acoplados con una fuerza de acoplamiento lo suficientemente fuerte, se puede alcanzar la sincronización completa, siguiendo una misma trayectoria caótica. La sincronización en este caso es asociada con la transición de los exponentes de Lyapunov de valores positivos a negativos.

Sin embargo, sistemas experimentales y cada vez más reales, a menudo no son completamente idénticos, especialmente si existen discrepancias en los parámetros de los sistemas. Es por ello que la sincronización completamente idéntica no se puede esperar en los sistemas que no son completamente idénticos por que no existe una relación  $x = y$

### Sincronización de fase (PS) de sistemas caóticos (sincronización de osciladores periódicos).

Iniciamos con la clásica noción de la sincronización de dos osciladores acoplados periódicamente, usualmente definimos como un bloqueo de fases  $\varphi_{1,2}$  con un radio  $n : m$  (donde  $n$  y  $m$  son enteros), es decir  $|n\varphi_1 - m\varphi_2| < const$ . Como un resultado de la sincronización de fase, la frecuencias  $w_i = \dot{\varphi}_i$  son también bloqueadas, esto es  $nw_1 - mw_2 = 0$ , mientras que las amplitudes pueden ser muy diferentes, de modo que los osciladores periódicos pueden ser sincronizados en fase uno con el otro por un acoplamiento más débil. Por lo tanto, PS de osciladores periódicos débilmente acoplados pueden ser descritos por la dinámica de la diferencia de fase  $\theta = n\varphi_1 - m\varphi_2$

$$\dot{\theta} = \Delta w - c \sin \theta \quad (2.5)$$

Donde  $\Delta w = nw_1^0 - mw_2^0$  es la diferencia entre las frecuencias naturales  $w_{1,2}^0$  de los osciladores, y  $C$  es la fuerza de acoplamiento, la sincronización es alcanzada cuando los parámetros satisfacen

$$\left| \frac{\Delta w}{C} \right| \leq 1 \quad (2.6)$$

La cual forma la región de sincronización conocida como “la lengua de Arnold”. En la región de sincronización, este sistema es estable en el punto fijo  $\theta_0 = \arcsin(\Delta w / C)$  el cual corresponde a un mínimo de la barrera de potencial (washboard potential)  $V(\theta) = -\theta \Delta w - C \cos \theta$ . En general, la sincronización de fase perfecta y la frecuencia de bloqueo se destruyen cuando los osciladores están en presencia de ruido  $\xi(t)$  la cual es

inevitable en los sistemas experimentales. La dinámica de la diferencia de fase es ahora descrita por

$$\dot{\theta} = \Delta\omega - C \sin \theta + \xi(t) \quad (2.7)$$

Gracias a las diferentes formas de sincronizar dos sistemas caóticos independientes mediante una señal, se propusieron diversos esquemas de comunicaciones caóticas como los sistemas de conmutación y enmascaramiento caótico, es por ello que numerosas que se han dado numerosas propuestas para la transmisión de información utilizando el caos.

En los osciladores caóticos, la sincronización de fase (*PS*), se produce cuando las fases de los osciladores caóticos se bloquean. Mientras las amplitudes permanecen altamente descorrelacionadas. Si los osciladores caóticos cubren un amplio rango de escalas de tiempo (periodos de orbitas inestables), las fases no se sincronizaran completamente, pero el periodo de tiempo de sincronización es interrumpido por un intermitente desplazamiento de fases. Este fenómeno es llamado sincronización de fase imperfecta. El mayor incremento en la fuerza de acoplamiento provoca que el sistema tenga un mayor grado de sincronización, en donde las amplitudes se llegan a ser fuertemente correlacionadas. Es aquí cuando los estados de los osciladores caóticos se vuelven idénticos con un cambio apropiado de tiempo, esta sincronización es llamada de retardo (*LS*). En los puntos de acoplamiento más fuerte, el tiempo que transcurre tiene aproximarse a cero y los dos sistemas no idénticos llegan a estar casi totalmente sincronizados.

## 2.2 Esquemas de Comunicación Caótica

Las comunicaciones seguras usando sincronización entre sistemas caóticos es un nuevo concepto de comunicación segura. Las grandes ventajas de este tipo de comunicación segura por hardware han llevado el progreso de este campo rápidamente. Desde 1992 la comunicación caótica segura ha evolucionado en cuatro generaciones. La desventaja de los sistemas caóticos de comunicación segura de las tres primeras generaciones es la baja eficiencia en el uso del canal, para superar esta desventaja, el concepto de sincronización impulsiva entre sistemas caóticos ha sido utilizado en la cuarta generación.

Algunos de los principales esquemas de comunicaciones caóticas son:

- Enmascaramiento caótico. Chaos Masking (CM). Basado en utilizar una señal caótica como enmascarante de una señal de información y transmitir por el canal la suma de estas dos señales, para ocultar la señal transmitida.

- Conmutación caótica. Chaos Shift Keying (CSK). En este esquema la idea es modular uno de los coeficientes del sistema transmisor con la información de una determinada forma de onda y transmitir la señal caótica, en otras palabras se modula algún parámetro de la señal caótica para la transmisión de información.
- Codificación simbólica o caótica. Son los sistemas en los que la señal de información se encuentra contenida en una secuencia simbólica de la señal caótica generada.
- Espectro Disperso Caótico. Spread Spectrum (SS). Son sistemas de espectro disperso convencionales, tanto por secuencia directa (DS) como por salto de frecuencia (FH) o en el tiempo (TH), que utilizan secuencias dispersas obtenidas a partir de señales y sistemas caóticos en lugar de las clásicas secuencias de pseudoruido (PN).

### 2.2.1 Primera Generación

La primera generación fue desarrollada en 1993, a esta generación pertenecen los siguientes esquemas [39]:

#### 2.2.1.1 Enmascaramiento de una señal mediante chaos masking (CM)

El diagrama a bloques del enmascaramiento caótico se muestra en la figura 2.2, en este método una señal analógica portadora de información  $s(t)$  se agrega a la salida  $x(t)$  del sistema caótico en el transmisor. En el lado del receptor un sistema caótico idéntico trata de sincronizarse con  $x(t)$ . Desde este punto de vista la señal de información  $s(t)$  es una perturbación, y la sincronización se da solo aproximadamente. Aun así, si el error de sincronización es pequeño con respecto a  $s'(t)$ , esta última puede ser recuperada por substracción.

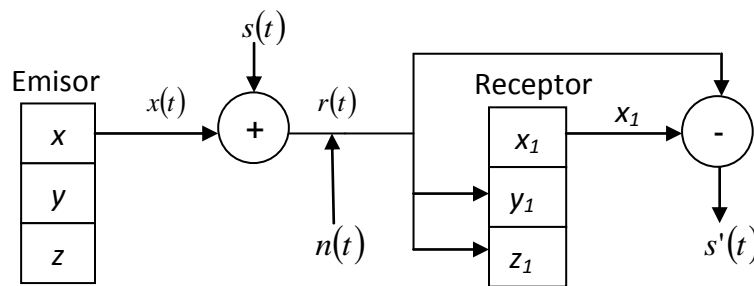


Fig. 2.2 Diagrama a bloques del enmascaramiento caótico.



Es de esperarse que este método sea sensible al ruido del canal de transmisión. Realmente, el ruido aditivo, no se puede distinguir de  $s(t)$  en la configuración de la figura 2.2 y tiene que eliminarse en una etapa posterior. Esta es una tarea difícil, si no es que imposible, si la amplitud de  $s(t)$  no es suficientemente grande con respecto al nivel del ruido.

En 1992 Lj. Kocarev [40] con el análisis de Pecora & Carroll y basándose en el circuito de Chua diseñó un circuito utilizándolo como generador para el enmascaramiento de señales. Siendo una señal  $s(t)$  portadora de información (ver figura 2.3), la señal que se transmite será  $r(t) = V_{C_1}(t) + s(t)$ , teniendo en claro que el nivel de potencia de  $s(t)$  es mucho menor que el de  $V_{C_1}$  con la finalidad de ocultar la señal.

El circuito de Chua esta descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{R}(v_{C_2} - v_{C_1}) - h(v_{C_1}), \\ C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{R}(v_{C_1} - v_{C_2}) - i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_{C_2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

El circuito receptor está conformado por dos subsistemas (ver figura 2.3), el primero es constituido por  $(v_{C_2}, i_L)$ , sistema el cual es excitado por la señal transmitida  $r(t)$ .

$$\begin{aligned} C_2 \frac{dv_{C_2}^{(1)}}{dt} &= \frac{1}{R}(r(t) - v_{C_2}^{(1)}) + i_L^{(1)}, \\ L \frac{di_L^{(1)}}{dt} &= -v_{C_2}^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

El segundo subsistema es  $(v_{C_1})$  excitado por la señal  $v_{C_2}^{(1)}$ :

$$C_1 \frac{dv_{C_1}^{(2)}}{dt} = \frac{1}{R}(v_{C_2}^{(1)} - v_{C_1}^{(2)}) - h(v_{C_1}^{(2)}) \quad (2.8)$$

Denotando

$$v^{(2)} = v_{C_1}^{(2)} - v_{C_1}, \quad v^{(1)} = v_{C_2}^{(1)} - v_{C_2}, \quad i^{(1)} = i_L^{(1)} - i_L. \quad (2.9)$$

Utilizando Ec. 2.8 y Ec. 2.9 obtenemos la ecuación lineal no-homogénea:

$$\begin{aligned}
 C_2 \dot{v}^{(1)} &= \frac{1}{R} (s(t) - v^{(1)}) + i^{(1)} \\
 Li^{(1)} &= -v^{(1)}
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Obviamente la ecuación lineal no homogénea es asintóticamente estable. De Ec. 2.9 y Ec. 2.10 obtenemos la ecuación no lineal homogénea.

$$C_1 \dot{v}^{(2)} = \frac{1}{R} (v^{(1)} - v^{(2)}) - h(v_{C_1}^{(2)}) + h(v_{C_1})
 \tag{2.11}$$

La ecuación homogénea correspondiente es también asintóticamente estable. Teniendo en cuenta que la solución de Ec. 2.11  $v^{(2)} = v_{C_1}^{(2)} - v_{C_1}$  es pequeña en comparación con  $s(t)$ , por lo tanto  $s(t)$  se puede rediseñar como:

$$\tilde{s}(t) = r(t) - v_{C_1}^{(2)} = v_{C_1}(t) + s(t) - v_{C_1}^{(2)} \approx s(t)
 \tag{2.12}$$

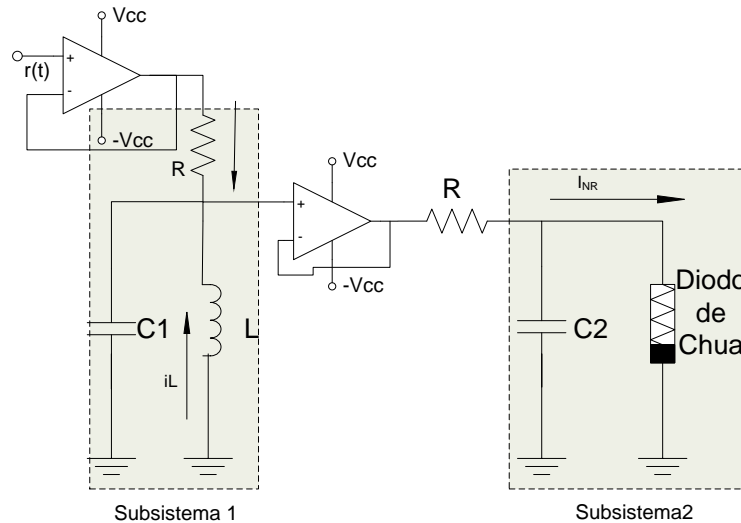


Fig. 2.3 Circuito para enmascarar un mensaje (receptor).

### 2.2.1.2 Enmascaramiento de una señal mediante chaos shift keying (CSK)

El esquema del enmascaramiento mediante CSK (figura 2.4) consiste en una señal de información  $s(t)$  binaria, la cual controla un conmutador que cambia los valores de los parámetros del sistema caótico. De esta forma el valor de  $s(t)$  en un instante  $t$ , el sistema caótico tiene el vector de parámetros  $p$  o en su caso  $p'$ . La salida  $y(t)$  se transmite en dos copias del sistema caótico, vector de parámetros  $p$  y  $p'$ . Si la posición del interruptor en el transmisor se encuentra en la posición  $p$ , entonces el sistema con el vector  $p$  en el receptor se sincronizará, por otro lado, si la posición se encuentra en  $p'$  se desincronizará. De esta forma, la señal de error  $e(t)$  convergerá a cero mientras que  $e'(t)$  tendrá una forma irregular con amplitud diferente de cero. Por lo tanto, la señal  $s(t)$  puede recuperarse a partir de las señales de error  $e(t)$  y  $e'(t)$ .

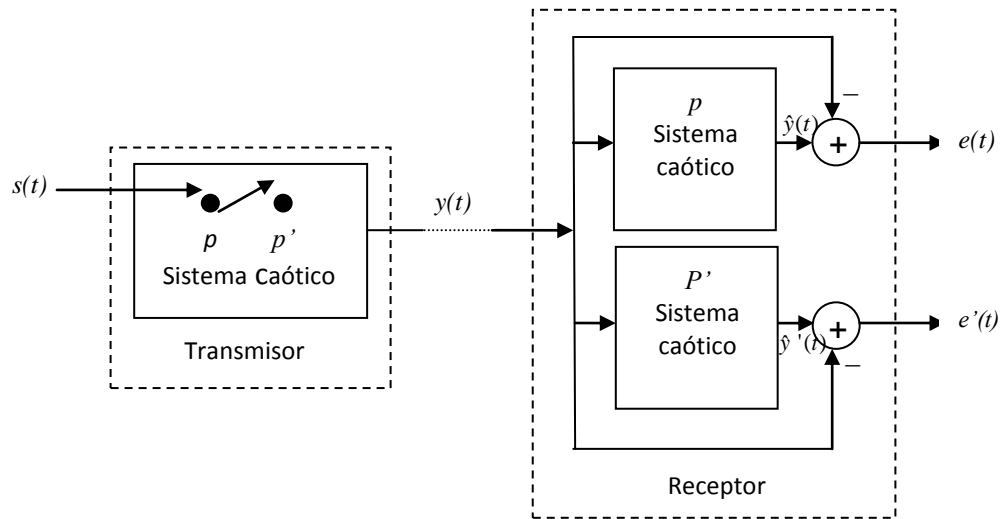


Fig. 2.4 Transmisión Via CSK

## 2.2.2 Segunda Generación

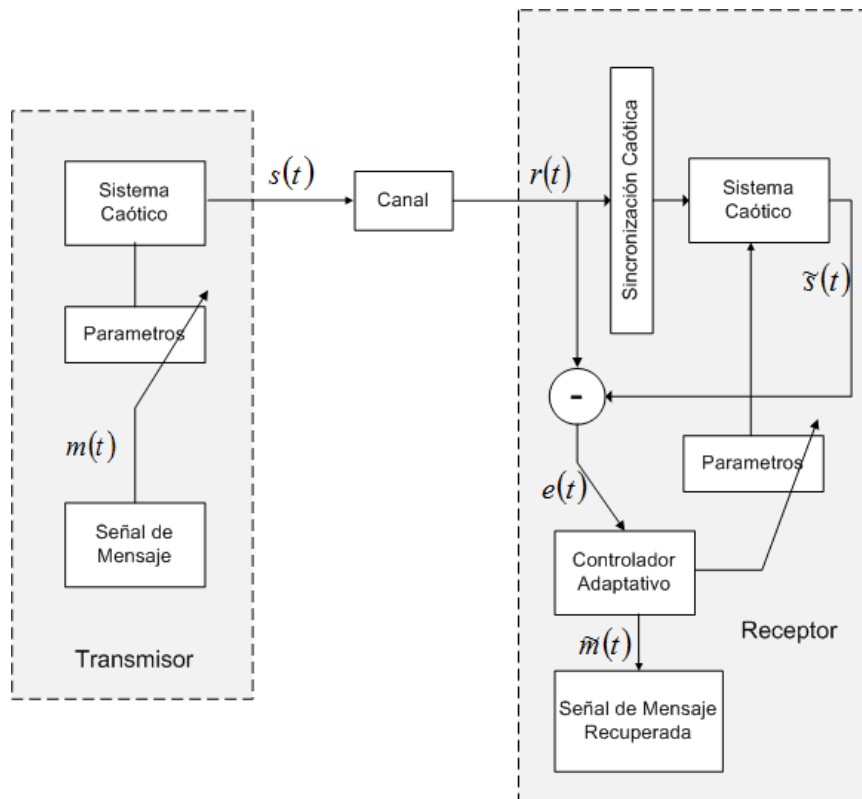
La segunda generación fue propuesta de 1993 a 1995 conocida como modulación caótica. Esta generación tiene dos formas para modular la señal de mensaje dentro de portadoras caóticas. El primer método es llamado modulación de parámetros caóticos mostrado en la figura 2.5a usa una señal de mensaje para cambiar parámetros del transmisor caótico. El segundo método llamado modulación caótica no autónoma mostrada en la figura 2.5b usando la señal de mensaje para cambiar el espacio de fase del transmisor caótico.

