



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México, Distrito Federal, el día 10 del mes junio del año 2004, el (la) que suscribe César Eli Hernández Aquino alumno(a) del Programa de Maestría en Ingeniería de Telecomunicaciones con número de registro B010997, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor(a) intelectual del presente Trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Vladimir Kazakov Erasova y cede los derechos del trabajo intitulado: Estudio del Procedimiento de Muestreo y Reconstrucción de algunos procesos aleatorios no Gaussianos, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, graficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: cesareli@prodigy.net.mx, vkazakov41@hotmail.com.

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Nombre y firma
César Eli Hernández Aquino



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 10:00 horas del día 3 del mes de Junio del 2004 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada Por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la E. S. I. M. E. Para examinar la tesis de grado titulada:

“ESTUDIO DEL PROCEDIMIENTO DE MUESTREO Y RECONSTRUCCION DE ALGUNOS PROCESOS ALEATORIOS NO GAUSSIANOS”

Presentada por el alumno:

HERNANDEZ

Apellido paterno

AQUINO

materno

CESAR ELI

nombre(s)

Con registro:

0	1	0	9	9	7
---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

DR. VLADIMIR KAZAKOV ERASOVA

DR. JOSE LUIS LOPEZ BONILLA

DR. OLESIY POGREBNYAK

M. EN C. MIGUEL SANCHEZ MERAZ

M. EN C. MARCO ANTONIO ACEVEDO MOSQUEDA

M. EN C. SERGIO VIDAL BELTRAN

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. FLORENCIO SANCHEZ SILVA



SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

MAESTRÍA EN INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIONES

**ESTUDIO DEL PROCEDIMIENTO DE
MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE
ALGUNOS PROCESOS ALEATORIOS NO
GAUSSIANOS**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIONES**

PRESENTA:

Ing. César Elí Hernández Aquino

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Vladimir Alexandrivich Kazakov Erasova

Índice

Lista de símbolos	iii
Índice de figuras	iv
Objetivos	xvii
Justificación	xvii
Resumen	xviii
Abstract	xix

Capítulo 1. La regla de la esperanza matemática condicional y su aplicación para los problemas de muestreo-reconstrucción de los procesos aleatorios.

1.1 Introducción	1
1.2 Teorema de Balakrishnan y sus desventajas	2
1.3 Caso general	4
1.3.1 Descripción de los procesos aleatorios	5
1.3.2 Función de Covarianza	6
1.3.3 Densidad espectral de potencia	8
1.3.4 Funciones que caracterizan a un sistema lineal	9
1.3.5 Respuesta de un sistema lineal a procesos aleatorios	10
1.4 Caso Gaussiano	10
1.4.1 Regla de la esperanza matemática condicional	11
1.4.2 Ejemplos Gaussianos Markovianos usando la función de covarianza $R_x(\mathbf{t}) = \mathbf{s}^2 e^{-a \mathbf{t} }$	13
1.4.3 Ejemplos Gaussianos Markovianos con la función de covarianza $R_x(\mathbf{t}) = \mathbf{s}^2 (1 + a \mathbf{t})e^{-a \mathbf{t} }$	20
1.4.4 Ejemplos Gaussianos Markovianos con la función de covarianza $R_x(\mathbf{t}) = \mathbf{s}^2 (1 + a \mathbf{t} + \frac{a\mathbf{t}^2}{3})e^{-a \mathbf{t} }$	26
1.4.5 Ejemplos para el caso particular de la función sinc	32
1.4.6 Comparación entre los diferentes resultados para el caso Gaussiano	40

Capítulo 2. Procedimiento de muestreo-reconstrucción de los procesos no Gaussianos Markovianos

47

Introducción	47
2.1 El Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción del proceso Markoviano de Rayleigh	48
2.1.1 Expresiones generales para el PMR del proceso Markoviano de Rayleigh	49
2.1.2 PMR del proceso Markoviano de Rayleigh en el régimen de extrapolación	55
2.1.3 PMR del proceso Markoviano de Rayleigh en el régimen de interpolación	61
2.2 El procedimiento de muestreo-reconstrucción Markoviano con la función de distribución de probabilidad gamma	68
2.2.1 Expresiones generales para el SRP del proceso Markoviano con la fdp gamma	68

2.2.2 SRP del proceso Markoviano con la fdp exponencial en el régimen de extrapolación.....	69
2.2.3 SRP del proceso Markoviano con la la fdp exponencial en el régimen de interpolación.....	79

Capítulo 3. Procedimiento de muestreo-reconstrucción de los procesos no Gaussianos no Markovianos **87**

Introducción.....	87
3.1 Reconstrucción del proceso de Rayleigh no Markoviano.....	87
3.1.1 Reconstrucción del proceso de Rayleigh no Markoviano con $Q = (1 + a t)e^{-at}$	87
3.1.1.1 Régimen de extrapolación.....	89
3.1.1.2 Régimen de interpolación.....	93
3.1.2 Reconstrucción del proceso de Rayleigh no Markoviano con $Q = (1 + a t + \frac{at^2}{3})e^{-at}$	98
3.1.2.1 Régimen de extrapolación.....	99
3.1.2.2 Régimen de interpolación.....	104
3.2 Reconstrucción del proceso no Markoviano con la fdp exponencial.....	109
3.2.1 Reconstrucción del proceso no Markoviano con la fdp exponencial con $Q = (1 + a t)e^{-at}$	110
3.2.1.1 Régimen de extrapolación.....	110
3.2.1.2 Régimen de interpolación.....	115
3.2.2 Reconstrucción del proceso no Markoviano con la fdp exponencial con $Q = (1 + a t + \frac{at^2}{3})e^{-at}$	120
3.2.2.1 Régimen de extrapolación.....	120
3.2.2.2 Régimen de interpolación.....	125

Conclusiones.....131

Recomendaciones y sugerencias para trabajos futuros.....133

Anexos

 A. Programas realizados para los cálculos.....134

 B. Artículo presentada en conferencia.....145

Bibliografía.....151

Lista de símbolos

a	El inverso de la constante de tiempo de un filtro RC.
\mathbf{a}_i^x	función momento de <i>i-ésimo</i> orden
a_{ij}	elementos de la matriz inversa de covarianza.
C	Matriz de covarianza inversa
$?T$	constante de normalización de la función de covarianza
e	intervalo de reconstrucción
e	base de los logaritmos naturales
\mathbf{e}_0	parámetro de un proceso aleatorio
$h(t)$	respuesta al impulso
$H(j\omega)$	función de transferencia de un sistema lineal
i, j, k, m, n	variables enteras
j	el número imaginario $\sqrt{-1}$
$K_x(\mathbf{t})$	función de covarianza
\mathbf{K}_x	matriz de covarianza
L, M	números enteros
$m(t)$	función de esperanza matemática
$\hat{m}_x(t)$	función de esperanza matemática condicional
m_x	esperanza matemática incondicional
N	entero que indica el número total de muestras
$P(x)$	probabilidad de la variable aleatoria x
Q	función auxiliar empleada como función de covarianza
$R_x(\mathbf{t})$	función de covarianza normalizada
$\rho_x(\tau)$	función de covarianza normalizada de Rayleigh
\mathbf{s}	parámetro de un proceso aleatorio
$\mathbf{s}^2(t)$	función de varianza matemática
$\mathbf{s}_x^2(t)$	función de varianza matemática condicional
$S_x(\omega)$	densidad espectral de potencia
\mathbf{t}	variable independiente de la función de covarianza
\mathbf{t}_c	tiempo de covarianza
t	tiempo
T_i	instante de tiempo de la <i>i-ésima</i> muestra
$u(t)$	proceso aleatorio de entrada
$\mathbf{w}_m[x(t)]$	función de densidad de probabilidad de orden m de un proceso aleatorio
ω	frecuencia angular en radianes, $\omega = 2\pi W$
ω_b	frecuencia restringida de un espectro de potencia
x	una variable aleatoria
$x(t)$	un proceso aleatorio
$\tilde{x}(t)$	un proceso aleatorio condicional
$x^{(j)}(t)$	<i>j-ésima</i> realización de un proceso aleatorio $x(t)$
$x(T_i), x_b, X_t$	valor de una muestra de un proceso aleatorio en un instante de tiempo T_i
$\langle \rangle$	operador de promedio estadístico

Índice de figuras

Capítulo 1

1-1: Conjunto de posibles realizaciones $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(j)}(t), \dots, x^{(M)}(t)$ que puede tener un proceso aleatorio continuo.	5
1-2: Función de covarianza $K_x(t)$ para a) un proceso suave b) un proceso caótico	7
1-3: Relación entrada salida en un sistema lineal	9
1-4 : Posibles realizaciones de un proceso aleatorio condicional, dado un conjunto de muestras X,T.	11
1-5, 7, 9: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 5 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = S^2 e^{-a t }$, $\tau_c = 0.2\tau_c$	13
1-6, 8, 10: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 5 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = S^2 e^{-a t }$, $\tau_c = 0.2\tau_c$	14
1-11, 13: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 6 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = S^2 e^{-a t }$, $\tau_c = 0.5\tau_c$	16
1-12, 14: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 6 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = S^2 e^{-a t }$, $\tau_c = 0.5\tau_c$	16
1-15: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = S^2 e^{-a t }$, $\tau_c = \tau_c$.	17
1-16: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = S^2 e^{-a t }$, $\tau_c = \tau_c$.	18
1-17: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = S^2 e^{-a t }$, $\tau_c = 1.5\tau_c$.	18
1-18: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = S^2 e^{-a t }$, $\tau_c = 1.5\tau_c$.	18
1-19, 21, 23: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = S^2 (1 + a t) e^{-a t }$, $\tau_c = 0.2\tau_c$	20
1-20, 22, 24: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = S^2 (1 + a t) e^{-a t }$, $\tau_c = 0.2\tau_c$	20
1-25, 27: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = S^2 (1 + a t) e^{-a t }$, $\tau_c = 0.5\tau_c$	22
1-26, 28: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = S^2 (1 + a t) e^{-a t }$, $\tau_c = 0.5\tau_c$	23
1-29: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = S^2 (1 + a t) e^{-a t }$, $\tau_c = \tau_c$.	24

1-30: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = s^2(1 + a|t|)e^{-a|t|}$, $?t=\tau_c$. 24

1-31: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = s^2(1 + a|t|)e^{-a|t|}$, $?t=1.5\tau_c$. 25

1-32: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = s^2(1 + a|t|)e^{-a|t|}$, $?t=1.5\tau_c$. 25

1-33, 35, 37: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = s^2(1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, $?t=0.2\tau_c$ 26

1-34, 36, 38: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = s^2(1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, $?t=0.2\tau_c$ 26

1-39, 41: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = s^2(1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, $?t=0.5\tau_c$ 29

1-40, 42: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = s^2(1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, $?t=0.5\tau_c$ 29

1-43: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = s^2(1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, $?t=\tau_c$. 30

Figura 1-44: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = s^2(1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, $?t=\tau_c$. 31

Figura 1-45: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = s^2(1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, $?t=1.5\tau_c$. 31

Figura 1-46: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = s^2(1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, $?t=1.5\tau_c$. 32

Figura 1-47, 49: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, $?t=0.2\tau_c$ 33

Figura 1-48, 50: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, $?t=0.2\tau_c$ 33

Figura 1-51, 53: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, $?t=0.5\tau_c$ 35

Figura 1-52, 54: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, $?t=0.5\tau_c$ 35

- Figura 1-55:** Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, $\tau_c = \tau_c$. 36
- Figura 1-56:** Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, $\tau_c = \tau_c$. 36
- Figura 1-57:** Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, $\tau_c = 1.5\tau_c$. 37
- Figura 1-58:** Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, $\tau_c = 1.5\tau_c$. 37
- Figura 1-59:** Función de reconstrucción con 33 muestras y $R_x(t) = s^2 e^{-a|t|}$, $\tau_c = 0.5$ 38
- Figura 1-60:** Función de error de reconstrucción con 33 muestras y $R_x(t) = s^2 e^{-a|t|}$, $\tau_c = 0.5$ 39
- Figura 1-61:** Función de reconstrucción con 33 muestras y $R_x(t) = s^2 (1 + a|t|) e^{-a|t|}$, $\tau_c = 0.5$ 39
- Figura 1-62:** Función de error de reconstrucción con 33 muestras y $R_x(t) = s^2 (1 + a|t|) e^{-a|t|}$, $\tau_c = 0.5$ 39
- Figura 1-63:** Función de reconstrucción con 33 muestras y $R_x(t) = s^2 (1 + a|t| + \frac{at^2}{3}) e^{-a|t|}$, $\tau_c = 0.5$ 39
- Figura 1-64:** Función de error de reconstrucción con 33 muestras y $R_x(t) = s^2 (1 + a|t| + \frac{at^2}{3}) e^{-a|t|}$, $\tau_c = 0.5$ 40
- Figura 1-65:** Función de reconstrucción con 33 muestras y $K_x(t) = \frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, $\tau_c = 0.5$ 40
- Figura 1-66:** Función de error de reconstrucción con 33 muestras y $K_x(t) = \frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, $\tau_c = 0.5$ 40
- Figura 1-67:** Función de reconstrucción con 5 muestras y $R_x(t) = e^{-a|t|}$, $\tau_c = 0.24$ 41
- Figura 1-68:** Función de error de reconstrucción con 5 muestras y $R_x(t) = e^{-a|t|}$, $\tau_c = 0.24$ 41
- Figura 1-69:** Función de reconstrucción con 5 muestras y $R_x(t) = (1 + 2|t|) e^{-2|t|}$, $\tau_c = 0.24$ 41
- Figura 1-70:** Función de error de reconstrucción con 5 muestras y $R_x(t) = (1 + 2|t|) e^{-2|t|}$, $\tau_c = 0.24$ 42

Figura 1-71: Función de reconstrucción con 5 muestras y $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3} t + \frac{64}{27}t^2)e^{-\frac{8}{3} t }$, y $t=0.24$	42
Figura 1-72: Función error de reconstrucción con 5 muestras, $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3} t + \frac{64}{27}t^2)e^{-\frac{8}{3} t }$, y $t=0.24$	42
Figura 1-73: Función de reconstrucción con 5 muestras y $K_x(t) = \frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, y $t=0.24$	42
Figura 1-74: Función de error de reconstrucción con 5 muestras y $K_x(t) = \frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, y $t=0.24$	43

Capítulo 2

Figura 2-1: fdp de Rayleigh donde $x=1$, $t=0.01$	46
Figura 2-2: fdp de Rayleigh donde $x=1$, $t=0.1$	46
Figura 2-3: fdp de Rayleigh donde $x=1$, $t=0.2$	46
Figura 2-4: fdp de Rayleigh donde $x=1$, $t=0.4$	46
Figura 2-5: fdp de Rayleigh donde $x=1$, $t=0.8$	46
Figura 2-6: fdp de Rayleigh donde $x=1$, $t=1$	46
Figura 2-7: fdp de Rayleigh donde $x=1$, $t=1.5$	47
Figura 2-8: fdp de Rayleigh donde $x=1$, $t=2$	47
Figura 2-9: fdp de Rayleigh donde $x=1$, $t=5$	47
Figura 2-10: fdp de Rayleigh donde $x=3$, $t=0.01$	47
Figura 2-11: fdp de Rayleigh donde $x=3$, $t=0.1$	47
Figura 2-12: fdp de Rayleigh donde $x=3$, $t=0.4$	47
Figura 2-13: fdp de Rayleigh donde $x=3$, $t=0.8$	48
Figura 2-14: fdp de Rayleigh donde $x=3$, $t=1$	48
Figura 2-15: fdp de Rayleigh donde $x=3$, $t=1.5$	48
Figura 2-16: fdp de Rayleigh donde $x=3$, $t=2$	48
Figura 2-17: fdp de Rayleigh donde $x=3$, $t=5$	48
Figura 2-18: fdp de Rayleigh donde $x=8$, $t=0.1$	48
Figura 2-19: fdp de Rayleigh donde $x=8$, $t=1$	49
Figura 2-20: fdp de Rayleigh donde $x=8$, $t=0.4$	49
Figura 2-21: fdp de Rayleigh donde $x=8$, $t=0.8$	49
Figura 2-22: fdp de Rayleigh donde $x=8$, $t=1$	49
Figura 2-23: fdp de Rayleigh donde $x=8$, $t=1.5$	49
Figura 2-24: fdp de Rayleigh donde $x=8$, $t=2$	49
Figura 2-25: fdp de Rayleigh donde $x=8$, $t=5$	50
Figura 2-26: Función de covarianza de la función de Rayleigh con $Q=\exp(-t)$	51
Figura 2-27: Función de covarianza normalizada de Rayleigh con $Q=\exp(-t)$	51

Figura 2-28: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh con el valor muestra $x_1=4$	52
Figura 2-29: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh con el valor muestra $x_1=3$	53
Figura 2-30: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh con el valor muestra $x_1=2$	53
Figura 2-31: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh con el valor muestra $x_1=1$	53
Figura 2-32: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh con el valor muestra $x_1=0$	54
Figura 233: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el valor muestra $x_1=4$	54
Figura 234: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el valor muestra $x_1=3$	55
Figura 235: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el valor muestra $x_1=2$	55
Figura 236: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el valor muestra $x_1=1$	55
Figura 237: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el valor muestra $x_1=0$	55
Figura 2-38: Error promedio (extrapolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh	56
Figura 2-39: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el par de muestras $x_1=4$ y $x_2=1$ y $T=4/e_0$.	57
Figura 2-40: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para $x_1=4$ y $x_2=1$ y $T=4/e_0$	58
Figura 2-41: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el par de muestras $x_1=0$ y $x_2=2$ y $T=4/e_0$.	58
Figura 2-42: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para $x_1=0$ y $x_2=2$ y $T=4/e_0$	58
Figura 243: Error promedio (interpolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh y un $T=4/e_0$	59
Figura 2-44: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el par de muestras $x_1=4$ y $x_2=1$ y $T=1/e_0$.	59
Figura 2-45: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para $x_1=4$ y $x_2=1$ y $T=1/e_0$	59
Figura 2-46: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el par de muestras $x_1=0$ y $x_2=2$ y $T=1/e_0$.	60
Figura 2-47: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para $X_1=0$ y $X_2=2$ y $T=1/e_0$	60
Figura 2-48: Error promedio (interpolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh y un $T=1/e_0$	60

Figura 2-49: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el par de muestras $x_1=4$ y $x_2=1$ y $T=0.4/e_0$	61
Figura 2-50: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para $X_1=4$ y $X_2=1$ y $T=0.4/e_0$	61
Figura 2-51: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el par de muestras $x_1=0$ y $x_2=2$ y $T=0.4/e_0$.	61
Figura 2-52: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para $X_1=0$ y $X_2=2$ y $T=0.4/e_0$	61
Figura 2-53: Error promedio (interpolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh y un $T=0.4/e_0$	62
Figura 2-54: fdp exponencial donde $x=1$, $t=0.01$	64
Figura 2-55: fdp exponencial donde $x=1$, $t=0.1$	64
Figura 2-56: fdp exponencial donde $x=1$, $t=0.2$	64
Figura 2-57: fdp exponencial donde $x=1$, $t=0.4$	64
Figura 2-58: fdp exponencial donde $x=1$, $t=0.6$	64
Figura 2-59: fdp exponencial donde $x=1$, $t=0.8$	64
Figura 2-60: fdp exponencial donde $x=1$, $t=1$	65
Figura 2-61: fdp exponencial donde $x=1$, $t=1.2$	65
Figura 2-62: fdp exponencial donde $x=1$, $t=1.5$	65
Figura 2-63: fdp exponencial donde $x=1$, $t=2$	65
Figura 2-64: fdp exponencial donde $x=1$, $t=5$	65
Figura 2-65: fdp exponencial donde $x=2$, $t=0.01$	65
Figura 2-66: fdp exponencial donde $x=2$, $t=0.1$	66
Figura 2-67: fdp exponencial donde $x=2$, $t=0.2$	66
Figura 2-68: fdp exponencial donde $x=2$, $t=0.4$	66
Figura 2-69: fdp exponencial donde $x=2$, $t=0.6$	66
Figura 2-70: fdp exponencial donde $x=2$, $t=0.8$	66
Figura 2-71: fdp exponencial donde $x=2$, $t=1$	66
Figura 2-72: fdp exponencial donde $x=2$, $t=1.2$	67
Figura 2-75: fdp exponencial donde $x=2$, $t=5$	67
Figura 2-76: fdp exponencial donde $x=5$, $t=0.1$	67
Figura 2-77: fdp exponencial donde $x=5$, $t=0.5$	67
Figura 2-78: fdp exponencial donde $x=5$, $t=0.6$	68
Figura 2-79: fdp exponencial donde $x=5$, $t=1$	68
Figura 2-80: fdp exponencial donde $x=5$, $t=1.5$	68
Figura 2-81: fdp exponencial donde $x=5$, $t=2$	68
Figura 2-82: fdp exponencial donde $x=5$, $t=3$	68
Figura 2-83: fdp exponencial donde $x=5$, $t=4$	68
Figura 2-84: fdp exponencial donde $x=5$, $t=5$	69
Figura 2-85: fdp exponencial donde $x=5$, $t=6$	69
Figura 2-86: fdp exponencial donde $x=5$, $t=10$	69
Figura 2-87: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial con el valor muestra $x_1=4$	70
Figura 2-88: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial con el valor muestra $x_1=3$	70

Figura 2-89: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial con el valor muestra $x_1=2$	70
Figura 2-90: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial con el valor muestra $x_1=1$	70
Figura 2-91: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial con el valor muestra $x_1=0$	71
Figura 2-92: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano con la fdp exponencial para el valor muestra $x_1=4$	71
Figura 2-93: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano con la fdp exponencial para el valor muestra $x_1=3$	71
Figura 2-94: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano con la fdp exponencial para el valor muestra $x_1=2$	72
Figura 2-95: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano con la fdp exponencial para el valor muestra $x_1=1$	72
Figura 2-96: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano con la fdp exponencial para el valor muestra $x_1=0$	72
Figura 2-97: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=4; X_2=1$ y $?T=8/e_0$.	74
Figura 2-98: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=4; X_2=1$ y $?T=8/e_0$.	74
Figura 2-99: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=0; X_2=2$ y $?T=8/e_0$.	74
Figura 2-100: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=0; X_2=2$ y $?T=8/e_0$.	75
Figura 2-101: Error promedio (interpolación) de reconstrucción con la fdp exponencial y $?T=8/e_0$.	75
Figura 2-102: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=4; X_2=1$ y $?T=1/e_0$.	75
Figura 2-103: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=4; X_2=1$ y $?T=1/e_0$.	76
Figura 2-104: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=0; X_2=2$ y $?T=1/e_0$.	76
Figura 2-105: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=0; X_2=2$ y $?T=1/e_0$.	76
Figura 2-106: Error promedio de reconstrucción con la fdp exponencial y $?T=1/e_0$	76
Figura 2-107: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=4; X_2=1$ y $?T=0.4/e_0$.	77
Figura 2-108: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=4; X_2=1$ y $?T=0.4/e_0$.	77
Figura 2-109: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=0; X_2=2$ y $?T=0.4/e_0$.	77

Figura 2-110: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=0; X_2=2$ y $T=0.4/e_0$. 78

Figura 2-111: Error promedio de reconstrucción (interpolación) con la fdp exponencial y $T=0.4/e_0$. 78

Capítulo 3

Figura 3-1: función de covarianza de Rayleigh (3.2) con $Q = (1 + 2|t|)\exp(-2|t|)$ 80

Figura 3-2: función de covarianza normalizada de Rayleigh con $Q = (1 + 2|t|)\exp(-2|t|)$ 80

Figura 33: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a|t|)\exp(-a|t|)$, donde $x_1=4$. 81

Figura 34: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a|t|)\exp(-a|t|)$, donde $x_1=3$. 81

Figura 35: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a|t|)\exp(-a|t|)$, donde $x_1=2$. 82

Figura 36: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a|t|)\exp(-a|t|)$, donde $x_1=1$. 82

Figura 37: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a|t|)\exp(-a|t|)$, donde $x_1=0$. 82

Figura 3-8: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a|t|)\exp(-a|t|)$, con $x_1=4$ 83

Figura 3-9: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a|t|)\exp(-a|t|)$, con $x_1=3$ 83

Figura 3-10: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a|t|)\exp(-a|t|)$, con $x_1=2$ 83

Figura 3-11: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a|t|)\exp(-a|t|)$, con $x_1=1$ 84

Figura 3-12: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a|t|)\exp(-a|t|)$, con $x_1=0$ 84

Figura 3-13: Error promedio de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a|t|)\exp(-a|t|)$. 84

Figura 3-14: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a|t|)\exp(-a|t|)$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=4/e_0$. 85

Figura 3-15: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a|t|)\exp(-a|t|)$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=4/e_0$. 86

Figura 3-16: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a|t|)\exp(-a|t|)$, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=4/e_0$. 86

Figura 3-17: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh al pasar por un filtro RC de dos etapas, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=4/e_0$. 86

- Figura 3-18: Error promedio de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $T=4/e_0$.** 87
- Figura 3-19: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=1/e_0$.** 87
- Figura 3-20: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=1/e_0$.** 87
- Figura 3-21: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=1/e_0$.** 88
- Figura 3-22: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=1/e_0$.** 88
- Figura 3-23: Error promedio (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $T=1/e_0$.** 89
- Figura 3-24: Función de covarianza de Rayleigh, $Q(t) = (1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64}{27} t^2) \exp(-\frac{8}{3} |t|)$.** 90
- Figura 3-25: Función de covarianza normalizada de Rayleigh con $Q(t) = (1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64}{27} t^2) \exp(-\frac{8}{3} |t|)$** 90
- Figura 3-26: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64}{27}) e^{-\frac{8}{3} |t|}$, donde $x_1=4$.** 91
- Figura 3-27: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64}{27}) e^{-\frac{8}{3} |t|}$, donde $x_1=3$.** 91
- Figura 3-28: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh $Q = (1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64}{27}) e^{-\frac{8}{3} |t|}$, donde $x_1=2$.** 92
- Figura 3-29: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64}{27}) e^{-\frac{8}{3} |t|}$, donde $x_1=1$.** 92
- Figura 3-30: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64}{27}) e^{-\frac{8}{3} |t|}$, donde $x_1=0$.** 92
- Figura 3-31: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64}{27}) e^{-\frac{8}{3} |t|}$, con $x_1=4$.** 93
- Figura 3-32: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64}{27}) e^{-\frac{8}{3} |t|}$, con $x_1=3$.** 93
- Figura 3-33: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64}{27}) e^{-\frac{8}{3} |t|}$, con $x_1=2$.** 94
- Figura 3-34: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64}{27}) e^{-\frac{8}{3} |t|}$, con $x_1=1$.** 94

Figura 3-35: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, con $x_1=0$. 94

Figura 3-36: Error promedio (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$. 95

Figura 3-37: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=4/e_0$. 96

Figura 3-38: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=4/e_0$. 96

Figura 3-39: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=4/e_0$. 96

Figura 3-40: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=4/e_0$. 97

Figura 3-41: Error promedio de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, donde $T=4/e_0$. 97

Figura 3-42: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=1/e_0$. 97

Figura 3-43: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=1/e_0$. 98

Figura 3-44: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=1/e_0$. 98

Figura 3-45: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=1/e_0$. 99

Figura 3-46: Error promedio de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, donde $T=1/e_0$. 99

Figura 3-47: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=4$. 100

Figura 3-48: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=3$. 101

Figura 3-49: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=2$. 101

- Figura 3-50: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=1$.** 101
- Figura 3-51: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=0$.** 102
- Figura 3-52: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=4$.** 102
- Figura 3-53: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=3$.** 103
- Figura 3-54: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=2$.** 103
- Figura 3-55: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=1$.** 103
- Figura 3-56: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=0$.** 104
- Figura 3-57: Error promedio (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$.** 104
- Figura 3-58: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=8/e_0$.** 105
- Figura 3-59: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=8/e_0$.** 105
- Figura 3-60: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=8/e_0$.** 106
- Figura 3-61: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=8/e_0$.** 106
- Figura 3-62: Error promedio de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $T=8/e_0$.** 107
- Figura 3-63: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=1/e_0$.** 107
- Figura 3-64: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=1/e_0$.** 107

Figura 3-65: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=1/e_0$. 108

Figura 3-66: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=1/e_0$. 108

Figura 3-67: Error promedio de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $T=1/e_0$. 109

Figura 3-68: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=4$. 110

Figura 3-69: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=3$. 110

Figura 3-70: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=2$. 110

Figura 3-71: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=1$. 111

Figura 3-72: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=0$. 111

Figura 3-73: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=4$. 111

Figura 3-74: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=3$. 112

Figura 3-75: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=2$. 112

Figura 3-76: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=1$. 112

Figura 3-77: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=0$. 113

Figura 3-78: Promedio de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$. 113

Figura 3-79: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=8/e_0$. 114

Figura 3-80: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con

$$Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|} \text{ donde } x_1=4; x_2=1 \text{ y } T=8/e_0. \quad 114$$

Figura 3-81: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con

$$Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|} \text{ donde } x_1=0; x_2=2 \text{ y } T=8/e_0. \quad 115$$

Figura 3-82: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con

$$Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|} \text{ donde } x_1=0; x_2=2 \text{ y } T=8/e_0. \quad 115$$

Figura 3-83: Error promedio de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con

$$Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|} \text{ y } T=8/e_0. \quad 115$$

Figura 3-84: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con

$$Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|} \text{ donde } x_1=4; x_2=1 \text{ y } T=1/e_0. \quad 116$$

Figura 3-85: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con

$$Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|} \text{ donde } x_1=4; x_2=1 \text{ y } T=1/e_0. \quad 116$$

Figura 3-86: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con

$$Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|} \text{ donde } x_1=0; x_2=2 \text{ y } T=1/e_0. \quad 116$$

Figura 3-87: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con

$$Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|} \text{ donde } x_1=0; x_2=2 \text{ y } T=1/e_0. \quad 117$$

Figura 3-88: Error promedio de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con

$$Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|} \text{ y } T=1/e_0. \quad 117$$

Objetivos.

Aplicar teoría estadística de comunicaciones realizando un estudio de procedimiento de muestreo - reconstrucción de algunos procesos no Gaussianos, con base en la *regla de la esperanza condicional*.

Estudiar dos casos particulares de procesos no Gaussianos, ya que tanto la función de reconstrucción como la función de error serán determinadas por expresiones analíticas concretas.

Demostrar que las características estadísticas del procedimiento de muestreo reconstrucción de procesos no Gaussianos son *funciones no lineales de muestras*.

Justificación

Como es sabido el teorema clásico de muestreo asociado son los nombres Whittaker – Kotel’nikov – Shannon (WKS) fue establecido para funciones determinísticas con un espectro finito, después A. Balakrishnan generalizó el teorema WKS en procesos estocásticos de potencia finita. Respecto a esto se tienen algunas cuestiones: a) El teorema es válido sólo para procesos Gaussianos, ya que su comprobación sólo está basada en el espectro de potencia (o de manera correspondiente, la función de covarianza usual). Todo proceso no Gaussiano es caracterizado por algunas funciones espectrales o funciones acumulativas de alto orden. Este estudio proporciona algunos resultados tomando en cuenta el tipo de función de densidad de probabilidad del proceso estocástico, que no es tomado en cuenta por el teorema clásico, y así demostrar que la regla de la esperanza matemática condicional proporciona ventajas en el procedimiento de muestreo-reconstrucción. También se puede observar en el teorema de Balakrishnan que la reconstrucción es obtenida como la suma de las muestras lineales, que es válido para procesos estocásticos Gaussianos, pero no para los procesos no Gaussianos. Entonces para poder describir el muestreo-reconstrucción de procesos estocásticos no Gaussianos es necesario conocer la función de distribución de probabilidad multidimensional y un número de muestras dado. Para el caso de procesos Gaussianos, la función de reconstrucción es una función lineal de muestras y la función de error no depende de las mismas; en el caso de los procesos aleatorios **no** Gaussianos la situación no es tan simple. No hay muchas expresiones para una función de distribución de probabilidad no Gaussianas multidimensionales, por lo tanto es más difícil obtener algunas conclusiones generales.

Resumen

Un problema en la teoría de las comunicaciones es la reconstrucción de los procesos aleatorios dada una cantidad de valores muestra. Es conocido el teorema clásico de muestreo usualmente conocido como WKS (Whittaker, Kotel'nikov, Shannon) que se ha probado para funciones determinísticas con base a su espectro. Este teorema fue generalizado para procesos aleatorios por A. Balakrishnan. La generalización de Balakrishnan es válida sólo para procesos Gaussianos, ya que las características importantes de los procesos no Gaussianos no son tomadas en cuenta. Este estudio presenta resultados sobre algunos procesos no Gaussianos con el apropiado fundamento estadístico, con resultados normalizados para poder llegar a una comparación y establecer algunas conclusiones, una de ellas es que las características estadísticas del procedimiento de muestreo y reconstrucción de procesos no Gaussianos son funciones no lineales de muestras.

El procedimiento de muestreo-reconstrucción de algunos procesos Markovianos y no Markovianos no Gaussianos es dado. Las funciones de reconstrucción y de error son encontradas.

El capítulo I está dedicado a la aplicación de la esperanza matemática condicional y su aplicación para los problemas de muestreo-reconstrucción de los procesos aleatorios, en el que se verán el caso general y el caso Gaussiano. El capítulo II es dedicado al procedimiento de muestreo y reconstrucción de los procesos no Gaussianos Markovianos, con base a dos distribuciones: Rayleigh y gamma, con sus correspondientes funciones de error. En el capítulo III se aborda el procedimiento de muestreo y reconstrucción de procesos aleatorios no Gaussianos no Markovianos con las mismas distribuciones anteriores a fin de llegar a establecer una comparación de resultados.

Abstract

A problem in communications theory is the classical random processes reconstruction given a set of samples. Sampling classic theorem usually known as WKS (Whittaker, Kotel'nikov, Shannon) has been proved for deterministic functions. This theorem was generalized by A. Balakrishnan. Balakrishnan's generalization is valid only for Gaussian processes, because principal characteristics of non Gaussian processes are not considered.

This work presents results on some non Gaussian processes with suitable statistic fundamentation, working with normalized results to compare them selves, and establish some conclusions, one important conclusion is that statistic characteristics of samplig reconstruction procedure of non Gaussian processes are non linear functions of samples.

Sampling reconstruction procedure of some non Gaussian Markovian and non Markovian processes is given. Reconstruction and error functions are founded and cuantified.

Chapter I is dedicated to application of mathematic expectation rule on sampling reconstruction issues, general case and Gaussian case.

Chapter II is dedicated to sampling reconstruction procedure of the Markovian non Gaussian processes, based on two distributions: Rayleigh and gamma, with their respective error functions and some examples are given.

Chapter III is dedicated to sampling reconstruction procedure of non Gaussian non Markovian processes with same distributions of chapter II, to obtain some conclusion through comparison of results. The target of this work is to apply the optimal algorithms for sampling reconstruction procedure of non Gaussian processes, giving some examples, algorithms and computer programs for the application over some other non Gaussian probability distribution functions.

Capítulo 1

La regla de la esperanza matemática condicional y su aplicación para los problemas de muestreo – reconstrucción de procesos aleatorios

Para lograr una descripción adecuada del procedimiento de muestreo – reconstrucción de algunos procesos aleatorios no Gaussianos, es necesario primero detallar la teoría estadística necesaria para entender cómo resolver el problema, después trabajar con el caso Gaussiano y obtener algunos resultados y así observar la situación en general para llegar a los casos particulares de nuestro interés, del tipo no Gaussiano.

1.1 Introducción

El reconstruir una señal o función a partir de datos conocidos como muestras, se trató de resolver desde el siglo XIX. J. L. Lagrange [1] presentó sus expresiones para determinar la interpolación definida por el polinomio $P_n(t)$ en términos de las muestras, utilizando la propiedad básica de los polinomios algebraicos para determinar un polinomio adecuado $P_n(x)$ que nos lleve a los valores y_0, y_1, \dots, y_n de una función asociados con todas las $n+1$ abscisas diferentes t_0, t_1, \dots, t_n , conocido como *fórmula de interpolación de Lagrange*:

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(t) \quad (1.1)$$

donde: $k=0, 1, \dots, n$.

$$l_k(t) = \frac{g_{n+1}(t)}{(t-t_k)g'_{n+1}(t_k)}, \quad g_{n+1}(t) = (t-t_0)\dots(t-t_n). \quad (1.2)$$

Tales expresiones fueron presentadas en 1795.

La interpolación entre puntos de una función fue analizado por E.T. Whittaker en su artículo publicado en 1915 [2], donde se plantea la solución para encontrar valores de una función $f(t)$ que pasa a través de los puntos (t_k, f_k) , donde $t_k = a + kw, f_k = f(t_k)$, donde llamó al conjunto de todas las funciones como *conjunto cotabular* asociado con la secuencia $\{f_k\}$ de valores conocidos y destacando esta función en especial:

$$C(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(a + kw) \frac{\text{sen} \frac{p}{w}(t - a - kw)}{\frac{p}{w}(t - a - kw)}, \quad (1.3)$$

la cual llamó *función cardinal del conjunto catobular*, donde $C(t)=f(t)$.

El teorema de muestreo fue presentado en la Unión Soviética por Kotel'nikov en 1933 [3], Shannon en 1948 [4, 5] utilizó el teorema de muestreo para demostrar que una señal analógica limitada en banda es equivalente a la secuencia de sus muestras tomadas a un intervalo determinado y conocido como el *intervalo de Nyquist* [6]. El *teorema de muestreo de Whittaker-Kotel'nikov-Shannon* (WKS) dice:

Toda función de una señal $f(t)$ definida en \mathbb{R} que está limitada en banda dentro de un intervalo $[-w, w]$ (donde $w > 0$) puede ser completamente reconstruida con respecto a toda $t \in \mathbb{R}$ partiendo de sus valores muestreados $f(kp/w)$ que son tomados en los puntos kp/w (donde $k \in \mathbb{Z}$) igualmente espaciados sobre el eje real \mathbb{R} en términos de:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{kp}{w}\right) \frac{\text{sen}(wt - kp)}{wt - kp}. \quad (1.4)$$

Cronológicamente en 1957 A. V. Balakrishnan generaliza el teorema de muestreo para procesos aleatorios estacionarios [7], en 1960 A. Linden y N. M. Abramson proporcionan una generalización mediante la expansión de las M-derivadas de una función limitada en banda, aproximándola a una serie de Taylor caracterizada con una densidad Gausiana sobre cada muestra [8]. En 1962 Petersen y D. Middleton extienden el teorema de muestreo para dimensiones espaciales de mayor orden [9].

El teorema clásico WKS en la mayoría de sus generalizaciones es válido para funciones determinísticas con espectro limitado [10, 11, 12, 13]. Existen algunas generalizaciones de este teorema para *procesos aleatorios estacionarios* [14, 15, 16, 17], cuya aplicación práctica de sus resultados son difíciles en cuanto a la realización de la función de reconstrucción y el cálculo de la función de error de reconstrucción, en la descripción estadística del Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción. Para superarse algunas de estas dificultades, un proceso *no estacionario* debe transformarse primero en proceso *estacionario*, y posteriormente se aplica el teorema WKS para muestrear y reconstruir el nuevo proceso "estacionario" [18, 19]. El autor de [19] no discute información alguna acerca de la función de distribución de probabilidad del proceso aleatorio.

1.2 Teorema de Balakrishnan y sus desventajas

Como es bien sabido el teorema clásico de muestreo asociado con los nombres Whittaker-Kotelnikov-Shannon (WKS) fue establecido para funciones *determinísticas* con un espectro finito o limitado. La mayoría de sus generalizaciones están también conectadas con el PMR de funciones determinísticas. La generalización del teorema WKS en procesos estocásticos con espectro de potencia finito fue dado por A. Balakrishnan. El teorema de Balakrishnan aplica el teorema clásico WKS de funciones determinísticas en procesos estocásticos estacionarios con espectro finito, así llamado *teorema WKS para procesos estocásticos*.

Dada la popularidad de este teorema para la teoría estadística de comunicación, es necesario incluir el texto del mismo [7] para su posterior mención y discusión.

Sea $x(t)$ $-\infty < t < \infty$ un proceso estocástico evaluado real o complejo, estacionario en el "sentido amplio*" y que posee una densidad espectral, la cual desaparece fuera del intervalo de la frecuencia angular $[-2pW, 2pW]$. Entonces se tiene la representación:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N x\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\text{sen} p(2Wt - n)}{p(2Wt - n)}. \quad (1.5)$$

Para cada t , donde \lim simboliza el límite en el sentido cuadrático medio.

Más explícitamente, esto significa:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left[x(t) - \sum_{-N}^N x\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\text{sen} p(2Wt - n)}{p(2Wt - n)} \right]^2 \right\} = 0. \quad (1.6)$$

Se asume que todos los procesos tienen sus varianzas y sus promedios finitos.

Siguiendo el teorema de Balakrishnan, cualquier realización $x(t)$ de algún proceso estocástico con espectro de potencia finito ($S(\omega)=0$, cuando $|\omega| \geq \omega_b$, ω_b es la frecuencia límite del espectro de potencia) puede ser reconstruido con *error cero* de su infinito número de muestras $x(T_i)$ con el intervalo de discretización $\Delta T = \pi/\omega_b$:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(T_i) \mathbf{y}_i(t). \quad (1.7)$$

donde: $\tilde{x}(t)$ es la función de reconstrucción; $\mathbf{y}_i(t)$ es la función básica determinada por la expresión:

$$\mathbf{y}_i(t) = \frac{\text{sen} \omega_b(t - i\Delta T)}{\omega_b(t - i\Delta T)} \quad (1.8)$$

La descripción estadística del Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción de los procesos estocásticos basado en el teorema de Balakrishnan deja algunas dudas. Esto no significa que el teorema de Balakrishnan sea incorrecto, sino que es necesario hacerlo más específico en cuanto a su formulación, y especificar que es un caso particular

del procedimiento general de la descripción estadística del Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción de los procesos estocásticos. Entonces nuestra propuesta es utilizar la regla de la esperanza matemática condicional, demostrando con algunos resultados, que tiene ventajas con respecto a la descripción estadística del PMR basado en el teorema de Balakrishnan.

Algunas consideraciones referidas al teorema de Balakrishnan:

- 1) El teorema no utiliza la principal característica de un proceso aleatorio que es la función de densidad de probabilidad o funciones características unidimensional o multidimensional.
- 2) Siempre es utilizada la función $\text{Sen } x/x$ para todo tipo de proceso aleatorio, lo cual de primera instancia parece inadecuado.
- 3) Este teorema es válido para procesos Gaussianos porque su prueba sólo está basada en usar el espectro de potencia (o correspondientemente, usando la función de covarianza usual). Todo proceso no Gaussiano es caracterizado por algunas funciones espectrales o funciones cumulantes de alto orden. El teorema de Balakrishnan no usa información alguna acerca de ciertas características de los procesos estocásticos. Significa que son iguales a cero y por lo tanto, este teorema parte sólo con el proceso Gaussiano.
- 4) La suma lineal de las muestras consideradas es postulada en el teorema de Balakrishnan. Esta afirmación no es contradictoria con el caso Gaussiano del proceso estocástico.
- 5) Si el número de muestras es finito entonces *el tipo de* función básica debe ser dependiente del número corriente de muestras.
- 6) Un resultado muy extraño del teorema de Balakrishnan – el error de reconstrucción de *algunos tipos* de procesos estocásticos es igual al cero – que es explicado por hechos en que los procesos estocásticos tienen espectro finito, son singulares, no realizables, son procesos degenerados. Los procesos estocásticos reales no tienen tales características.
- 7) No se habla en ningún caso de algún procedimiento de extrapolación, dado que se trabaja con un número infinito de muestras.

1.3 Caso general

Se va a realizar el PMR de procesos aleatorios basado en la información que nos proporcionan las muestras. Primero debemos definir las propiedades estadísticas de los procesos aleatorios, en seguida definir las características de los procesos aleatorios al pasar por sistemas lineales, ya que para los procesos aleatorios no hay una expresión explícita como en el caso determinístico, por lo que entonces se debe hacer una descripción de la salida que incluya la función de covarianza $K(\mathbf{t})$ y la función de densidad espectral $S(\mathbf{w})$. El análisis se llevará a cabo con filtros pasa bajas, del tipo RC con una, dos y tres etapas. Esto se llevará a cabo tomando en cuenta la influencia que proporciona tanto el número de muestras que se toma en cuenta, como su magnitud o valor, además del intervalo de tiempo que se pone entre muestras, además de cuantificar el error que implica cada reconstrucción.

1.3.1 Descripción de los procesos aleatorios

Un proceso aleatorio continuo $x(t)$ tiene un gran número de realizaciones posibles $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(j)}(t), \dots, x^{(M)}(t)$ en un instante de tiempo dado y cada realización tiene una media de probabilidad, descrita por propiedades estadísticas. Cada realización $x^{(j)}(t)$ puede estar definida en una continuidad de valores de t sobre un intervalo finito (t_a, t_b) o sobre un intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ [21].

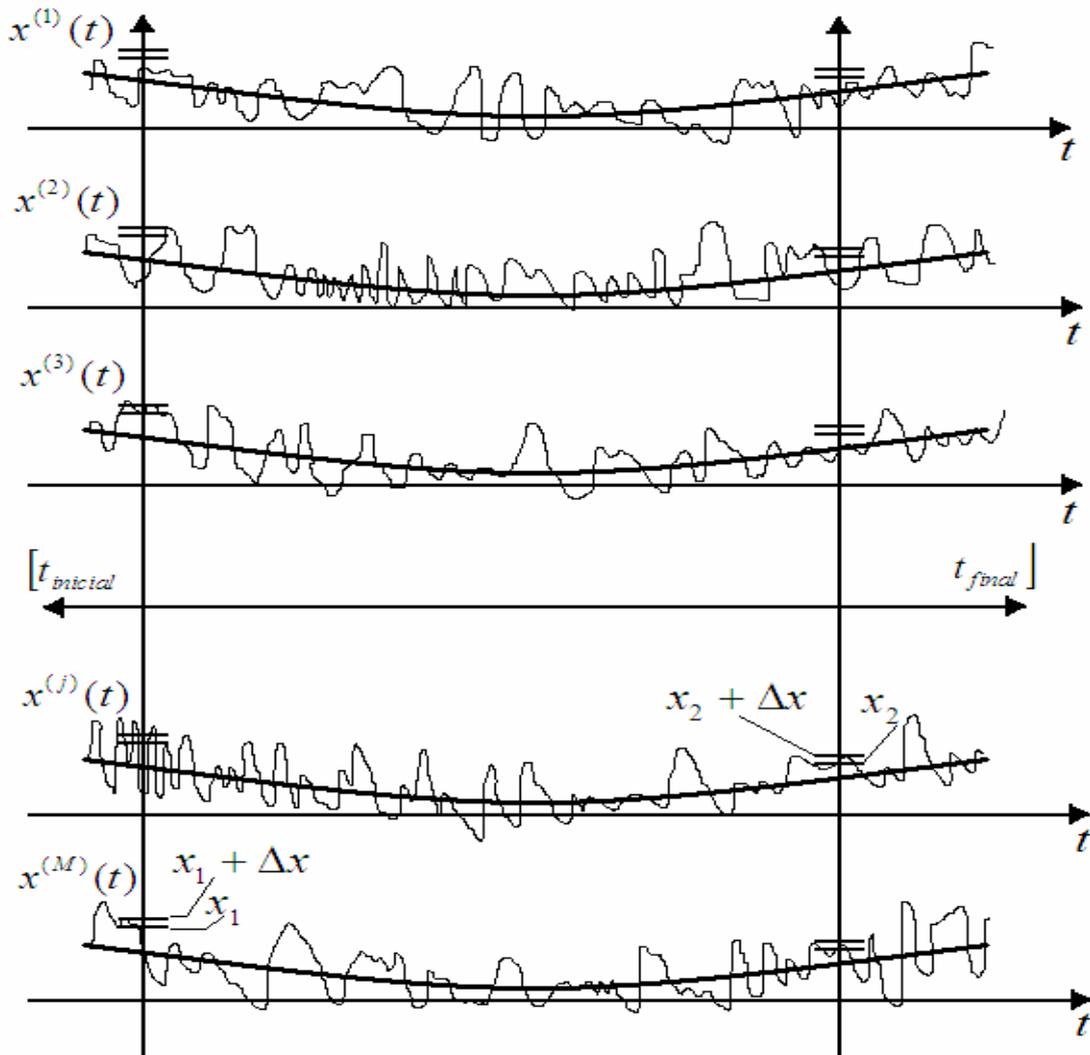


Figura 2-1: Conjunto de posibles realizaciones $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(j)}(t), \dots, x^{(M)}(t)$ que puede tener un proceso aleatorio continuo.

Si consideramos el conjunto de realizaciones del proceso estocástico que se muestra en la Figura 1-1, donde cada realización está dentro del intervalo $(t_{inicial}, t_{final})$, después dividimos a x en un conjunto de L unidades ($L=M$) cada uno con ancho Δx y seleccionamos

un intervalo $(x_1, x_1 + \Delta x)$ y posteriormente medimos la probabilidad de x en este intervalo, contando el número de realizaciones correspondientes:

$$P(x_1 < x < x_1 + \Delta x; t_1), \quad (1.9)$$

si tomamos los límites $M \rightarrow \infty$ y $\Delta x \rightarrow dx$, obtenemos la probabilidad de x, t está en el intervalo $(x_1, x_1 + dx)$

$$P(x_1 < x < x_1 + \Delta x; t_1) \rightarrow w_1[x_1, t_1] dx_1. \quad (1.10)$$

De forma análoga se puede encontrar la función de densidad de probabilidad deseada en cada intervalo, y también se puede encontrar de densidad de probabilidad para cada instante de tiempo t_1, t_2, \dots, t_m dentro del intervalo $(t_{inicial}, t_{final})$ del proceso aleatorio y hallar su fdp (función de densidad de probabilidad) $w_1[x(t)]$. De forma análoga se puede obtener la función de distribución de probabilidad de segundo orden $w_2[x_1(t_1), x_2(t_2)]$ y así sucesivamente con las fdp's de mayor orden $w_m[x_1(t_1), x_2(t_2), \dots, x(t_m)]$. La estructura de las funciones de densidad de función de probabilidad depende por supuesto del tiempo en que son calculadas estas funciones.

Conociendo las funciones de distribución de probabilidad unidimensionales $w_1[x_1(t_1)], w_2[x_2(t_2)], \dots, w_n[x(t_n)]$ de cada tiempo (t_1, t_2, \dots, t_m) se puede obtener información estadística del proceso, tal información es: *función de esperanza matemática* $m(t) = \langle x(t) \rangle$ correspondiente a cada instante de tiempo t_1, t_2, \dots, t_m ; *función de varianza matemática* $s^2(t) = \langle (x(t) - m(t))^2 \rangle$ y las *funciones momento inicial y funciones momento central de orden n*, cuyas expresiones en forma continua son las siguientes:

- 1) Función esperanza matemática:

$$m(t) = \langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w[x(t)] dx \quad (1.11)$$

- 2) Función varianza matemática

$$s^2(t) = \langle (x(t) - m(t))^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m(t))^2 w[x(t)] dx \quad (1.12)$$

- 3) Función momento inicial de orden n:

$$\langle x^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n(t) w[x(t)] dx \quad (1.13)$$

- 4) Función momento central de orden n:

$$\langle \hat{x}^n(t) \rangle = \langle (x(t) - m(t))^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m(t))^n w[x(t)] dx \quad (1.14)$$

1.3.2 Función de covarianza

Otra característica de suma importancia estadística que refleja las diferencias entre dos procesos estocásticos que tengan la misma fdp pero su estructura es diferente en el tiempo es la *función de covarianza* $K_x(t_1, t_2)$, que es una función determinística. Esta función tiene como argumentos los tiempos t_1 y t_2 , de los cuales la función de covarianza cambiará cuando la distancia entre estos dos tiempos o secciones cambien también.

$$K_x(t_1, t_2) = \langle \dot{x}(t_1) \dot{x}(t_2) \rangle = \int (x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2)) w_2[x(t_1), x(t_2)] dx(t_1) dx(t_2) \quad (1.15)$$

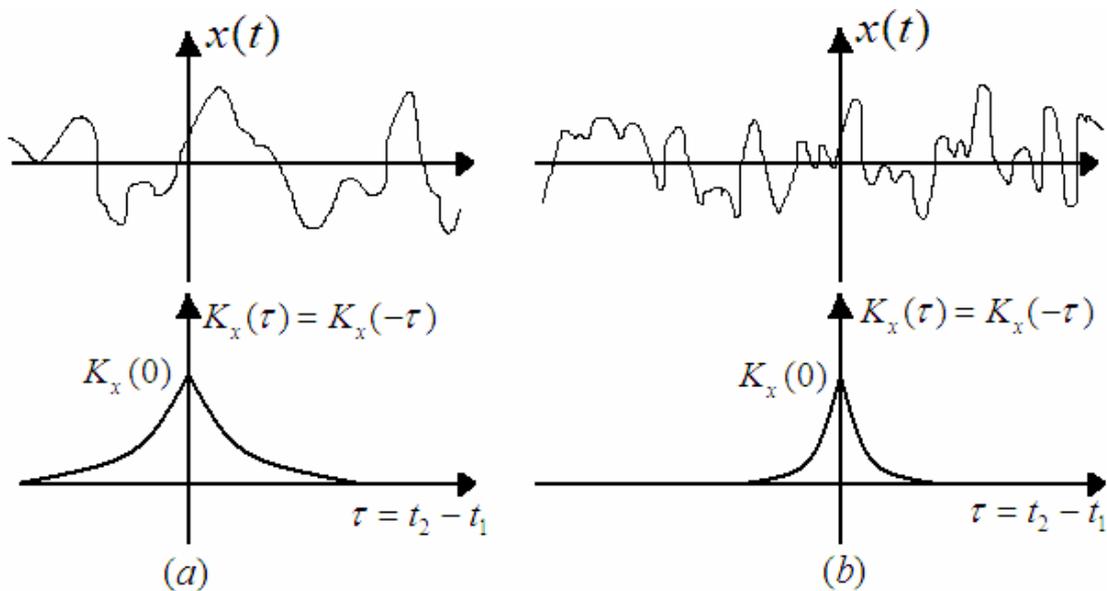


Figura 1-2: Función de covarianza $K_x(t)$ para a) un proceso suave b) un proceso caótico

Si en la función de covarianza fijamos t_1 y desplazamos a t_2 , tendremos el nivel de dependencia estadística del proceso en este intervalo. La función de covarianza tiende a ser independiente cuando t_1 se aleja de t_2 . La función nos indica si el proceso es *suave* cuando tiende a cero lentamente y, por el contrario si tiende a cero rápidamente se trata de un proceso *caótico*.

Si el proceso es estacionario de segundo orden, la función de covarianza es sólo una función de diferencia de tiempo $t = t_2 - t_1$, por lo tanto, la función de covarianza $K_x(t_1, t_2)$ será representada de la forma $K(t) = K(t_1, t_2)$. A continuación se presentan algunas propiedades de la función de covarianza [20, 21]:

- 1) Tiene su valor máximo cuando $t_2 = t_1$, donde $t = t_2 - t_1 = 0$:

$$K_x(0) = \langle \dot{x}(t) \dot{x}(t) \rangle = \langle \dot{x}^2(t) \rangle = \mathbf{s}^2(t) = \mathbf{s}_x^2 \quad (1.16)$$

2) Es una función par:

$$K_x(\mathbf{t}) = K_x(-\mathbf{t}) \quad (1.17)$$

3) Tiende a cero cuando $\tau \rightarrow \infty$:

$$K_x(\infty) = 0 \quad (1.18)$$

4) Existe una *función de covarianza normalizada* $R_x(\mathbf{t})$ donde:

$$R_x(\mathbf{t}) = \frac{K_x(\mathbf{t})}{K_x(0)} = \frac{K_x(\mathbf{t})}{\mathbf{s}_x^2} \quad (1.19)$$

5) Su rango de valores está contenido en :

$$|K_x(\mathbf{t})| \leq K_x(0), \text{ por lo tanto: } 0 \leq |R_x(\mathbf{t})| \leq 1. \quad (1.20)$$

6) Tiene relación con el parámetro llamado *tiempo de covarianza* t_c en función de $R_x(\mathbf{t})$

$$t_c = \int_0^{\infty} |R_x(\mathbf{t})| dt . \quad (1.21)$$

El *tiempo de covarianza* t_c indica el tiempo en el que existe dependencia o influencia entre los mismos valores del proceso estocástico y es muy utilizado para medir las características de la respuesta de un filtro. Cuando un proceso es caótico se tiene que el valor del tiempo de covarianza t_c del proceso es pequeño comparado con el tiempo de covarianza t_c de un proceso suave.

1.3.3 Densidad espectral de potencia

Otro parámetro importante que sugiere caracterizar las propiedades espectrales de los procesos aleatorios con la distribución de potencia de cada armónico en función de la frecuencia. El teorema de Wiener-Khintchine sugiere que la función de covarianza $K_x(\mathbf{t})$ está relacionada con la *función de densidad espectral de potencia* $S(\mathbf{w})$ mediante la transformada de Fourier [21,22].

Teorema de Wiener-Khintchine:

$$K_x(\mathbf{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\mathbf{w}) e^{-j\mathbf{w}\mathbf{t}} d\mathbf{w} \quad (1.22)$$

$$S_x(\mathbf{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\mathbf{t}) e^{-j\mathbf{w}\mathbf{t}} dt \quad (1.23)$$

Para un proceso suave la densidad espectral de potencia es estrecha y para un proceso caótico la densidad espectral de potencia es ancha. La transformada de Fourier $S_x(\mathbf{w})$ tiene las siguientes propiedades:

- 1) $S_x(\mathbf{w})$ siempre es real.
- 2) $S_x(\mathbf{w}) \geq 0$
- 3) Es una función simétrica $S_x(\mathbf{w})=S_x(-\mathbf{w})$

1.3.4 Funciones que caracterizan a un sistema lineal

Sean las funciones determinísticas $u(t)$ y $x(t)$, como se muestra en la figura 1-3, que corresponden a la entrada y salida de un *sistema lineal con parámetros fijos*, entonces si $u(t)$ produce la salida $x(t)$, entonces la salida $u(t+\mathbf{t})$ produce la salida $x(t+\mathbf{t})$. Por lineal se entiende que si $u_1(t)$ produce una salida $x_1(t)$, entonces la entrada $u(t)=a_1u_1(t)+a_2u_2(t)$ produce la salida $x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$.

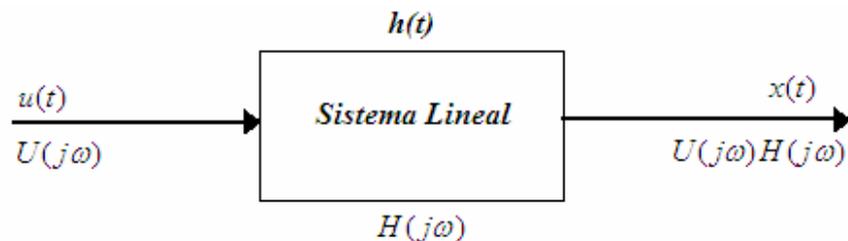


Figura 1-3: Relación entrada salida en un sistema lineal

Donde la función de transferencia con parámetros fijos, que es la relación entre las amplitudes complejas de $x(t)$ y $u(t)$ en función de la frecuencia ω , es:

$$H(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{U(j\omega)} \quad (1.24)$$

Entonces si deseamos conocer la salida del sistema conociendo la señal de entrada tenemos:

$$X(j\omega) = U(j\omega)H(j\omega) \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (1.25)$$

$X(j\omega)$ y $U(j\omega)$ son las transformadas de Fourier de la señal de salida y entrada del sistema lineal, respectivamente. Una de las entradas $u(t)$ de importancia es el *impulso unitario*, de la cual su transformada de Fourier es igual a la unidad para toda ω . Entonces con esta información y considerando la expresión (1.25), la salida en el dominio de Fourier es la siguiente:

$$X(j\omega) = 1 \cdot H(j\omega) = H(j\omega) \Leftrightarrow h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (1.26)$$

donde $h(t)$ es la respuesta al impulso unitario del sistema lineal. La respuesta de un sistema lineal a una entrada transitoria se puede expresar en términos de la respuesta al impulso unitario del sistema, en lugar de la función de transferencia:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{t})u(t-\mathbf{t})d\mathbf{t}. \quad (1.27)$$

1.3.5 Respuesta de un sistema lineal a procesos aleatorios

Suponiendo que $u(t)$ es un proceso aleatorio del tipo Gaussiano, del que conocemos sus funciones: esperanza matemática, varianza y covarianza [23], y que queremos conocer las propiedades del proceso aleatorio a la salida del sistema lineal. La función de covarianza en la salida está dada por:

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= \langle \hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2) \rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{t}_1)\hat{u}(t_1-\mathbf{t}_1)d\mathbf{t}_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{t}_2)\hat{u}(t_2-\mathbf{t}_2)d\mathbf{t}_2 \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{t}_1)d\mathbf{t}_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{t}_2)d\mathbf{t}_2 \langle \hat{u}(t_1-\mathbf{t}_1)\hat{u}(t_2-\mathbf{t}_2) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{t}_1)d\mathbf{t}_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{t}_2)d\mathbf{t}_2 K_u(t_1-\mathbf{t}_1, t_2-\mathbf{t}_2). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Si el proceso aleatorio en la entrada es estacionario en el sentido amplio:

$$K_u(t_1-\mathbf{t}_1, t_2-\mathbf{t}_2) = K_u(\mathbf{t}-\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2), \quad (1.29)$$

donde $\mathbf{t}=t_1-t_2$. Entonces la función de covarianza en la salida es:

$$K_x(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{t}_1)d\mathbf{t}_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{t}_2)K_u(\mathbf{t}-\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2)d\mathbf{t}_2 \quad (1.30)$$

Por lo tanto si en la entrada del sistema lineal tenemos un proceso aleatorio estacionario en el sentido amplio, entonces en la salida el proceso aleatorio también lo será.

.....

1.4 Caso Gaussiano

Veamos lo que sucede para el caso Gaussiano: si un proceso aleatorio del tipo Gaussiano $u(t)$ es aplicado a un filtro lineal estable, la salida en el filtro será Gaussiana también; por otro lado, si se considera un conjunto de variables aleatorias $x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_n)$, obtenidas al observar un proceso aleatorio $x(t)$ en cada instante de tiempo T_1, T_2, \dots, T_n , teniendo a la entrada el proceso $x(t)$ Gaussiano, entonces el conjunto de variables aleatorias son Gaussianas para cada n , y son completamente descritas por su matriz de covarianza $K_x(T_i, T_j)$ de orden n , donde cada elemento de la matriz es:

$$K_x(T_i, T_j) = \langle (x(T_i) - m_x(T_i))(x(T_j) - m_x(T_j)) \rangle \quad i, j=1, 2, \dots, n. \quad (1.31)$$

Si la matriz de covarianza $K_x(T_i, T_j)$ se llega a transformar en una matriz diagonal, entonces las variables aleatorias no tienen correlación y por lo tanto son variables

Gaussianas independientes. La función de densidad de probabilidad n dimensional queda especificada completamente por los momentos de primer y segundo orden es decir, por la esperanza matemática, la covarianza y covarianza y finalmente si un proceso Gaussiano es estacionario en el sentido amplio, también lo es en el sentido estricto.

1.4.1 Regla de la esperanza matemática condicional

Suponiendo que tenemos un proceso estocástico $x(t)$ caracterizado por sus funciones de distribución de probabilidad multidimensionales $w_m[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)]$, y que una realización de tal proceso se discretiza en determinados tiempos $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$. Entonces tenemos un conjunto de muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$, entonces las funciones momento inicial, central y densidad de probabilidad se ven modificadas. Tales nuevas densidades de probabilidad y funciones son *condicionales* o a posteriori.

$$w[x(t) | X, T] = w[x(t) | x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)] \quad (1.32)$$

$$\tilde{m}(t) = \langle x(t) | X, T \rangle = \langle x(t) | x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w[x(t) | X, T] dx \quad (1.33)$$

$$s^2(t) = \langle (x(t) - \tilde{m}(t))^2 | X, T \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - \tilde{m}(t))^2 w[x(t) | X, T] dx \quad (1.34)$$

La reconstrucción que obtengamos, entonces, dependerá de las muestras $x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)$ y de conocer su función de distribución de probabilidad *fdp* $w_m[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)]$, donde $N < m$. Todas las posibles realizaciones del *proceso aleatorio condicional* $\tilde{x}(t) = x(t) | X, T$ pasan a través de las muestras como lo indica la Figura 1-4. No podemos conocer la realización exacta, pero se puede obtener una aproximación estadística para cada tiempo t , dependiendo del caso se elige la regla estadística apropiada para la función de reconstrucción y después estimar el error de nuestra reconstrucción con ayuda de la función de error de reconstrucción.

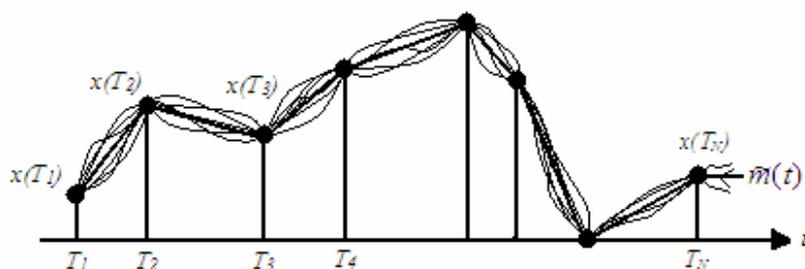


Figura 1-4 : Posibles realizaciones de un proceso aleatorio condicional, dado un conjunto de muestras X,T.