### 2.2.2.1 Modulación de parámetros caóticos

En la figura 2.5a la señal de mensaje  $m(t)$  se utiliza para modular algunos parámetros del sistema caótico en el transmisor de manera que cambian sus trayectorias distintos atractores caóticos. Dado que el espacio de bifurcación es muy complejo, es muy difícil de averiguar la forma en que cambian los parámetros incluso si algún intruso tiene el conocimiento parcial del sistema caótico en el transmisor. En el extremo el receptor un control adaptativo se utiliza para ajustar los parámetros del sistema caótico de tal forma que el error de sincronización se aproxima a cero. De esta manera, la salida del controlador adaptable puede recobrar la señal de mensaje.

### 2.2.2.2 Modulación Caótica no autónoma

En lugar de cambiar los parámetros del transmisor caótico, la modulación caótica no autónoma de la figura 2.5b utiliza la señal de mensaje para perturbar el atractor caótico directamente en el espacio de fase. A diferencia de la modulación de parámetros caóticos, donde el transmisor cambia entre las diferentes trayectorias en diferentes atractores caóticos, el transmisor en la modulación caótica no autónoma cambia entre las diferentes trayectorias en el mismo atractor caótico. Teóricamente, modulación caótica no autónoma es un error de esquema libre (error free scheme). La segunda generación mejoró el grado de seguridad hasta cierto punto, pero se encuentra todavía insuficiente.



a)

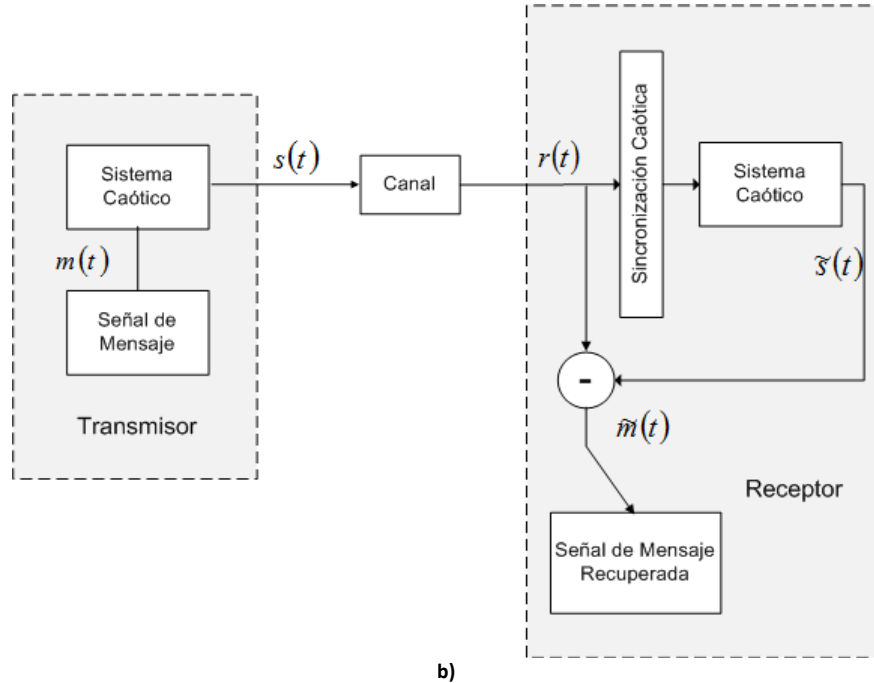


Fig. 2.5 Diagrama a Bloques para la segunda generación de sistemas caóticos de comunicación segura. (a) Modulación paramétrica caótica. (b) Modulación Caótica no autónoma.

### 2.2.3 Tercer Generación

La tercera generación se muestra en la Fig. 2.6 fue propuesto en 1997 con el fin de mejorar el grado de seguridad a un nivel mucho más alto que las primeras dos generaciones. Llamamos a esta generación como Criptosistema Caótico. En esta generación, la combinación de la técnica de criptografía clásica y la sincronización caótica se utiliza para aumentar el grado de seguridad. Hasta ahora, esta generación tiene la más alta seguridad en todos los sistemas caóticos de comunicación segura que se han propuesto y la cual no ha sido roto. En el criptosistema caótico de la señal de texto plano  $p(t)$  es encriptado por una regla de encriptación con una señal clave  $k(t)$ , la cual es generada por el sistema caótico en el transmisor. La señal mezclada se utiliza para manejar el sistema caótico de tal manera que la dinámica caótica cambia al sistema caótico en el transmisor la cual se transmite a través del canal público el cual puede acceder el intruso. Dado que el intruso no puede acceder a la clave de hardware caótica, es muy difícil encontrar  $p(t)$  a partir de  $s(t)$ . En el receptor la señal recibida  $r(t) = s(t) + n(t)$  donde  $n(t)$  es el ruido del canal, es utilizado para sincronizar los dos sistemas caóticos en el transmisor y el receptor.

Después de que la sincronización caótica se ha logrado, la señal  $k(t)$  y  $y(t)$  se pueden recuperar en el receptor con algunos ruidos denotados por  $\tilde{k}(t)$  y  $\tilde{y}(t)$ . Para la alimentación  $\tilde{k}(t)$  y  $\tilde{y}(t)$  en la regla de descifrado en el receptor, la señal de texto plano se puede recuperar con algunos ruidos como  $\tilde{p}(t)$ .

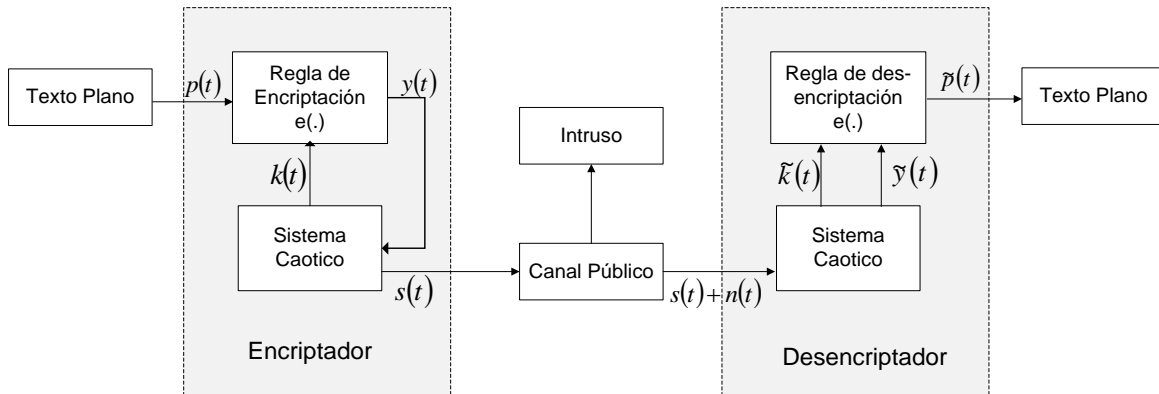


Fig. 2.6 El diagrama a bloques para la tercera generación de sistemas de comunicaciones caóticas seguras.

## 2.2.4 Cuarta Generación

Existe la preocupación de que los esquemas de comunicación no puedan ser lo suficientemente seguros. Para superar este inconveniente, una manera de abordar es explotar el hipercaos basado en sistemas de comunicaciones seguras, pero estos sistemas pueden presentar más dificultades para la sincronización. Por otro lado, podemos mejorar la seguridad del caos a baja dimensionalidad (low-dimensional) basado en esquemas de comunicaciones seguras mediante la combinación de sistemas criptográficos convencionales con un sistema caótico. Para superar el inconveniente de la baja seguridad para los esquemas caóticos basados en baja dimensionalidad (low-dimensional), podemos usar los siguientes dos métodos. El primer método es hacer la señal de transmisión más compleja. El segundo método es reducir la redundancia en la señal transmitida.

### 2.2.4.1 Un simple Sistema en banda base

En la figura 2.7 podemos ver que un sistema caótico de comunicación segura consiste en un transmisor y un receptor. En ambos, existen dos idénticos sistemas caóticos. También, dos esquemas tradicionales idénticos de cifrado están en el transmisor y en el receptor. Veamos ahora los detalles de cada bloque en la fig. 2.7. La señal de transmisión consiste en una secuencia de trama de tiempo (time frame). Cada trama tiene una longitud de T

segundos y consta de dos regiones. En la figura 2.8 mostramos el concepto de trama de tiempo (time frame) y sus componentes. La primera región de la trama de tiempo es una región que consiste en impulsos de sincronización. Los impulsos de sincronización se utilizan para sincronizar impulsivamente los sistemas caóticos, tanto en el transmisor y el receptor. La segunda región es la región de la señal scrambled (scrambled signal) donde la señal scrambled está contenida. Para garantizar la sincronización, tenemos que  $T < \Delta_{max}$ . Dentro de cada trama de tiempo, la región de sincronización tiene una longitud de  $Q$  y el intervalo de tiempo restante  $T-Q$  es la región de la señal scrambled (scrambled signal region). El bloque de descomposición en la figura 2.7 es utilizado para combinar los impulsos de sincronización y la señal mezclada dentro de una estructura de la trama de tiempo mostrada en la figura 2.8. El método más simple es la combinación de sustituir al inicio  $Q$  segundos de cada trama de tiempo con impulsos de sincronización. Dado que  $Q$  es generalmente muy pequeña en comparación con  $T$ , el tiempo de procesamiento para el empaquetado de la señal de mensaje es insignificante. El bloque de descomposición es utilizado para separar la región de sincronización y la región de la señal scrambled dentro de cada trama en el extremo receptor. Entonces, los impulsos de sincronización separados se utilizan para hacer que el sistema caótico en el receptor se sincronice con el transmisor. En el transmisor y el receptor, se utiliza el mismo bloque de esquema criptográfico para fines de comunicación bidireccional. En un esquema de comunicación bidireccional, cada teléfono celular debe funcionar como un receptor y un transmisor. Aquí, la señal clave es generada por el sistema caótico.

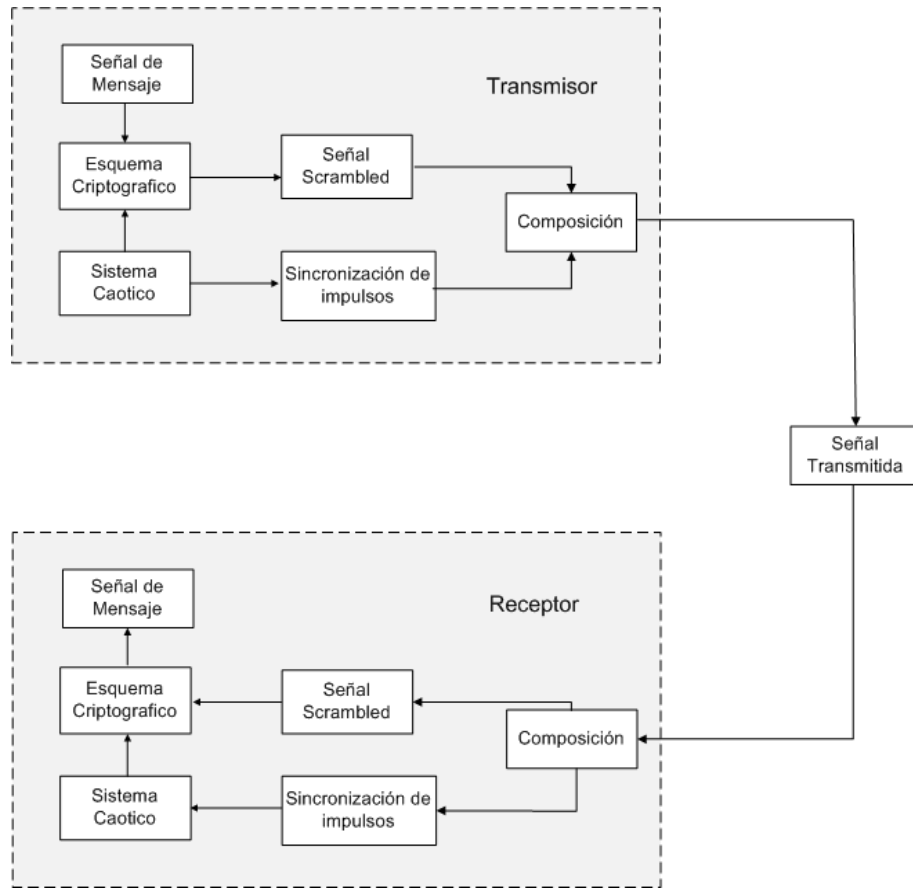


Fig. 2.7 Diagrama a Bloques de la Sincronización impulsiva

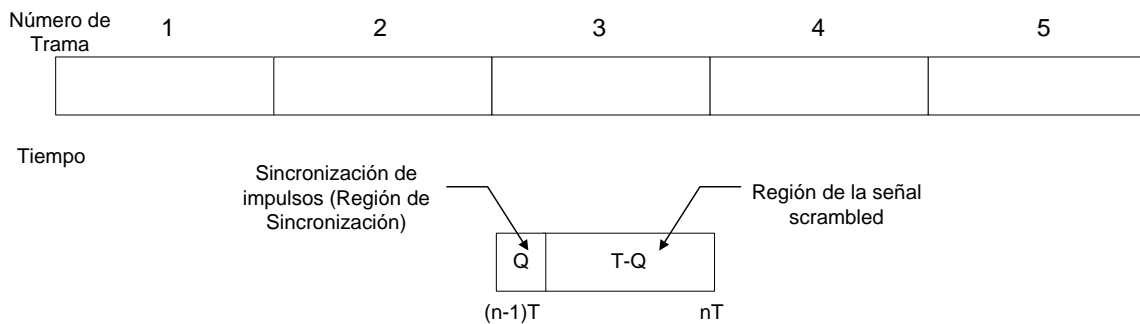


Fig. 2.8 Trama de Tiempo

Una vez mencionado los fundamentos de la sincronización caótica, así como la descripción de los esquemas en cada una de las cuatro generaciones en el siguiente capítulo se abordarán algunas de las aplicaciones en las cuales la sincronización forma parte fundamental para el control del caos.



# Capítulo 3

---

## Sistemas caóticos aplicados en las telecomunicaciones

*"Hasta la más pequeña gota de rocío caída del pétalo de una rosa al suelo,  
repercuta en la estrella más lejana"  
Einstein*

En este capítulo se abordará aplicaciones sobre los sistemas deterministas no lineales en las telecomunicaciones, así como también se hablará sobre algunos de los esquemas de dichos modelos, sus ventajas y desventajas así como tratar conceptos como portadoras y encriptación caótica.

### 3.1 Uso de los sistemas caóticos en las comunicaciones actuales

Los sistemas de comunicación se encuentran donde quiera que se transmita información de un punto a otro; son necesarios para los negocios, la industria, la banca y la circulación de información al público.

En el mundo de la tecnología de la información y de la comunicación, el caos parece jugar un papel importante, en la actualidad ha aumentado la demanda de servicios de comunicación, que es soportada por un rápido incremento en la transmisión y capacidad en redes de comunicación. Dos cuestiones en estas redes son privacidad y seguridad. El *software* adecuado es usual para la codificación de datos, pero el continuo incremento en la velocidad de las computadoras amenaza la seguridad de estos procesos. Una contribución para resolver este problema es usar señales, portadoras caóticas generadas por componentes que funcionan en el régimen no-lineal, tales como circuitos electrónicos no lineales, láseres de semiconductor y, a nivel de *software*, ecuaciones diferenciales no lineales [41].