Existe un criterio estadístico conocido para la estimación de una variable aleatoria: la regla de la esperanza matemática condicional, aplicando esta regla podemos usar la función de la esperanza matemática condicional, como función de reconstrucción, y el error de reconstrucción será evaluado por la función de varianza condicional como función de

error de reconstrucción, además de incorporar otra característica del Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción que es la función de covarianza del proceso reconstruido.

Considerando el caso general de un proceso Gaussiano no estacionario $x(t)$ con la esperanza matemática $m(t)$, la varianza $\mathbf{s}^2(t)$ y la función de covarianza $K_x(t_i, t_j)$, tenemos la información necesaria del proceso, ya que podemos escribir la expresión exacta de la fdp multidimensional de orden m arbitraria:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n(x_1, \dots, x_n) &= (2\mathbf{p})^{\frac{-p}{2}} \left[\det \|\mathbf{K}_x(t_i, t_j)\| \right]^{-1/2} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} [x_i - m(t_i)] [x_j - m(t_j)] \right\} \end{aligned} \quad (1.35)$$

donde $\det \|\mathbf{K}_x(t_i, t_j)\|$ es el determinante de la *matriz correlación*

$$\|\mathbf{K}_x(t_i, t_j)\| = \begin{vmatrix} K_x(t_1, t_1) & K_x(t_1, t_2) \dots & K_x(t_1, t_n) \\ \cdot & \dots & \cdot \\ K_x(t_n, t_1) & K_x(t_n, t_2) \dots & K_x(t_n, t_n) \end{vmatrix}, \quad (1.36)$$

y $\|a_{i,j}\|$ es la inversa de la matriz correlación,

$$\|a_{ij}\| = \|\mathbf{K}_x(t_i, t_j)\|^{-1}. \quad (1.37)$$

Si fijamos el conjunto de muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$, entonces la fdp condicional será Gaussiana también. Las principales características estadísticas de este proceso condicional están descritas en las siguientes expresiones y el proceso Gaussiano condicional queda totalmente descrito:

$$\tilde{m}_x(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t, T_i) a_{ij} [x_j(T_j) - m_x(T_j)], \quad (1.38)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_x^2(t) = \mathbf{s}_x^2(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t, T_i) a_{ij} K_x(T_j), \quad (1.39)$$

$$\tilde{K}_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t_1, T_i) a_{ij} K_x(T_j, t_2), \quad (1.40)$$

Estas fórmulas son válidas para el caso *no estacionario*. Con estas expresiones se puede obtener una reconstrucción del proceso estocástico inicial con los intervalos adecuados a la calidad preestablecida. [27], [28], [29], [30].

.....

1.4.2 Ejemplos Gaussianos Markovianos utilizando la función de covarianza $R_x(t) = \sigma^2 e^{-a|t|}$.

A continuación se muestran algunos ejemplos de la aplicación de la regla de la esperanza matemática en el caso Gaussiano, igual al que se obtiene en la salida de un filtro RC integrador lineal cuando la entrada es alimentada con ruido blanco. La respuesta de tal filtro RC está dada por una función de covarianza normalizada del tipo exponencial. Se mostrarán algunos gráficos con un número limitado de muestras, diversos intervalos de muestreo y diversas funciones de correlación normalizadas $R_x(t)$.

Primero se ilustra el caso para $R_x(t) = \sigma^2 e^{-a|t|}$, donde para llegar a una comparación de resultados se trabaja con funciones normalizadas, con un $\tau_c=1$, que es una característica de la respuesta de un filtro que determina el tiempo de influencia entre los mismos valores de un proceso. Entonces si $\sigma=1$:

$$t_c = \int_0^{\infty} |R_x(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{-a|t|} dt = \frac{1}{a}, \quad (1.41)$$

entonces para que el tiempo de covarianza sea 1, implica que $\alpha=1$. También nos podemos dar cuenta que la función de covarianza $R_x(t)$ usada en esta sección tiene las propiedades de un proceso Markoviano en la descripción del PMR. Las expresiones de la regla de la esperanza matemática condicional quedan de la siguiente forma:

$$\hat{x}(t) = \hat{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{i=1}^N \exp(-a|t-T_i|) a_{ij} \quad (1.42)$$

$$\sigma^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \exp(-a|t-T_i|) a_{ij} \exp(-a|T_j-t|) \quad (1.43)$$

Veamos algunos ejemplos trabajando con esta función de covarianza normalizada en el régimen de interpolación, dado que en otros trabajos se ha considerado el caso Gaussiano, solo se presentan ejemplos de este tipo no tomando en cuenta el régimen de extrapolación ya que el área de nuestro interés es el caso no Gaussiano:

Num. Ejemplo	1.4.2- 1
?t	0.2t_c
No. de muestras	5
Valores de las muestras	1.05, 1.3, 1.4, 1.3, 1.5
Posición de la 1ª. Muestra	0.375
Intervalo entre 1ª y última muestra	0.8

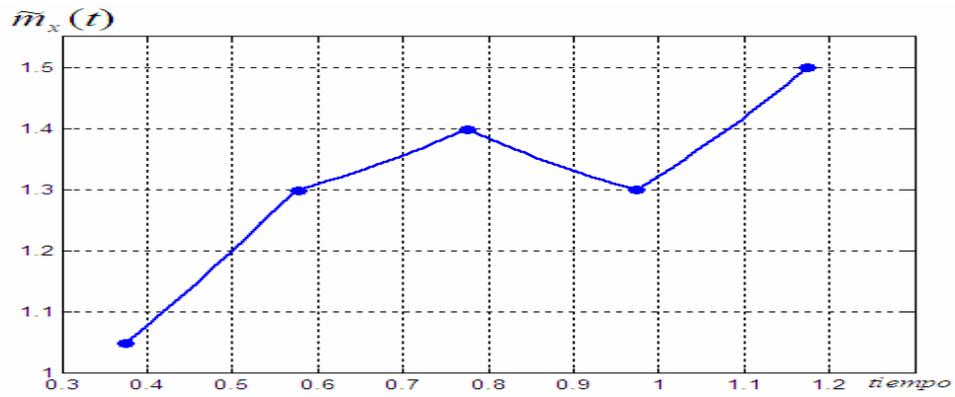


Figura 1-5: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 5 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = e^{-a|t|}$.

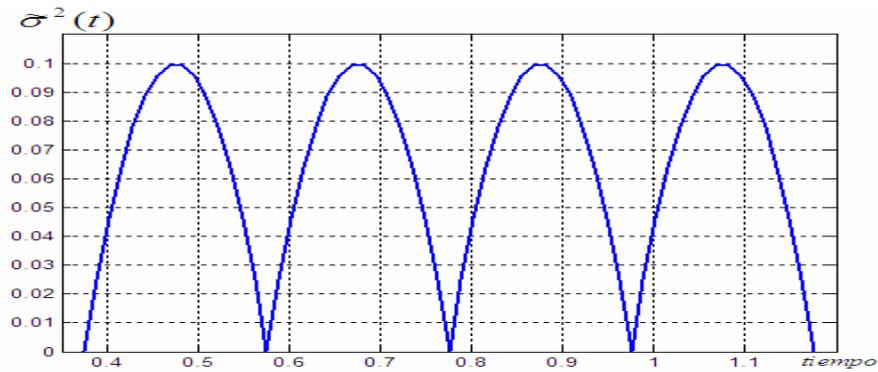


Figura 1-6: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 5 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = e^{-a|t|}$.

Num. ejemplo	1.4.2 - 2
?t	$0.2t_c$
No. de muestras	5
Valores de las muestras	0.75, 1.05, 1.3, 1.4, 0.8
Posición de la 1ª. muestra	0.2
Intervalo entre 1ª y última muestra	0.8

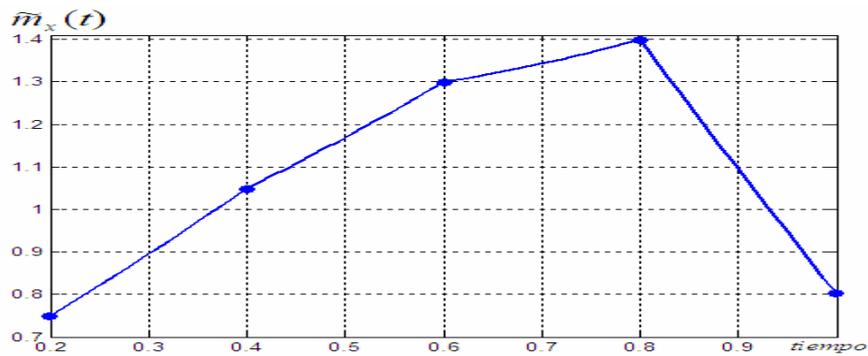


Figura 1-7: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 5 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = e^{-a|t|}$.

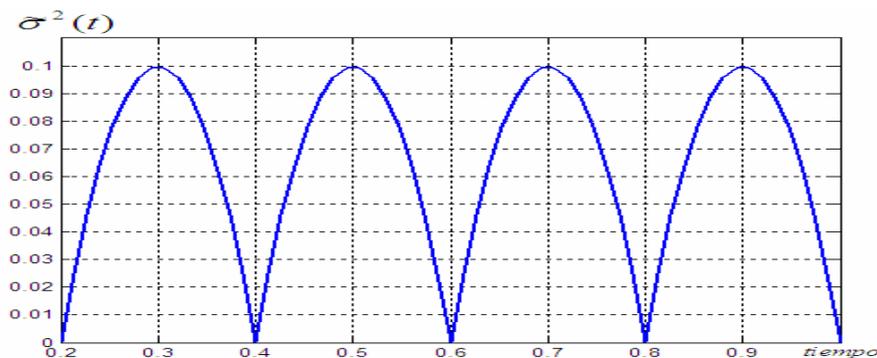


Figura 1-8: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 5 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = e^{-a|t|}$.

Num. ejemplo	1.4.2-3
Δt	$0.2t_c$
No. de muestras	5
Valores de las muestras	0.6, 0.75, 1.05, 1.3, 1.1
Posición de la 1ª. muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	0.8

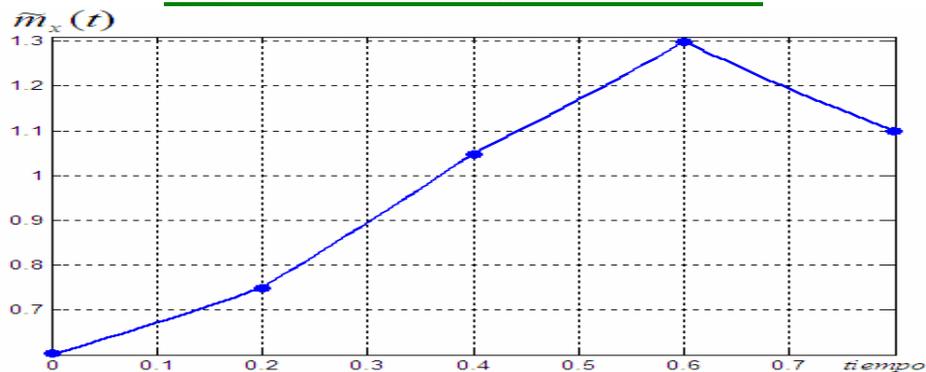


Figura 1-9: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 5 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = e^{-a|t|}$.

En estas primeras gráficas podemos ver que las reconstrucciones son líneas casi rectas debido al corto intervalo puesto para la reconstrucción, por tanto la reconstrucción parece una simple unión de puntos.

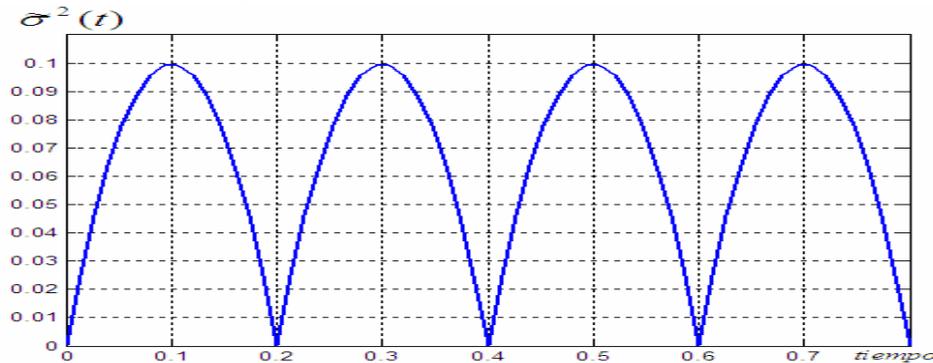


Figura 1-10: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 5 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = e^{-a|t|}$.

En estas primeras gráficas podemos darnos cuenta que las curvas de error alcanzan valores pico máximos iguales, manteniendo el valor pico aproximado de 0.1, a pesar de que los valores muestra no son los mismos. Otra primera observación es que en una misma gráfica de error tanto el primer pico como el último así como los intermedios alcanzan las mismas magnitudes.

Ahora incrementemos un poco el intervalo de reconstrucción en tiempo para ver las consecuencias que esto nos trae, en primera instancia trabajamos con distintos valores muestra que en los ejemplos anteriores para observar si existe algún cambio no esperado.

Num. ejemplo	1.4.2 – 4
Δt	$0.5t_c$
No. de muestras	6
Valores de las muestras	1.2, 1.3, 0.8, 0.7, 1.0, 0.9
Posición de la 1ª muestra	0.5
Intervalo entre 1ª y última muestra	2.5

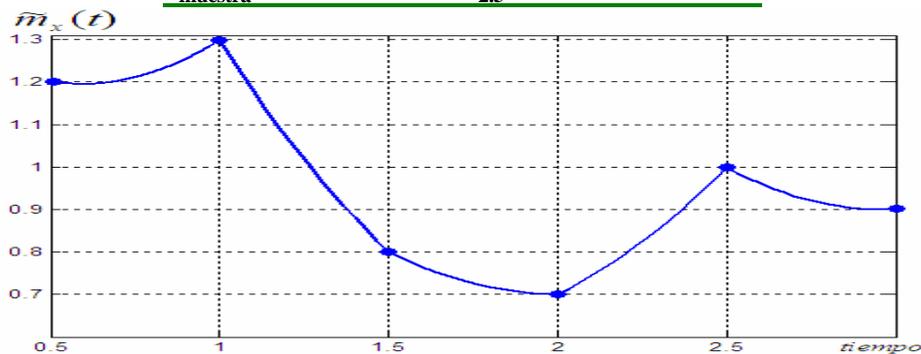


Figura 1-11: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 6 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = e^{-a|t|}$.

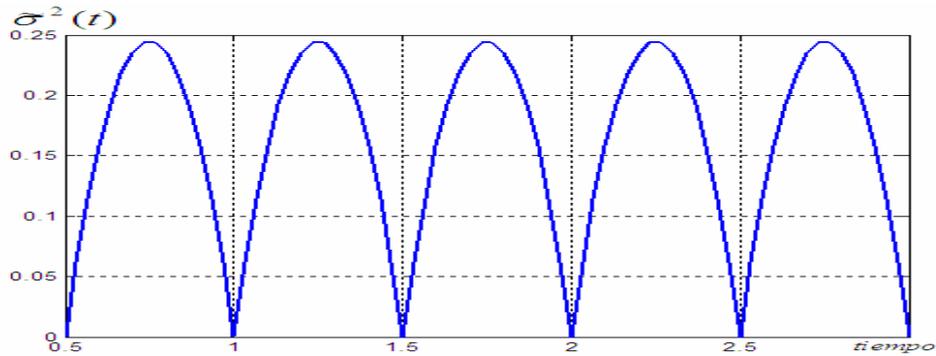


Figura 1-12: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 6 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = e^{-a|t|}$.

Num. ejemplo	1.4.2 – 5
τ_c	$0.5\tau_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 1.2, 1.3, 0.8
Posición de la 1ª. muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	1.5

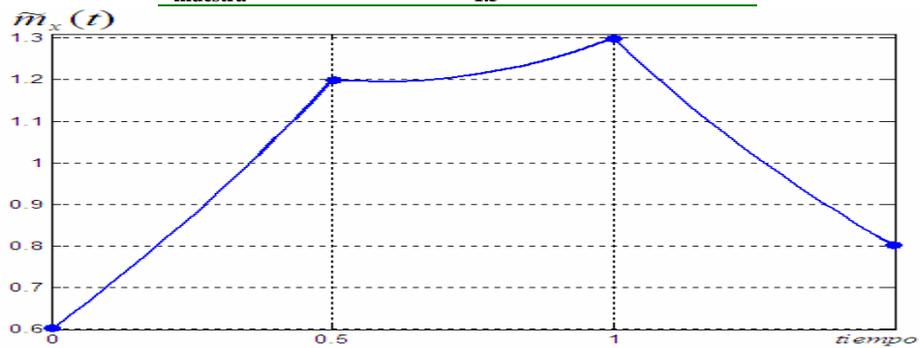


Figura 1-13: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = e^{-a|t|}$.

En estas 2 reconstrucciones anteriores podemos destacar que incrementando el intervalo de tiempo entre muestras, la función de reconstrucción comienza a tomar la forma de la función de covarianza normalizada que en este caso es una función del tipo exponencial.

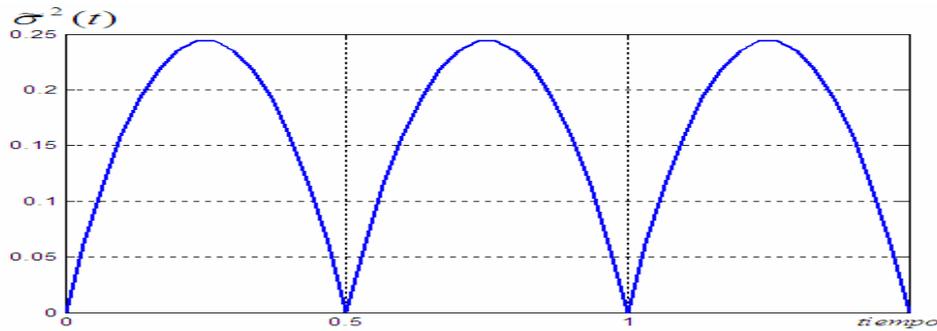


Figura 1-14: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = e^{-at|t|}$.

Ahora en las dos funciones de error anteriores nos permiten ver algo esperado: que al incrementar el tiempo entre muestras al reconstruir tendremos un error de mayor magnitud que en un intervalo de tiempo menor, de nuevo los valores específicos de las muestras no influyen en la magnitud del error y también a pesar del cambio en el intervalo de tiempo todos los picos error en una misma gráfica son iguales. Continuamos incrementando el intervalo de tiempo entre muestras.

Num. ejemplo	1.4.2- 6
t_c	t_c
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 1.3, 0.7, 0.8
Posición de la 1ª. muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	3

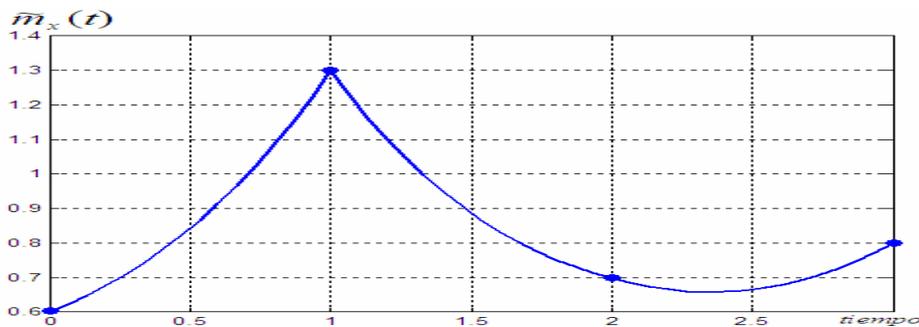


Figura 1-15: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = e^{-at|t|}$.

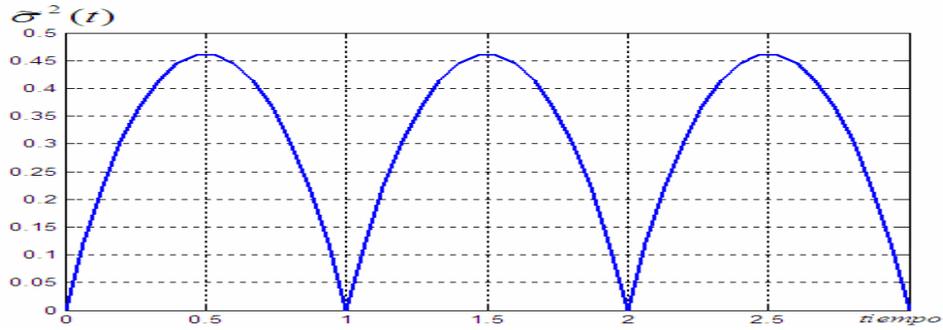


Figura 1-16: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = e^{-at|t|}$.

Num. ejemplo	1.4.2 - 7
τ_c	$1.5\tau_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 0.8, 0.8, -0.9
Posición de la 1ª muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	4.5

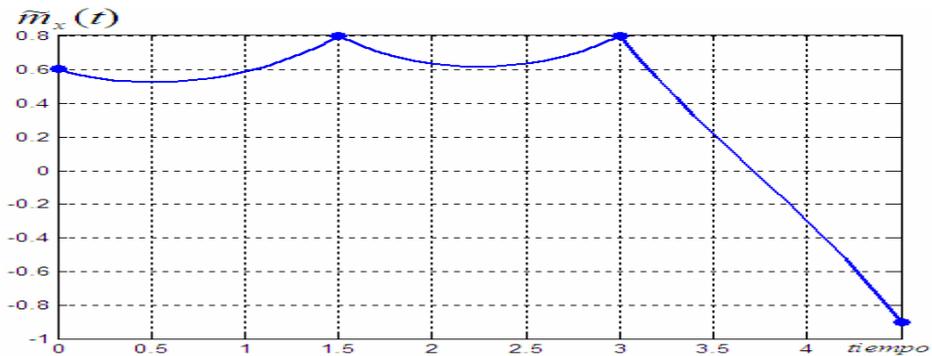


Figura 1-17: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = e^{-at|t|}$.

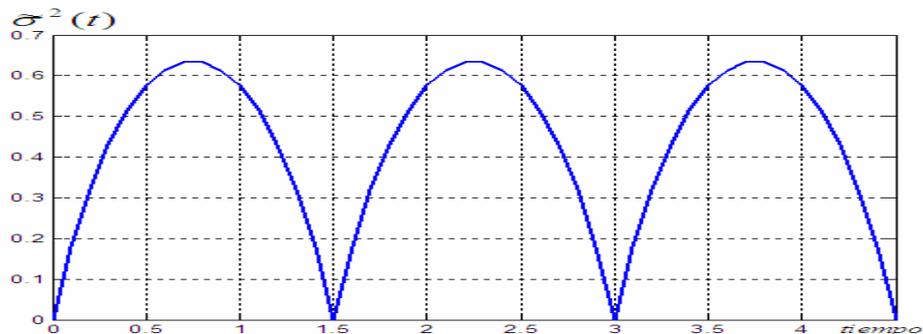


Figura 1-18: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = e^{-at|t|}$.

Los comentarios sobre esta sección son los siguientes:

- La reconstrucción se constituye por líneas casi rectas cuando el intervalo entre muestras es pequeño.
- Al aumentar el intervalo de reconstrucción se puede apreciar que la función de reconstrucción adquiere forma similar a la función de covarianza empleada, lo cual comienza a mostrar la importancia que tiene tal función de covarianza dentro de la reconstrucción.
- La función de reconstrucción para este caso (Markoviano) depende solamente de las dos muestras más cercanas; los extremos de cada intervalo de reconstrucción son los únicos que influyen. Otras muestras cercanas no influyen en la reconstrucción.
- La función de error de reconstrucción depende solamente de la magnitud de la distancia que exista entre muestras, ya que como se puede observar en las gráficas que tienen el mismo intervalo de tiempo entre muestras el error no se ve influido por la magnitud de los valores muestra. Por tanto la función de error de reconstrucción no depende del número de muestras que se toman en cuenta para el caso Markoviano.
- Algo también esperado es que en los puntos donde se encuentran las muestras el error es cero, dado que la función de reconstrucción pasa por esos puntos.
- Otra consideración en cuanto a la función de error de reconstrucción es que las campanas que se forman son simétricas en cuanto a su forma, un detalle del caso Gaussiano que llegaremos a comparar con los casos no Gaussianos.

1.4.3 Ejemplos Gaussianos no Markovianos con la función de covarianza

$$R_x(t) = (1 + \alpha |t|)e^{-\alpha|t|}$$

Vamos entonces a trabajar con otra función de covarianza, para lograr una comparación correcta de resultados las funciones deberán estar normalizadas y por tanto tener un tiempo de covarianza unitario, si tomamos $\sigma=1$:

$$t_c = \int_0^{\infty} |R_x(t)| dt = \int_0^{\infty} (1 + \alpha |t|) e^{-\alpha|t|} dt = \frac{2}{\alpha}, \quad (1.44)$$

donde si deseamos un tiempo de covarianza unitario, entonces $\alpha=2$. Las expresiones para la función de reconstrucción y de error de reconstrucción quedan de la siguiente manera:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{i=1}^N (1 + \alpha |t - T_i|) \exp(-\alpha |t - T_i|) a_{ij} \quad (1.45)$$

$$s^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (1 + \alpha |t - T_i|) \exp(-\alpha |t - T_i|) a_{ij} (1 + \alpha |T_j - t|) \exp(-\alpha |T_j - t|) \quad (1.46)$$

Realizamos entonces algunos ejemplos trabajando con muestras similares al caso anterior para que los resultados que se obtengan se puedan comparar entre sí.

Num. ejemplo	1.4.3 - 1
?t	0.2t _c
No. de muestras	4
Valores de las muestras	1.05, 1.3, 1.4, 1.3
Posición de la 1ª. muestra	0.4

Intervalo entre 1ª y última muestra	0.6
-------------------------------------	-----

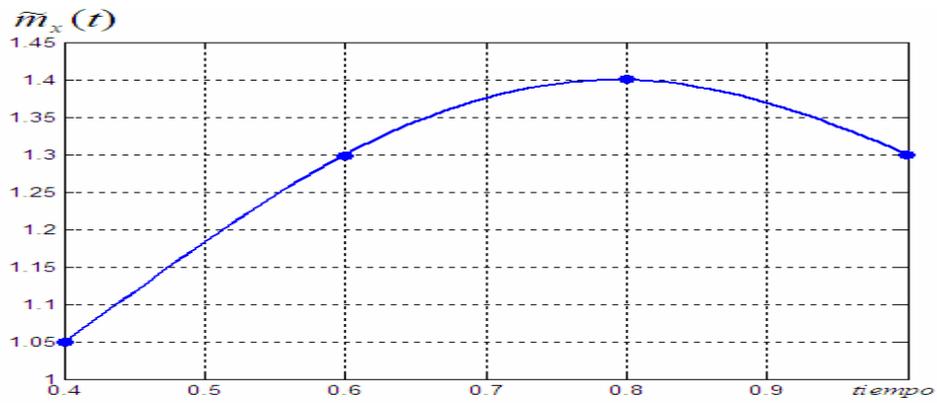


Figura 1-19: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_c(t) = (1 + a|t|)e^{-a|t|}$

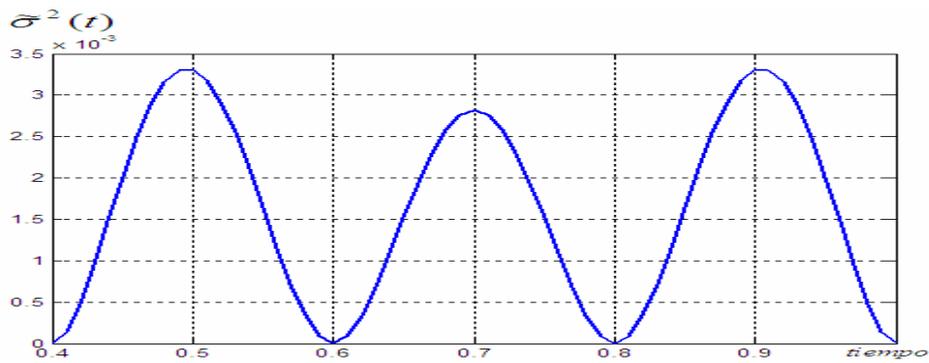


Figura 1-20: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_c(t) = (1 + a|t|)e^{-a|t|}$

Num. ejemplo	1.4.3 – 2
?t	$0.2t_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.75, 1.05, 1.3, 1.4
Posición de la 1ª. muestra	0.2
Intervalo entre 1ª y última muestra	0.6

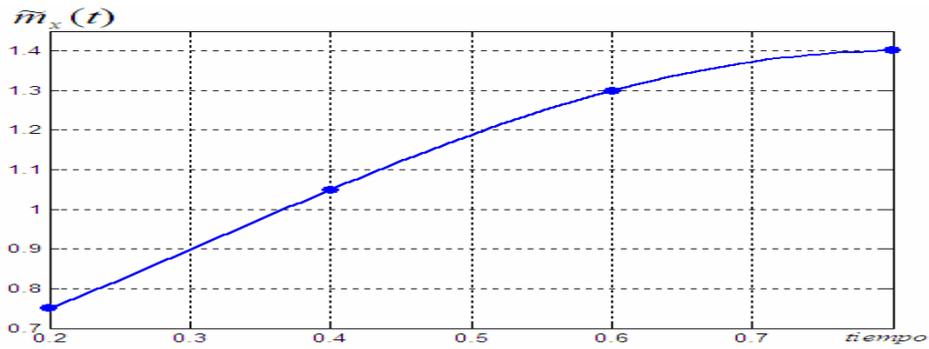


Figura 1-21: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + a|t|)e^{-a|t|}$

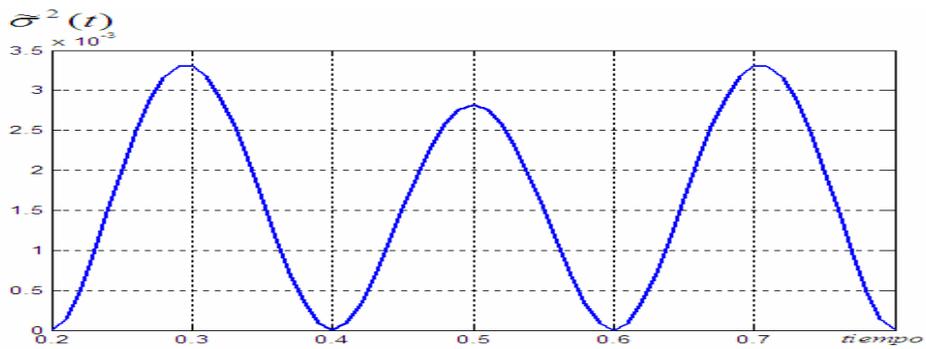


Figura 1-22: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + a|t|)e^{-a|t|}$

Num. Ejemplo	1.4.3 - 3
Δt	$0.2t_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 0.75, 1.05, 1.3
Posición de la 1ª. muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	0.6

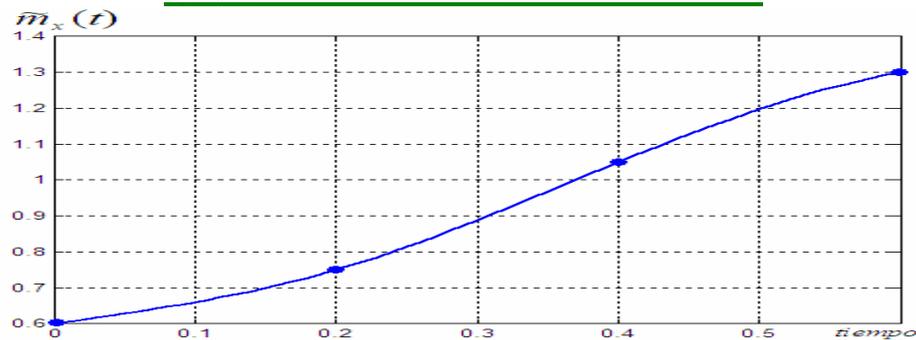


Figura 1-23: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + a|t|)e^{-a|t|}$

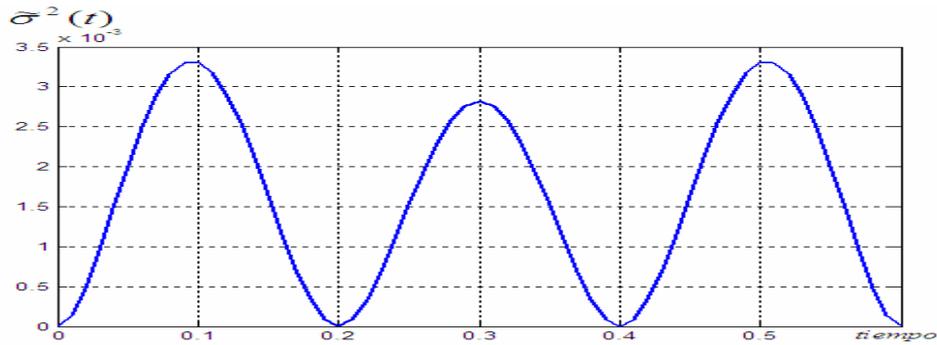


Figura 1 -24: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_c(t) = (1 + a|t|)e^{-a|t|}$

En el caso no Markoviano tanto la función de reconstrucción como la de error dependen de la influencia que proporcionan la cantidad de muestras existentes además del intervalo de reconstrucción, en los ejemplos anteriores se puede notar que las funciones de reconstrucción son más suaves que en la sección anterior, lo más destacado es la influencia de las dos muestras extremas sobre la intermedia en la función de error de reconstrucción, dicho de otra forma aquí si influye que se tomen en cuenta más muestras para disminuir el error, por lo menos en las secciones intermedias del intervalo de reconstrucción.

Se muestran algunos ejemplos para un $\Delta t = 0.5t_c$

Num. Ejemplo	1.4.3 – 4
?t	$0.5t_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	1.2, 1.3, 0.8, 0.7
Posición de la 1ª. muestra	0.5
Intervalo entre 1ª y última muestra	1.5

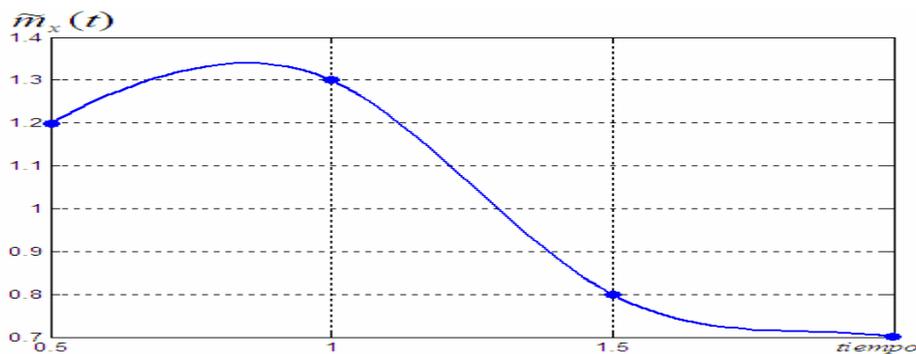


Figura 1-25: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_c(t) = (1 + a|t|)e^{-a|t|}$

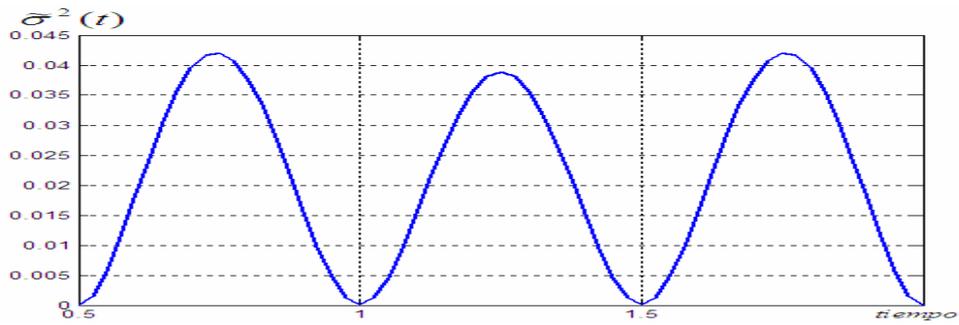


Figura 1 -26: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + a |t|)e^{-a|t|}$

Num. Ejemplo	1.4.3 – 5
Δt	$0.5t_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 1.2, 1.3, 0.8
Posición de la 1ª. muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	1.5

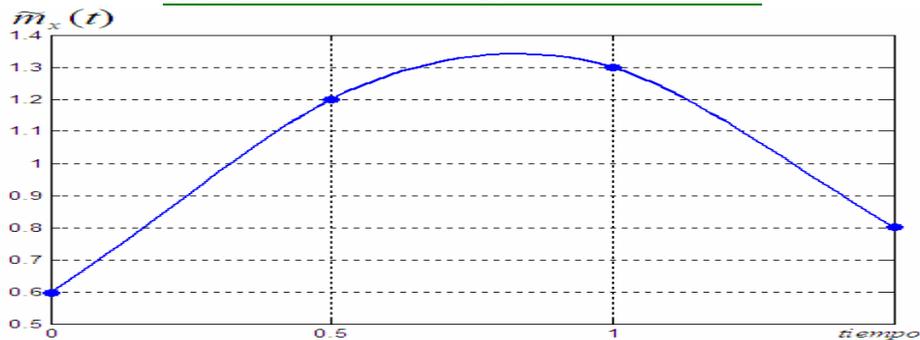


Figura 1-27: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + a |t|)e^{-a|t|}$

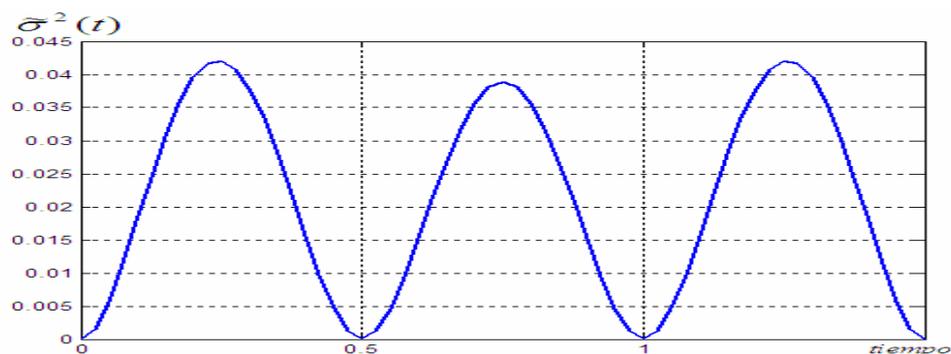


Figura 1 -28: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + a |t|)e^{-a|t|}$

En estos ejemplos nos damos cuenta que al aumentar la distancia entre muestras al reconstruir la influencia que se presenta en la parte media de la función de error de

reconstrucción se ve disminuida. En las funciones de reconstrucción se nota que toma la forma “curva” de la función de reconstrucción empleada.

Num. Ejemplo	1.4.3 – 6
?t	t_c
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 1.3, 0.7, 0.8
Posición de la 1ª. muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	3.0

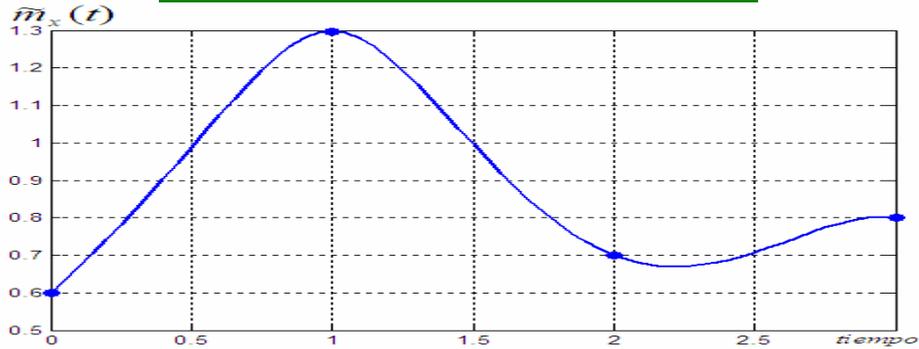


Figura 1-29: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + a|t|)e^{-a|t|}$

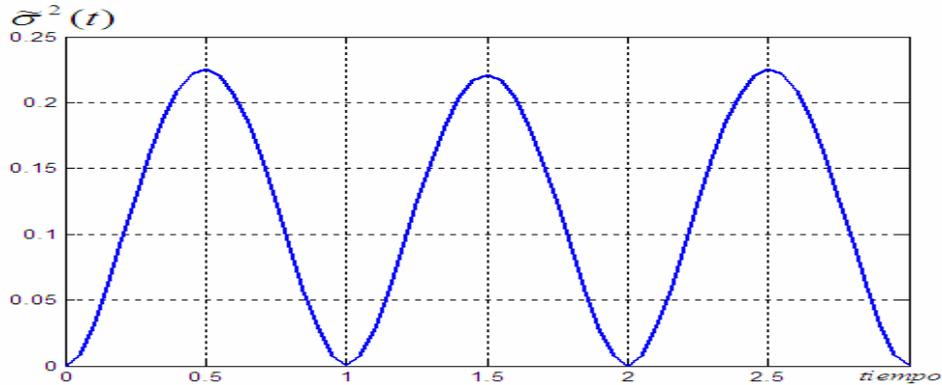


Figura 1 -30: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + a|t|)e^{-a|t|}$

Se muestran algunos ejemplos para un $\Delta t = 1.5t_c$

Num. Ejemplo	1.4.3 – 7
?t	$1.5t_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 0.8, 0.8, -0.9
Posición de la 1ª. muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	4.5

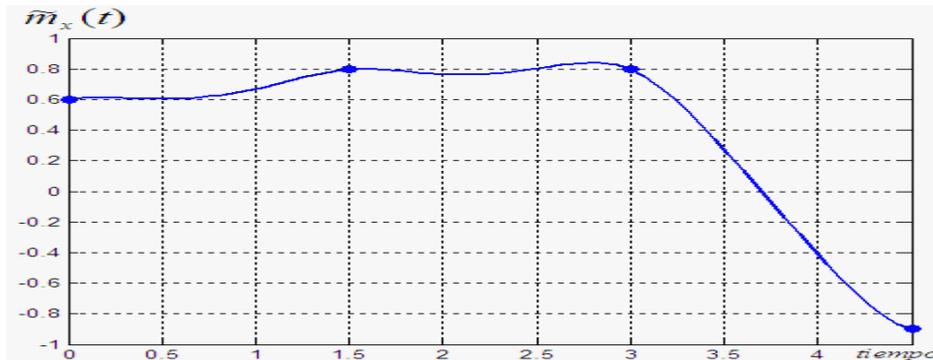


Figura 1-31: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + a|t|)e^{-a|t|}$

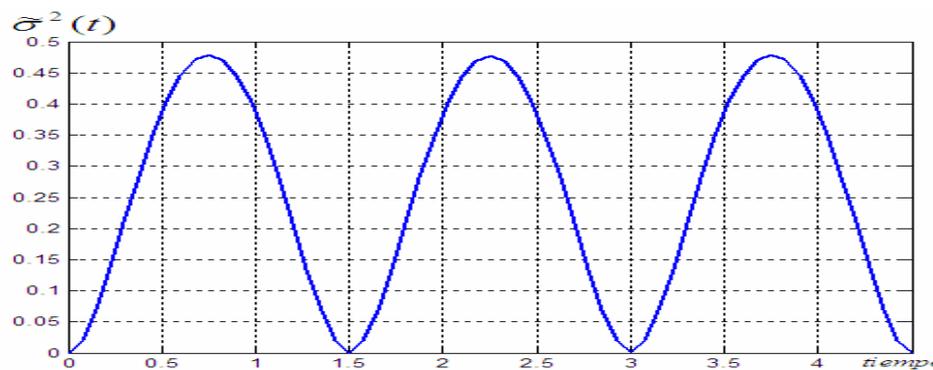


Figura 1-32: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + a|t|)e^{-a|t|}$

Como es de esperarse en los ejemplos anteriores la influencia en la parte media de la función de error de reconstrucción es mínima dado el incremento de tiempo de reconstrucción entre muestras y en la función de reconstrucción es aún más notoria la forma similar a la función de covarianza empleada.

A continuación vamos a tratar con otra función de covarianza aún más suave para ver los resultados.

1.4.4 Ejemplos Gaussianos no Markovianos con la función de covarianza

$$R_x(t) = (1 + a|t| + \frac{at^2}{3})e^{-a|t|}$$

Para continuar trabajando con resultados normalizados y un tiempo de covarianza unitario, implica que:

$$t_c = \int_0^{\infty} |R_x(t)| dt = \int_0^{\infty} (1 + a|t| + \frac{at^2}{3}) e^{-a|t|} dt = \frac{8}{3a}, \quad (1-47)$$

por lo que $\alpha=8/3$, por tanto la función de covarianza normalizada es:

$$R_x(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)e^{-\frac{8}{3}|t|} \quad (1.48)$$

Teniendo estas expresiones podemos escribir la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción de la siguiente manera:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{i=1}^N \left(1 + a |t - T_i| + \frac{a(t - T_i)^2}{3}\right) \exp(-a |t - T_i|) a_{ij} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) = & 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(1 + a |t - T_i| + \frac{a^2(t - T_i)^2}{3}\right) \exp(-a |t - T_i|) a_{ij} \times \\ & \times \left(1 + a |T_j - t| + \frac{a^2(T_j - t)^2}{3}\right) \exp(-a |T_j - t|) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Analizamos algunos ejemplos que utilizan esta función de covarianza, continuando con los valores muestra de los ejemplos anteriores y poder hacer una comparación, los resultados son los siguientes:

Se muestran algunos ejemplos para un $\Delta t = 0.2t_c$

Num. Ejemplo	1.4.4 - 1
Δt	$0.2t_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	1.05, 1.3, 1.4, 1.3
Posición de la 1ª. muestra	0.4
Intervalo entre 1ª y última muestra	0.6

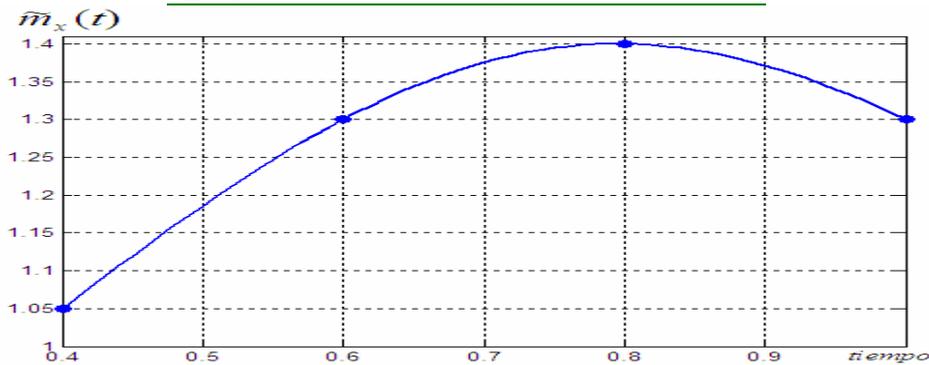


Figura 1-33: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = \left(1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64}{27}\right) e^{-\frac{8}{3}|t|}$

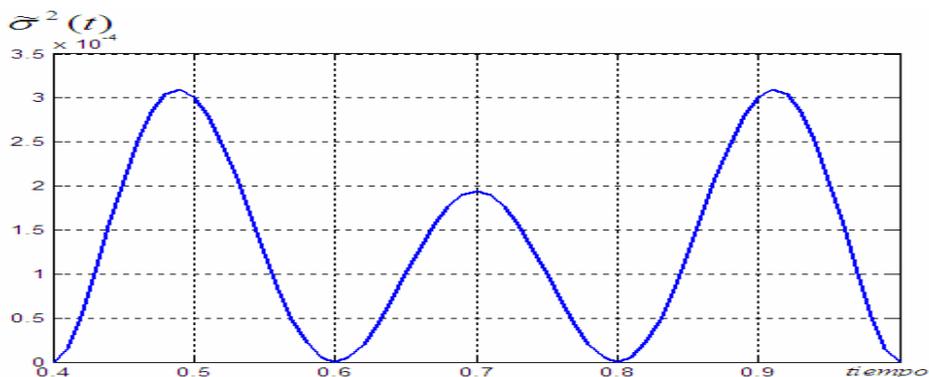


Figura 1-34: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = \left(1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64}{27}\right) e^{-\frac{8}{3}|t|}$

Num. Ejemplo	1.4.4 – 2
?t	0.2t _c
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.75, 1.05, 1.3, 1.4
Posición de la 1ª. muestra	0.2
Intervalo entre 1ª y última muestra	0.6

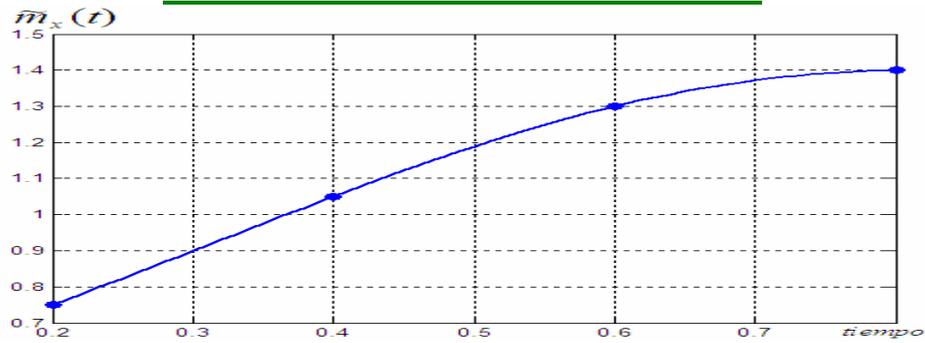


Figura 1-35: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$

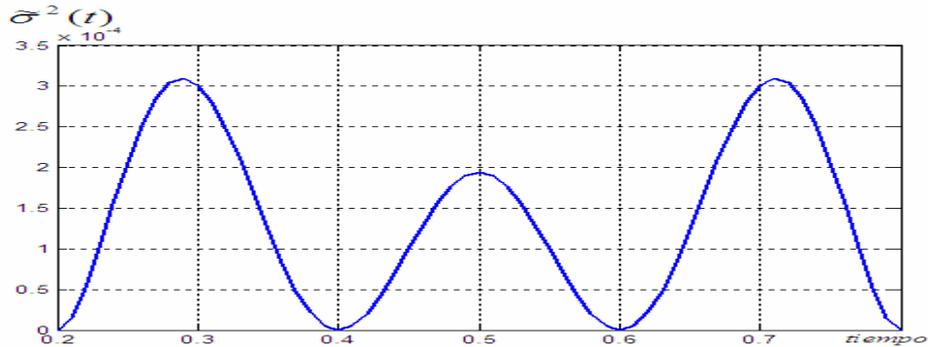


Figura 1 -36: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$

Num. Ejemplo	1.4.4 – 3
?t	0.2t _c
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 0.75, 1.05, 1.3
Posición de la 1ª. muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	0.6

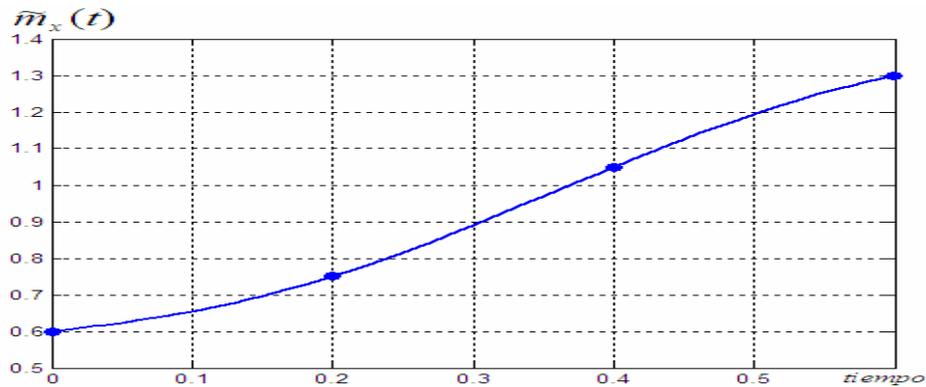


Figura 1-37: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{1}{3}|t|}$

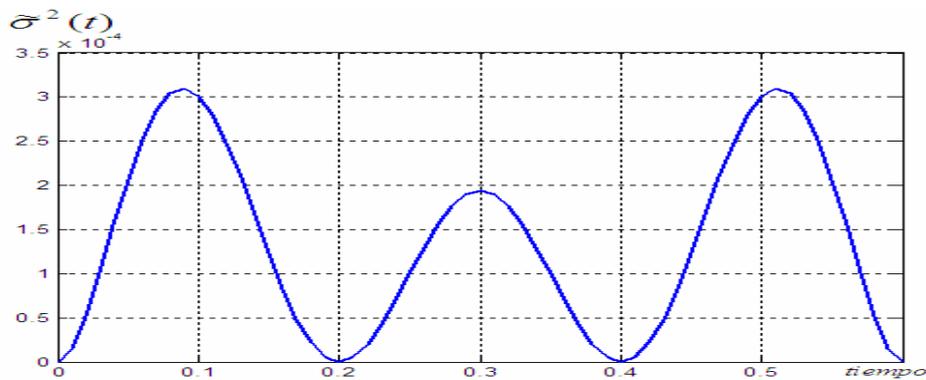


Figura 1-38: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{1}{3}|t|}$

Nuestras primeras impresiones de estos ejemplos son: la influencia de la función de covarianza en la función de reconstrucción es más notoria que en los dos casos anteriores. Diferencias más notorias están en las funciones de error de reconstrucción en donde en la parte central de estas gráficas existe una mayor aportación de las muestras existentes alrededor, esto nos da a entender que entre más muestras presentes tengamos nuestro error por lo menos en las partes medias del intervalo de reconstrucción será menor.

Se muestran algunos ejemplos para un $\Delta t = 0.5t_c$

Num. Ejemplo	1.4.4 - 4
Δt	$0.5t_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	1.2, 1.3, 0.8, 0.7
Posición de la 1ª. muestra	0.5
Intervalo entre 1ª y última muestra	1.5

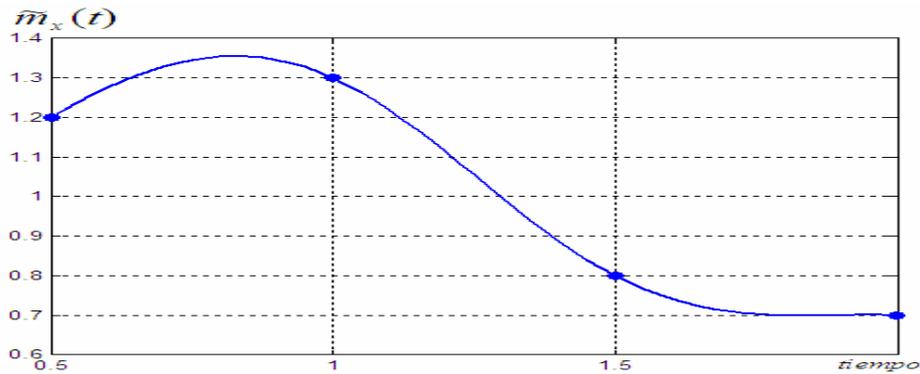


Figura 1-39: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{1}{3}|t|}$

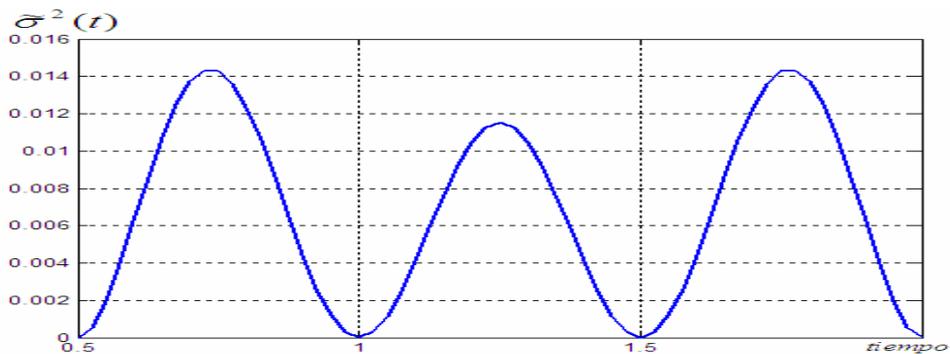


Figura 1-40: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{1}{3}|t|}$

Num. Ejemplo	1.4.4 – 5
T_c	$0.5T_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 1.2, 1.3, 0.8
Posición de la 1ª. muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	1.5

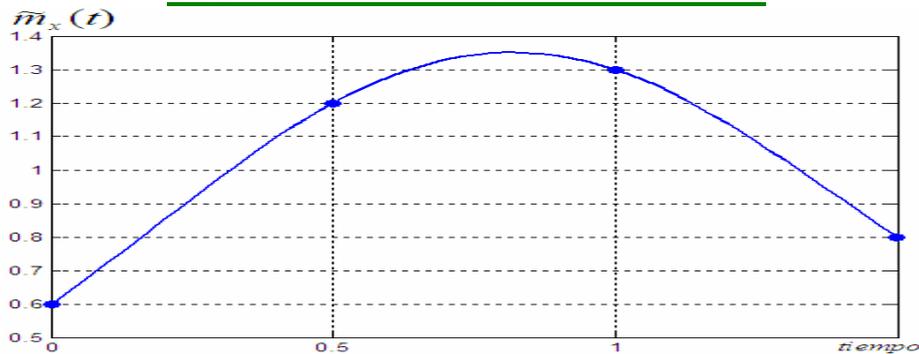


Figura 1-41: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{1}{3}|t|}$

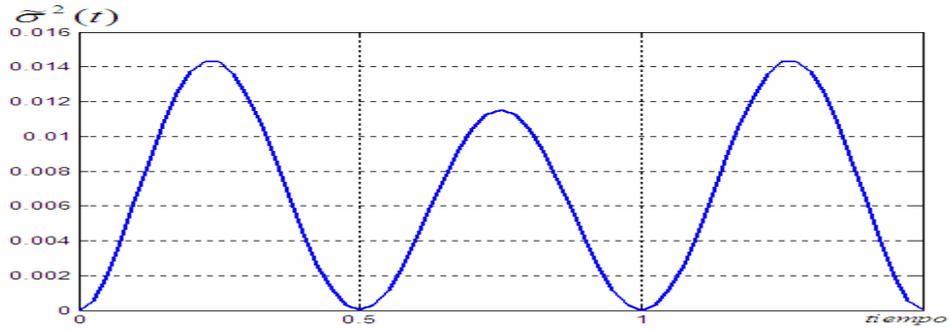


Figura 1-42: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza

$$R_x(t) = \left(1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}\right)e^{-\frac{8}{3}|t|}$$

Num. Ejemplo	1.4.4 – 6
?t	t _c
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 1.3, 0.7, 0.8
Posición de la 1ª. muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	3.0

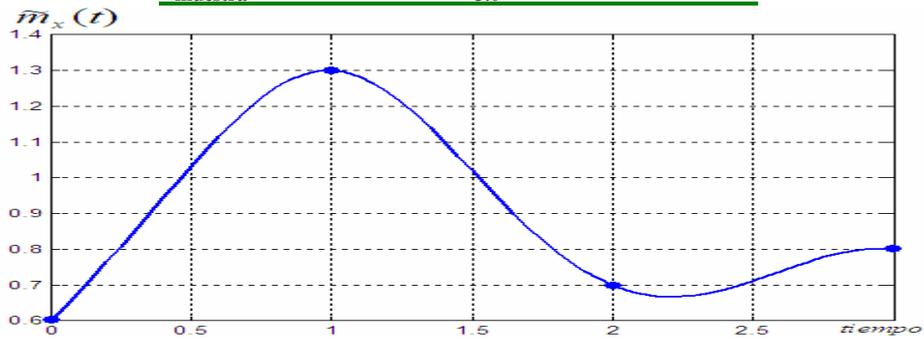


Figura 1-43: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza

$$R_x(t) = \left(1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}\right)e^{-\frac{8}{3}|t|}$$

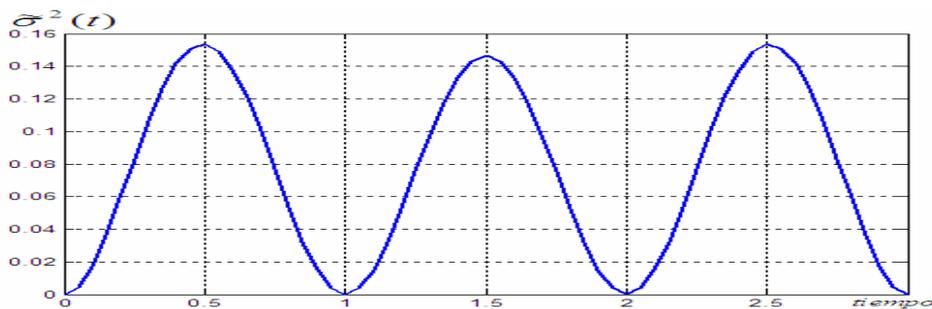


Figura 1-44: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza

$$R_x(t) = \left(1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}\right)e^{-\frac{8}{3}|t|}$$

Num. Ejemplo	1.4.4 – 7
?t	1.5t _c
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 0.8, 0.8, -0.9
Posición de la 1ª. muestra	0.0

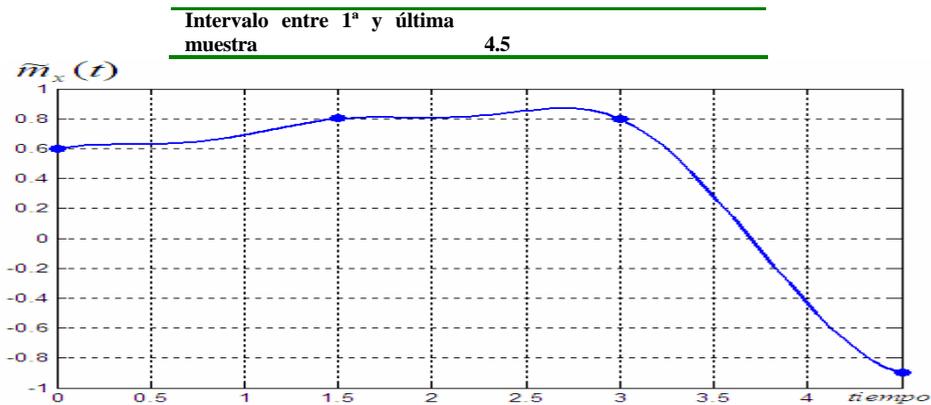


Figura 1-45: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{9}|t|}$

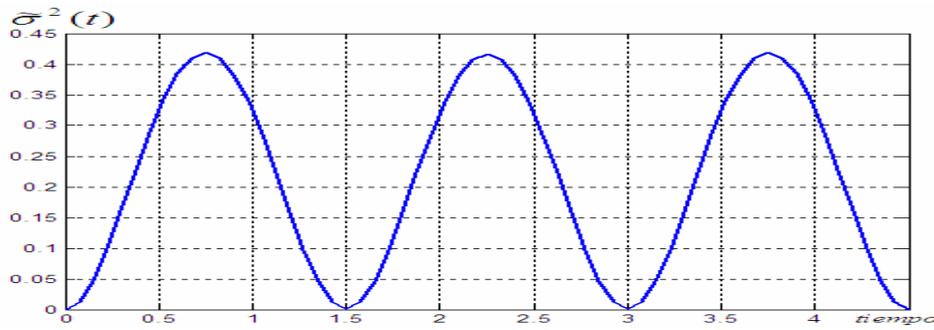


Figura 1-46: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27})e^{-\frac{8}{9}|t|}$

Después de graficar algunos ejemplos ampliando el intervalo de tiempo entre muestras se obtienen resultados esperados de acuerdo con lo que se viene demostrando con anterioridad, la influencia que cuando se tiene un filtro de dos etapas es menor que teniendo uno de tres etapas, en uno de dos etapas en el régimen de interpolación sólo influían las dos muestras en ambos lados de una reconstrucción entre dos muestras, pero ahora también se presenta la influencia de muestras que se encuentren en la cercanía de un intervalo de reconstrucción que por supuesto es de menor magnitud que la que aportan las 2 o hasta 3 muestras más cercanas. Entonces podemos afirmar que entre más suave sea una función de covarianza mayor influencia se tendrá por cada muestra que se tome en cuenta para la función de reconstrucción. También se puede afirmar que entre más lejana esté una muestra su influencia o aportación en una reconstrucción va disminuyendo directa y proporcionalmente, teniendo como determinante el tiempo de covarianza del filtro lineal.