También dentro de las comunicaciones, la modulación usando señales caóticas (señales generadas por un sistema no lineal en estado caótico) resulta potencialmente muy interesante en aplicaciones de espectro ensanchado y comunicaciones seguras debido a su naturaleza de banda ancha y aspecto similar al ruido. Además, las señales caóticas resultan sencillas de generar.

Respecto a la codificación de la información, el carácter fractal del atractor caótico permite asociar bits a distintas regiones del mismo de manera tal que un cambio de una región a otra pueda realizarse mediante una interacción de valor prácticamente nulo con el sistema caótico. Por lo tanto, si se consigue definir una gramática apropiada, un atractor caótico puede ser aprovechado para codificar mensajes mediante bits de información con un valor activo de conmutación despreciable [42].

Por otro lado, el caos determinista también puede ser utilizado en comunicación segura. El caos tiene características de frecuencia que lo hacen similar a un ruido aleatorio, propiedad que lo hace resistente a las técnicas habituales de filtrado para

separar información sobrepuesta sobre una misma señal. Si un mensaje representado en bits de baja intensidad se superpone a una portadora aleatoria, la portadora enmascarará el mensaje de manera tal que resultará difícil explicar si se está transmitiendo un mensaje y, mucho más difícil, extraerlo. El modo natural de recuperar el mensaje por el receptor sería reproducir la portadora aleatoria y restarla de la señal recibida, de esta manera el mensaje reaparecería nuevamente. La dificultad radica en que una señal aleatoria, por su propia naturaleza, no puede ser reproducida y, en consecuencia, el mensaje quedará oculto para siempre [42].

Todo sistema caótico es muy sensible a las condiciones iniciales y genera un comportamiento aparentemente aleatorio pero a la vez completamente determinista. Estas propiedades del caos proporcionan un potencial para aplicaciones en criptografía ya que las predicciones a largo plazo de los sistemas caóticos son muy difíciles.

Los sistemas caóticos imitan tienen la particularidad de que pueden ser sincronizados como se explico en el capítulo 2. Este hecho puede ser utilizado para enmascarar mensajes sobre una portadora caótica. Un receptor autorizado puede reproducir la portadora caótica que enmascara el mensaje, utilizando un sistema caótico sincronizado con el emisor, y descifrarlo.

Métodos mixtos que combinen encriptación mediante algoritmos clásicos con posterior encriptación caótica están quizás llamados a tener amplia utilización a corto plazo.

El caos en relación con la generación de números aleatorios permite repetir la misma cadena de números siempre que se utilice la misma función de correspondencia caótica (o atractor) y valor inicial. La apariencia aleatoria del sistema hace prácticamente imposible los ataques del tipo codebook (un codebook contiene todas las posibles transformaciones entre texto llano y texto cifrado bajo cada clave) [43]. Puesto que las funciones caóticas son muy sensibles a las condiciones iniciales, cualquier ligera diferencia en el valor inicial utilizado, significará que el texto cifrado producido utilizando caos será muy diferente. Esto significa que el sistema será robusto contra ataques por fuerza bruta, ya que el número de posibles claves es impresionantemente grande, dependiendo de la precisión de los valores iniciales que estarán en función del hardware utilizado, y que puede ser más o menos elevado según el dominio sea analógico o digital.

También existen dos clases de cifradores caóticos: 1. Criptosistemas basados en técnicas de sincronización de caos de circuitos analógicos. 2. Cifradores basados en caos realizados sobre circuitos digitales y computadoras [44].

En el campo de la ingeniería eléctrica y electrónica, al igual que en otras muchas disciplinas, existen múltiples áreas en las que el caos presenta numerosas aplicaciones potenciales: el diseño de nuevos dispositivos electrónicos con mejores características (menor consumo, mayor rapidez de funcionamiento y/o ancho de banda, compatibilidad electromagnética mejorada, etc.), el análisis y modelado de comportamientos anómalos y/o transitorios de dispositivos electrónicos convencionales, el análisis de señales biomédicas, la generación de números aleatorios, la criptografía, etc.

### 3.2 Esquema general de un sistema de comunicaciones usando los sistemas caóticos

Una de las necesidades de la humanidad es la de transmitir información por medio de un sistema seguro de comunicación, esto ha obligado a generar nuevas técnicas de modulación-demodulación, codificación –decodificación, etc. como unas alternativas más en el área de las comunicaciones.

Actualmente se investiga acerca de los sistemas de comunicación que emplean caos, ya que presentan un amplio espectro de frecuencias muy útil para enmascarar señales información. Una línea de exploración es usar señales caóticas como portadoras de información [45].

En la Fig. 3.1 se presenta un diseño general para la construcción viable de un sistema de comunicación usando formas de onda caóticas. Esta propuesta usa modulación directa de la señal de información en un oscilador caótico en el bloque transmisor, donde un estado del oscilador caótico donde puede ser utilizado como la señal portadora. En el bloque receptor, se encuentra un subsistema para estimar los estados no transmitidos y un filtro no lineal para detectar y recuperar la señal de información transmitida.

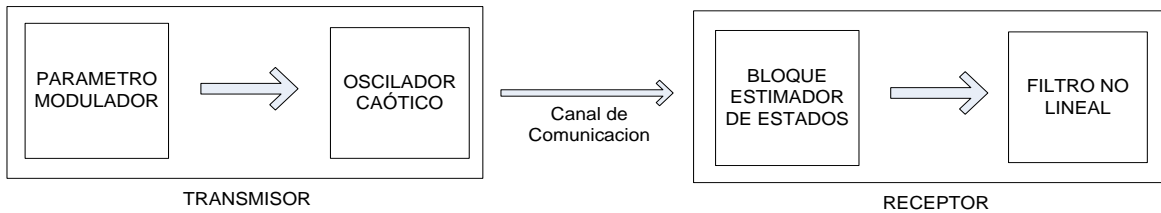


Fig. 3.1 Diagrama a bloques del sistema de comunicación.

En particular, avances frecuentes en el entendimiento de circuitos no lineales han mostrado que los osciladores caóticos pueden sincronizarse [46, 47]. Esta sorprendente observación parece ser contradictoria a lo que es la esencia del caos: complejo, dinámica impredecible de un sistema caracterizado por la sensibilidad extrema a las condiciones iniciales.

De cualquier forma, si los requerimientos necesarios son conocidos, entonces el circuito caótico (también llamado sistema manejador) puede ser diseñado para manejar un sistema similar (el circuito receptor o subsistema) y obtener la respuesta deseada [48]. Como ha sido mencionado, la sincronización de sistemas caóticos sugiere la posibilidad de comunicar información usando formas de onda caóticas como portadoras de información, con aplicación a comunicación segura. Esta propuesta utiliza un oscilador caótico como transmisor, y un subsistema síncrono como receptor.

En el diagrama general a bloques del sistema de comunicación dentro del transmisor, una señal analógica debe ser modulada y un estado del oscilador es transmitido, pero se debe transmitir un estado diferente al utilizado por la modulación. En el bloque receptor, un subsistema que estima los estados no transmitidos es implementado y por medio de un filtro no lineal se puede recuperar la señal de Información, continuamente de la forma de onda modulada. La selección apropiada del canal de comunicación y el parámetro de modulación pueden asegurar la sincronización en el receptor [49].

Dentro del bloque transmisor para realizar la modulación se debe inyectar la señal de información por medio de un amplificador operacional utilizando la configuración seguidor de voltaje y una resistencia de modulación. El voltaje de la señal de información debe tener ciertas características en amplitud, de tal forma que no excedan los límites en amplitud de la señal caótica y además mantener el comportamiento caótico del oscilador.

### 3.3 Portadoras caóticas

Los esquemas de comunicaciones digitales convencionales hasta ahora usaban señales senoidales obteniendo buenos resultados, además de tener la ventaja de una fácil implementación. En cambio cuando se usa una portadora senoidal, la potencia transmitida se concentra en una estrecha banda, dando lugar a una densidad espectral de potencia y esto implica una serie de desventajas.

El nuevo sistema, en cambio, no utiliza una portadora periódica, sino una portadora caótica, cuya amplitud oscila de forma irregular en el tiempo. Utilizando esta portadora, se podría transmitir información de forma privada a través de la red de fibra óptica instalada en cualquier ciudad del mundo, y esa información puede recuperarse, tras recorrer centenares de kilómetros, con un número muy pequeño de errores.

El mensaje se extrae en el punto de recepción respondiendo a la portadora caótica mediante un dispositivo prácticamente idéntico al emisor. El receptor se sincroniza a la portadora caótica del emisor, lo que permite recuperar el mensaje. Además, esta técnica de codificación es compatible con las técnicas tradicionales de encriptación por software, lo que proporciona un nivel de seguridad adicional.

La propiedad de sincronización se puede aprovechar para la utilización de señales caóticas como portadoras para ocultar mensajes de baja intensidad. Si el mensaje y la portadora se superponen en el momento de la emisión, el mensaje queda oculto y puede ser transmitido por un canal público con seguridad. En el canal público sólo se verá una señal con el aspecto aleatorio característico del caos determinista. Si esta señal transmitida es capaz de inducir la sincronización de un sistema caótico idéntico al emisor que se encuentre en el lugar de recepción, la señal portadora podrá reproducirse en el sistema receptor. Una vez reproducida la portadora, un procedimiento inverso al utilizado para la superposición podrá ser utilizado para recuperar el mensaje [42].

Este cambio en el paradigma de transmisión podría afectar tanto a la señal portadora, que pasaría a ser una señal caótica, como a la técnica de codificación de mensajes, para lo que se aprovecharía la estructura fractal del atractor caótico. Por lo que se refiere a la portadora, el ancho de banda de una portadora caótica es superior al de una portadora periódica lo que se traduce en que puede llegar a transmitirse una mayor cantidad de información por unidad de tiempo.

### 3.4 Ventajas y desventajas del uso de los sistemas caóticos en las telecomunicaciones

A continuación se discuten las principales ventajas e inconvenientes de los sistemas de comunicaciones caóticas. Debe considerarse que las comunicaciones caóticas difieren mucho de ser un área madura de investigación, por ese motivo la mayor parte de las ventajas enumeradas que pueden considerarse potenciales, son puramente teóricas o han sido confirmadas únicamente en condiciones experimentales. Algo parecido ocurre con sus desventajas, es posible que muchas de ellas no sean dificultades serias reales siendo resueltas tal vez a corto o medio plazo. Aun así, aunque en la actualidad el rendimiento de los sistemas caóticos no sea tan competitivo con el uso de los sistemas convencionales puede llegar a tener una buena evolución futura.

Las señales caóticas son señales generadas por sistemas estrictamente deterministas pero que presentan muchas características propias de señales puramente aleatorias. Esta naturaleza dual, determinista/aleatoria, provoca que exhiban una combinación de propiedades típicas de ambas clases de señales, de las cuales resultan interesantes en el ámbito de las comunicaciones las siguientes:

1. La posibilidad de generarlas mediante reglas deterministas muy simples, especialmente en el caso de señales discretas.
2. Su sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, a los parámetros del sistema generador e incluso a la implementación, que se manifiesta en la capacidad de generar secuencias completamente diferentes a medio y largo plazo realizando cambios mínimos en el sistema caótico.
3. Su aspecto similar al ruido blanco, con una función de autocorrelación de tipo impulsivo (esto es, con una caída muy rápida, típicamente exponencial) y una densidad espectral de potencia continua y de banda ancha (es decir, con una distribución de potencia que decae muy lentamente con la frecuencia y que muestra una cantidad de potencia significativa a lo largo de un amplio rango de frecuencias).

4. Además, la baja correlación cruzada entre señales caóticas permite diseñar sistemas de acceso múltiple caóticos similares a CDMA, con las ventajas que esto supone frente a otras alternativas de acceso multiusuario (como FDMA o TDMA) [50].
5. Aumento de la capacidad del sistema (se ha estimado que la capacidad de una red celular basada en CDMA es entre 3 y 7 veces superior a la de una red basada en TDMA, con mayor flexibilidad a la hora introducir nuevos usuarios.
6. Simplificación del diseño del sistema celular, ya que se trata generalmente de redes de una sola frecuencia, de modo que se elimina el costoso proceso de planificación de frecuencias necesario en redes celulares basadas en FDMA o TDMA.
7. Capacidad de promedio de la calidad de los distintos usuarios. Puesto que todos los usuarios usan todo el ancho de banda del canal durante todo el tiempo, no existe el peligro de que la calidad de un usuario se vea degradada por utilizar un recurso (ranura temporal o de frecuencias) que presente peores características: en promedio la calidad experimentada por todos los usuarios es la misma.

Por último, los sistemas de comunicaciones caóticas presentan una serie de ventajas potenciales adicionales con respecto a los sistemas convencionales de espectro ensanchado que justifican el reciente interés por los mismos:

1. La mejora en la seguridad respecto a los sistemas de ensanchado convencionales, debido a la aperiodicidad de las señales caóticas y a su sensibilidad a las condiciones iniciales, que dificulta enormemente su estimación por parte de un usuario no deseado ("eavesdropper") en condiciones de baja relación señal a ruido [51].
2. La capacidad de generación de un gran número de formas de onda diferentes de manera muy sencilla a partir de un único sistema caótico gracias a la sensibilidad a las condiciones iniciales.
3. La posibilidad de integración de las funciones de modulación y ensanchamiento espectral, así como la facilidad de generación de las señales caóticas utilizando circuitos de bajo costo y consumo.

Desafortunadamente, del mismo modo que los sistemas de comunicaciones caóticas presentan importantes ventajas, también existen numerosos problemas e inconvenientes. Probablemente el reto más importante a la hora de conseguir sistemas de comunicaciones caóticas competitivos y robustos sea la sincronización. Al igual que en el caso de los sistemas de comunicaciones convencionales, los receptores óptimos para los distintos sistemas de comunicaciones caóticas (receptores coherentes) requieren una copia exacta de las posibles formas de onda transmitidas (funciones base). Debido a la

aperiodicidad de las señales caóticas no es posible disponer de un conjunto de muestras de dichas formas de onda almacenado en el receptor con el que correlacionar la señal recibida convenientemente muestreada. Asimismo, la extrema sensibilidad característica de los sistemas caóticos te hace desistir tratar de regenerar las señales caóticas en el receptor de manera autónoma. En consecuencia, las únicas alternativas viables en un sistema práctico parecen ser utilizar receptores no coherentes o recurrir a lo que se habló en el capítulo 2 sincronización caótica.

### 3.5 Ancho de Banda en los sistemas caóticos aplicados a las telecomunicaciones

En sistemas digitales, el ancho de banda digital es la cantidad de datos que pueden ser transportados por algún medio en un determinado período de tiempo (generalmente segundos). Por lo tanto a mayor ancho de banda, mayor transferencia de datos por unidad de tiempo (mayor velocidad).

El caos ha sido principalmente atractivo para encriptar información debido a que las señales que generan los sistemas caóticos tienen un ancho de banda infinito, y son deterministas, pues dependen del sistema y su condición inicial.

Uno de los principales problemas es la necesidad de conocer y estimar el ancho de banda de las señales caóticas transmitidas, para lo cual no existen herramientas formales y debe recurrirse a simulaciones en la mayor parte de los casos.

### 3.6 Encriptación caótica

En los últimos años, se ha puesto especial atención en el uso del caos en las comunicaciones, por ejemplo transacciones seguras en Internet, privacidad en telefonía, televisión de paga, etc. En este caso se usan los sistemas caóticos para esconder información que se quiere mantener privada, ya que las señales caóticas se comportan erráticamente y parece que se está enviando sólo ruido en vez de información.

De esta manera se crea una disciplina que se llama criptografía, que en resumen es un junto de técnicas para la escritura secreta u oculta.

Debido a que los sistemas caóticos evolucionan aleatoriamente y generan oscilaciones de muchas frecuencias (1Hz-miles de Hz), se pueden agregar mensajes que sólo describen comportamiento en número limitado de frecuencias (por ejemplo la voz humana evoluciona entre 300Hz – 4 KHz) y de esta manera no se notará el mensaje en la transmisión [52].

Por ejemplo, en la actualidad suele ser raro quien no usa algún tipo de tarjetas que contienen información cifrada (oculta), para tener acceso a dinero de cajeros. Estas



tarjetas contienen información escondida en una banda, la cual es sólo visible para el lector del cajero que funciona como una caja con una cerradura y la clave del usuario es la llave que abre esa caja.