1.4.5 Ejemplos para el caso particular de la función sinc

Si tenemos un proceso estacionario Gaussiano con esperanza matemática $m(t)=m=0$ y función de covarianza $K(t, T_1)=K(t-T_1)$, la expresión para la esperanza matemática condicional (1.38) queda de la siguiente forma:

$$\hat{x}(t) = \hat{m}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t-T_i) a_{ij} [x_j(T_j)] = \sum_{j=1}^N x(T_j) B_j(t), \quad (1.51)$$

Esta expresión depende solamente de la suma del producto de cada muestra por una función llamada *función básica* $B_j(t)$, de la siguiente forma:

$$B_j(t) = \sum_{i=1}^N K(t-T_i) a_{ij} \quad (1.52)$$

Tal función básica basa su comportamiento en la función de covarianza $K_x(\mathbf{t})$ del proceso aleatorio, además se debe tomar en cuenta que existe una función básica para muestra según el número de muestras que se tomen en cuenta ($j=1,2,\dots,N$). Cada función básica se multiplica con su correspondiente muestra y al final se suman todas las formas de onda resultante para obtener la reconstrucción del proceso. Entonces la forma de la función básica $B_j(t)$ depende de la muestra corriente j además de la cantidad de muestras N ; del conjunto de tiempos T_i en que se realizan los muestreos arbitrarios; del momento de covarianza presente entre las secciones del proceso en los instantes T_i y T_j ($K_x(T_i-T_j)$) y del momento de covarianza ($K_x(t-T_i)$) entre la sección del tiempo actual t y los tiempo de los muestreos T_i . De este modo estos parámetros influyen en la función básica y por lo tanto en la función de reconstrucción y en la función de error de reconstrucción. Se puede expresar la función básica en función del espectro de potencia $S_x(\mathbf{w})$ del proceso dado $x(t)$, primero usamos la transformada de Wiener-Khintchine para la función de covarianza $K_x(t-T_i)$:

$$K_x(t-T_i) = \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\mathbf{w}) e^{j\mathbf{w}(t-T_i)} d\mathbf{w}. \quad (1.53)$$

Entonces en lugar de (1.52) tenemos:

$$B_j(t) = \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\mathbf{w}) e^{j\mathbf{w}(t-T_i)} d\mathbf{w} \quad (1.54)$$

Teniendo (1.54), podemos considerar a un proceso Gaussiano con espectro limitado $-\mathbf{w}_b \leq \mathbf{w} \leq \mathbf{w}_b$, obteniendo:

$$B_j(t) = \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-\mathbf{w}_b}^{\mathbf{w}_b} S_x(\mathbf{w}) e^{j\mathbf{w}(t-T_i)} d\mathbf{w} \quad (1.55)$$

Entonces la función básica depende ahora de la frecuencia de corte \mathbf{w}_b y del tipo de función espectral $S_x(\mathbf{w})$, y también se debe tener en consideración que los momentos de covarianza $K_x(T_i-T_j)$ y por tanto los elementos a_{ij} deben basar su cálculo en la función de covarianza $K_x(\mathbf{t})$ correspondiente al espectro limitado. En caso de que algún parámetro cambie en la expresión anterior implicará un cambio en la función básica. Podemos decir entonces que la función básica óptima depende de las principales características estadísticas del proceso dado y de los parámetros de discretización, y no sólo de la frecuencia de corte \mathbf{w}_b .

Si observamos la expresión 1.55 nos damos cuenta que tal función básica no es del tipo *Sen x/x*, ya que ésta surge de un caso muy particular, cuando el espectro $S_x(\mathbf{w})$ es rectangular:

$$S_x(\mathbf{w}) = \begin{cases} S_0, & \mathbf{w} \leq \mathbf{w}_b \\ 0, & \mathbf{w} \geq \mathbf{w}_b \end{cases}. \quad (1.56)$$

Además si sustituimos 1.56 en 1.53 encontramos la función de covarianza $K_x(t-T_i)$:

$$K_x(t-T_i) = \frac{S_0 \mathbf{w}_b}{\mathbf{p}} \frac{\text{Sen} \mathbf{w}_b (t-T_i)}{\mathbf{w}_b (t-T_i)}. \quad (1.57)$$

Entonces podemos escribir la función básica:

$$B_j(t) = \sum a_{ij} \frac{S_0 \mathbf{w}_b}{\mathbf{p}} \frac{\text{Sen} \mathbf{w}_b (t-T_i)}{\mathbf{w}_b (t-T_i)}. \quad (1.58)$$

Si tomamos el intervalo de muestreo de la forma:

$$\Delta T = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{w}_b} \quad (1.59)$$

(1.58) y (1.59) determinan la independencia de cada muestra, esto es $K_x(T_i - T_j) = 0$, para $i, j = 1, 2, \dots, N$, cuando $i \neq j$. Entonces la matriz covarianza $K_x(T_i, T_j)$ es diagonal con los elementos $\mathbf{s}^2 = S_0 / \Delta T$ y la matriz inversa de covarianza también es diagonal con los elementos $(\mathbf{s}^2)^{-1} = \Delta T / S_0$. Entonces de (1.58) obtenemos:

$$B_j = \frac{\text{Sen} \mathbf{w}_b (t-T_j)}{\mathbf{w}_b (t-T_j)}. \quad (1.60)$$

Observamos que la función básica (1.60) está determinada por la función $\text{Sen } x/x$, que es un caso particular, cuando el proceso Gaussiano es caracterizado por el espectro rectangular. Entonces utilizando la expresión (1.51) y (1.59) podemos escribir la función de reconstrucción para este espectro rectangular:

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N [x(T_j)] B_j(t) = \sum_{j=1}^N [x(T_j)] \frac{\text{Sen} \mathbf{w}_b (t-T_j)}{\mathbf{w}_b (t-T_j)} = \sum_{j=1}^N \left[x\left(j \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{w}_b}\right) \right] \frac{\text{Sen}(\mathbf{w}_b t - j\mathbf{p})}{(\mathbf{w}_b t - j\mathbf{p})}, \quad (1.61)$$

$\mathbf{w}_b = 2\mathbf{p}W$ y j es el subíndice de la suma, por lo tanto:

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N \left[x\left(\frac{j}{2W}\right) \right] \frac{\text{Sen} \mathbf{p}(2Wt - j)}{\mathbf{p}(2Wt - j)}. \quad (1.62)$$

Si observamos las expresiones anteriores y comparamos con 1.4 y 1.5, llegamos a los mismos resultados utilizando el PMR de procesos aleatorios que se basa en la regla de la esperanza matemática condicional. Este PMR es de gran utilidad para describir el comportamiento de la función de reconstrucción de los procesos aleatorios Gaussianos con variadas funciones de covarianza o espectros de potencia limitados o no limitados en banda.

Ahora vamos a considerar un caso muy específico como cuando las muestras se hacen pasar por un filtro ideal, del cual la función de covarianza es $\text{Sen } x/x$:

$$K_x(\mathbf{t}) = \frac{\text{Sen} \mathbf{w}_b \mathbf{t}}{\mathbf{w}_b \mathbf{t}} = \frac{\text{Sen} 2\mathbf{p} \mathbf{t}}{2\mathbf{p} \mathbf{t}}, \quad (1.52)$$

en donde para que se tenga un tiempo de covarianza unitario se toma $w_b=2p$:

$$t_c = \int_0^{\infty} |R_x(t)| dt = \int_0^{\infty} \left| \frac{\text{Sen}2pt}{2pt} \right| dt = 1, \quad (1.53)$$

entonces la función de reconstrucción será de la siguiente manera:

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N \left[x(T_j) \frac{\text{Sen}w_b(t-T_j)}{w_b(t-T_j)} \right], \quad (1.54)$$

y la función de error de reconstrucción es del tipo:

$$e^2 = K_x(t,t) - 2 \sum_n K_x(t,nT) f(t-nT) + \sum_n \sum_m K_x(nT,mT) f(t-nT) f(t-mT) \quad (1.55)$$

Entonces podremos comparar los resultados obtenidos hasta ahora con el teorema clásico, tomando ejemplos hechos en las secciones anteriores pero con esta nueva función de covarianza. Se muestran algunos ejemplos para un $\Delta t = 0.2t_c$

Num. Ejemplo	1.4.5 - 1
Δt	$0.2t_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	1.05, 1.3, 1.4, 1.3
Posición de la 1ª. muestra	0.4
Intervalo entre 1ª y última muestra	0.6

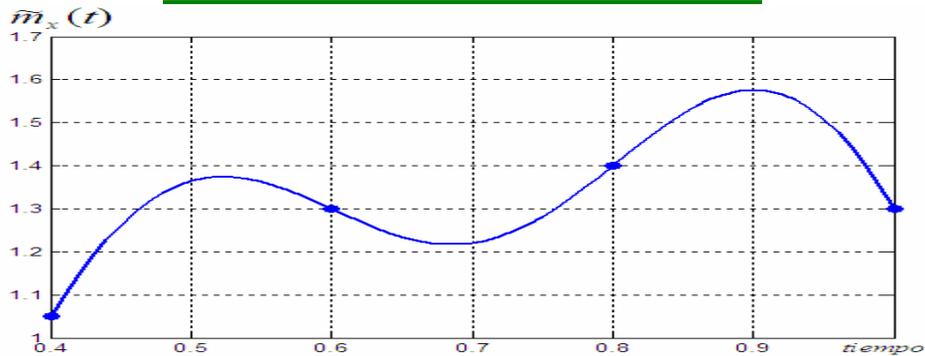


Figura 1-47: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$

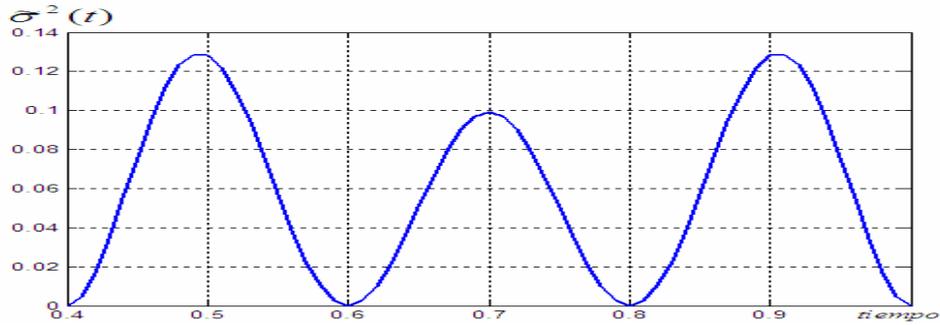


Figura 1 -48: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$

Num. Ejemplo	1.4.5 – 2
τ	$0.2t_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 0.75, 1.05, 1.3
Posición de la 1ª. muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	0.6

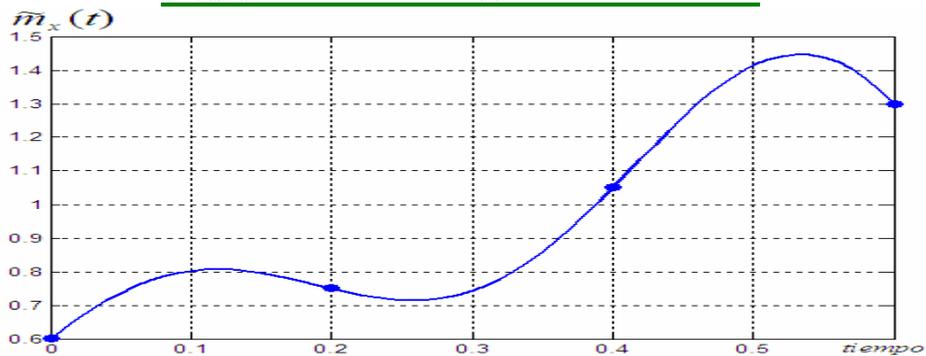


Figura 1-49: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$

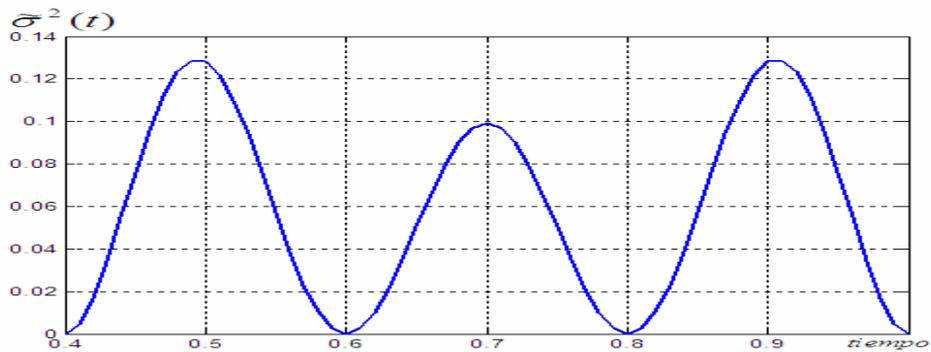


Figura 1 -50: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$

En estos ejemplos vemos que aunque el intervalo de reconstrucción es pequeño la función de reconstrucción se tienen formas ampliamente onduladas propias de la función de

covarianza empleadas, y en la función de error de reconstrucción también se nota la influencia de las muestras extremas en el intervalo de reconstrucción intermedio, más adelante tenemos una sección donde compararemos una función de covarianza contra otra y llegar a algunas conclusiones.

Num. Ejemplo	1.4.5 – 3
?t	$0.5t_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	1.2, 1.3, 0.8, 0.7
Posición de la 1ª. muestra	0.5
Intervalo entre 1ª y última muestra	1.5

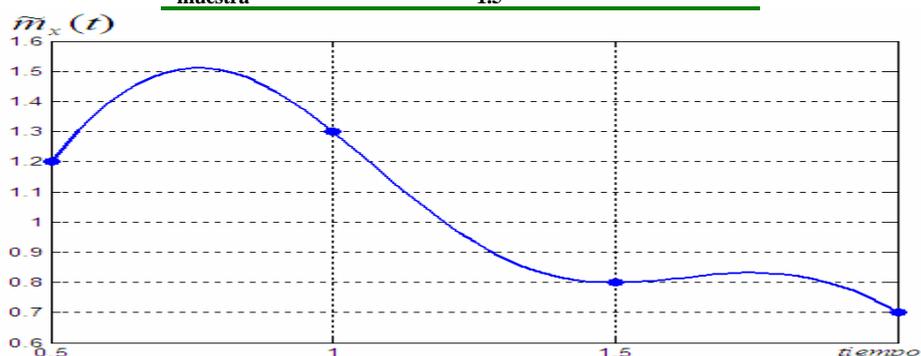


Figura 1-51: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$

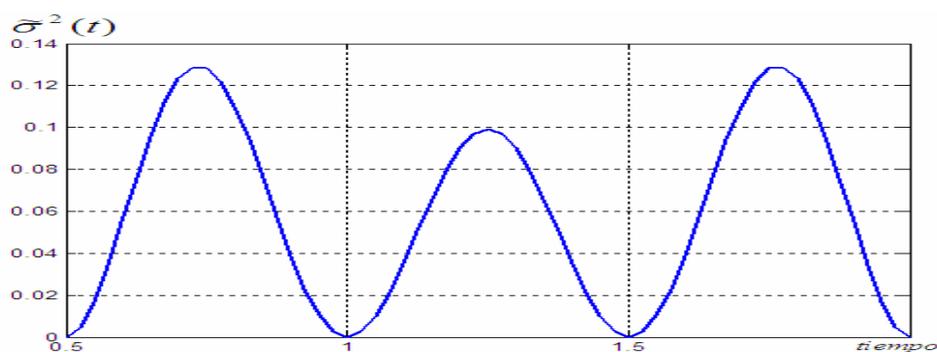


Figura 1 -52: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$

Num. Ejemplo	1.4.5 – 4
?t	$0.5t_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 1.2, 1.3, 0.8
Posición de la 1ª. muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	1.5

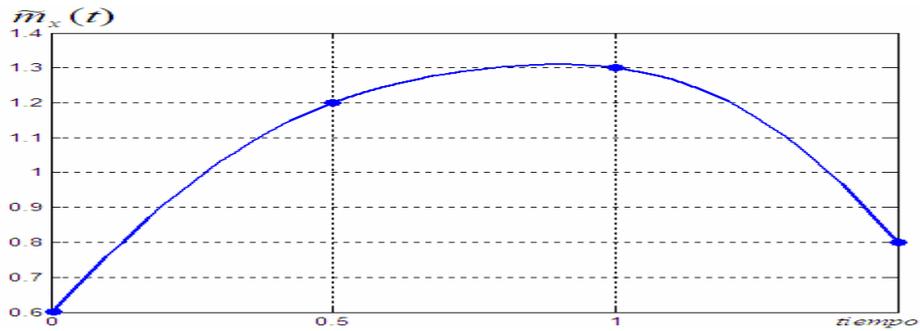


Figura 1-53: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$

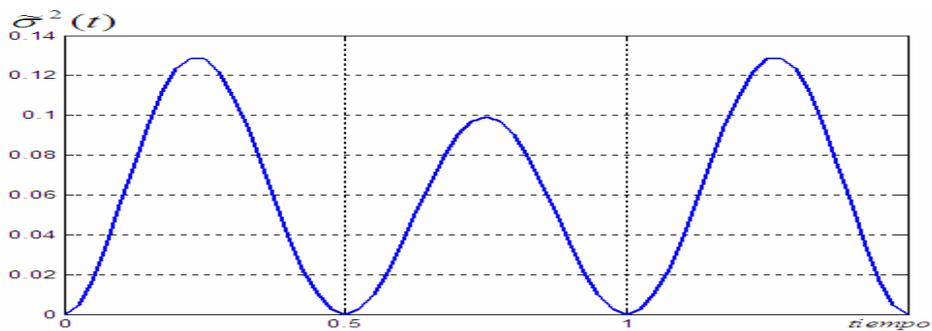


Figura 1-54: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$

Num. Ejemplo	1.4.5 – 5
Δt	t_c
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 1.3, 0.7, 0.8
Posición de la 1ª. muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	3

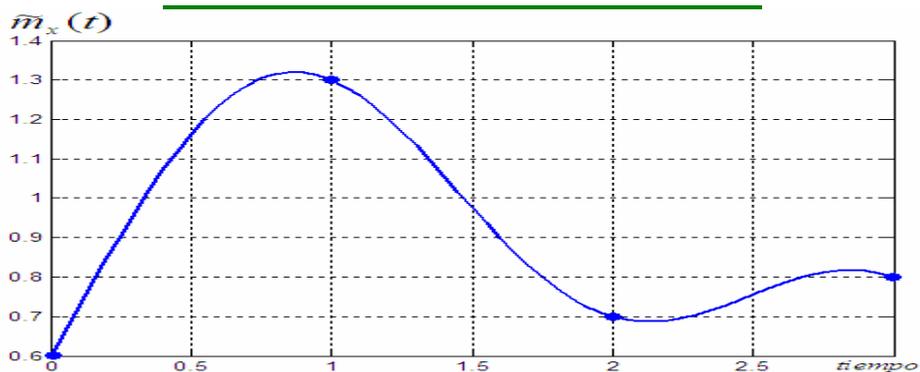


Figura 1-55: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$

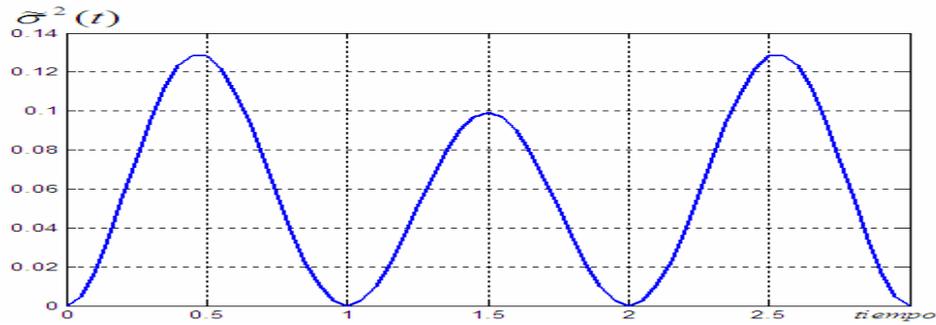


Figura 1 -56: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$

Num. Ejemplo	1.4.5 – 6
T_c	$1.5T_c$
No. de muestras	4
Valores de las muestras	0.6, 0.8, 0.8, -0.9
Posición de la 1ª. muestra	0.0
Intervalo entre 1ª y última muestra	4.5

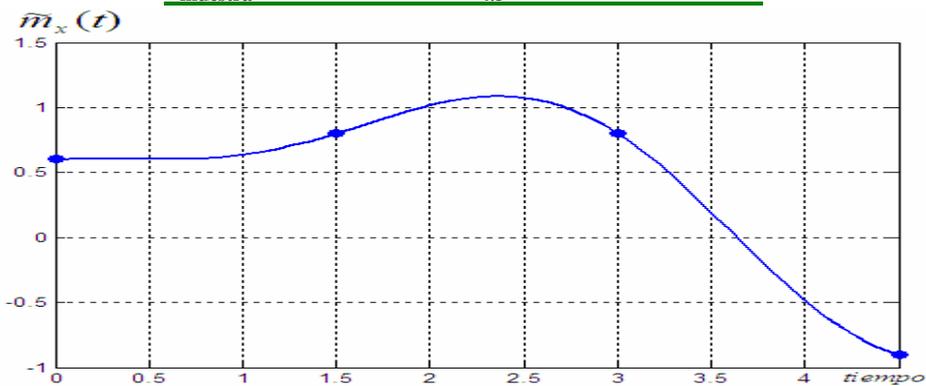


Figura 1-57: Función de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$

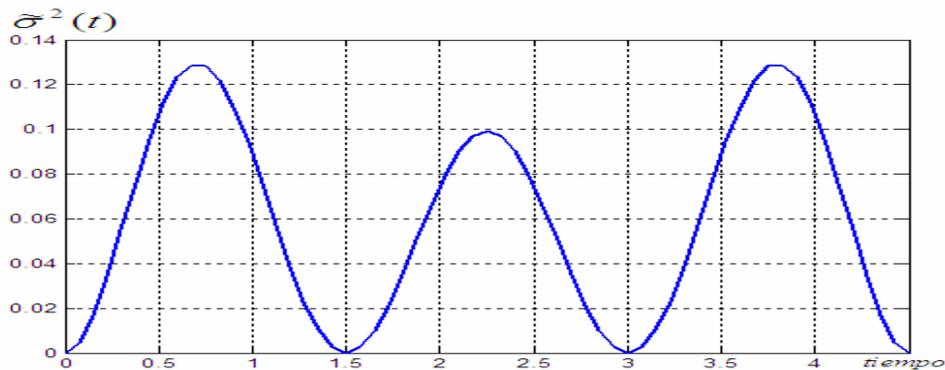


Figura 1 -58: Función de error de reconstrucción para el proceso Gaussiano no Markoviano con 4 muestras y una función de covarianza $\frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$

Lo importante a destacar además de la forma senoidal que toma la función de reconstrucción es que en la función de error de reconstrucción la forma y magnitud fue la misma sin importar los valores muestra ni el intervalo de muestreo, un gran detalle importante, lo cual nos sugiere que si deseamos reconstruir con ésta función con una calidad aceptable necesitaremos una gran cantidad de muestras para así poder disminuir el error de reconstrucción.

1.4.6 Comparación entre los diferentes resultados obtenidos para el caso Gaussiano

Veamos ahora de manera más concreta un ejemplo con un número mayor de muestras donde se pueden apreciar de manera más clara las diferencias en los resultados obtenidos con las distintas funciones de covarianza normalizadas. Los valores de las muestras son dados a continuación:

$x(T_j)$	$T_j[\text{seg}]$	$x(T_j)$	$T_j[\text{seg}]$
$x(T_1)=0.6$	$T_1=0$	$x(T_{17})=0.2$	$T_{17}=8$
$x(T_2)=0.8$	$T_2=0.5$	$x(T_{18})=-0.6$	$T_{18}=8.5$
$x(T_3)=1.2$	$T_3=1$	$x(T_{19})=-0.9$	$T_{19}=9$
$x(T_4)=1.4$	$T_4=1.5$	$x(T_{20})=-0.7$	$T_{20}=9.5$
$x(T_5)=1.3$	$T_5=2$	$x(T_{21})=-0.8$	$T_{21}=10$
$x(T_6)=1.0$	$T_6=2.5$	$x(T_{22})=-0.9$	$T_{22}=10.5$
$x(T_7)=0.8$	$T_7=3$	$x(T_{23})=-0.7$	$T_{23}=11$
$x(T_8)=0.9$	$T_8=3.5$	$x(T_{24})=-0.4$	$T_{24}=11.5$
$x(T_9)=0.7$	$T_9=4$	$x(T_{25})=-0.4$	$T_{25}=12$
$x(T_{10})=0.6$	$T_{10}=4.5$	$x(T_{26})=-1.5$	$T_{26}=12.5$
$x(T_{11})=0.8$	$T_{11}=5$	$x(T_{27})=-1.3$	$T_{27}=13$
$x(T_{12})=0.9$	$T_{12}=5.5$	$x(T_{28})=-1.2$	$T_{28}=13.5$
$x(T_{13})=0.8$	$T_{13}=6$	$x(T_{29})=-1.3$	$T_{29}=14$

$x(T_{14})=0.5$	$T_{14}=6.5$	$x(T_{30})=-1.7$	$T_{30}=14.5$
$x(T_{15})=0.4$	$T_{15}=7$	$x(T_{31})=-2.0$	$T_{31}=15$
$x(T_{16})=0.4$	$T_{16}=7.5$	$x(T_{32})=-1.0$	$T_{32}=15.5$
		$x(T_{33})=-0.4$	$T_{33}=16$

Ahora veamos las diferentes funciones de reconstrucción y de función de error de reconstrucción para las muestras anteriores:

1ª. Función $R_x(t) = e^{-at}$

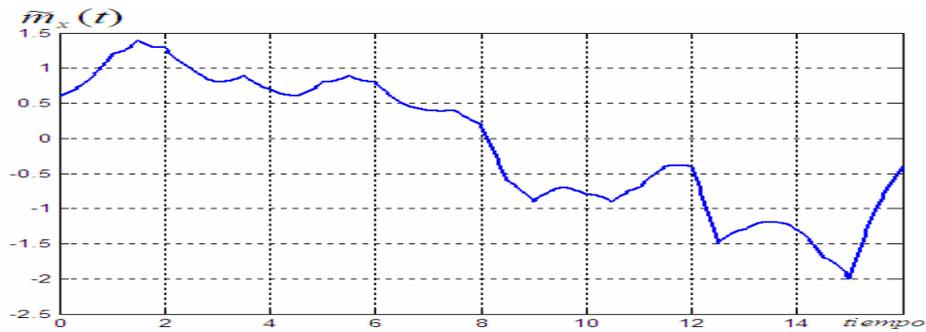


Figura 1-59: Función de reconstrucción con 33 muestras y $R_x(t) = e^{-at}$, y $t=0.5$

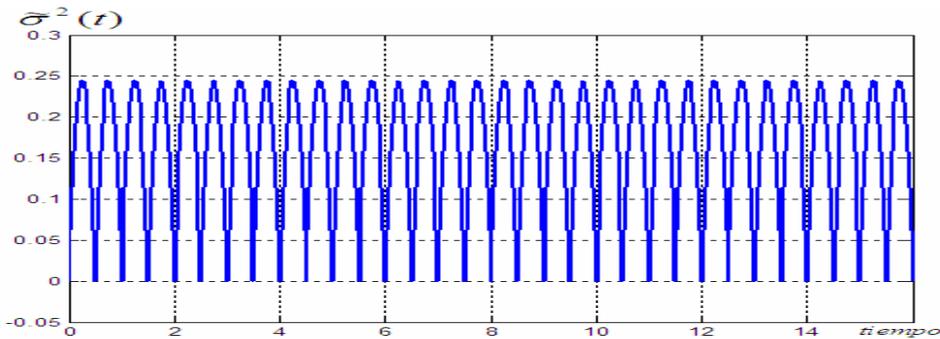


Figura 1-60: Función de error de reconstrucción con 33 muestras y $R_x(t) = e^{-at}$, y $t=0.5$

2ª. Función $R_x(t) = (1 + 2|t|)e^{-2t}$

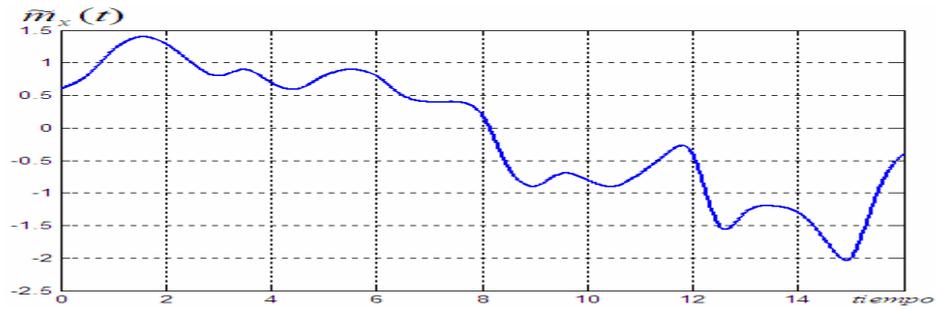


Figura 1-61: Función de reconstrucción con 33 muestras y $R_x(t) = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$, y $\Delta t = 0.5$

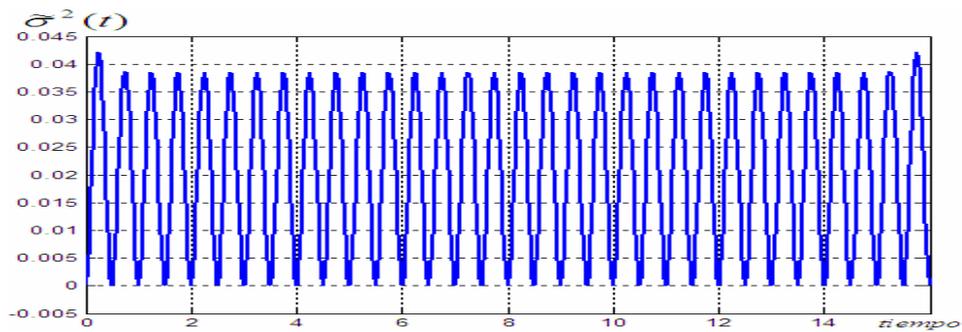


Figura 1-62: Función de error de reconstrucción con 33 muestras y $R_x(t) = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$, y $\Delta t = 0.5$

3ª. Función

$$R_x(t) = \left(1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2\right)e^{-\frac{8}{3}|t|}$$

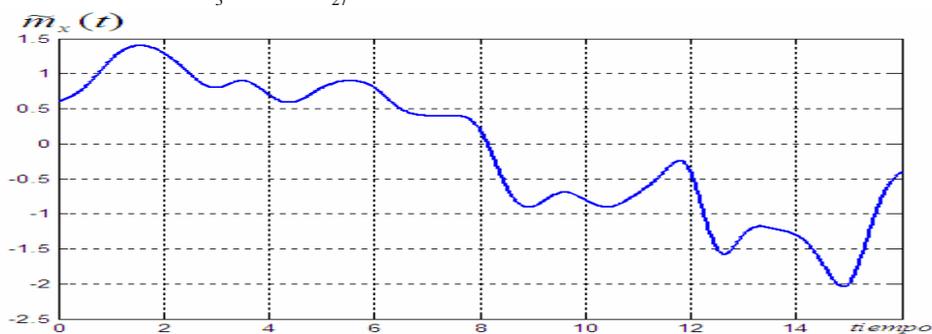


Figura 1-63: Función de reconstrucción con 33 muestras y $R_x(t) = \left(1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2\right)e^{-\frac{8}{3}|t|}$, y $\Delta t = 0.5$

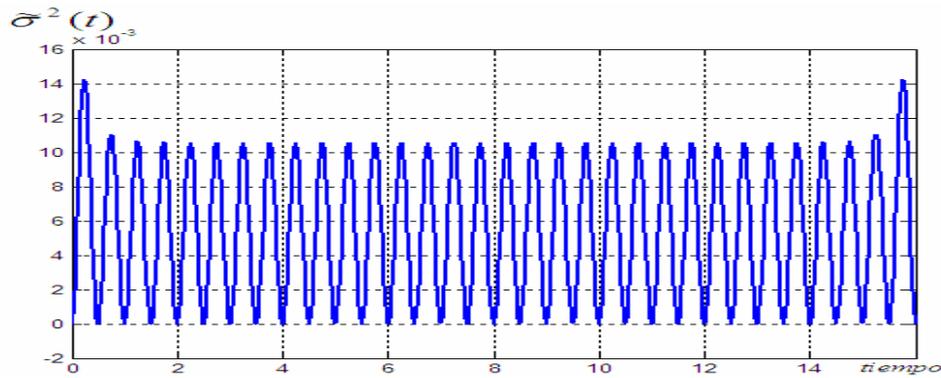


Figura 1-64: Función de error de reconstrucción con 33 muestras y $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, y $\tau=0.5$

4ª. Función $K_x(t) = \frac{\text{Sen}w_b t}{w_b t} = \frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$

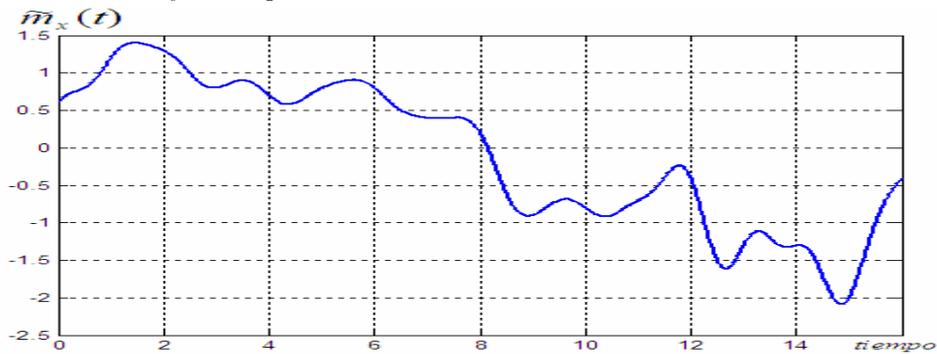


Figura 1-65: Función de reconstrucción con 33 muestras y $K_x(t) = \frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, y $\tau=0.5$

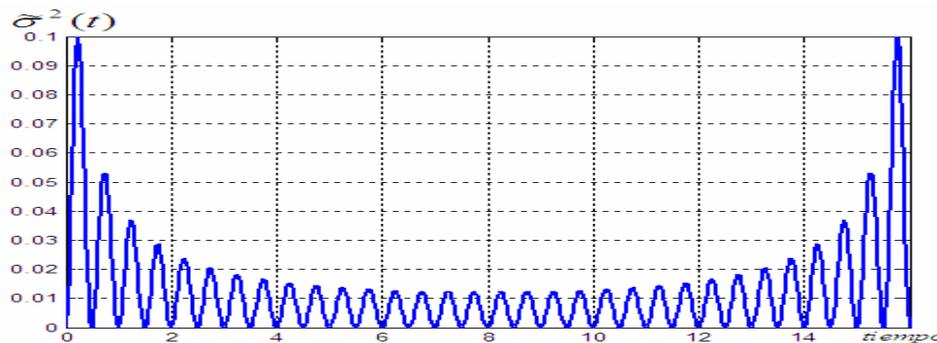


Figura 1-66: Función de error de reconstrucción con 33 muestras y $K_x(t) = \frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, y $\tau=0.5$

Lo que podemos observar de los gráficos anteriores es lo siguiente:

- La reconstrucción trata de adoptar la forma de la función de muestreo; por ejemplo para la primera función la reconstrucción parece la simple unión de puntos por líneas rectas, mientras que con la función sinc es más suave.
- Los errores en la primera función no depende del número de muestras que se tomen en consideración, es el mismo en todos los intervalos entre muestras y además las campanas de error son simétricas con un único pico en el centro, en las otras funciones entre más muestras se tengan se logra decrementar el error en la parte intermedia del intervalo de reconstrucción, dada la influencia que tienen las muestras cercanas, el caso en el que se nota más esta situación es el de la función sinc, lo que nos invita a sugerir que si queremos muestrear con esta función debemos utilizar una gran cantidad de muestras para que el error disminuya, pero de ninguna manera llegará a ser cero, sólo es cero en los tiempos donde están presentes las muestras puesto que se tiene un dato exacto.

Veamos las gráficas realizadas para un último ejemplo con 5 muestras: 0, 3,-2,1,4 y un $DT=0.24$, y también con las cuatro funciones empleadas en el capítulo:

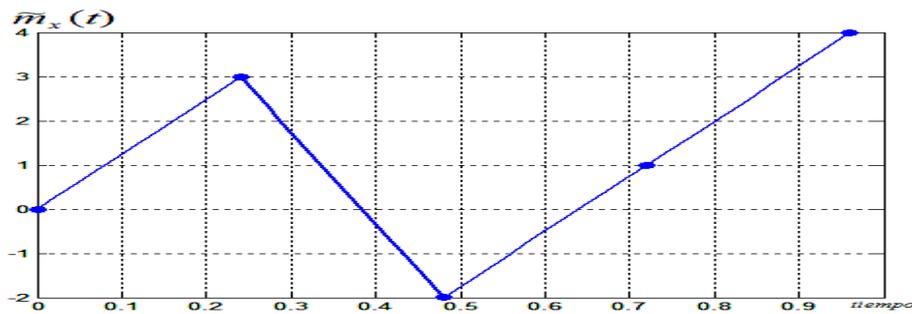


Figura 1-67: Función de reconstrucción con 5 muestras y $R_x(t) = e^{-a|t|}$, y $T=0.24$

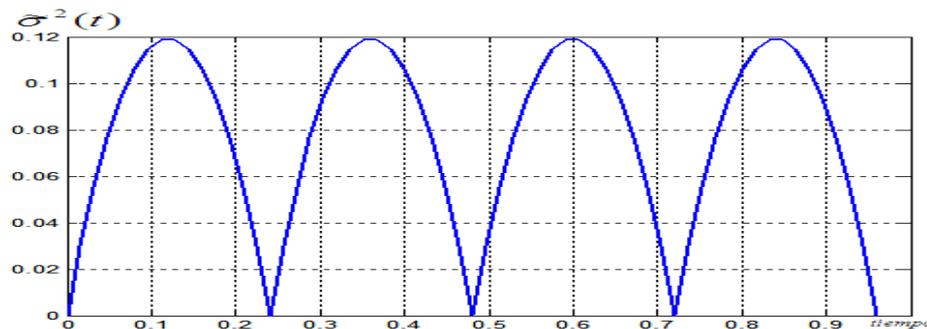


Figura 1-68: Función de error de reconstrucción con 5 muestras y $R_x(t) = e^{-a|t|}$, y $T=0.24$

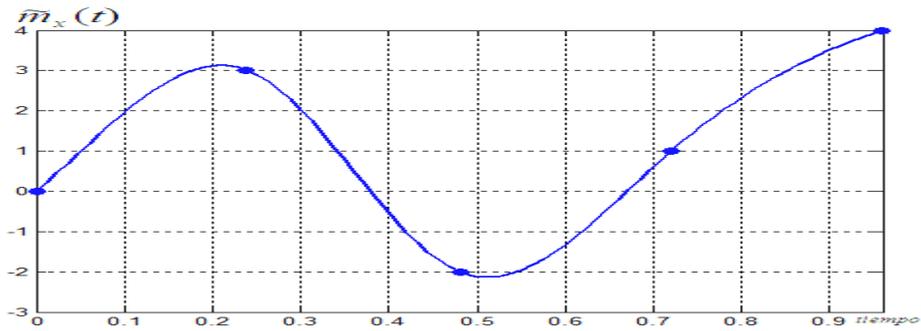


Figura 1-69: Función de reconstrucción con 5 muestras y $R_x(t) = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$, y $\tau = 0.24$

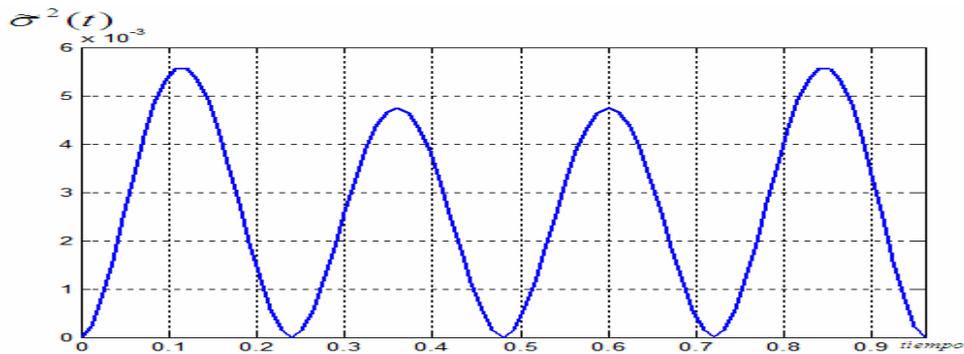


Figura 1-70: Función de error de reconstrucción con 5 muestras y $R_x(t) = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$, y $\tau = 0.24$

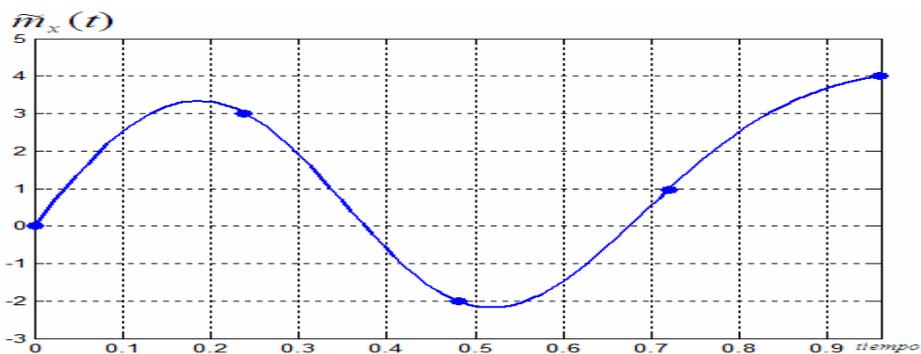


Figura 1-71: Función de reconstrucción con 5 muestras y $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, y $\tau = 0.24$

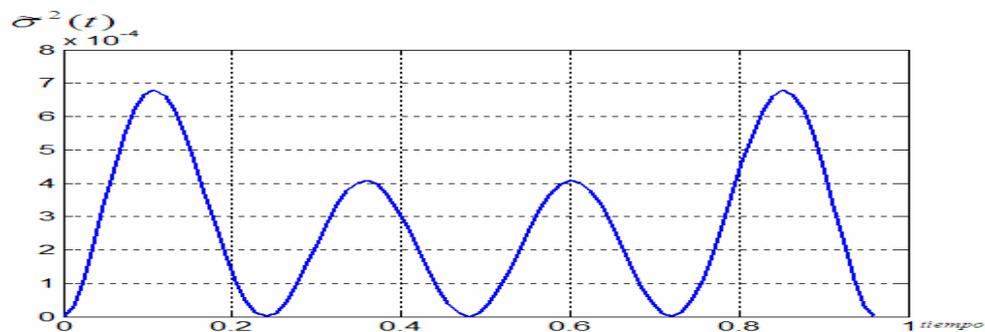


Figura 1-72: Función error de reconstrucción con 5 muestras, $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$, y $\tau = 0.24$

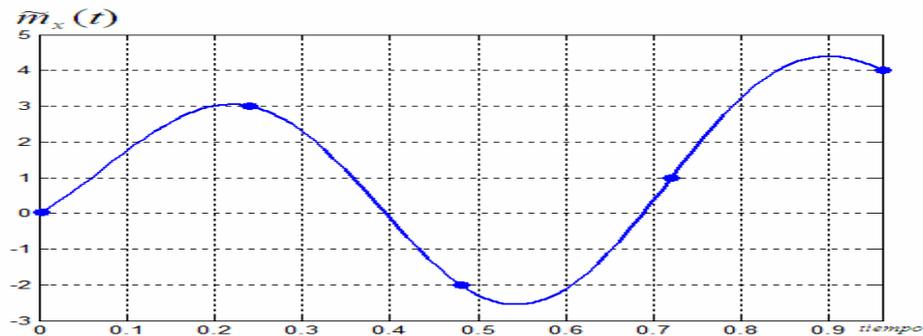


Figura 1-73: Función de reconstrucción con 5 muestras y $K_x(t) = \frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, y $t=0.24$

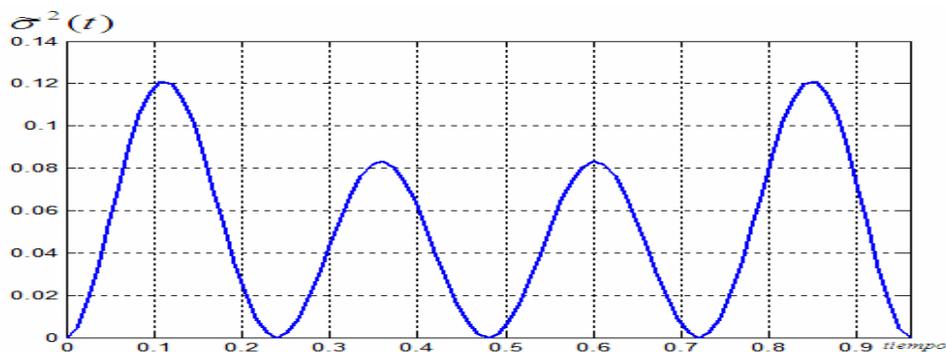


Figura 1-74: Función de error de reconstrucción con 5 muestras y $K_x(t) = \frac{\text{Sen}2pt}{2pt}$, y $t=0.24$

Realizar este ejemplo nos deja ver grandes detalles; al usar en el ejemplo anterior muchas muestras se puede pensar que lograremos un error menor, analizaremos con detalle esta situación.

Para las primeras tres funciones empleadas para reconstruir es notorio una disminución en el error al reducir el intervalo de tiempo entre muestras comparando con la utilización de un número grande de muestras. Obviamente es más notorio para la función $R_x(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)e^{-\frac{8}{3}|t|}$, que para la función $R_x(t) = e^{-a|t|}$. Para la función sampling resulta un mayor beneficio emplear un gran número de muestras y un menor beneficio emplear intervalos de tiempo cortos entre muestras.

Con la experiencia obtenida de estos experimentos se puede proceder a estudiar al caso no Gaussiano, donde veremos si hay similitudes o diferencias con el caso Gaussiano. Para el caso no Gaussiano analizaremos el PMR de dos funciones de distribución de probabilidad, por razones que serán dadas en su oportunidad.

Capítulo 2

La descripción estadística del Procedimiento de Muestreo - Reconstrucción de procesos aleatorios Markovianos no Gaussianos

Introducción

.....

Dado que tenemos los conocimientos de lo que sucede en el caso Gaussiano tenemos las herramientas necesarias para investigar en el campo no Gaussiano, realizando el PMR de una manera más adecuada, tomando en cuenta las características estadísticas necesarias y no con el teorema clásico por las razones que ya se han mencionado.

La investigación del Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción de los procesos no Gaussianos Markovianos es relativamente simple porque el procedimiento de interpolación depende de las **dos** muestras *más cercanas* solamente. Otras muestras no influyen en las características estadísticas del PMR. Obtenemos las expresiones generales para analizar este caso y entonces consideramos dos ejemplos no triviales: el PMR de un proceso de Rayleigh y el de un proceso con una distribución gamma, dado que se cuenta las expresiones explícitas de ambas funciones de distribución de probabilidad y se puede tomar el método como base para realizar el PMR de otras funciones de distribución de probabilidad no Gaussianas si se cuenta con las expresiones explícitas necesarias.

Ahora excluimos la condición Gaussiana del proceso de entrada. La consideración de un caso general de proceso no Gaussiano es difícil porque es necesario conocer una fdp no Gaussiana multidimensional. Restringimos nuestra investigación al proceso de entrada Markoviano no Gaussiano. Primeramente, consideramos la descripción estadística de este tipo de proceso y entonces tratamos con la transformación no lineal de ellos.

Tomando en cuenta la propiedad principal del proceso Markoviano tenemos que usar sólo una $x_1(T_1)$ o dos $x_1(T_1)$, $x_2(T_2)$ muestras para ir formando la función de reconstrucción en el caso de Markov.

El procedimiento de reconstrucción usando una muestra $x_1(T_1)$ es una predicción trivial ($t > T_1$), ya que no se tiene mayor información. Cuando es necesario encontrar la función de reconstrucción entre dos muestras $x_1(T_1)$, $x_2(T_2)$ tenemos un procedimiento de interpolación ($T_2 > t > T_1$).

Uno puede describir completamente el proceso condicional entre dos muestras dadas $x_1(T_1)$ y $x_2(T_2)$ si conocemos la fdp condicional $\mathbf{w}(x, t | x_1(T_1), x_2(T_2))$. En este punto enfatizamos el hecho de que el proceso $x(t)$ entre dos muestras $x_1(T_1)$ y $x_2(T_2)$ de un proceso Markoviano $x(t)$ es no Markoviano, pero es posible expresar su fdp condicional con base en la fdp transitoria $\mathbf{w}(x_i, t_i | x_j, t_j)$ del proceso Markoviano dado.

Consideremos 3 secciones del proceso $x(t)$ en los tiempos $t_1 < t < t_2$. En el caso general no Markoviano la fdp tridimensional es presentada por la fórmula:

$$\mathbf{w}(x_1, t_1; x, t; x_2, t_2) = \mathbf{w}(x_1, t_1) \mathbf{w}(x, t | x_1, t_1) \mathbf{w}(x_2, t_2 | x_1, t_1; x, t) \quad (2.1)$$

Hay tres tipos diferentes de fdp en la ecuación anterior. De ellas es difícil tener la tercera. En la variante Markoviana esta fdp tridimensional puede ser representada como un producto de una fdp unidimensional y fdp bitransitoria.

$$\mathbf{w}(x_1, t_1; x, t; x_2, t_2) = \mathbf{w}(x_1, t_1) \mathbf{w}(x, t | x_1, t_1) \mathbf{w}(x_2, t_2 | x, t) \quad (2.2)$$

Entonces la fdp condicional requerida puede ser fácilmente expresada por la fdp transitoria $\mathbf{w}(x_i, t_i | x_j, t_j)$ del proceso Markoviano dado.

Se puede ver que:

$$\mathbf{w}(x, t | x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\mathbf{w}(x, t | x_1, t_1) \mathbf{w}(x_2, t_2 | x, t)}{\mathbf{w}(x_2, t_2 | x_1, t_1)}. \quad (2.3)$$

La expresión anterior da una posibilidad de determinar las funciones momento condicionales requerido $\mathbf{a}_i^x(t) = \langle x^i(t) | x_1, (T_1), x_2, (T_2) \rangle$ de i ésimo orden. Cuando $i=1$ tenemos la función de reconstrucción $\tilde{m}_x(t)$ (i.e. la esperanza matemática condicional), cuando $i=2$ la función del segundo momento $\tilde{\mathbf{a}}_2^x(t)$

Entonces usando la fórmula:

$$\mathbf{s}_x^2 = \tilde{\mathbf{a}}_2^x(t) - \tilde{m}_x^2(t), \quad (2.4)$$

uno puede encontrar la función de error de reconstrucción (la varianza condicional). [31], [32], [33].

2.1 El PMR del proceso Markoviano de Rayleigh

2.1.1 Expresiones generales para el PMR del proceso Markoviano de Rayleigh

Consideremos el proceso Markoviano de Rayleigh. La fdp transitoria para este caso es expresada por la fórmula [24]:

$$w(x_i, t_i | x_j, t_j) = \frac{x_i}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_j^2 + Q^2 x_i^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{x_i x_j}{s^2}\right), \quad (2.5)$$

donde:

$$Q = Q(t_i - t_j) = \exp(-\epsilon_0 |t_i - t_j|), \quad (2.6)$$

I_0 es la función de Bessel de un argumento imaginario, ϵ_0 y σ son parámetros. Podemos realizar algunas gráficas para ver el comportamiento de la fdp de Rayleigh.