Existe otro tipo de encriptación de datos que en la actualidad tiene mucho auge, como lo son los correos electrónicos los cuales piden una clave exclusiva de quien hace uso de ellos y la cual es oculta mediante un tipo de cifrado, que no permite que la información sea visible a otras personas; por último también se puede dar uso en el cifrado de imágenes, tal es el caso de la televisión de paga, la cual sólo puede ser vista por quien tiene el decodificador para poder ver la información. Con base en el último ejemplo hagamos de nuevo la analogía de la cerradura, en éste caso el decodificador (receptor de la señal de TV de paga) es la llave, la televisión sería la caja con la cerradura y sus programas favoritos, serían el tesoro resguardado por la cerradura, sin la llave adecuada el usuario no podría gozar de las imágenes, el proceso que permite obtener la información mediante la llave, es denominado decodificación.

El uso de la idea de sincronización de sistemas caóticos en la encriptación y/o envío codificado de señales se debe al trabajo de Cuomo y Oppenheim en 1993 quienes mostraron como un emisor puede enmascarar una señal arbitraria con una señal transmitida caótica y transmitirla públicamente sin necesidad de ningún proceso de codificación, porque al ser la señal transmitida caótica esta es invulnerable a esquemas clásicos de decodificación ya que todas las herramientas lineales dan resultado nulo; por ejemplo una señal caótica tiene un ancho espectral que no permite diferenciarla del ruido. El proceso de decodificación de la señal viene dado justamente por la sincronización adecuada del decodificador caótico con el codificador [52].

Los dos métodos teórico-experimentales que más se citan en la actualidad para enviar mensajes encriptados a nivel laboratorio [53-58] son sumar la señal caótica a la de información o enviar la primera cuya forma de onda sea generada obedeciendo a un valor paramétrico seleccionado por un estado binario que se desea encriptar. Lo interesante es que la efectividad de ambos métodos requiere y depende de la sincronización entre un circuito caótico transmisor, original, y otro caótico receptor, copia fiel del primero, y los cuales deben mantenerse sincronizados durante el proceso de envío del mensaje encriptado. En particular, este proceso puede realizarse a través de una o dos líneas de comunicación.

Cada vez con mayor intensidad, la información es procesada electrónicamente y transmitida a través de canales públicos. Uno de los grandes apogeos en la ya larga historia de la criptografía fue su dedicación a las comunicaciones de carácter civil, cosa que ocurrió de forma progresiva en la década de los años 60 y que culminó en los años 70 con el desarrollo y adopción del Data Encryption Standard (DES) para usos no militares. El otro gran apogeo fue, por supuesto, la invención de la criptografía pública en 1975-76. Así, pues, de ser una actividad sometida al secreto militar, la criptografía pasó en pocos años a ser una disciplina académica y, por consiguiente, a beneficiarse de la dedicación de una cada vez más numerosa comunidad de expertos.

Con la aparición de la teoría del caos primero y, sobre todo, con el descubrimiento de la sincronización del caos, se formulan gran cantidad de cifradores que, de una u otra manera y, en general, con poco rigor criptoanalítico, explotan las buenas propiedades de confusión y difusión de las aplicaciones caóticas. En consecuencia, las señales resultantes de sistemas caóticos son de banda ancha, impredecibles en la práctica a medio y largo plazo (debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales) y sus propiedades estadísticas son aleatorias a todos los efectos prácticos, a pesar de ser deterministas.

En nuestros días, los sistemas de mayor difusión y amplio uso para encriptar información se basan en criptografía digital. Dicha masificación se justifica por la facilidad de implementación en arquitecturas digitales y que ofrecen una recuperación perfecta de la información. Sin embargo, recientemente, y ante la vulnerabilidad que han mostrado algunos de estos métodos, se realizan esfuerzos por generar sistemas de criptografía basados en señales análogas, los cuales prometen tener una mayor seguridad, debido a la alta redundancia y a la posibilidad de transmisión por medios diferentes a las redes de datos convencionales. Entre los sistemas de encriptación analógica se destacan los basados en caos [53-55] y los que emplean transformadas [56, 57].

Los sistemas de encriptación caos fueron propuestos inicialmente por Pecora y Carroll en 1990 [53], como resultado del descubrimiento de la posibilidad de sincronización de dos sistemas caóticos. Aunque la confiabilidad y seguridad de este y otros sistemas [54] ha sido debatida por ciertos autores [58], han aparecido recientes esquemas de encriptación basados en hipercaos y observadores lineales [55] que vislumbran ser más robustos y confiables que sus predecesores.

La importancia de los sistemas caóticos en las telecomunicaciones nos brinda un esquema general de las ventajas y desventajas que podemos encontrar al momento de utilizar portadoras, encriptación caóticas, de la misma forma que repercute en el ancho de banda es por ello que en el siguiente capítulo se analizarán diferentes circuitos caóticos para poder entender de mejor forma el comportamiento de estos modelos.



# Capítulo 4

---

## Análisis de Circuitos generadores de caos

*"Con números se puede demostrar cualquier cosa"*  
*Thomas Carlyle*

En este capítulo se describirán algunos de los circuitos generadores de caos, también llamados osciladores caóticos, así como también su análisis matemático de cada uno de ellos, obteniendo su descripción mediante sus respectivas ecuaciones de estado.

## 4.1 Circuitos Generadores de Caos

Los circuitos generadores de caos son circuitos los cuales tienen como característica un comportamiento complejo aparentemente impredecible y extremadamente sensible a las condiciones iniciales. Estos circuitos están basados en una dinámica no lineal y por lo regular describen un atractor extraño.

Algunos de los circuitos que podemos encontrar se obtienen a partir de sistemas de ecuaciones diferenciales, ya que es una forma de modelar un sistema no lineal. Existen tres tipos principales de circuitos generadores de caos, el circuito de Lorenz, Chua y Rössler.

El modelo de Lorenz fue descrito por Edward Lorenz en 1963 y aplicando sus conocimientos a la meteorología obtuvo tres ecuaciones bien definidas, por otra parte Otto Rössler el 1976, encontró un modelo teórico para el equilibrio de reacciones químicas, para poder modelar estos sistemas en circuitos electrónicos se utilizaron técnicas como variable de estado, ecuaciones diferenciales, convertidores de impedancia. Por su parte Leon O. Chua diseñó un elemento no lineal que junto con un oscilador amortiguado crea toda una familia de atractores extraños.

## 4.2 Circuito de Chua

En 1971, León Chua diseñó un dispositivo electrónico no lineal al cual llamó memristor [59], es un elemento de dos terminales caracterizado por una relación entre la carga y el flujo magnético, es también llamado Diodo de Chua y su comportamiento es muy diferente a los demás elementos básicos de un circuito, como el resistor, inductor y capacitor. En 1985 Matsumoto [60] simuló el diodo de Chua y después se analizó en el laboratorio por Zhong [61, 62].

El circuito de Chua (ver figura 4.1) está formado por dos capacitores, un inductor, un resistor que por una parte conforma lo que es un oscilador amortiguado y por el otro lado consta de un dispositivo no lineal, el cual hace autónomo al circuito, es decir no necesita de una fuente externa para poder alimentar al resto del circuito, este dispositivo mantiene retroalimentado y oscilando al circuito.

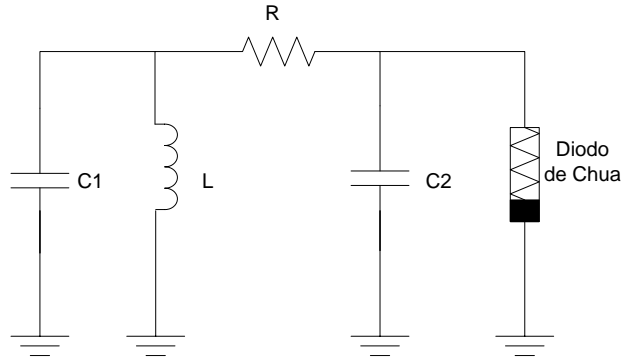


Fig. 4.1 Circuito de Chua

Para el análisis del circuito orientamos las corrientes como en la figura 4.2.

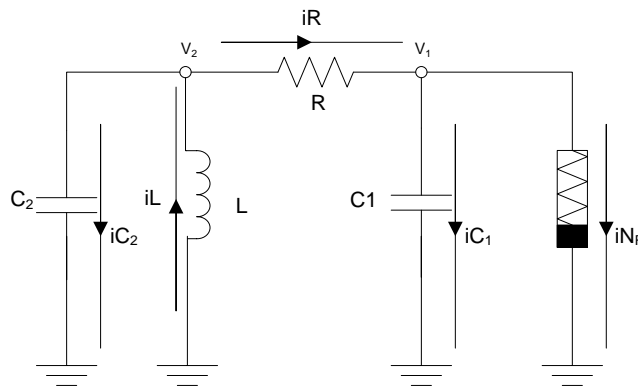


Fig. 4.2 Orientación de corrientes en el circuito de Chua.

Haciendo el análisis por nodos obtenemos las siguientes tres ecuaciones:

$$-i_L - i_{C_2} + i_R = 0 \tag{4.1}$$

$$-i_R + i_{C_1} + i_{NR} = 0 \tag{4.2}$$

$$-i_L + i_{C_2} + i_{C_1} + i_{NR} = 0 \tag{4.3}$$

Posteriormente se pasan a ecuaciones integro-diferenciales.

De Ec. 4.1

$$-\frac{1}{L} \int v(t) dt + C_2 \frac{dv(t)}{dt} + Ri(t) = 0$$

$$i = G_1 \cdot V \quad \therefore \quad Ri(t) = G(V_2 - V_1)$$

$$C2 = \frac{dv(t)}{dt} = G(V_2 - V_1) + iL \tag{4.4}$$

De Ec. 4.2

$$\begin{aligned}
 -G(V_1 - V_2) + C_1 \frac{dv(t)}{dt} + i_{NR} &= 0 \\
 C_1 \frac{dv(t)}{dt} &= G(V_1 - V_2) - i_{NR}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

De Ec. 4.3

$$\frac{1}{L} \int v(t) dt + C_2 \frac{dv(t)}{dt} + C_1 \frac{dv(t)}{dt} + i_{NR} = 0 \tag{4.6}$$

Sustituimos de Ec. 4.4 y Ec. 4.2 a en Ec. 4.6

$$\begin{aligned}
 i_L + G(V_2 - V_1) + \frac{1}{L} \int v(t) dt + G(V_1 - V_2) - i_{NR} + i_{NR} &= 0 \\
 i_L + G(V_2 - V_1) + \frac{1}{L} \int v(t) dt + G(V_1 - V_2) &= 0 \\
 i_L + \frac{1}{L} \int v(t) dt &= -G(V_2 - V_1) - G(V_1 - V_2) \\
 i_L + \frac{1}{L} \int v(t) dt &= -GV_2 + GV_1 - GV_1 + GV_2 \\
 i_L + \frac{1}{L} \int v(t) dt &= 0 \\
 \frac{di(t)}{dt} &= -\frac{V}{L}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Finalmente obtenemos el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}
 C_2 \frac{dv(t)}{dt} &= G(V_2 - V_1) + iL \\
 C_1 \frac{dv(t)}{dt} &= G(V_1 - V_2) - i_{NR} \\
 \frac{di(t)}{dt} &= -\frac{V}{L}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

### 4.2.1. Tipos de diodos de Chua

Actualmente encontramos diversos arreglos en circuitos para obtener el comportamiento del diodo de Chua, en este proyecto analizamos tres diferentes circuitos.

El primer análisis es utilizando un solo amplificador operacional, por comodidad analizamos este circuito (ver figura 4.3) utilizando impedancias.

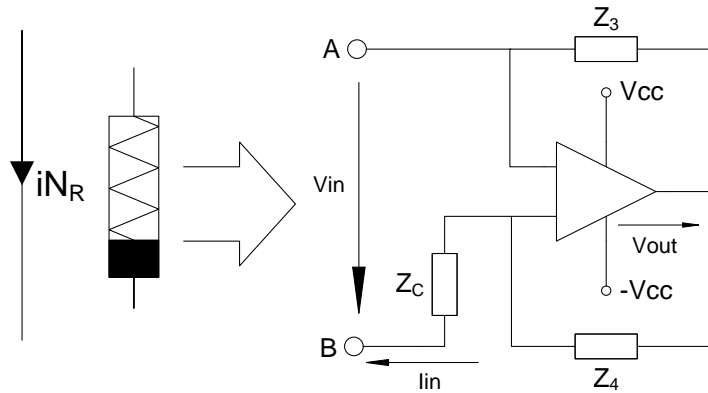


Fig. 4.3 Circuito equivalente al diodo de Chua utilizando un OPAM en régimen no lineal

Análisis del Diodo de Chua con un solo amplificador.

Para obtener la salida de voltaje máxima en el operacional cuando tenemos una entrada máxima de voltaje en la entrada del circuito, tenemos:

$$I_1 = \frac{V_{in}}{Z_C} \quad V_{out} = I_1(Z_4 + Z_C) \quad (4.9)$$

$$V_{out} = \frac{V_{in}(Z_4 + Z_C)}{Z_C}$$

Ahora que conocemos  $V_{out}$  que es el voltaje máximo en el operacional, también conocemos el voltaje máximo  $V_{in}$ .

Mientras que el máximo aun no es alcanzado, calculamos  $V_{in}$ .

$$V_{in} = I_{in}(Z_5 + Z_3) + V_{out}$$

$$V_{in} = I_{in}(Z_5 + Z_3) + \frac{V_{in}(Z_4 + Z_C)}{Z_C} \quad (4.10)$$

Simplificando, multiplicando por  $Z_C$

$$\begin{aligned}
 V_{in}Z_C &= I_{in}(Z_5 + Z_3)Z_C + V_{in}Z_4 + V_{in}Z_C \\
 V_{in}Z_C - V_{in}Z_4 - V_{in}Z_C &= I_{in}(Z_5 + Z_3)Z_C \\
 -V_{in}Z_4 &= I_{in}(Z_5 + Z_3)Z_C \quad V = IR \quad \therefore \quad \frac{V}{I} = R
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

Finalmente obtenemos:

$$-\frac{V_{in}}{I_{in}} = \frac{(Z_5 + Z_3)Z_C}{Z_4} = NR
 \tag{4.12}$$

Análisis del Diodo con un limitador polarizado en serie y un amplificador operacional.

En la Figura 4.4 tenemos el circuito equivalente del diodo de Chua NR, que consta de un circuito limitador polarizado en serie y un arreglo con un amplificador operacional.

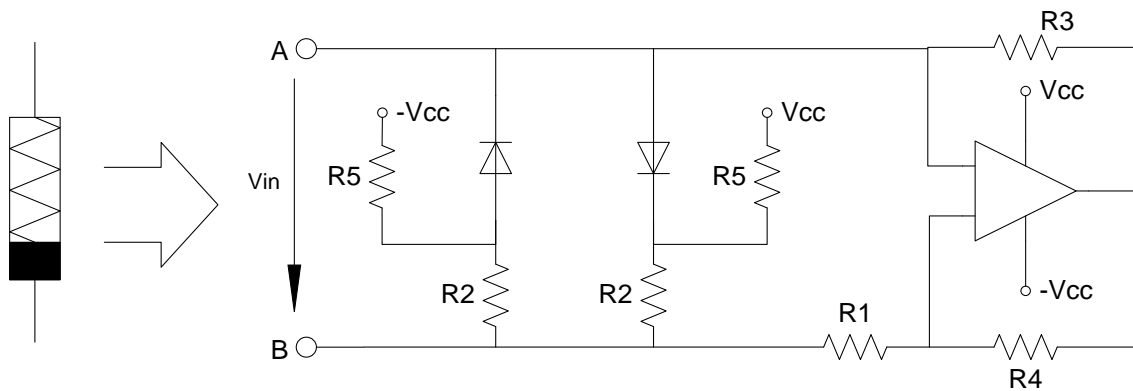


Fig. 4.4 Circuito equivalente al Diodo de Chua

Para el análisis del diodo dividimos el circuito en dos segmentos, para que satisfaga la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{NR} = \frac{1}{R_{eq1}} + \frac{1}{R_{eq2}}
 \tag{4.13}$$

En la fig. 4.5 se presenta el primer segmento del diodo de Chua como un circuito limitador polarizado en serie.