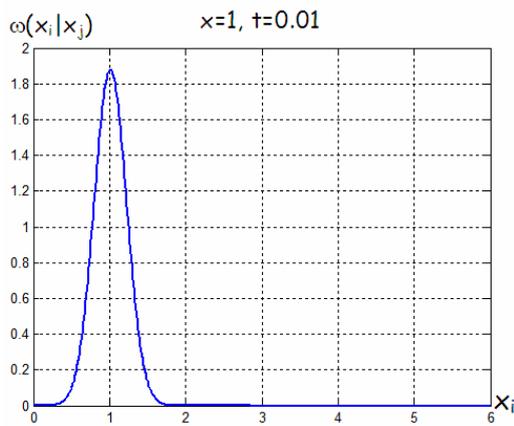


Figura 2-1: fdp de Rayleigh donde $x=1, t=0.01$

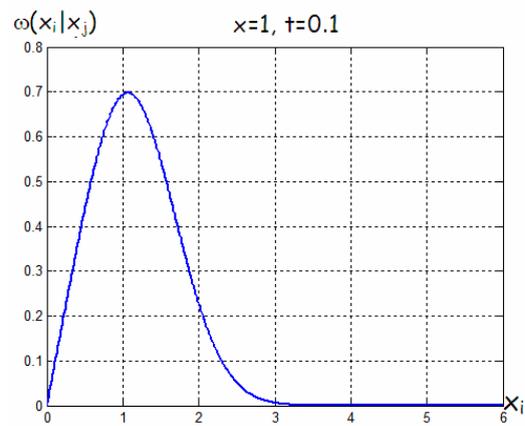


Figura 2-2: fdp de Rayleigh donde $x=1, t=0.1$

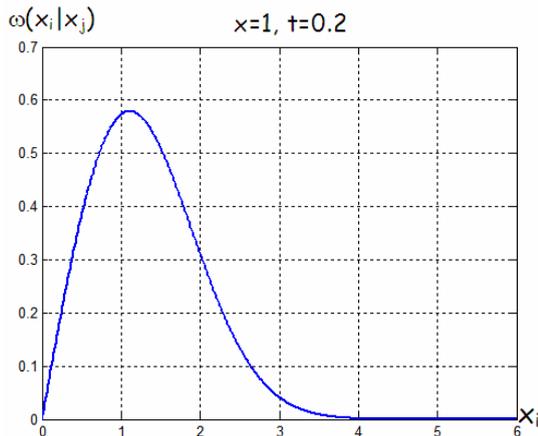


Figura 2-3: fdp de Rayleigh donde $x=1, t=0.2$

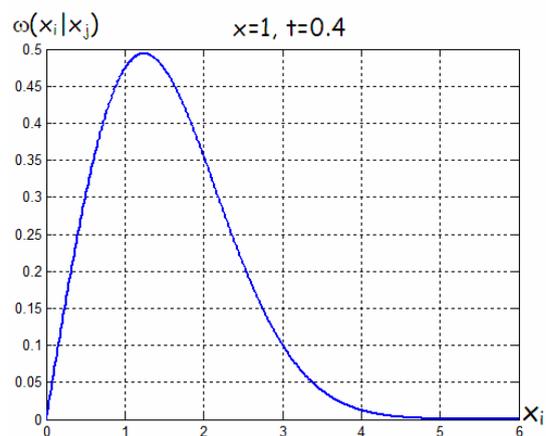


Figura 2-4: fdp de Rayleigh donde $x=1, t=0.4$

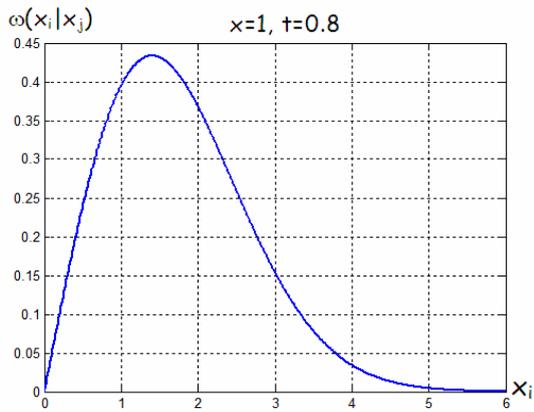


Figura 2-5: fdp de Rayleigh donde $x=1$, $t=0.8$

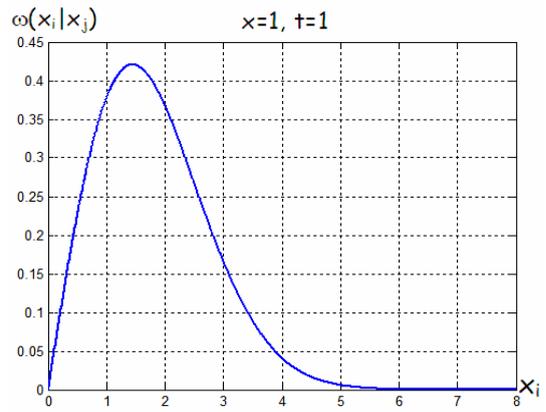


Figura 2-6: fdp de Rayleigh donde $x=1$, $t=1$

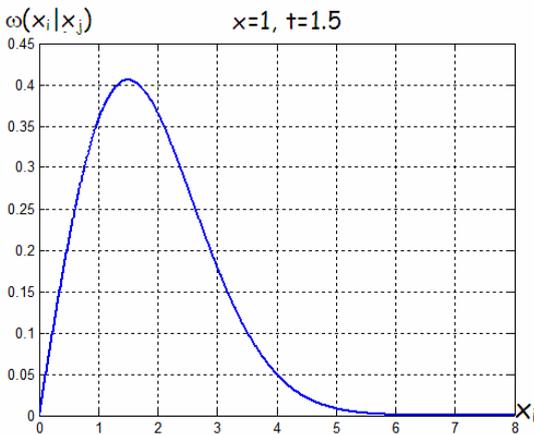


Figura 2-7: fdp de Rayleigh donde $x=1$, $t=1.5$

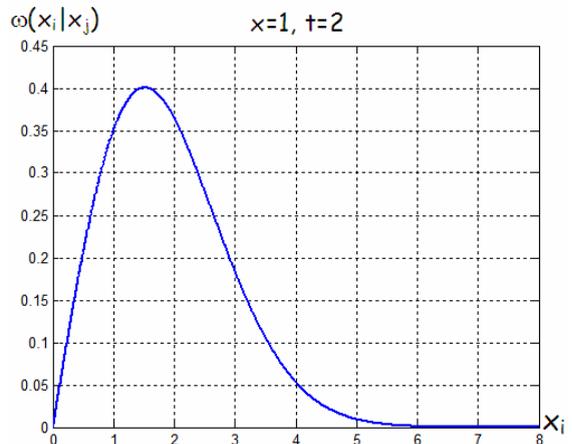


Figura 2-8: fdp de Rayleigh donde $x=1$, $t=2$

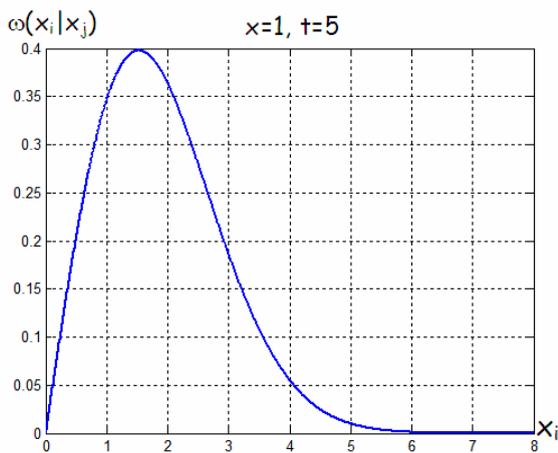


Figura 2-9: fdp de Rayleigh donde $x=1$, $t=5$

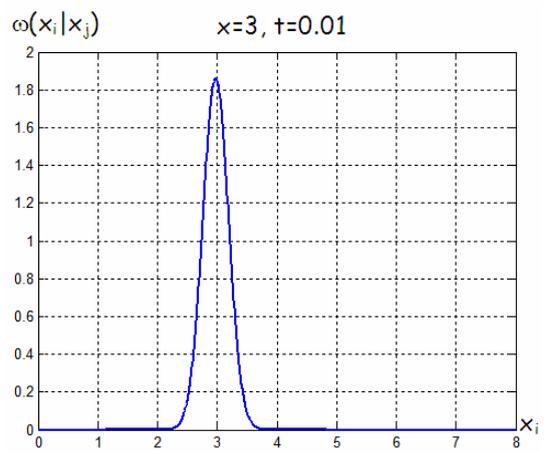


Figura 2-10: fdp de Rayleigh donde $x=3$, $t=0.01$

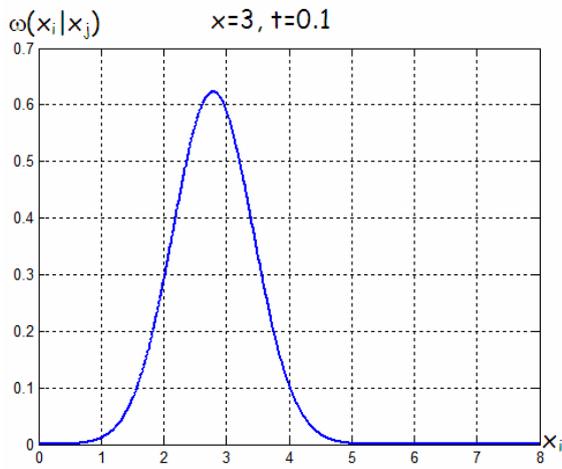


Figura 2-11: fdp de Rayleigh donde $x=3, t=0.1$

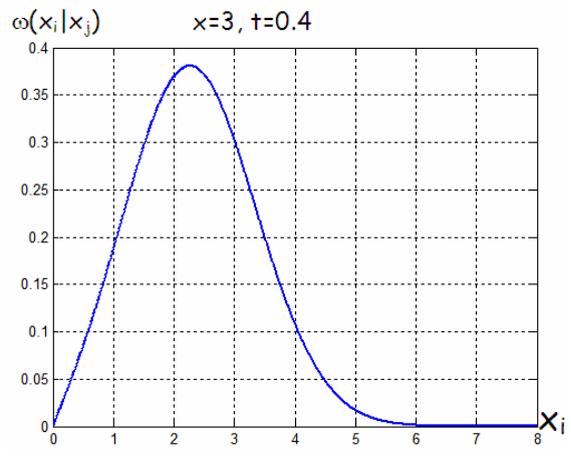


Figura 2-12: fdp de Rayleigh donde $x=3, t=0.4$

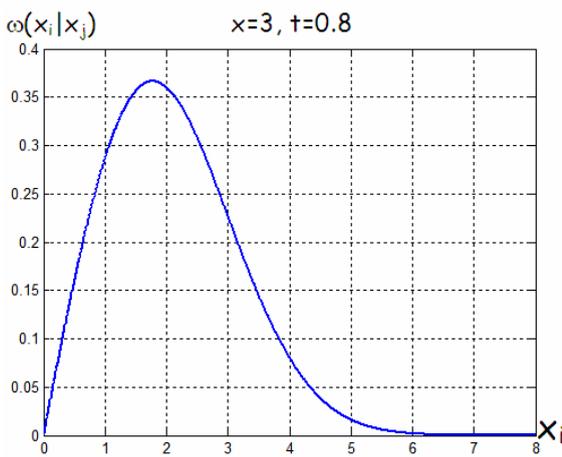


Figura 2-13: fdp de Rayleigh donde $x=3, t=0.8$

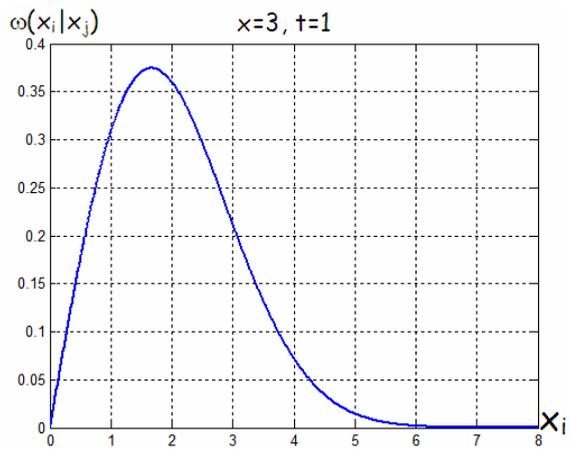


Figura 2-14: fdp de Rayleigh donde $x=3, t=1$

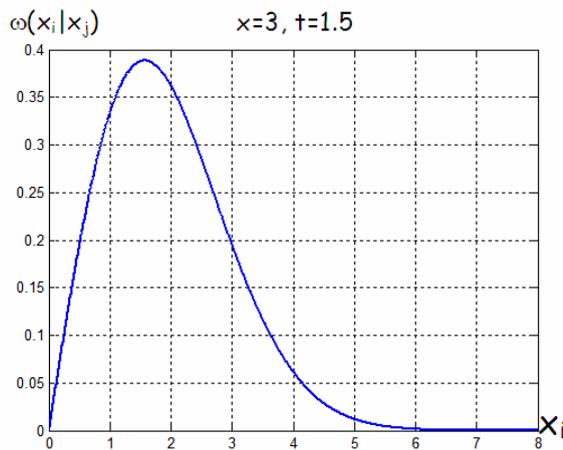


Figura 2-15: fdp de Rayleigh donde $x=3, t=1.5$

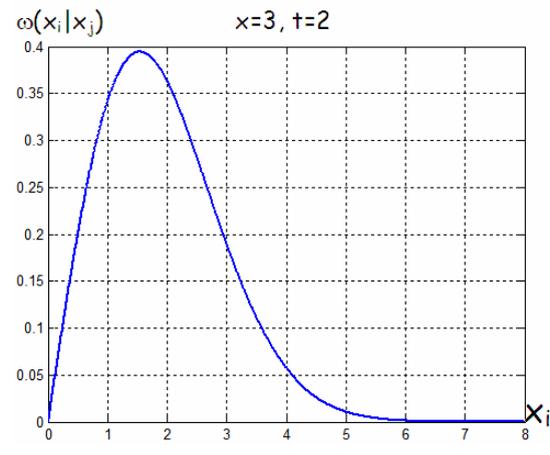


Figura 2-16: fdp de Rayleigh donde $x=3, t=2$

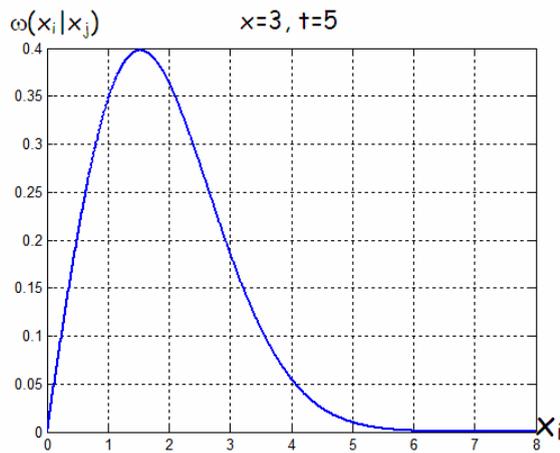


Figura 2-17: fdp de Rayleigh donde $x=3, t=5$

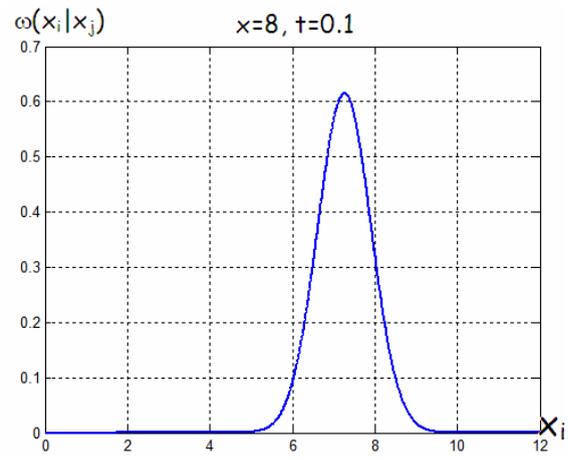


Figura 2-18: fdp de Rayleigh donde $x=8, t=0.1$

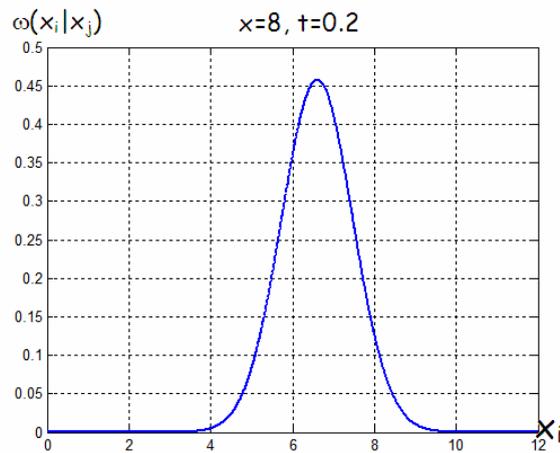


Figura 2-19: fdp de Rayleigh donde $x=8, t=1$

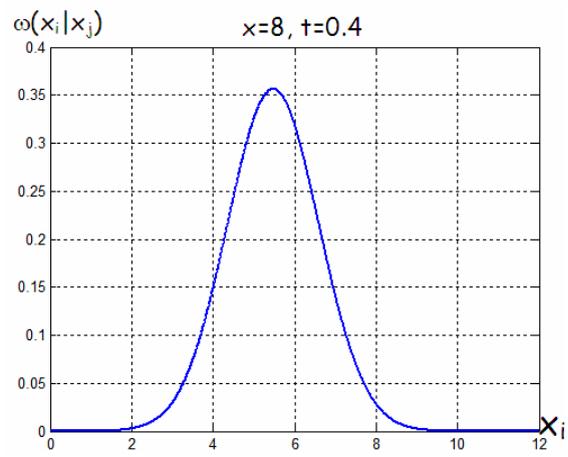


Figura 2-20: fdp de Rayleigh donde $x=8, t=0.4$

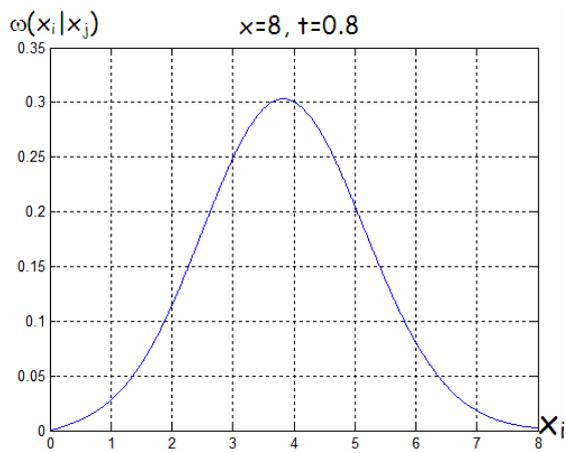


Figura 2-21: fdp de Rayleigh donde $x=8, t=0.8$

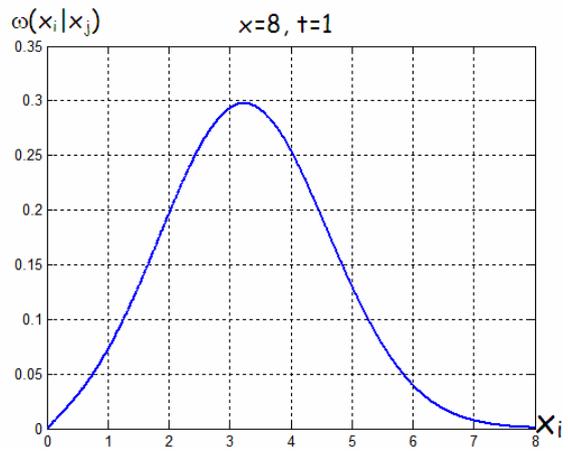


Figura 2-22: fdp de Rayleigh donde $x=8, t=1$

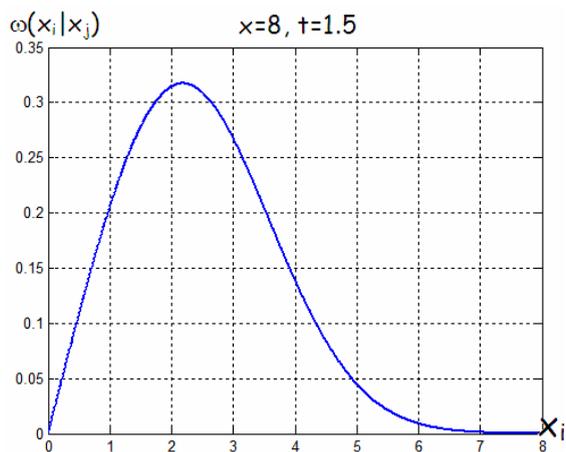


Figura 2-23: fdp de Rayleigh donde $x=8, t=1.5$

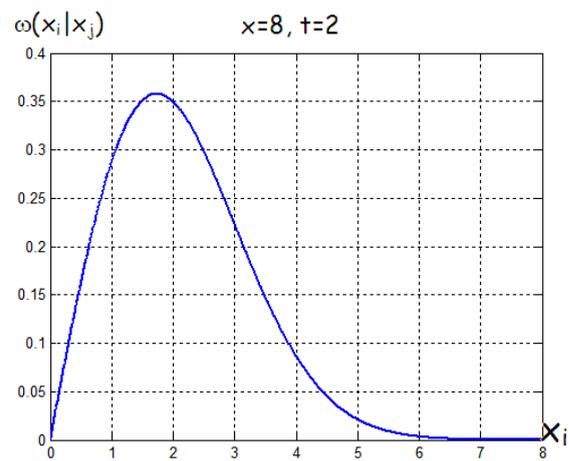


Figura 2-24: fdp de Rayleigh donde $x=8, t=2$

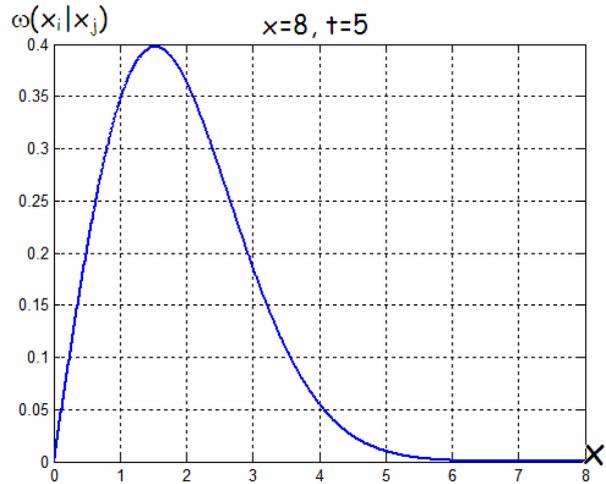


Figura 2-25: fdp de Rayleigh donde $x=8, t=5$

Las gráficas de la fdp nos permiten apreciar la dependencia en tiempo de la función, su forma en intervalos de tiempo pequeños se forma alrededor del valor de x , y al incrementarlo llegará el instante en que la fdp tenga la forma pura de Rayleigh sin importar el valor de x .

Es necesario escribir la expresión (2.5) para argumentos diferentes y ponerlos en (2.3), según sea el régimen en el que se desee trabajar, ya sea extrapolación o interpolación quedarán definidas las expresiones específicas.

También es conveniente hablar sobre la función de covarianza normalizada de Rayleigh, lo cual nos llevará a conocer los tiempos de covarianza adecuados para diferentes casos a utilizar. Tenemos un par de expresiones que nos ayudarán a obtener las gráficas para la función de covarianza normalizada [25]:

$$k_x(\mathbf{t}) = \langle xx_t \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\mathbf{p}\mathbf{s}^2}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 Q^2(\mathbf{t}) + \left(\frac{1}{8} \right)^2 Q^4(\mathbf{t}) + \left(\frac{3}{48} \right)^2 Q^6(\mathbf{t}) + \dots \right\}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} r_x(\mathbf{t}) &= \frac{k_x(\mathbf{t})}{\mathbf{s}_x^2} = \frac{\mathbf{p}}{4-\mathbf{p}} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 Q^2(\mathbf{t}) + \left(\frac{1}{8} \right)^2 Q^4(\mathbf{t}) + \left(\frac{3}{48} \right)^2 Q^6(\mathbf{t}) + \dots \right\} \\ &= 0.921Q^2(\mathbf{t}) + 0.058Q^4(\mathbf{t}) + \dots \approx Q^2(\mathbf{t}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Podemos obtener algunas gráficas de las expresiones anteriores para ver su forma y poder obtener el tiempo de covarianza, dado por la expresión:

$$\mathbf{t}_c = \int_0^{\infty} |R(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \quad (2.9)$$

La gráficas para las expresiones (2.7) y (2.8) con $Q=\exp(-\tau)$ son presentadas a continuación, primero se presenta la gráfica para la expresión (2.7):

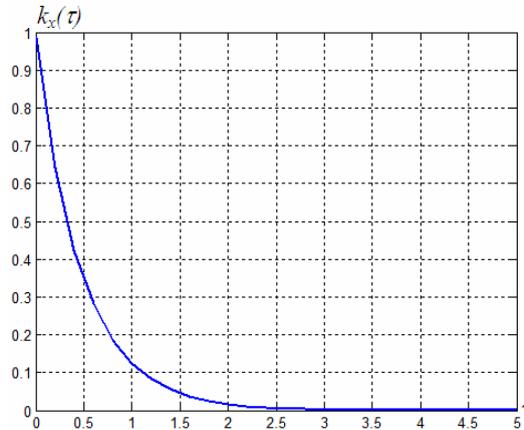


Figura 2-26: Función de covarianza de la función de Rayleigh con $Q=\exp(-t)$.

Para la cual aplicando la expresión (2.9) obtenemos un $\tau_c=0.4739$. En seguida tenemos la gráfica para (2.8):

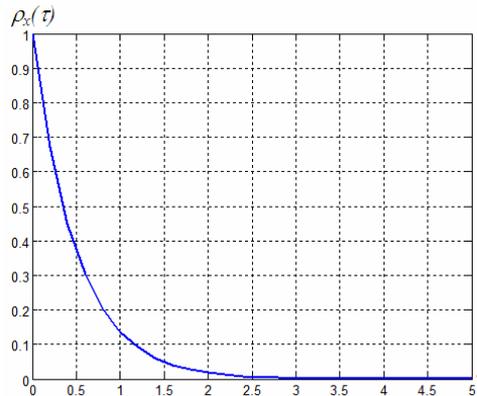


Figura 2-27: Función de covarianza normalizada de Rayleigh con $Q=\exp(-t)$.

De igual forma por medio de (2.8) obtenemos un $\tau_c=0.5$.

2.1.2 PMR del proceso Markoviano de Rayleigh en el régimen de extrapolación.

Entonces para el régimen de extrapolación, la expresión queda expresada como:

$$w(x, t | x_1, t_1) = \frac{x}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q^2 x^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right), \quad (2.10)$$

donde:

$$Q = Q(t_i - t_j) = \exp(-\mathbf{e}_0 | t - t_1 |). \quad (2.11)$$

Después de eso uno puede calcular las principales características del PMR $\tilde{m}_x(t)$ y $\tilde{\mathbf{a}}_2^x(t)$, de la siguiente manera: sabemos que la expresión general para obtener la esperanza matemática es:

$$\langle x \rangle = \int xf(x)dx, \quad (2.12)$$

entonces el resultado de la integración:

$$\tilde{m}_x(t) = \int \frac{x^2}{\mathbf{s}^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2\mathbf{s}^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{\mathbf{s}^2}\right) dx, \quad (2.13)$$

nos da la realización de la función de reconstrucción para el régimen de extrapolación.

Para la función de error de reconstrucción se deben realizar los siguientes pasos: ya que tenemos como referencia la ecuación (2.4), primero debemos obtener $\tilde{\mathbf{a}}_2^x(t)$, que se obtiene de la integración:

$$\tilde{\mathbf{a}}_2^x(t) = \int x^2 \mathbf{w}(x, t) dx, \quad (2.14)$$

entonces:

$$\tilde{\mathbf{a}}_2^x(t) = \int \frac{x^3}{\mathbf{s}^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2\mathbf{s}^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{\mathbf{s}^2}\right) dx, \quad (2.15)$$

aplicando (2.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_x^2 = & \int \frac{x^3}{\mathbf{s}^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2\mathbf{s}^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{\mathbf{s}^2}\right) dx \\ & - \left[\int \frac{x^2}{\mathbf{s}^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2\mathbf{s}^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{\mathbf{s}^2}\right) dx \right]^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Los cálculos de la reconstrucción y funciones de error para el procedimiento de *extrapolación* fueron numéricamente llevados a cabo (con ayuda de Matlab) con base en las fórmulas anteriores. Los resultados de estos cálculos son presentados en las figuras siguientes como las curvas del tiempo actual t contra el valor de la muestra x_j .

Veamos los resultados para la función de reconstrucción, con distintos valores de muestras x_j .

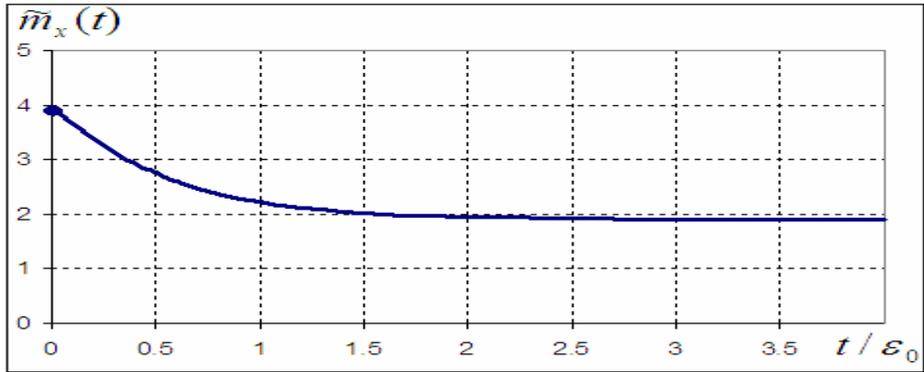


Figura 2-28: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh con el valor muestra $x_1=4$

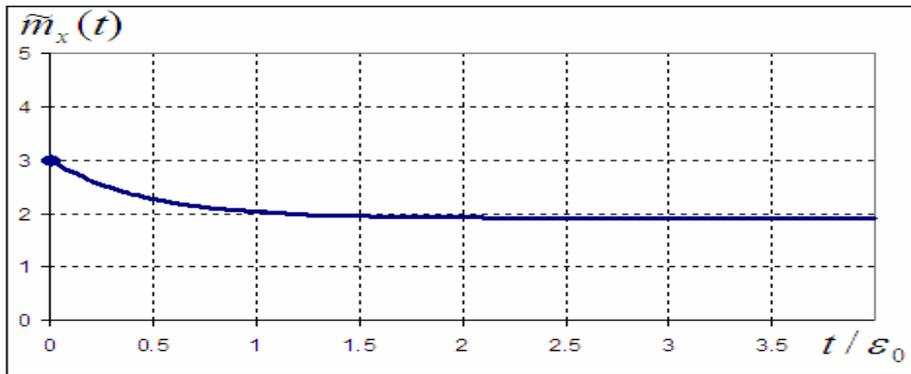


Figura 2-29: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh con el valor muestra $x_1=3$

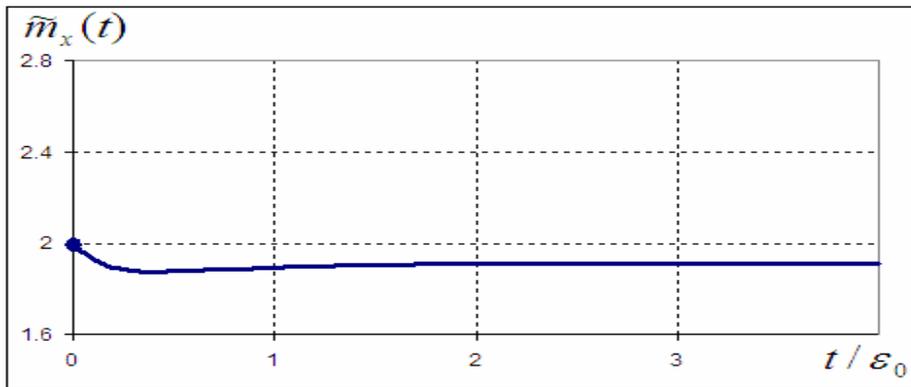


Figura 2-30: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh con el valor muestra $x_1=2$

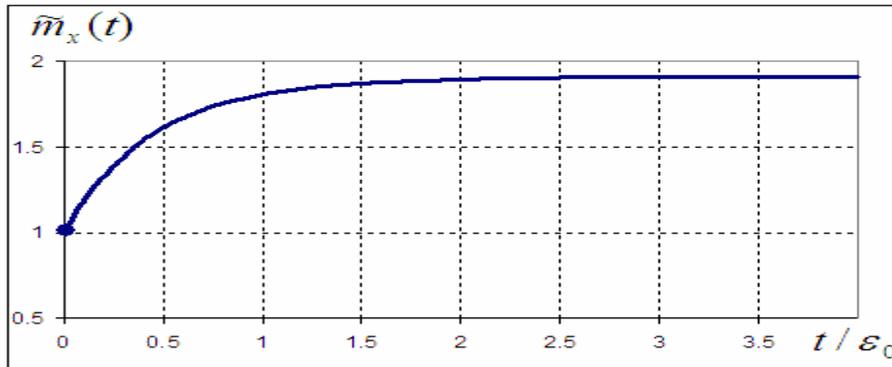


Figura 2-31: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh con el valor muestra $x_1=1$

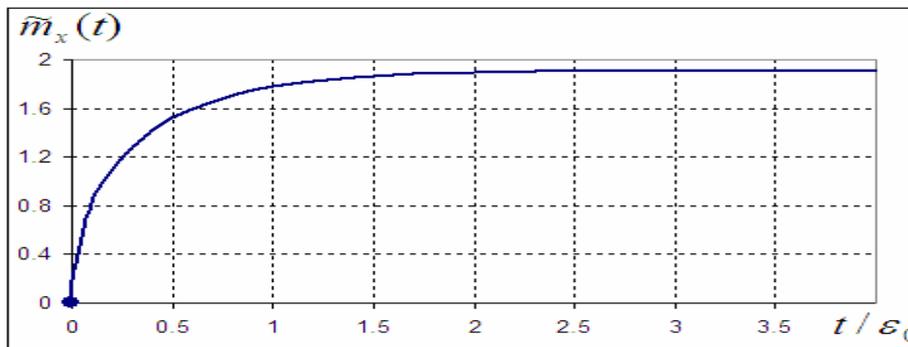


Figura 2-32: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh con el valor muestra $x_1=0$

De las gráficas anteriores podemos observar lo siguiente: por supuesto que los valores presentados son ejemplos, se toman estos valores muestra porque son los valores cercanos al valor incondicional de la función de densidad de probabilidad de Rayleigh esperado, es decir a diferencia del caso Gaussiano aquí al transcurrir el tiempo y alejarnos del valor muestra siempre se tendrá que llegar a un valor esperado, valor que dependerá de la función de distribución de probabilidad con la que estemos trabajando.

En cuanto mayor sea la diferencia en magnitud del valor muestra y el valor incondicional se tendrá una caída más brusca en busca del valor incondicional, ya que no notamos que si es mayor el valor muestra tome más tiempo estabilizarse hacia el valor incondicional, sino que en el mismo tiempo todos los valores muestra alcanzan el valor incondicional de la fdp. En $x_1=2$ aunque es ligeramente mayor al valor incondicional tiende a bajar un poco y luego regresar al valor incondicional.

Después de la terminación del régimen de transición las funciones de reconstrucción $\tilde{m}_x(t)$ tiende a la expectativa matemática incondicional de la ley de distribución de Rayleigh $m_x = s \sqrt{\frac{p}{2}}$, donde en este trabajo se toma $s=1$.

Ahora se presentan las gráficas de las funciones de error de reconstrucción para cada una de las funciones de reconstrucción anteriores.

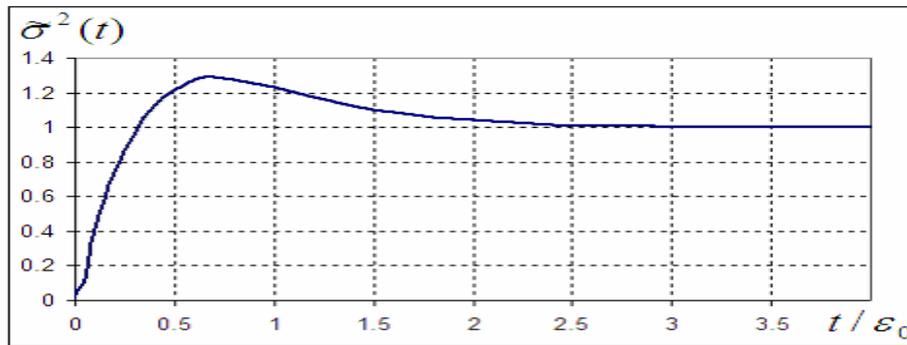


Figura 2-33: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el valor muestra $x_1=4$

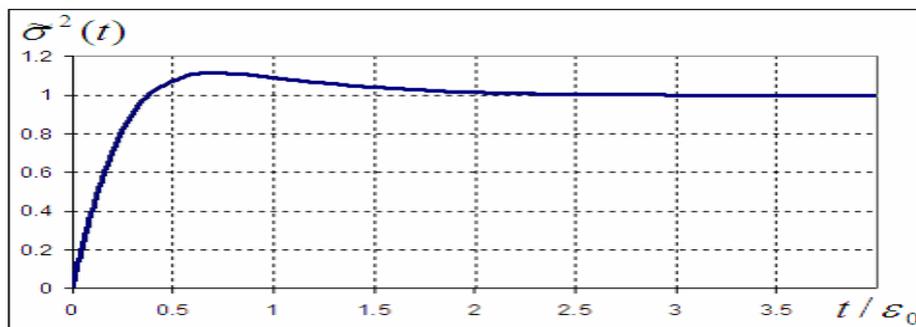


Figura 2-34: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el valor muestra $x_1=3$

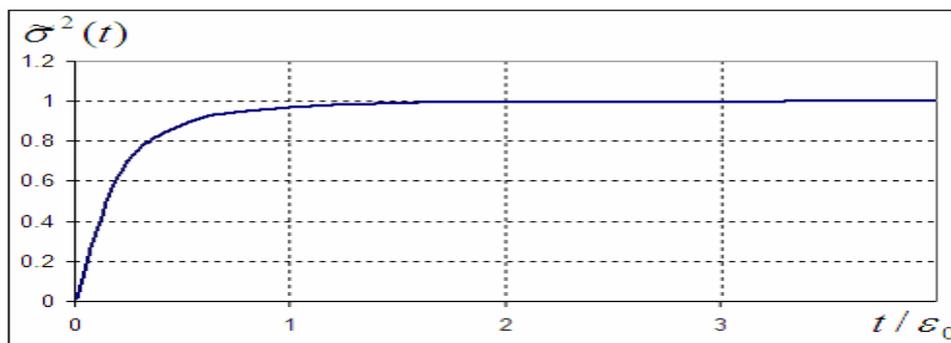


Figura 2-35: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el valor muestra $x_1=2$

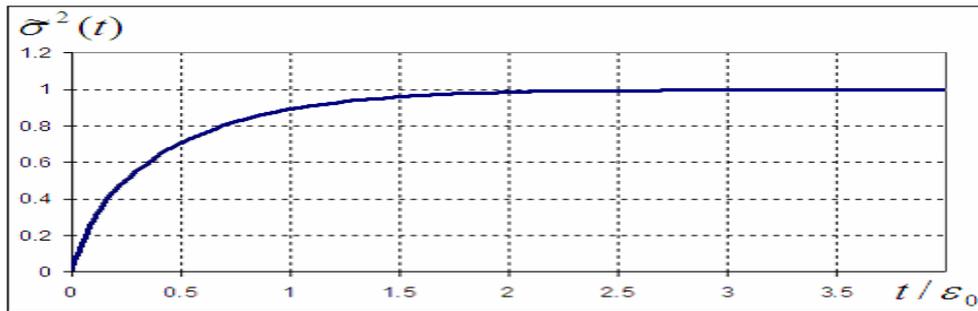


Figura 2-36: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el valor muestra $x_1=1$

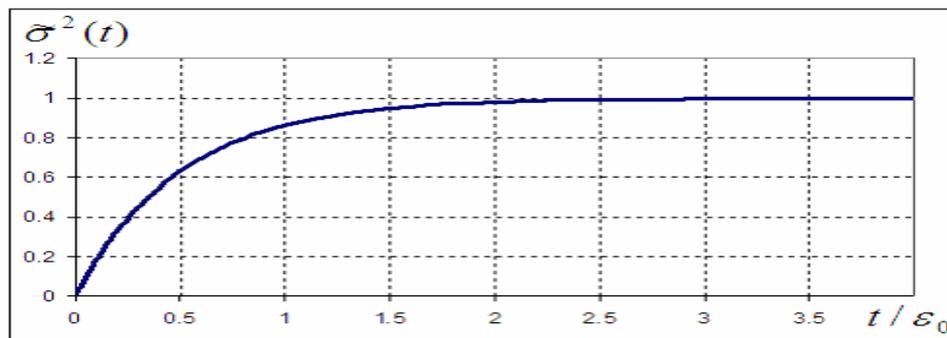


Figura 2-37: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el valor muestra $x_1=0$

Porque se analiza el caso no Gaussiano la función de error de reconstrucción depende del valor específico de la muestra $x_I(T_I)$, situación que no pasaba en el caso Gaussiano. Si $x_I \gg m_x$ se puede ver que las curvas de $\mathcal{S}_x^2(t)$ tienen un pico mayor, el ejemplo más claro de esto se observa en la figura 6 cuando $x_I=4$, y la duración del pico se incrementa.

De esto podemos decir también que si $x_I \gg m_x$ tendremos al inicio de la reconstrucción un error grande directamente proporcional al valor de x_I , que manifiesta la diferencia entre el valor muestra y el valor incondicional esperado.

También podemos agregar que transcurrido algún instante de tiempo, la función de error de reconstrucción converge al valor de 1, lo que implica un error del 100%, lo cual es de esperarse.

Sus máximos son grandes, entonces la varianza $s_x^2 = (2 - p/2)s^2$ de la fdp de Rayleigh se alcanza en el régimen estacionario.

Observamos que si $x_I < m_x$ la función de error no tiene picos y simplemente manifiesta el error que se va teniendo al transcurrir el tiempo desde 0% hasta llegar a 100%. Un caso singular es $x_I=2$ porque aunque es mayor a m_x no es notorio algún pico.

A continuación se presenta una gráfica que proporciona el error promedio de las gráficas anteriores, con la que tratamos de obtener algunas conclusiones generales sobre el comportamiento de la función de error de reconstrucción.

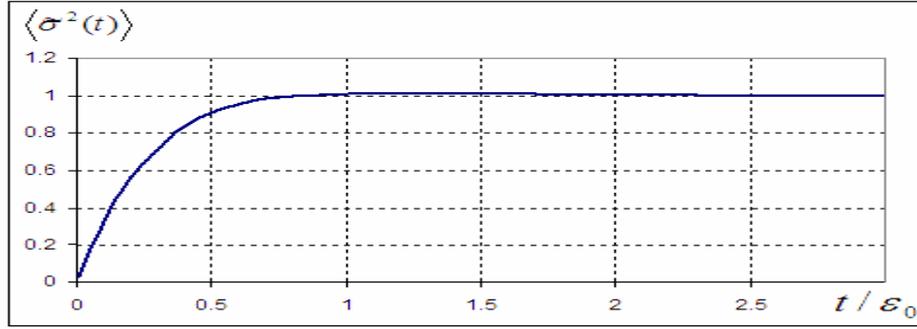


Figura 2-38: Error promedio (extrapolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh

Lo que podemos aprovechar de la gráfica anterior es que en todas las funciones de error de reconstrucción hay un tiempo de transición y sin importar el valor de la muestra x_1 transcurrido un tiempo (aprox. $2.5/\varepsilon_0$) habrá pasado ese estado transitorio para que después llegue al estado estacionario y tomar el valor incondicional esperado que es del 100% de error.

2.1.3 PMR del proceso Markoviano de Rayleigh en el régimen de interpolación.

Para poder encontrar los resultados para el régimen de interpolación es necesario adecuar la ecuación (2.5) para tiempos distintos y ponerla en (2.3), de la siguiente manera:

Primero observamos a (2.3), en donde necesitamos 3 distintas fdp, para distintos tiempos y muestras, que son las siguientes:

$\mathbf{W}(x, t | x_1, t_1)$, que es la expresión (2.7), donde $Q = Q_1 = \exp(-\mathbf{e}_0 | t - t_1 |)$,

$$\mathbf{w}(x_2, t_2 | x, t) = \frac{x_2}{\mathbf{s}^2(1-Q_2^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q_2^2 x_2^2}{2\mathbf{s}^2(1-Q_2^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_2^2} \frac{x_2 x}{\mathbf{s}^2}\right), \quad (2.17)$$

$$\text{donde } Q_2 = \exp(-\mathbf{e}_0 | t_2 - t |); \quad (2.18)$$

y finalmente:

$$\mathbf{w}(x_2, t_2 | x_t, t_t) = \frac{x_2}{\mathbf{s}^2(1-Q_3^2)} \exp\left\{-\frac{x_t^2 + Q_3^2 x_2^2}{2\mathbf{s}^2(1-Q_3^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_3}{1-Q_3^2} \frac{x_2 x_t}{\mathbf{s}^2}\right), \quad (2.19)$$

$$\text{donde } Q_3 = \exp(-\mathbf{e}_0 | t_2 - t_t |). \quad (2.20)$$

Teniendo estas expresiones y con ayuda de (2.3) y (2.4), se obtienen de manera análoga las funciones de reconstrucción y de error, quedando de la siguiente manera:

$$\hat{m}_x(t) = \int \left(\frac{\frac{x^2}{\mathbf{s}^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q^2 x^2}{2\mathbf{s}^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{x x_1}{\mathbf{s}^2}\right) \frac{x_2}{\mathbf{s}^2(1-Q_2^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q_2^2 x_2^2}{2\mathbf{s}^2(1-Q_2^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_2^2} \frac{x_2 x}{\mathbf{s}^2}\right)}{\frac{x_2}{\mathbf{s}^2(1-Q_3^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q_3^2 x_2^2}{2\mathbf{s}^2(1-Q_3^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_3}{1-Q_3^2} \frac{x_2 x_1}{\mathbf{s}^2}\right)} \right) dx \quad (2.21)$$

$$s_x^2(t) = \int \left(\frac{x^3}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2+Q^2x^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right) \frac{x_2}{s^2(1-Q_2^2)} \exp\left\{-\frac{x^2+Q_2^2x_2^2}{2s^2(1-Q_2^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_2^2} \frac{x_2x}{s^2}\right) \right) dx - \left(\frac{x_2}{s^2(1-Q_3^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2+Q_3^2x_2^2}{2s^2(1-Q_3^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_3}{1-Q_3^2} \frac{x_2x_1}{s^2}\right) \right) \quad (2.22)$$

$$- \int \left(\frac{x^2}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2+Q^2x^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right) \frac{x_2}{s^2(1-Q_2^2)} \exp\left\{-\frac{x^2+Q_2^2x_2^2}{2s^2(1-Q_2^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_2^2} \frac{x_2x}{s^2}\right) \right) dx \left(\frac{x_2}{s^2(1-Q_3^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2+Q_3^2x_2^2}{2s^2(1-Q_3^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_3}{1-Q_3^2} \frac{x_2x_1}{s^2}\right) \right)^2$$

Los resultados de los cálculos numéricos con base en las funciones de reconstrucción para el procedimiento de *interpolación* con las dos muestras conocidas $x_1(T_1)$ y $x_2(T_2)$ son presentadas en las figuras para un intervalo de discretización más grande $\Delta T = 4/e_0$.