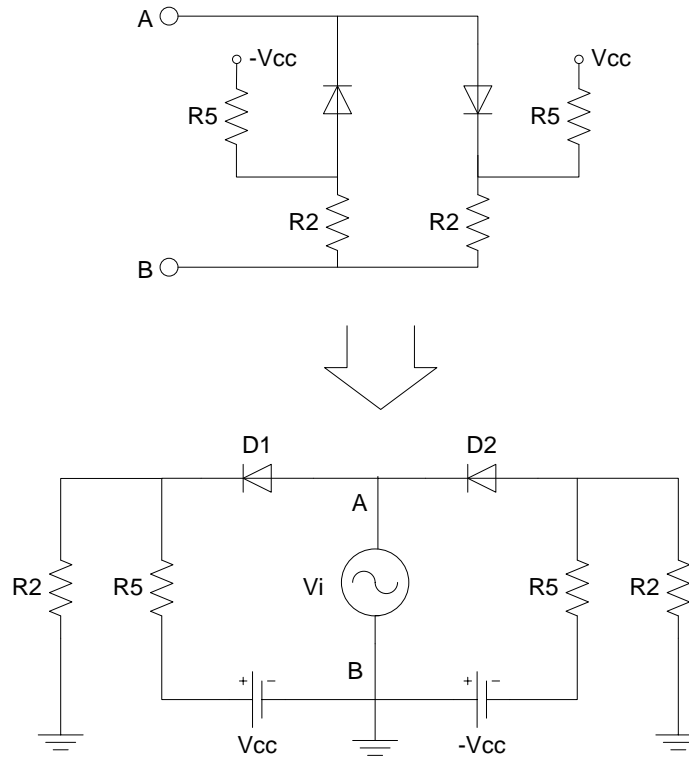


Fig. 4.5 Primer segmento del diodo de Chua (circuito limitador polarizado en serie)

Para obtener la resistencia equivalente en este circuito utilizamos Thevenin, y calculamos la  $R_{Th}$  poniendo todas las fuentes en corto circuito, polarizando D1 en directa y D2 en inversa y hacemos el mismo análisis cuando D1 se polariza en inversa y D2 en Directa.

$$R_{Th} = R_{eq1} = R_2 \quad (4.14)$$

Para analizar el segundo segmento tomamos como referencia la figura 4.6. Cuando el amplificador operacional se satura o alcanza su máximo voltaje tenemos:

$$I_2 = \frac{V_{in}}{R_1} \quad (4.15)$$

$$V_{out} = I_2(R_4 + R_1) \therefore \frac{V_{in}}{R_1}(R_4 + R_1) \quad (4.16)$$

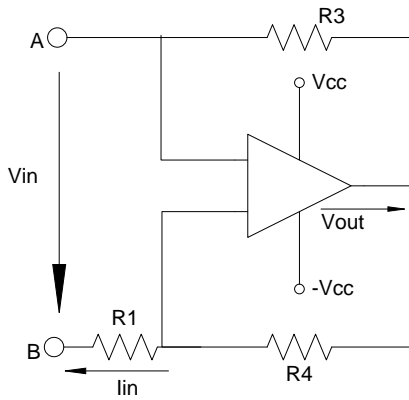


Fig. 4.6 Segundo segmento del diodo de Chua.

Tomando como referencia Ec. 4.16. Cuando el amplificador operacional no alcanza su máximo.

$$V_{in} = I_{in}(R_3) + V_{out} = I_{in}(R_3) + \frac{V_{in}}{R_1}(R_4 + R_1) \quad (4.17)$$

Multiplicamos Ec. 4.17 por  $R_1$  para simplificar.

$$\begin{aligned} R_1 V_{in} &= I_{in} R_3 R_1 + V_{in} (R_4 + R_1) \\ R_1 V_{in} - V_{in} R_4 - V_{in} R_1 &= I_{in} R_3 R_1 \end{aligned}$$

$$\frac{V_{in}}{I_{in}} = -\frac{R_3 R_1}{R_4} \quad (4.18)$$

Como  $R_3 = R_4$  tenemos:

$$\frac{V_{in}}{I_{in}} = R_{eq2} = -R_1 \quad (4.19)$$

Finalmente sustituimos Ec. 4.19 y Ec. 4.14 en Ec. 4.13

$$\frac{1}{NR} = \frac{1}{R_{eq1}} + \frac{1}{R_{eq2}} = -\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \quad (4.20)$$

La Curva característica del circuito es mostrada en la figura 4.7.

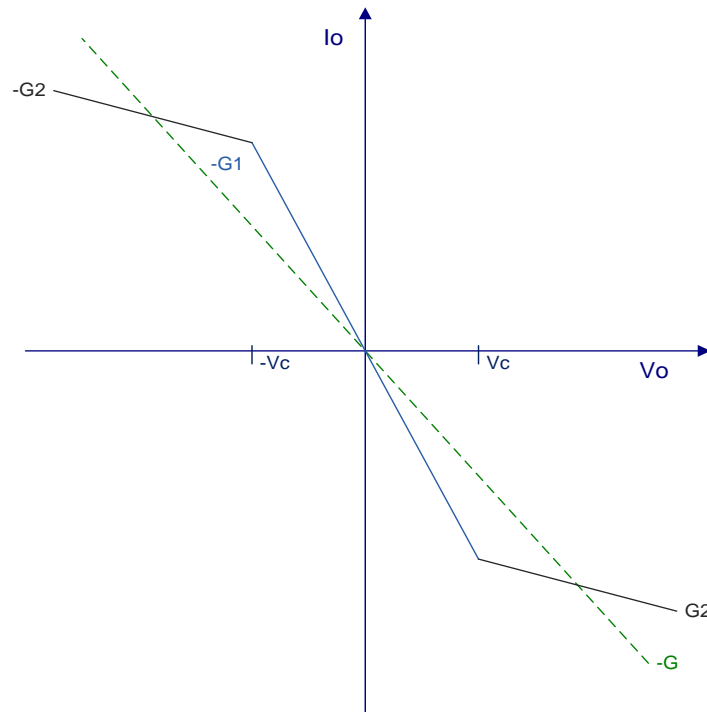


Fig. 4.7 Curva del Diodo de Chua.

Los resultados del análisis anterior modelan el comportamiento de esta gráfica de tal forma que tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
 -G &= -\frac{1}{R} \\
 -G1 &= -\frac{1}{R_1} \\
 -G2 &= -\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}
 \end{aligned}
 \tag{4. 21}$$

Análisis del Diodo de Chua con dos amplificadores operacionales

$$I_1 = \frac{V_{in}}{R_7} \quad \therefore \quad V_{out} = I_1 (R_6 + R_7) = \frac{V_{in}}{R_7} (R_6 + R_7)$$

$$V_{in} = I_{in} R_5 + V_{out} = I_{in} R_5 + \frac{V_{in}}{R_7} (R_6 + R_7)$$

Multiplicando por  $R_7$

$$\begin{aligned}
 V_{in} R_7 &= I_{in} R_5 R_7 + V_{in} R_6 + V_{in} R_7 \\
 V_{in} R_7 - V_{in} R_6 - V_{in} R_7 &= I_{in} R_5 R_7
 \end{aligned}$$

$$\frac{V_{in}}{I_{in}} = -\frac{R_5 R_7}{R_6} \quad (4.22)$$

Para Voltaje Máximo de salida

$$\begin{aligned} V_{in} &= I_{in} R_5 + V_{outmax} \\ \frac{\partial V_{in}}{\partial I_{in}} &= R_5 \end{aligned} \quad (4.23)$$

### 4.3 Circuito de Rössler

El modelo de Rössler, propuesto por Otto Rössler de Tübingen en 1976, es un modelo del modelo de Lorenz que permite simplificar la estructura del atractor de Lorenz [63].

El circuito de Rössler es un circuito autónomo generador de caos, cuya característica principal es que produce un comportamiento aparentemente impredecible y describe un atractor extraño. El circuito es mostrado en la figura 4.8, y consta de un arreglo RLC y una fuente de tensión controlada ( $e$ ).

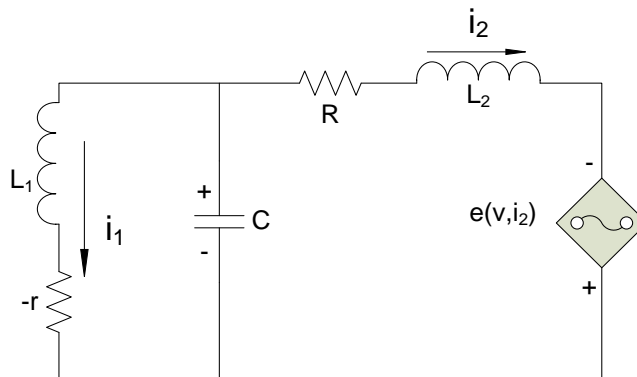


Fig. 4.8 Circuito de Rössler

Haciendo el análisis por mallas (LKV).

Analizando la primer malla.

$$0 = -V_C + V_{L_1} - V_r \quad (4.24)$$

Analizando la segunda malla

$$0 = -V_C + Ri_2 + V_{L_2} - e(v, i_2) \quad (4.25)$$

El voltaje del capacitor esta dado por:  $V_C = \frac{1}{C} \int i_1 dt = v$

De Ec. 4.24 tenemos:

$$V_{L_1} = V_C + V_r \quad \therefore \quad L_1 \frac{di_1}{dt} = v + ri_1 \quad (4.26)$$

De Ec. 4.24

$$\begin{aligned} -V_{L_2} &= -V_C + Ri_2 - e(v, i_2) \\ V_{L_2} &= V_C - Ri_2 + e(v, i_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$L \frac{di_2}{dt} = v - Ri_2 + e(v, i_2) \quad (4.27)$$

Para conocer la corriente en capacitor:

$$V_C = \frac{1}{C} \int i_1 dt = v = i_0 Z_C = (i_1 + i_2) Z_C \quad (4.28)$$

Por lo tanto

$$-i_0 = i_1 + i_2 \quad i_0 = C \frac{dv}{dt} \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (4.29)$$

Finalmente

$$C \frac{dv}{dt} = -i_1 - i_2 \quad (4.30)$$

Entonces las ecuaciones que rigen el comportamiento del circuito son:

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= -i_1 - i_2 \\ L_2 \frac{di_2}{dt} &= v - Ri_2 + e(v, i_2) \\ L_1 \frac{di_1}{dt} &= v + ri_1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

## 4.4 Convertidores de Impedancia

Los convertidores de impedancia son circuitos muy útiles para obtener el valor de un capacitor o un inductor que no se encuentra de manera comercial, utilizando un arreglo de amplificadores operacionales, resistores y capacitores. Esta clase de circuitos es muy importante al tratar de implementarse en los generadores caóticos, al no tener el valor exacto del inductor o capacitor en cuestión podemos obtener un equivalente con el convertidor de impedancia, recordemos que es útil, ya que el comportamiento caótico depende mucho de las condiciones iniciales de nuestro sistema dadas por los elementos del circuito.

Para poder obtener el valor equivalente del inductor o capacitor, debemos obtener el valor de la impedancia equivalente  $Z_{in}$ . El circuito a analizar consta de dos amplificadores operacionales y cinco impedancias (ver figura 4.9).

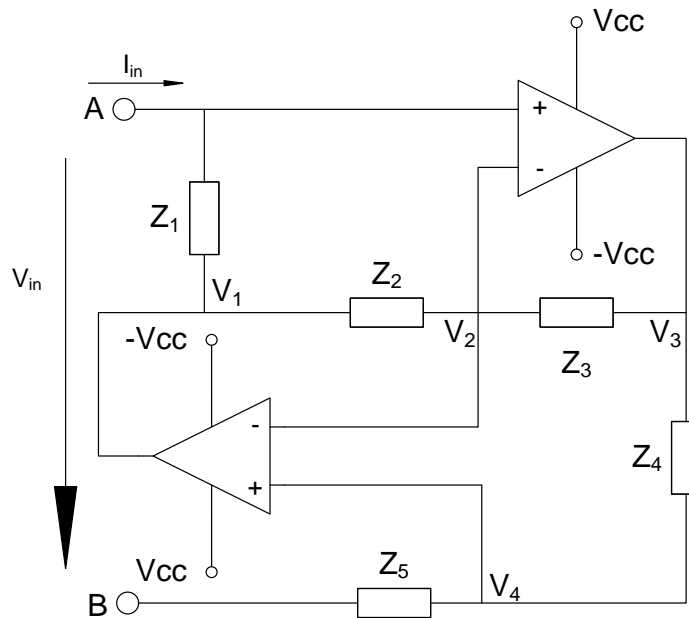


Fig. 4.9 Convertidor Generalizado de Impedancia

Considerando que tenemos amplificadores operacionales ideales y aplicando el criterio de masa virtual, tenemos que la tensión de entrada es la misma en los puntos  $V_2$  y  $V_4$ .

$$V_{in} = V_2 = V_4$$

$$I_{in} = \frac{V_{in} - V_1}{Z_1} \quad (4.32)$$

Analizando la tensión  $V_2$  y  $V_4$  tenemos que:

$$V_2 = \frac{V_1(Z_3)}{Z_2 + Z_3} + \frac{V_3(Z_2)}{Z_2 + Z_3} \quad (4.33)$$

$$V_4 = \frac{V_3(Z_5)}{Z_4 + Z_5} \quad (4.34)$$

Despejamos de Ec. 4.34 a  $V_3$ .

$$V_4(Z_4 + Z_5) = V_3(Z_5)$$

$$V_3 = \frac{V_4(Z_4 + Z_5)}{Z_5} \quad (4.35)$$

Sustituimos Ec. 4.35 en Ec. 4.33

$$V_2 = \frac{V_1(Z_3)}{(Z_2 + Z_3)} + \left( \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \right) \left( \frac{V_4(Z_4 + Z_5)}{Z_5} \right)$$

$$(Z_2 + Z_3)V_2 = V_1Z_3 + Z_2 \left( \frac{V_4(Z_4 + Z_5)}{Z_5} \right) \quad (4.36)$$

De Ec. 4.36 despejamos a  $V_1$ .

$$V_1 = \frac{(Z_2 + Z_3)V_2}{Z_3} - Z_2 \left( \frac{V_4(Z_4 + Z_5)}{Z_5 Z_3} \right) \quad (4.37)$$

Sustituimos Ec. 4.37 en Ec. 4.32

$$I_{in}Z_1 = V_{in} - \left( \frac{1}{Z_3} \right) \left( (Z_2 + Z_3)V_2 - \frac{Z_2V_4(Z_4 + Z_5)}{Z_5} \right)$$

De Ec. 4.32

$$I_{in}Z_1 = V_{in} - \left( \frac{(Z_2 + Z_3)V_{in}}{Z_3} - \frac{V_{in}Z_2(Z_4 + Z_5)}{Z_5} \right)$$

$$I_{in}Z_1 = V_{in} - \frac{V_{in}}{Z_3} \left( \frac{(Z_2 + Z_3)Z_5}{Z_5} - \frac{Z_2(Z_4 + Z_5)}{Z_5} \right) \quad (4.38)$$

Aplicando ley de ohm a Ec. 4.32

$$V = IR \quad \therefore \quad R = \frac{V}{I}$$

$$I_{in} Z_1 = V_{in} \left( \frac{Z_2 Z_4}{Z_3 Z_5} \right)$$

$$\frac{I_{in}}{V_{in}} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3 Z_5} = Y_{in} \quad Z_{in} = \frac{1}{Y_{in}}$$

Finalmente:

$$Z_{in} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} \quad (4.39)$$

De este modo es posible reemplazar el valor de un capacitor o una inductancia por medio de un arreglo de impedancias.

Una vez analizados los circuitos generadores de caos y sus ecuaciones que describen su comportamiento caótico, se muestran en el siguiente capítulo simulaciones de los mismos y algunas de sus variantes.





# Capítulo 5

---

## Circuitos de Sincronización Caótica

*"Toda la historia de la ciencia ha sido una progresiva toma de conciencia de los acontecimientos que no suceden de forma arbitraria. Sino que reflejan un cierto orden subyacente, que puede ser o no divinamente inspirado."*  
*Stephen Hawking*

En este capítulo se presentan las simulaciones de los circuitos osciladores de caos analizados en el capítulo anterior, de la misma forma también se describen algunas variantes de los circuitos generadores de caos, todos describiendo sistemas de tres grados de libertad.

### 5.1 Simulación del Circuito de Chua

Mediante el uso del software de simulación Multisim versión 10.0, se simuló el circuito de Chua y sus variantes, en las cuales se mantiene el diseño del oscilador amortiguado cambiando solo el diseño de construcción del diodo de Chua (figura 5.1).

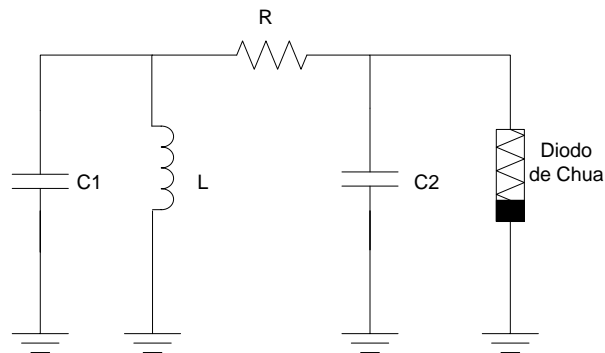


Fig. 5.1 Circuito de Chua

El primer variante consta de un oscilador amortiguado y un arreglo no lineal con un OPAM, (TLC081CD) como se muestra en la figura 5.2.

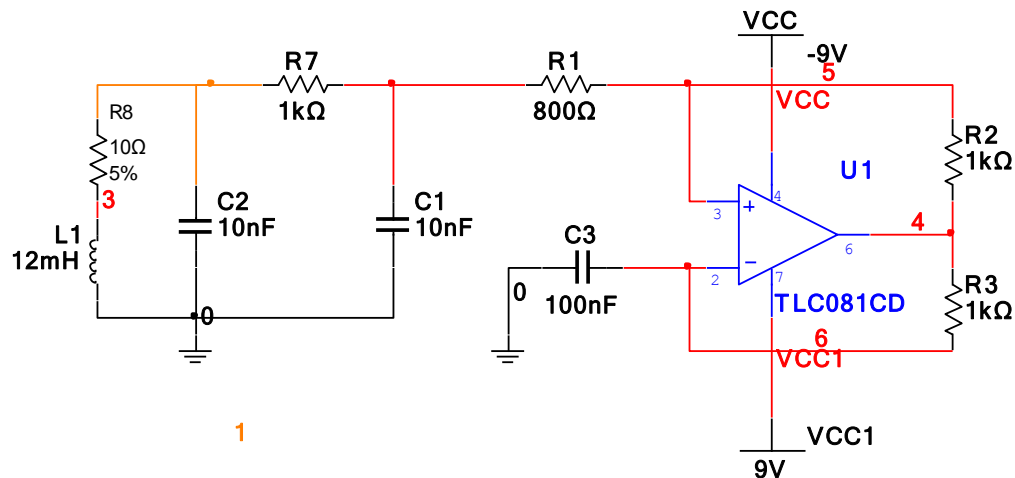


Fig. 5.2 Circuito de Chua con un OPAM

Tabla 5. 1 Componentes electrónicos del circuito de Chua utilizando un OPAM

Componente	Valor
1 OPAM	TLC081
1 Inductor	12mH
2 Capacitores	10 nF
1 Capacitor	100 nF
3 Resistores	1k $\Omega$
1 Resistor	800 $\Omega$
1 Resistor	10 $\Omega$

Obteniendo la respuesta del circuito anterior, se muestran las gráficas siguientes en la cual se observa el comportamiento caótico en los canales 1 y 2 del osciloscopio (ver figura 5.3a) y el atractor de Chua en la figura 5.3b, las cuales nos dejan ver claramente que el caos producido por este sencillo arreglo no es lo suficientemente bueno como para poder generar un atractor extraño.

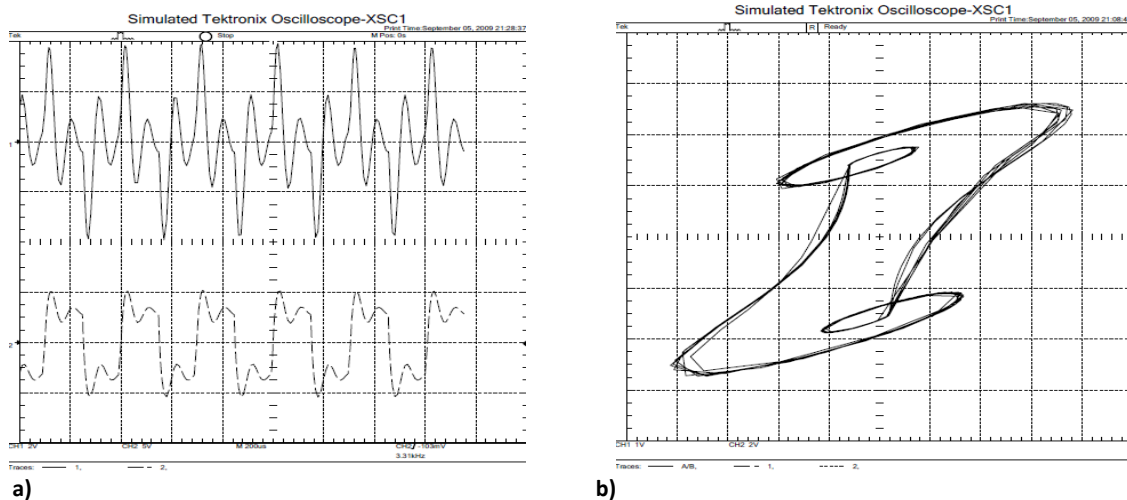


Fig. 5.3 a) Señales del Canal 1 y Canal 2 b) Señal en Modo XY

Para la simulación del diodo de Chua(figura 5.4), se coloca una resistencia de carga de 1K $\Omega$  para poder lograr ver la respuesta del circuito (ver figura 5.5a) y para obtener la gráfica característica del diodo se coloca el osciloscopio en modo XY y se invierte el canal 2 (ver figura 5.5b).

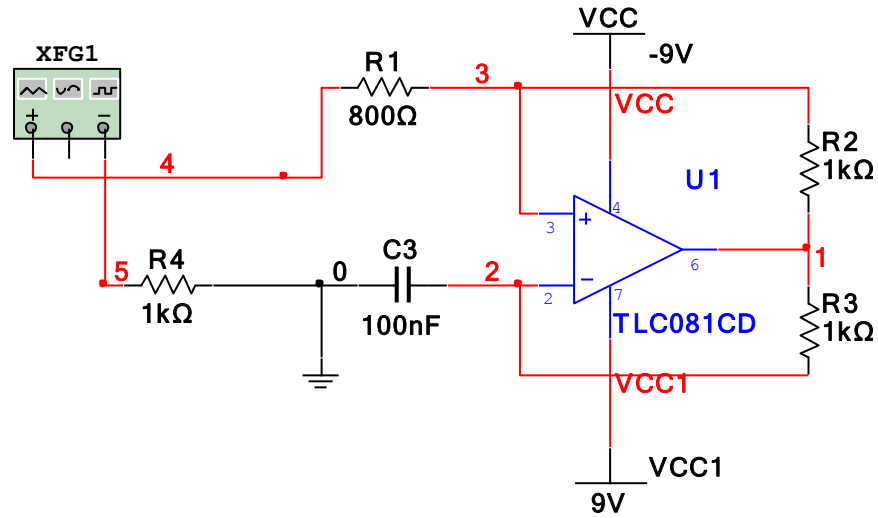


Fig. 5.4 Diodo de Chua con un OPAM

Tabla 5.2 Elementos electrónicos para el circuito de la figura 5.4

Componente	Valor
1 OPAM	TLC081
1 Capacitor	100 nF
3 Resistores	1 KΩ
1 Resistor	800Ω

Las respuestas del circuito del Diodo de Chua y su atractor se muestran a continuación:

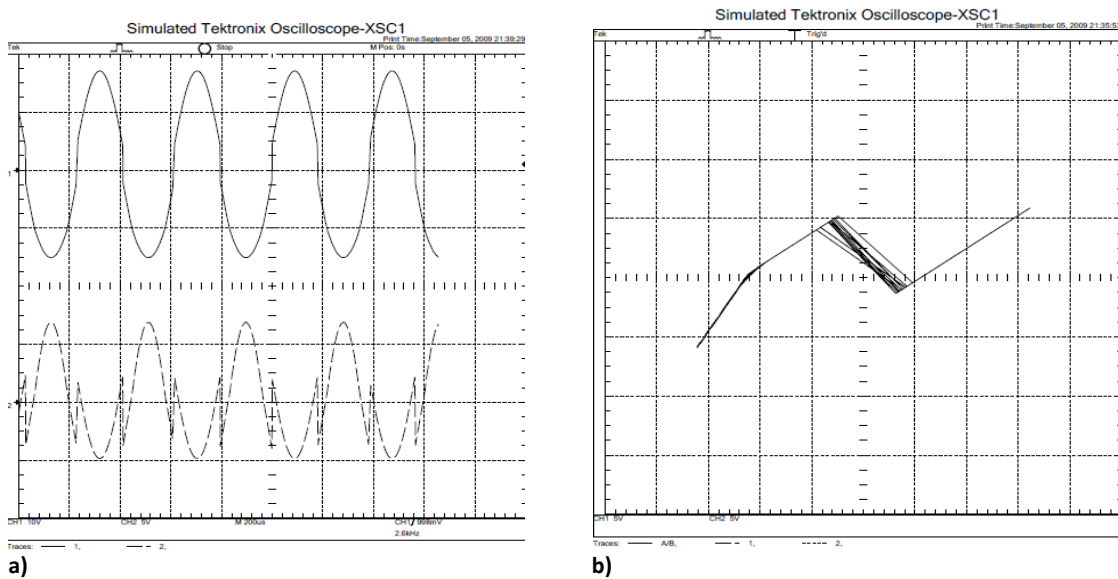


Fig. 5.5 a) Señales de respuesta del diodo b) Curva característica

Otra forma de construir el circuito de Chua es modificando el diseño del diodo, en este caso se utilizan dos amplificadores operacionales en cascada (ver Fig. 5.6), las gráficas de respuesta se muestran en las figura 5.7.

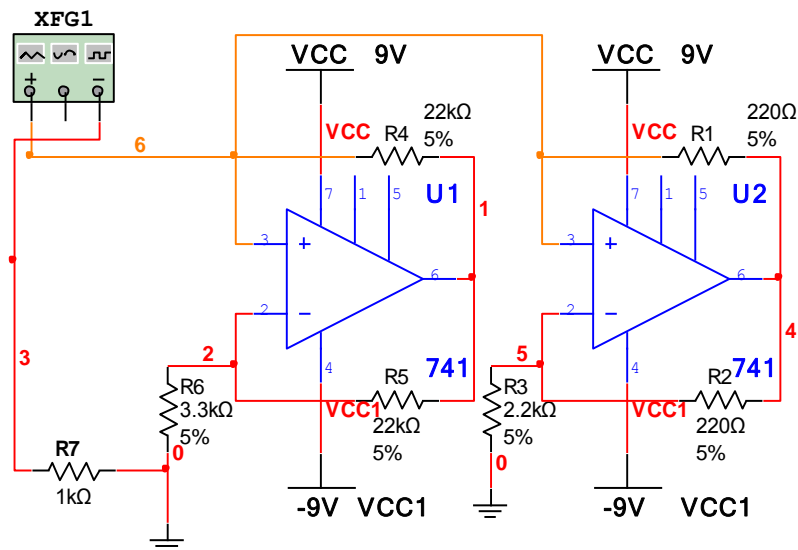


Fig. 5.6 Diodo de Chua utilizando una configuración de 2 OPAMS

Tabla 5.3 Elementos electrónicos para el circuito de la figura 5.6

Componente	Valor
2 OPAM	741
2 Resistores	22 k $\Omega$
2 Resistores	220 $\Omega$
1 Resistor	3.3 k $\Omega$
1 Resistor	1 k $\Omega$

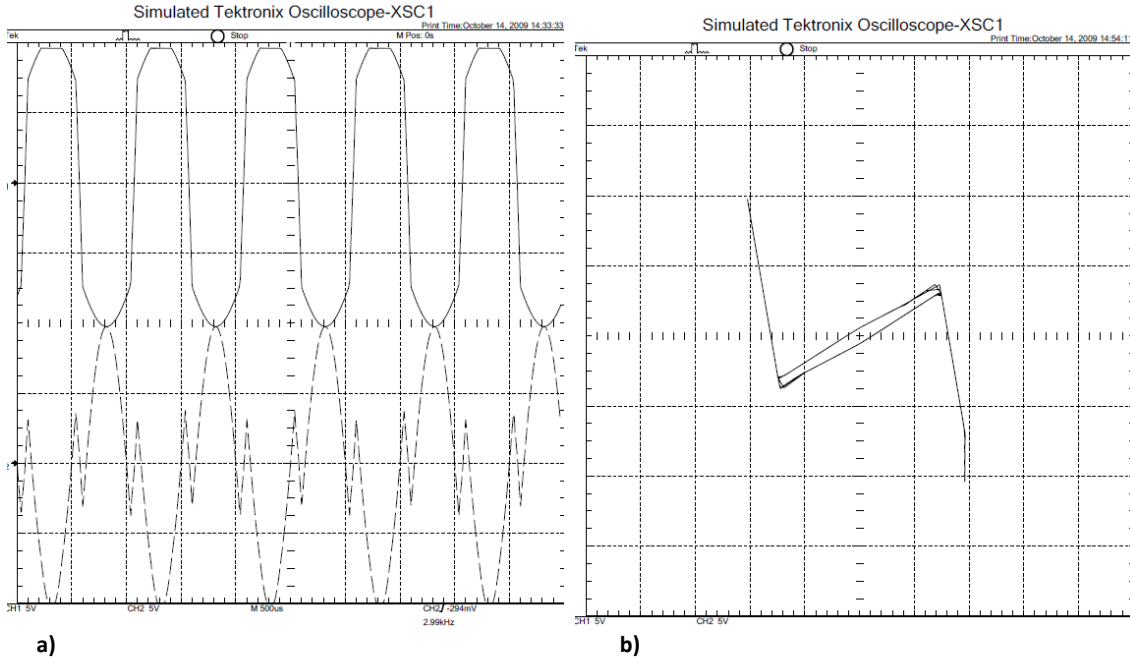


Fig. 5.7 a) Señales obtenidas del diodo de Chua. b) Curva característica del diodo de Chua.

Para el siguiente circuito se muestra un arreglo con el diodo de Chua utilizando dos amplificadores operacionales. En la simulación se usó el amplificador operacional 741 ideal como se muestra en la figura 5.8, ya que cualquier otra variante no produciría caos; de la misma forma se pueden utilizar una diversidad de amplificadores operacionales para poder retroalimentar el oscilador, como lo es el OP27, TLC081CD, LMC6482AIN, por mencionar algunos.

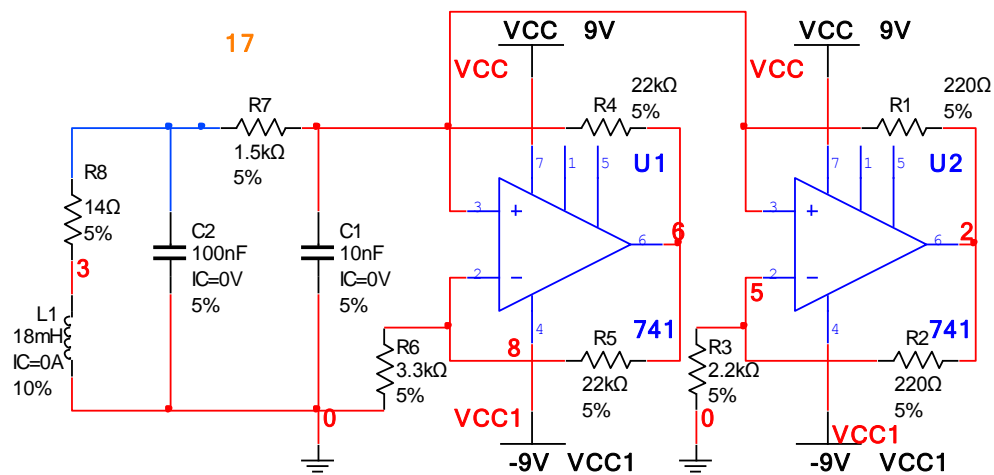


Fig. 5.8 Circuito de Chua utilizando dos OPAMS.

Tabla 5.4 Elementos electrónicos para el circuito de la figura 5.8

Componente	Valor	Componente	Valor
2 OPAMS	741	1 Resistor	3.3 k $\Omega$
1 Inductor	18 mH	1 Resistor	2.2 k $\Omega$
1 Capacitor	100 nF	1 Resistor	1.5 K $\Omega$
1 Capacitor	10 nF	1 Resistor	14 $\Omega$
2 Resistores	22 k $\Omega$	1 Resistor	3.3 k $\Omega$
2 Resistores	220 $\Omega$		

En la Figura 5.9a se muestran las señales caóticas sobre la resistencia de 1.5k $\Omega$  en los canales 1 y 2 del osciloscopio, mientras que en la figura 5.9b se muestra el atractor en el modo XY del osciloscopio.

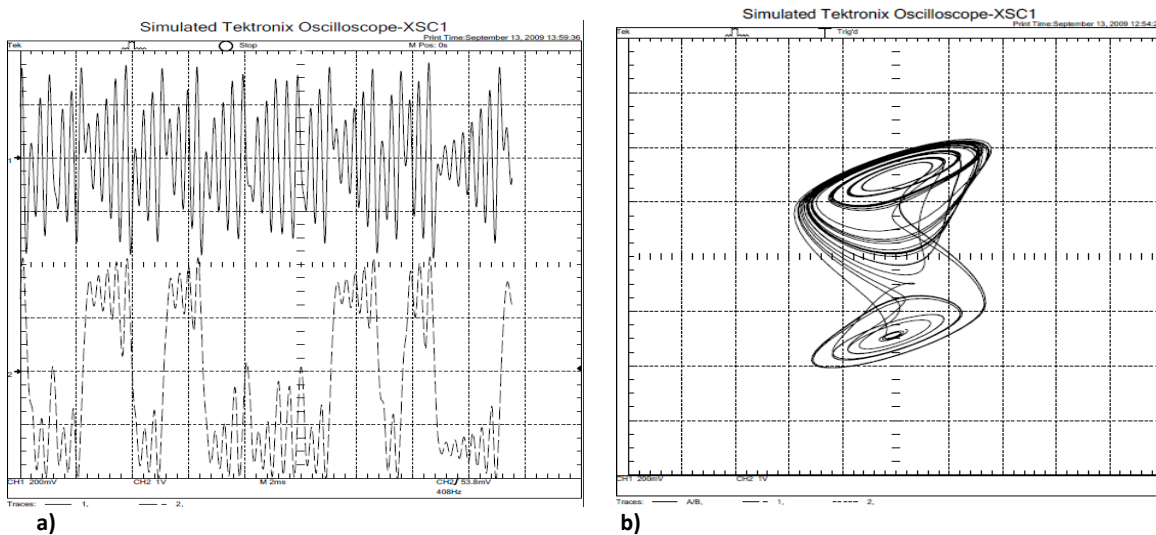


Fig. 5.9 a) Señales del Ch1 y Ch2 b) Atractor de Chua (modo XY)

El diodo mostrado en la figura 5.10 es otra variante de Chua, en la cual se utiliza un circuito limitador y un OPAM. El circuito recortador de diodo nos es útil para limitar la tensión.

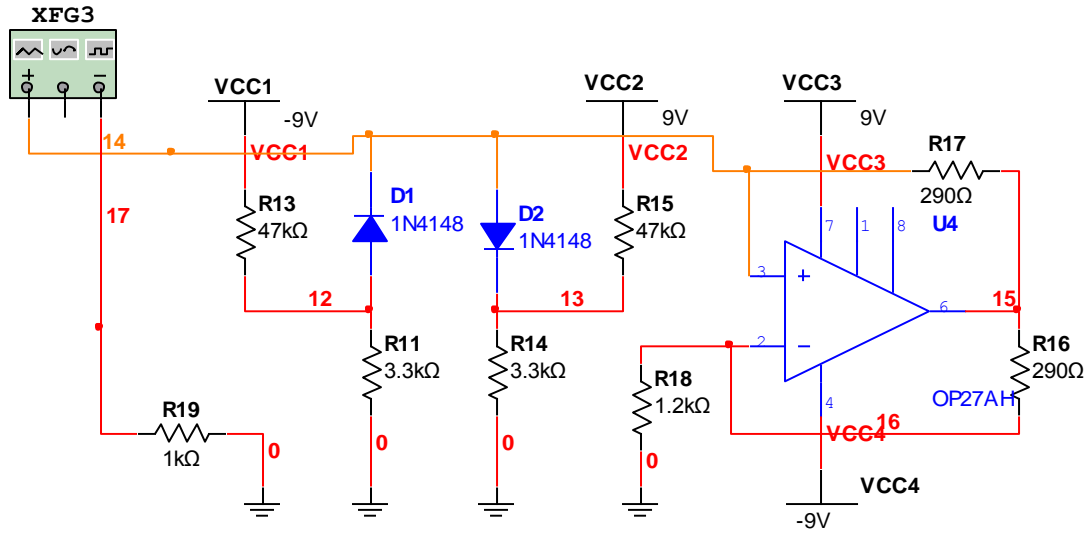


Fig. 5.10 Diodo de Chua utilizando un circuito limitador polarizado en Serie con un OPAM.

Tabla 5.5 Elementos electrónicos para el circuito de la figura 5.14

Componente	Valor	Componente	Valor
1 OPAM	OP27	2 Resistores	290 K $\Omega$
2 Diodos	1N4148	1 Resistor	1.2 K $\Omega$
2 Resistores	47 K $\Omega$	1 Resistor	1 K $\Omega$
2 Resistores	3.3 K $\Omega$	2 Resistores	290 K $\Omega$

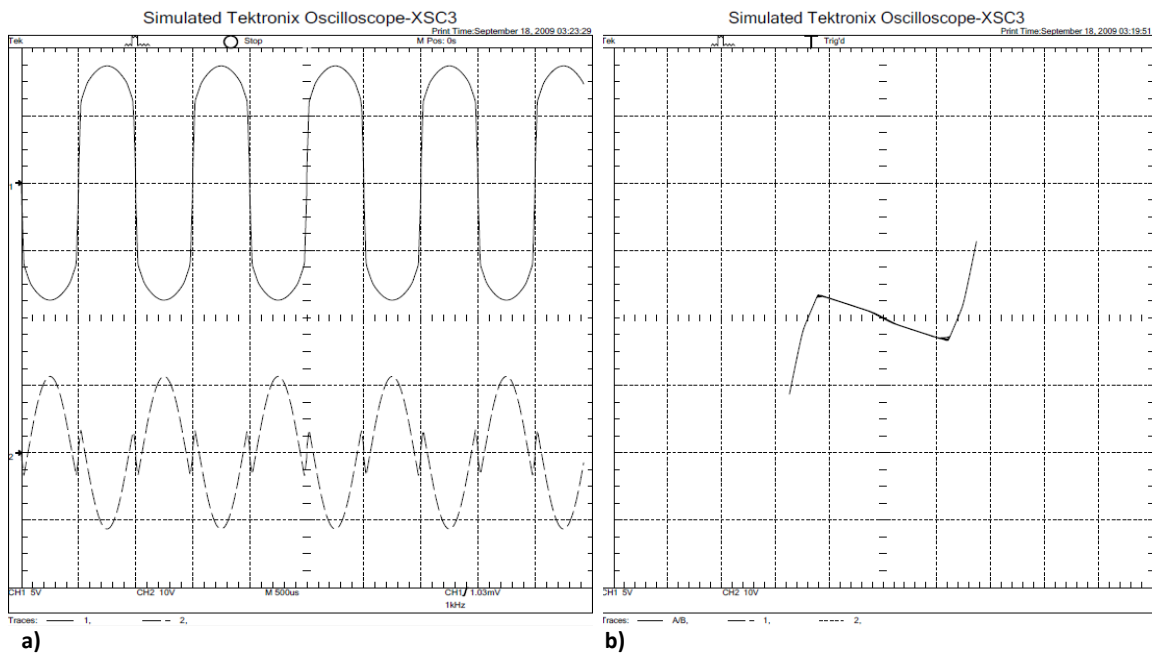


Fig. 5.11 a) Salida del circuito canales 1 y 2 b) Respuesta del diodo de Chua



En la figura 5.12 se muestra el circuito completo de Chua utilizando el diodo del circuito anterior, conservando el diseño del oscilador amortiguado, los resultados son mostrados en la figura 5.13.

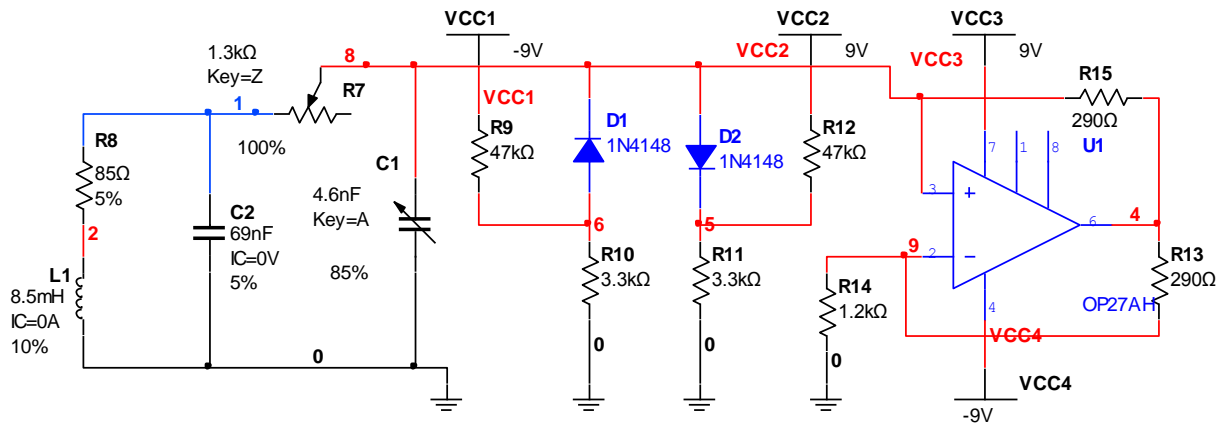
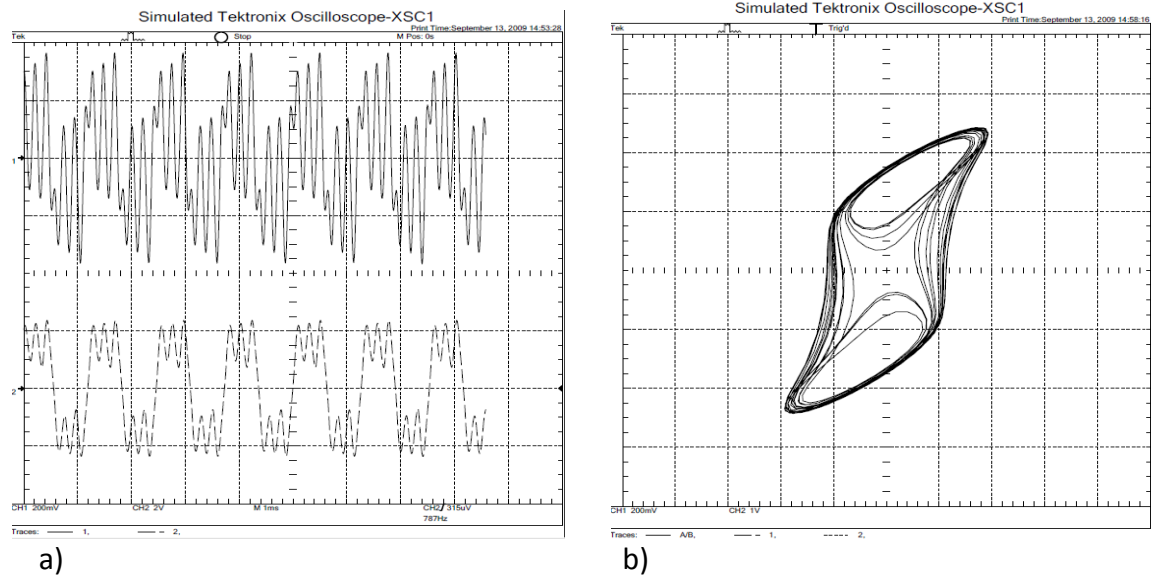


Fig. 5.12 Circuito de Chua utilizando un limitador polarizado en serie en cascada con un OPAM.

Tabla 5.6 Elementos electrónicos para el circuito de la figura 5.12.

Componente	Valor
1 OPAM	OP27
2 Diodos	1N4148
1 Inductor	8.5 mH
1 Capacitor variable	4.6nF
1 Capacitor	69 nF
2 Resistores	47 KΩ
2 Resistores	3.3 KΩ
2 Resistores	290 Ω
1 Potenciómetro	1.3 KΩ
1 Resistor	1.2 KΩ
1 Resistor	85 Ω



**Fig. 5.13 Resultados del Circuito. a) Señales de salidas del circuito (canal 1 y canal 2) b) Atractor de Chua (modo XY) en el osciloscopio.**

### 5.2 Simulación del Circuito Rössler

Se utilizo el circuito equivalente de Rössler utilizando amplificadores operacionales mostrado en la figura 5.14, de la misma forma se muestran los resultados de cada una de las salidas de las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (ver figura 5.16) y el atractor en XZ y XY (ver figura 5.15) en el modo X vs Y del osciloscopio.

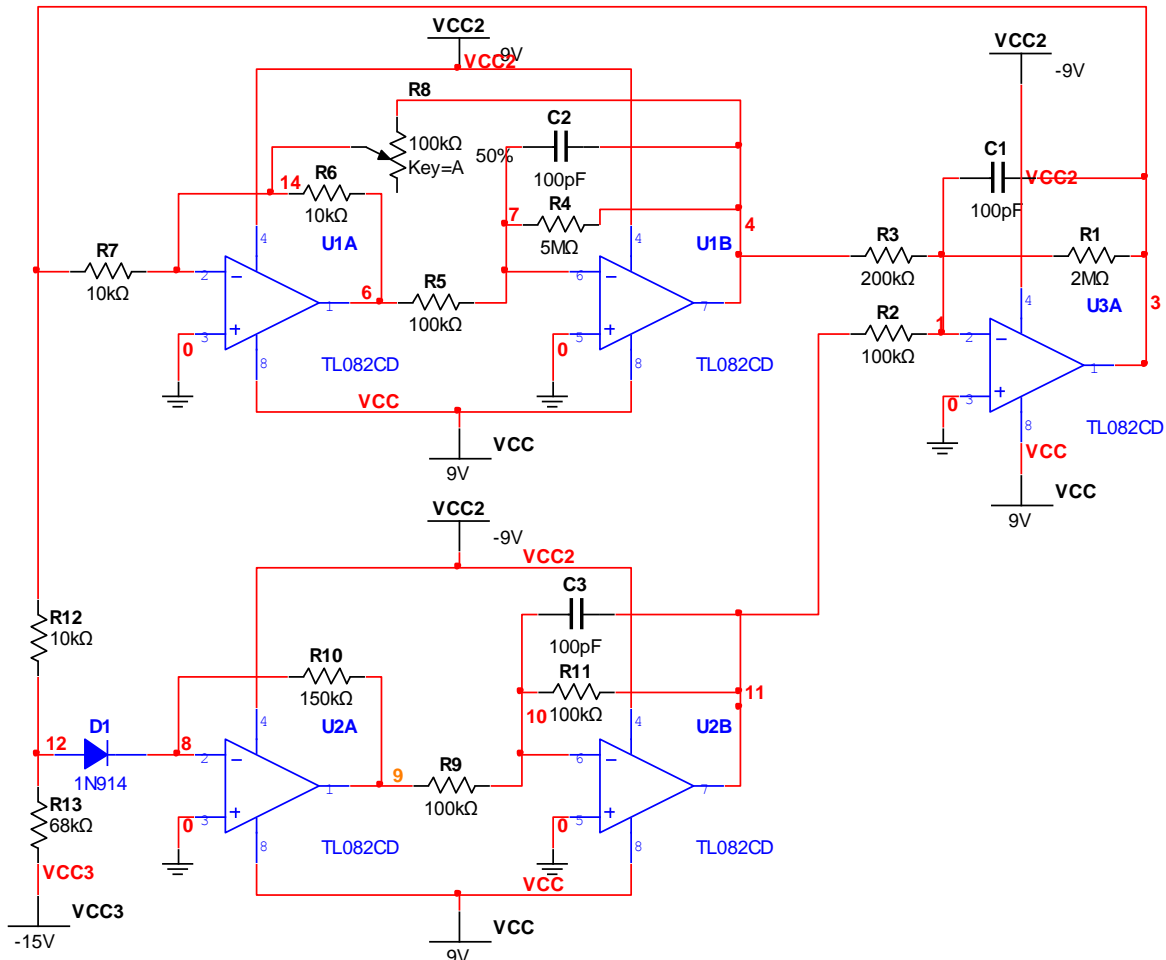


Fig. 5.14 Circuito Simulado de Rössler

Tabla 5.7 Elementos electrónicos para el circuito de la figura 5.6.

Componente	Valor	Componente	Valor
4 OPAMS	TLC082	1 resistor	2 MΩ
1 Diodo	1N914	1 resistor	200 kΩ
3 Capacitores	100 pF	4 resistores	100 kΩ
1 Potenciómetro	100 KΩ	1 resistor	150 kΩ
1 resistor	5 MΩ		

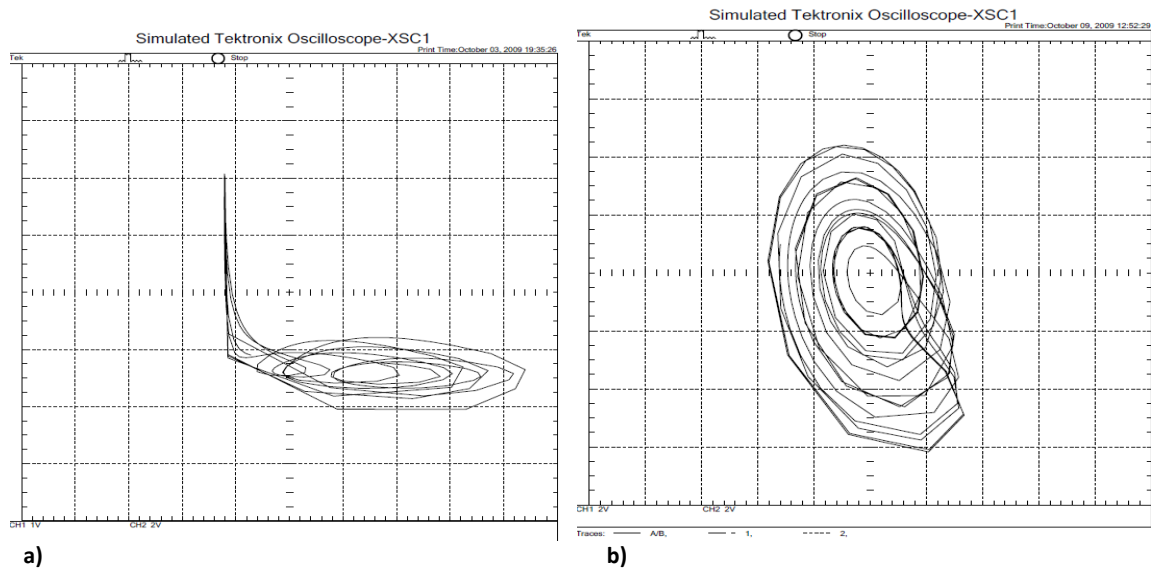


Fig. 5.15 Señales a) XZ b) XY del atractor de Rössler

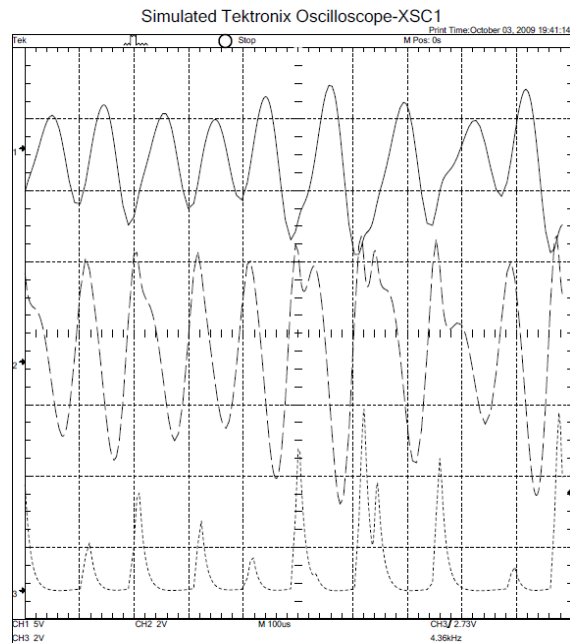


Fig. 5.16 Señales de salida del circuito de Rössler (x, y, z)



# **Conclusiones**

---

## Conclusiones

El analizar los circuitos generadores de caos, brinda un gran punto de apoyo sobre todo para el desarrollo de nuevas tecnologías en Telecomunicaciones, mismas que proporcionan comunicaciones seguras tanto a nivel de hardware como a un nivel superior como es el caso de la encriptación.

Gracias a los resultados obtenidos en la simulación, podemos decir que entre mayor caos se produzca en el circuito proporciona una mejor seguridad, en el caso del circuito de Chua, el circuito que presenta un caos superior con respecto a los demás es el arreglo de dos amplificadores operacionales en cascada, cabe mencionar que este es un circuito de tercer grado y que se puede adaptar hasta uno de 6 orden, produciendo de esta forma un circuito con comportamiento hiperbatico, de misma forma sucede con el circuito de Rössler, que es utilizados en sistemas de cuarta generación (Según la clasificación de Tao Yang).

Tomando como base la conmutación caótica y el enmascaramiento es posible escalar el sistema y brindar mejores esquemas de seguridad como con los que se cuentan hoy en día, aplicándolos a tecnologías como espectro disperso.

## Referencias

- [1] Edward N. Lorenz. "Deterministic Nonperiodic Flow". Journal of the Atmospheric sciences 1963; vol.(20)pp 130-141.
- [2] Juan A. Rodríguez Liñán & Jesús de L. Morales. "Control de Sistemas Caóticos". Ciencia UANL Enero-Marzo 2008; vol. (IX).
- [3] Kevin M. Cuomo, Alan V. Oppenheim & Steven H. Strigatz. "Synchronization of Lorenz-Based Chaotic Circuits with Applications to Communications". IEEE Transactions on Circuits and Systems (1993); vol. (40) pp 626-633.
- [4] Mainzer, K. Thinking in Complexity: The Complex Dynamics of Matter, Mind, and Mankind. Springer-Verlag, 1994.
- [5] Kieren. T.E., Olson, A.T. & Sawada, D. A Note on Determinism and Predictability in Education Research and Practice. Ponencia presentada en la American Educational REsearch Association Boston, MA. EUA, 1990.
- [6] Farmer, J. D. Information Dynamics and The Probabilistic Structure of Chaos. 37(11), 1304-1325. Zeittschrift Fur Naturforschung Section A-Physik Physikalische,1989.
- [7] Grebogi, C., Ott, E. & Yorke, J.A. Unstable Periodic-Orbits and the Dimensions of Multifractal Chaotic Attractors. 37:1711-1724. Physical Review A – General Physics, 1994.
- [8] Cesar Monroy Olivares. Teoría del Caos. Tecnologías Emergentes de Computo. Computec. pp 36.
- [9] Röslerr, O. E. Chaos (En GUTW79). 290-309. Springer-Velarg, 1979.
- [10]Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D. & Shaw, R. S. Geometry from a Time Series.vol. 45,num.9. pp 712-716. Physical Review Letters, 1980.
- [11]Holden, A. V. Chaos. Manchester University Press, 1986.
- [12] Artés R. A. & Pérez G. F. Comunicaciones Digitales. Pearson Prentice Hall, Madrid 2007.
- [13] Gardner, H.The mind's New Science. Basic Books, 1985.
- [14] Lewin, R. Complexity: Life at the Edge of Chaos. Macmillan Publishing Company, 1992.
- [15] Lorenzo Gonzales Maria, "Influencia del ruido gaussiano correlacionado en la sincronización de sistemas caóticos", pp22.
- [16] Edward N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow. Journal of The Atmospheric Sciences Vol. 20, 1963. pp 130-141.
- [17] Lorenz, Edward. (1995). The Essence of Chaos. University Of Washington Press, Seattle.pp 41-211.
- [18] Gleick, James. (1988). Chaos: Making a New Science. Penguin Books, E.E.U.U.pp 135.
- [19] Chamberlain, L. (1998). An Introduction to Chaos and Nonlinear Dynamics. En: Clinical Chaos: A Therapist's Guide to Nonlinear Dynamics and Therapeutic Change. Bütz, M. & Chamberlain. L.. Philadelphia, Bunner/Mazel.
- [20] Peat, David F. (2002). From certainty to uncertainty : the story of science and ideas in the twentieth century. Joseph Henry Press, Washington, D.C.
- [21] Abdelmalik Moujahid "La Sincronización como Fenómeno Natural",pp3-5.

- [22] Boccaletti S. et al. The Synchronization of chaotic systems. *Physics Reports* 366. 1–101. 2002.
- [23] Pecora LM and Carroll TL. Synchronization in Chaotic Systems. *Phys. Rev. Lett.* 64: 821-824. 1990.
- [24] Fujisaka H and Yamada T. Stability theory of synchronized motions in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics* 69: 32-46. 1983.
- [25] Kevin M. Cuomo, Alan V. Oppenheim & Steven H. Strigatz, "Synchronization of Lorenz-Based Chaotic Circuits with Applications to Communications", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 40, NO 10, pp 626-633, 1993.
- [26] Kapitaniak, T., Chua, L.O.; "Strange nonchaotic trajectories on torus," *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, vol. 7, (no. 2): 423-429. 1997.
- [27] M.A. Matías and J. Güémez, Stabilization of chaos by proportional pulses in the system variables, *Physical Review Letters*, 72, 1455-1458, 1994.
- Lorenz, Edward. (1995). *The Essence of Chaos*. University Of Washington Press, Seattle.
- [28] Lorenz, Edward. *The Essence of Chaos*. University Of Washington Press, Seattle. 1995.
- [29] H. Fujisaka, T. Yamada, *Prog. Theor. Phys.* 69, 1983.
- [30] V.S. Afraimovich, N.N. Verichev, M.I. Rabinovich, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Radiofizika* 1986.
- [31] L.M. Pecora, T.L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* 64, 821, 1990.
- [32] L.M. Pecora, T.L. Carroll, *Phys. Rev. A* 1991.
- [33] R. He, P.V. Vaidya, *Phys. Rev. A* 46 1992.
- [34] T. Kapitaniak, *Phys. Rev. E* 50 1994.
- [35] R.E. Amritkar, N. Gupte, *Phys. Rev. E* 47.1993.
- [36] L. Kocarev, U. Parlitz, *Phys. Rev. Lett.* 74 .1995.
- [37] U. Parlitz, L. Kocarev, T. Stojanovski, H. Preckel, *Phys. Rev. E* 53. 1996.
- [38] J. GÜemez, M.A. MatGbas, *Phys. Rev. E* 52. 1995.
- [39] Yang Tao. *Chaotic COmmunication systems*.
- [40] Lj. Kocarev etc al U. Parlitz. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization. *International Journal of Bifurcations and Chaos* Vol2 N° 3,pp 709-713. 1992.
- [41] Rider Jaimes Reátegui, *La gaceta, MEDIOS UDG*, junio 2007.
- [42] A. d'Anjou, C. Sarasola y F. J. Torrealde, *REVISTA SIGMA* 26, Mayo 2005.
- [43] Arias Ronald "Sistema Criptográfico Caótico".
- [44] Rodríguez Vázquez Juan José "Un Estudio de Caso de Funciones Caóticas para el Análisis de la Encriptación de Imágenes Digitales", *Escuela Politécnica Superior de La Rábida Universidad de Huelva*, 2008.
- [45] Celikovskiy, S and Chen, G, "Secure Synchronization of a Class of Chaotic Systems From a Nonlinear Observer Approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.50, No.1, 2005.
- [46] Pecora, L.M., Carroll, T. L. Gregg A. Johnson, and Mar, D.J. and Heagy, J.F., "Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts and applications," *Chaos*, Vol. 7, No.4, 1997.



- [47] Campos, E., Urias, J. and Rulkov, N.F., "Multimodal Synchronization of chaos," Chaos, Vol. 14, No.1, 2004.
- [48] Aguayo, J.H., "Recuperación de la información transmitida por osciladores caóticos," Tesis de Ingeniero, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, 2002.
- [49] Lin, W. and He, Y. "Complete synchronization of the noise-perturbed Chua's circuits," Chaos, Vol.15, No.023705, 2005.
- [50] Lau, K.-K. Component-based software development and logic programming. In ICLP, pp 103-108, 2003.
- [51] Luengo García David, Tesis Doctoral "ESTIMACIÓN OPTIMA DE SECUENCIAS CAÓTICAS CON APLICACIÓN EN COMUNICACIONES", Septiembre 2006.
- [52] K.M. Cuomo, A.V. Oppenheim y S.H. Strogatz, IEEE Trans. on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing 40, 1993.
- [53] PECORA, L.M. and CAROLL, T.L. Synchronization in chaotic systems, Phys. Rev. Letters, vol.64, p.821, 1990.
- [54] CUOMO, K.M., OPPENHEIM A.V. and STROGATZ, S.H. Synchronization in chaotic systems, IEEE Trans Circuits and Systems, vol 40, pag. 626'633, 1993.
- [55] GRASSI, G. and MASCOLO, S.A system theory approach for designing cryptosystems based on hiperchaos. IEEE Tran. On circuits and Systems I: fundamental Theory and Applications, vol. 46, pag. 1135'1138, 1999.
- [56] TEOLIS, a., computational signal Processing with Wavelets, Birkhauser, Boston, 1998.
- [57] AKANSU, A.N. and block Transforms in communications and multimedia, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1999.
- [58] ALVAREZ G. MONTOYA, F., ROMERA, M., y PASTOR, G. Criptoanálisis del sistema criptográfico basado en la sincronización de osciladores caóticos mundo electrónico, vol. 307, pag. 56-58, 2000.
- [59] Leon O. Chua, Memristor - The Missing Circuit Element. IEEE Transactions on Circuit Theory, September 1971.
- [60] Matsumoto, T. "A Chaotic Attractor from Chua's Circuit," IEEE Transactions on Circuits & Systems, vol.CAS-31, no.12, pp.1055-1058, 1984.
- [61] Zhong, G.Q., Ayrom, F. "Experimental Confirmation of Chaos from Chua's Circuit," International Journal of Circuit Theory & Application; vol.13, no.1, pp.93-98, 1985.
- [62] Zhong, G-Q., Ayrom, F. "Periodicity and chaos in Chua's circuit," IEEE Transactions on Circuits & Systems; vol.CAS-32, no.5, pp.501-503, 1985.
- [63] Solé Ricard V. "Orden y Caos en sistemas complejos. Fundamentos" ediciones UPC. pp200, 2001.

## Publicaciones Derivadas de la realización de la Tesis

1. Cisneros Ricardo, Escamilla Nidia, Plascencia David, Vivas Alejandro. ***“Simulación de un circuito de Chua utilizando un circuito convertidor general de impedancia”***.SIME 09 (Simposium Mexiquense de Electrónica 2009). Octubre 2009.
2. Cisneros Ricardo, Escamilla Nidia, Plascencia David, Vivas Alejandro. ***“La importancia de los sistemas caóticos en Telecomunicaciones”***. ERA 2009 (Encuentro Regional Académico 2009). Noviembre 2009.
3. Cisneros Ricardo, Escamilla Nidia, Plascencia David, Vivas Alejandro. ***“Análisis del Caos en el Circuito de Chua”***. IEEE ROC&C' 2009. Diciembre 2009.
4. Plascencia David, Cisneros Ricardo, Vivas Alejandro, Escamilla Nidia. ***“Análisis del Oscilador Caótico de Rössler”***. IEEE ROC&C' 2009. Diciembre 2009.
5. Escamilla Nidia, Plascencia David, Cisneros Ricardo, Vivas Alejandro. ***“Sincronización en Sistemas Caóticos”***. IEEE ROC&C' 2009. Diciembre 2009.
6. Cisneros Ricardo, Vivas Alejandro, Plascencia David, Escamilla Nidia. ***“Secure Communications on Rössler Circuit”***. ISSS 2010, Julio 2010.
7. Cisneros Ricardo, Vivas Alejandro, Plascencia David. ***“Conducta Dinámica de Circuitos Generadores de Caos”***. INTERCON 2010, Agosto 2010.