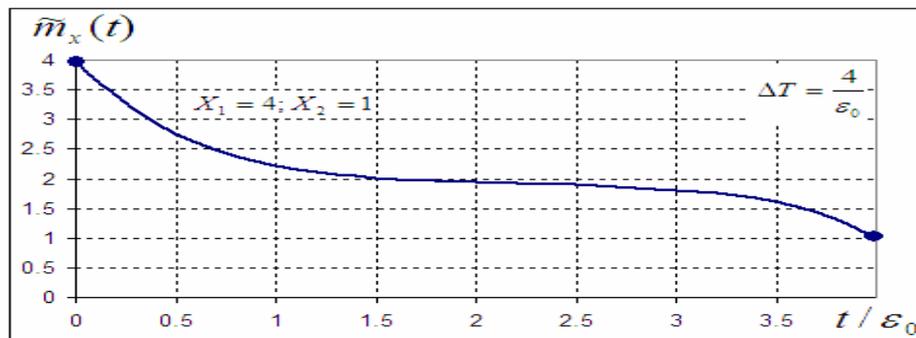


Figura 2-39: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el par de muestras $x_1=4$ y $x_2=1$ y $T=4/e_0$.

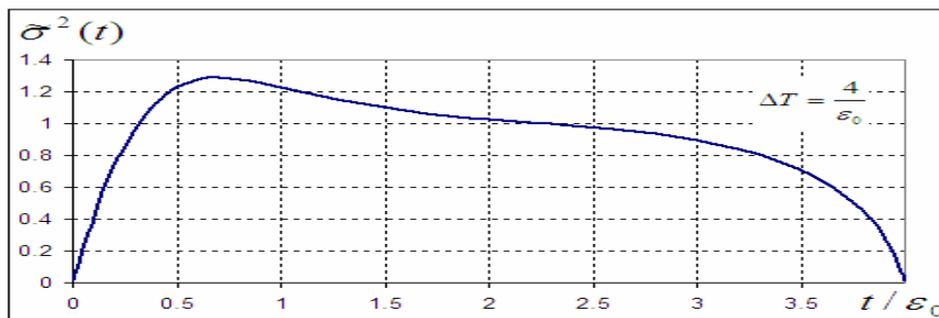


Figura 2-40: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para $x_1=4$ y $x_2=1$ y $T=4/e_0$.

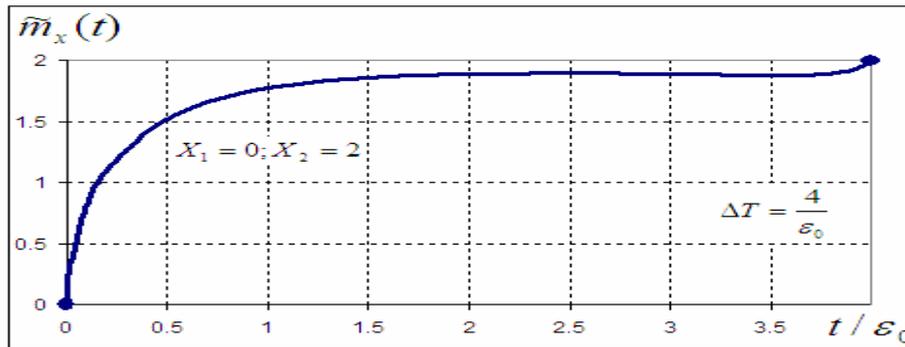


Figura 2-41: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el par de muestras $x_1=0$ y $x_2=2$ y $T=4/e_0$.

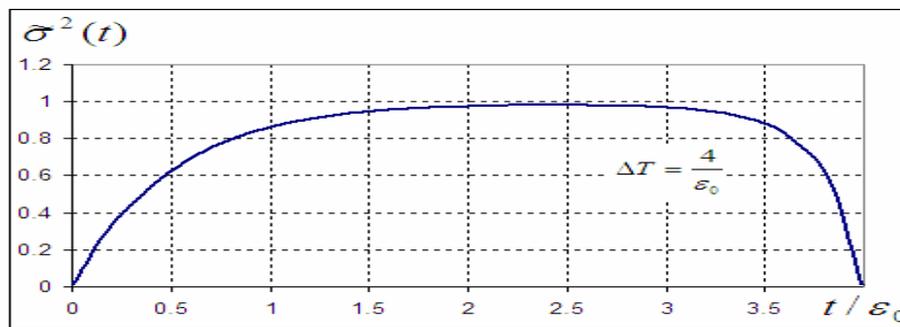


Figura 2-42: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para $x_1=0$ y $x_2=2$ y $T=4/e_0$.

En las gráficas anteriores podemos ver que en este intervalo de reconstrucción relativamente grande la reconstrucción en su parte intermedia pasa por el valor de la media incondicional m_x de la función de Rayleigh, en cuanto a las funciones de error de reconstrucción podemos destacar que por ejemplo en la Figura 2-40, cuando está presente la muestra $x_i=4$ y en el caso no Gaussiano el error depende de las muestras el error estará en función de la magnitud de la muestra, entonces en la parte correspondiente a esta muestra el error supera el valor de 1, en la figura 2-42 la magnitud de ambas muestras permite que el error alcance magnitudes máximas por momentos de cerca del 100%.

Ahora también presentamos una curva promedio basada en las gráficas anteriores que nos deja ver que la influencia del valor $x_i=4$ aun está presente ya que existe un pequeño pico del lado izquierdo de la gráfica promedio:

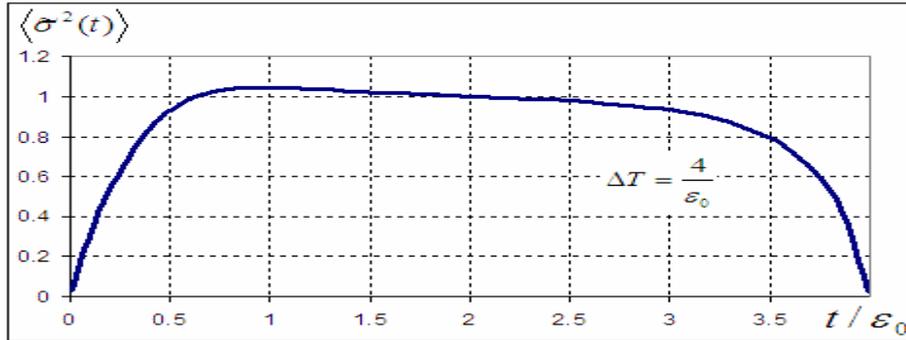


Figura 2-43: Error promedio (interpolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh y un $\Delta T = 4/\varepsilon_0$

Ahora reducimos el intervalo de tiempo entre las muestras para ver los efectos que esto provoque, para ello usamos los mismos valores muestra que en los ejemplos anteriores ya que como sabemos estos valores determinan el comportamiento de tanto la función de reconstrucción como la función de error de reconstrucción.

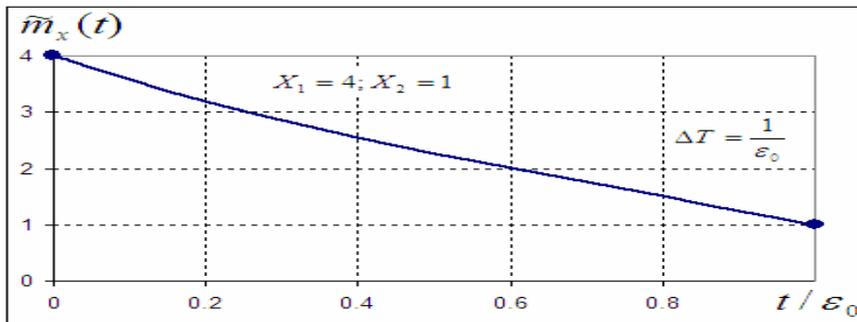


Figura 2-44: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el par de muestras $x_1=4$ y $x_2=1$ y $\Delta T = 1/\varepsilon_0$.

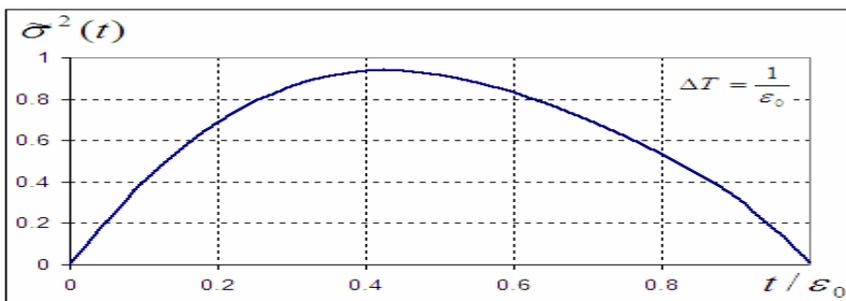


Figura 2-45: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para $x_1=4$ y $x_2=1$ y $\Delta T = 1/\varepsilon_0$

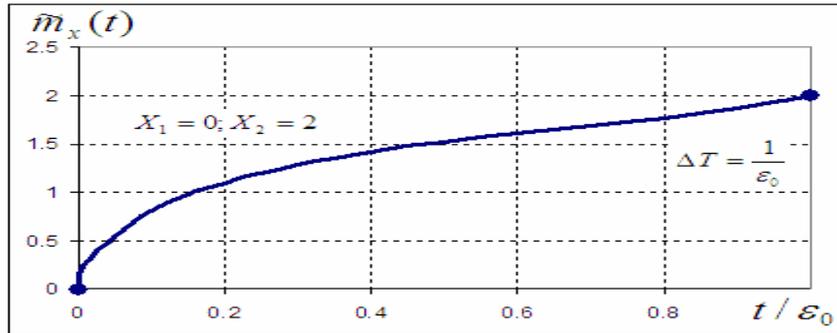


Figura 2-46: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el par de muestras $x_1=0$ y $x_2=2$ y $T=1/\epsilon_0$.

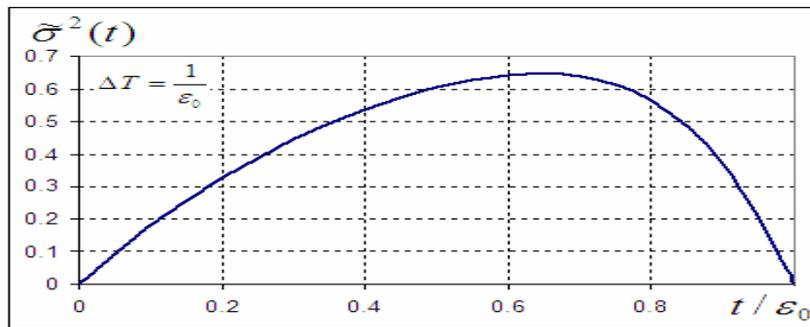


Figura 2-47: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para $X_1=0$ y $X_2=2$ y $T=1/\epsilon_0$

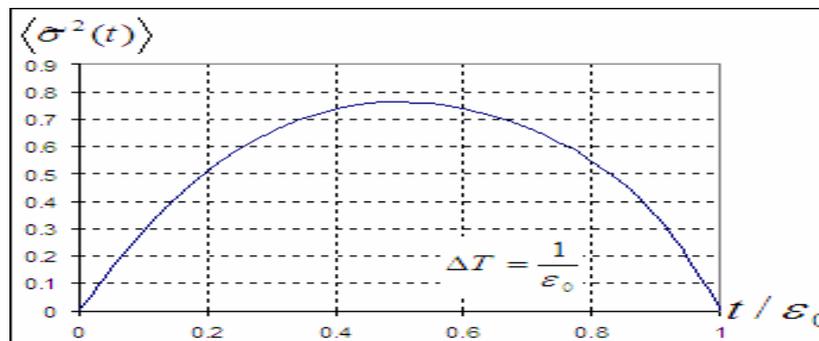


Figura 2-48: Error promedio (interpolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh y un $T=1/\epsilon_0$

Ahora presentamos un par de ejemplos con un intervalo menor al tiempo de covarianza obtenido para la función de Rayleigh, veamos los efectos:

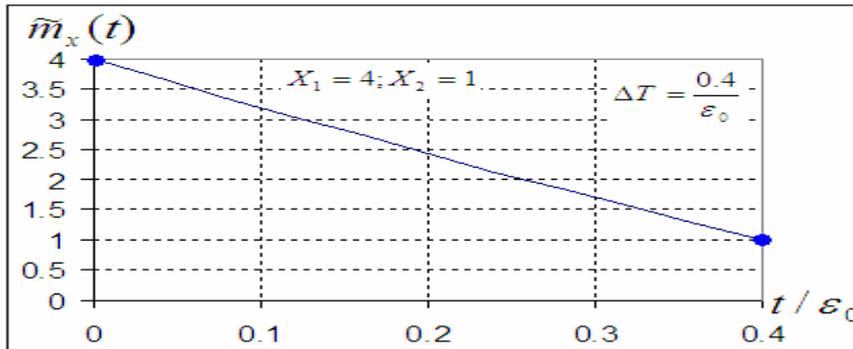


Figura 2-49: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el par de muestras $x_1=4$ y $x_2=1$ y $T=0.4/\epsilon_0$.

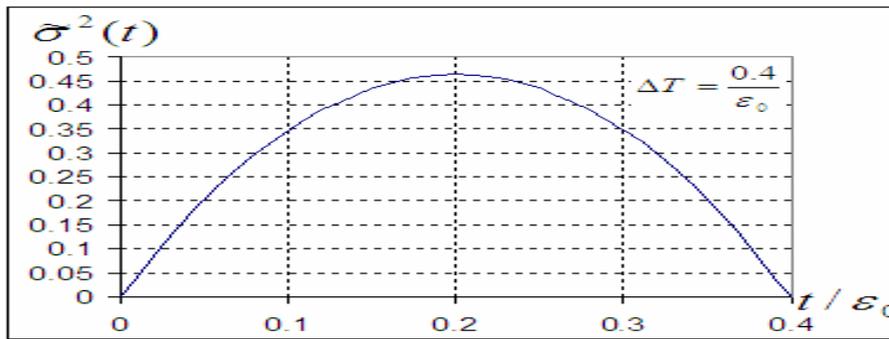


Figura 2-50: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para $X_1=4$ y $X_2=1$ y $T=0.4/\epsilon_0$

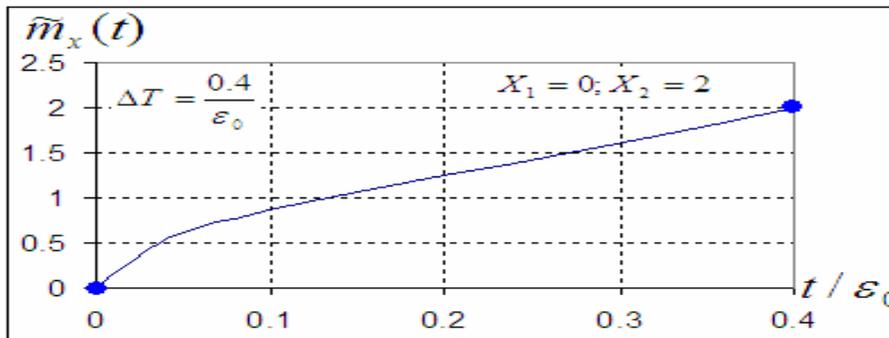


Figura 2-51: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para el par de muestras $x_1=0$ y $x_2=2$ y $T=0.4/\epsilon_0$.

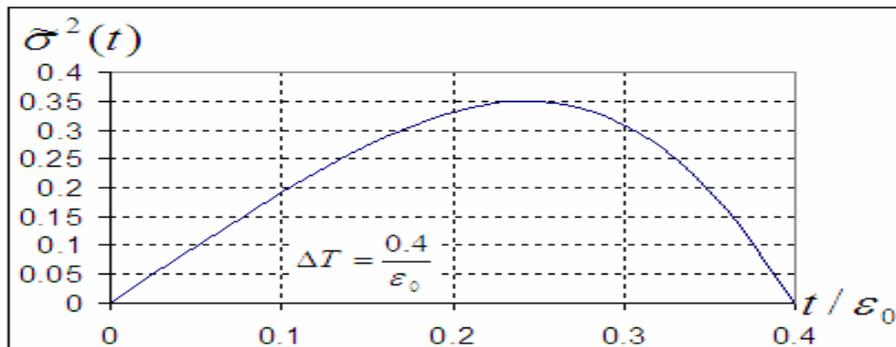


Figura 2-52: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso Markoviano de Rayleigh para $X_1=0$ y $X_2=2$ y $T=0.4/\epsilon_0$

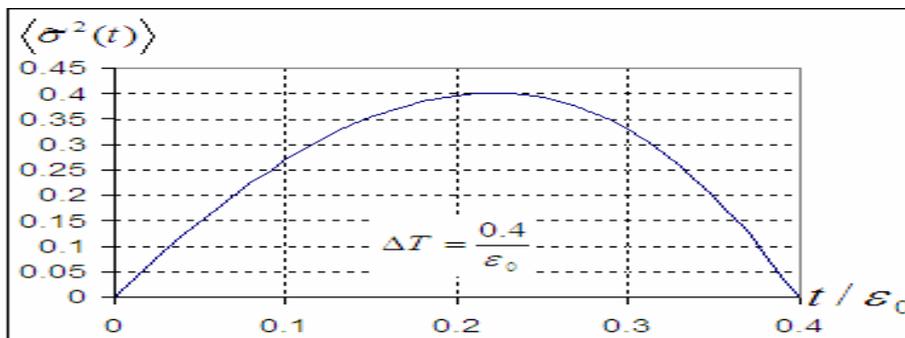


Figura 2-53: Error promedio (interpolación) para el proceso Markoviano de Rayleigh y un $T=0.4/\epsilon_0$

Los valores de las muestras $x_1(T_1)$ y $x_2(T_2)$ son los parámetros para estas curvas. Ahora podemos ver que como el intervalo de reconstrucción se reduce, las funciones de reconstrucción por ejemplo en la figura 2-44 dada la diferencia entre los valores muestra en cuanto a magnitud la reconstrucción se ve influida también por el tiempo, puesto que toma la forma casi recta. En la figura 2-46 la función de reconstrucción no es tan recta dado que no hay tanta diferencia en magnitud entre los valores muestra y el tiempo es todavía suficiente para que la función de reconstrucción no sea tan recta.

En las funciones de error de reconstrucción podemos destacar que el pico se inclina hacia el lado donde se encuentra la muestra que tiene mayor diferencia con respecto al valor incondicional de la función, y podemos observar también que en los pares de muestras $X_1=4; X_2=1$ la magnitud máxima de error pico es mayor que en $X_1=0; X_2=2$ debido a que se encuentra involucrado el valor $X_1=4$ que en estos ejemplos es el que mayor error provoca por su lejanía del valor incondicional, aunque el intervalo de tiempo sea el mismo, cosa que no sucedía en el caso Gaussiano.

De las gráficas promedio en interpolación se busca obtener un comportamiento general de la función de error de reconstrucción, cuando se tiene un intervalo grande se obtendrá una forma de campana ancha a lo largo de todo el intervalo e influida por algún pico en sus extremos si es que las muestras tienen algún valor $x \gg m_x$.

Cuando el intervalo es corto, se tendrá una campana estrecha, que se inclina hacia la muestra de mayor valor, si las muestras son iguales se encuentra centrada; su magnitud

dependerá de qué tan lejos se encuentre el valor de las muestras del valor incondicional esperado de la función.

Al usar un intervalo de tiempo $DT=0.4/e_0$ vemos que las funciones de reconstrucción no tienen diferencias significativas con respecto a $DT=1/e_0$, pero en las funciones de error de reconstrucción sí hay una disminución en las magnitudes alcanzadas, esto podría ser aprovechado si deseamos una calidad más alta en nuestra reconstrucción a sabiendas de que esta situación se reflejará solamente en el error obtenido y no en nuestra reconstrucción.

Porque no tenemos una expresión para la función de reconstrucción $\tilde{m}_x(t)$, es imposible demostrar analíticamente la dependencia no lineal de esta función con las muestras dadas. Pero es claro que tal dependencia no lineal existe, porque el resultado de la integración:

$$\tilde{m}_x(t) = \int x(t)w(x(t) | x_1(T_1); x_2(T_2))dx(t), \quad (2.23)$$

con las funciones (2.3), (2.5), y (2.6) no será una función lineal de las muestras.

En otro capítulo más adelante tocaremos el tema del caso no Markoviano con la función de distribución de Rayleigh para estudiar de manera más profunda todo lo posible sobre esta función de distribución de probabilidad.

2.2 El PMR del proceso Markoviano con la fdp gamma

2.2.1 Expresiones generales para el PMR del proceso Markoviano con la fdp gamma

Consideremos el proceso de Markov con la ley de distribución gamma. Este proceso es caracterizado por las siguientes expresiones: la fdp unidimensional es [26]:

$$w(x) = \frac{x^a}{\Gamma(a+1)} \exp(-x), \quad a>1, \quad (2.24)$$

donde $\Gamma(a+1)$ es la función gamma; la fdp de transición es:

$$w(x_t | x_1) = \frac{1}{1-Q} \left(\frac{x_t}{x_1 Q} \right)^{a/2} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q} \right) I_a \left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q} \right), \quad (2.25)$$

$$Q = s^2 \exp(-e_0 t) \quad (2.26)$$

donde $x_t=x(t)$; $x_1=x_1(T_1)$; I_a es la función de Bessel del argumento imaginario de orden a ; e_0 es el parámetro del proceso $x(t)$. Como en el caso de Rayleigh es necesario escribir la expresión para argumentos diferentes y ponerlos en (2.4), según sea el régimen

en el que se desee trabajar, ya sea extrapolación o interpolación, entonces tendremos definidas las expresiones específicas.

2.2.2 PMR del proceso Markoviano con la fdp exponencial en el régimen de extrapolación.

Ahora consideramos el caso particular de (2.25) cuando $a=0$. En este caso la ley de distribución gamma se transforma en la fdp **exponencial** y la fdp de transición (2.25) es caracterizada por la fórmula:

$$w(x_t | x_1) = \frac{1}{1-Q} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q}\right), \quad (2.27)$$

que nos es útil para aplicarla inmediatamente en el régimen de extrapolación. De tal expresión podemos realizar algunas gráficas para ver su comportamiento al variar sus argumentos:

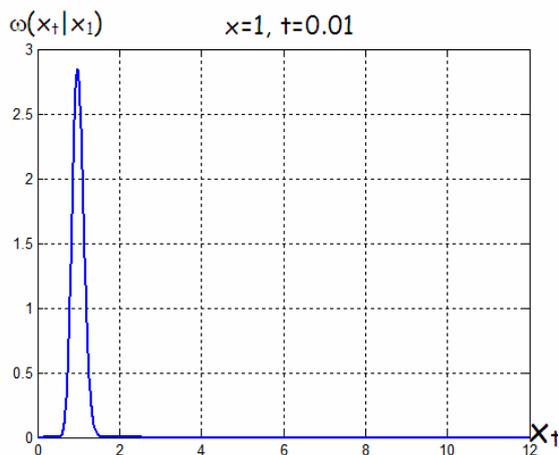


Figura 2-54: fdp exponencial donde $x=1, t=0.01$

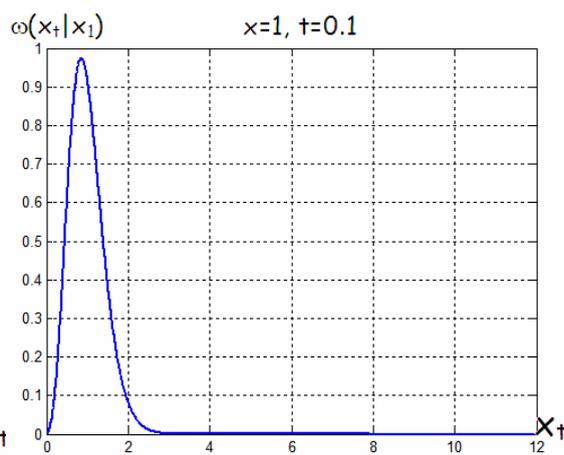


Figura 2-55: fdp exponencial donde $x=1, t=0.1$

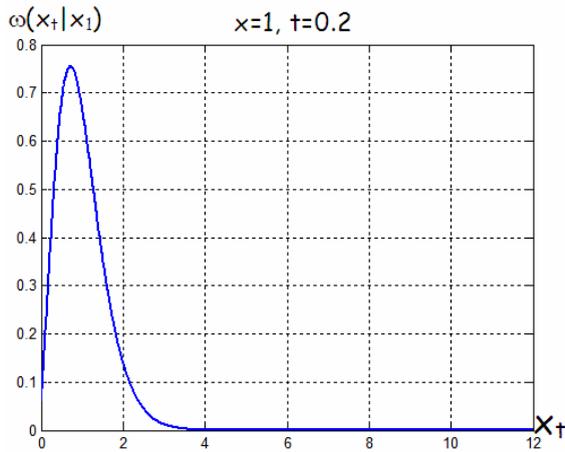


Figura 2-56: fdp exponencial donde $x=1$, $t=0.2$

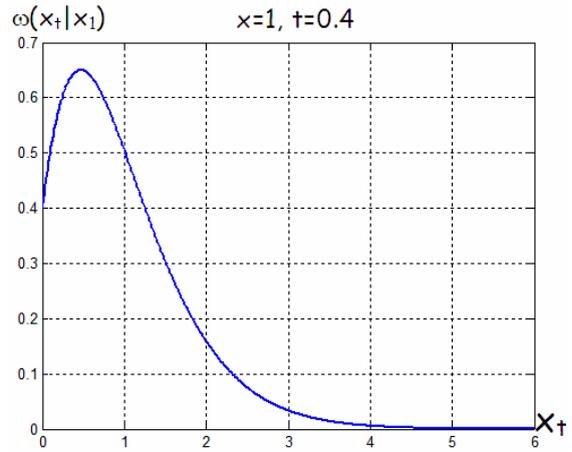


Figura 2-57: fdp exponencial donde $x=1$, $t=0.4$

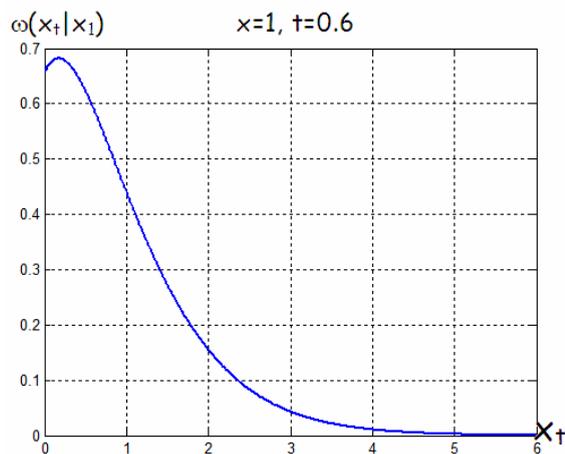


Figura 2-58: fdp exponencial donde $x=1$, $t=0.6$

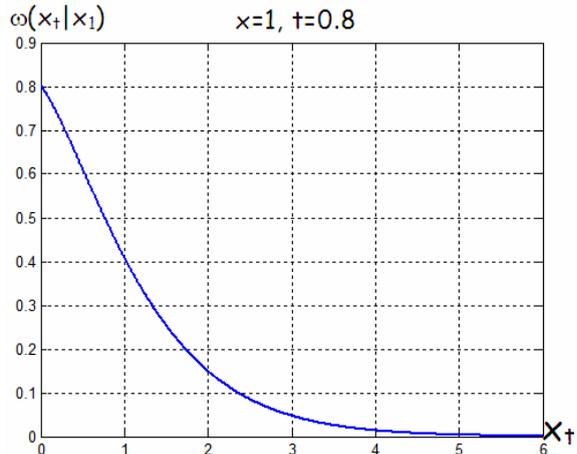


Figura 2-59: fdp exponencial donde $x=1$, $t=0.8$

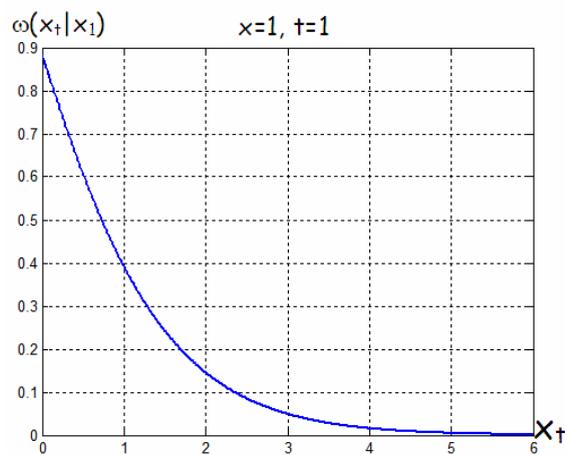


Figura 2-60: fdp exponencial donde $x=1$, $t=1$

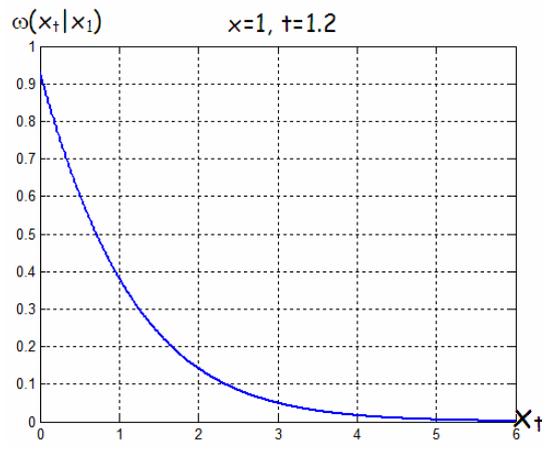


Figura 2-61: fdp exponencial donde $x=1$, $t=1.2$

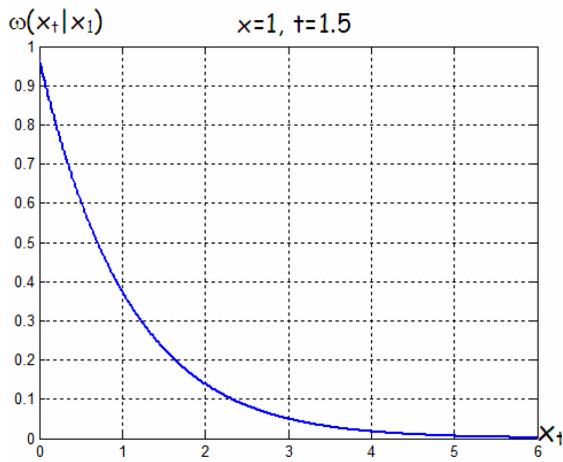


Figura 2-62: fdp exponencial donde $x=1, t=1.5$

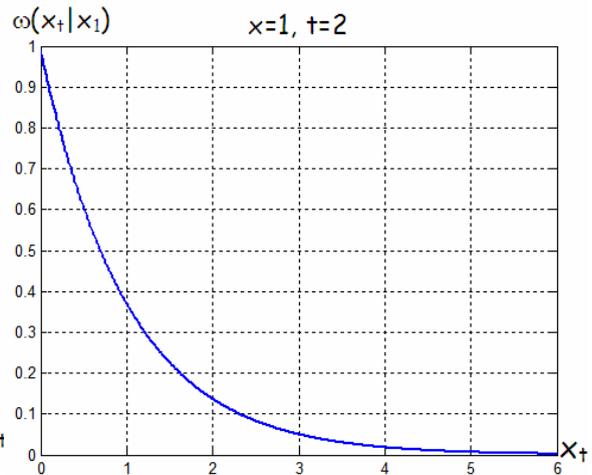


Figura 2-63: fdp exponencial donde $x=1, t=2$

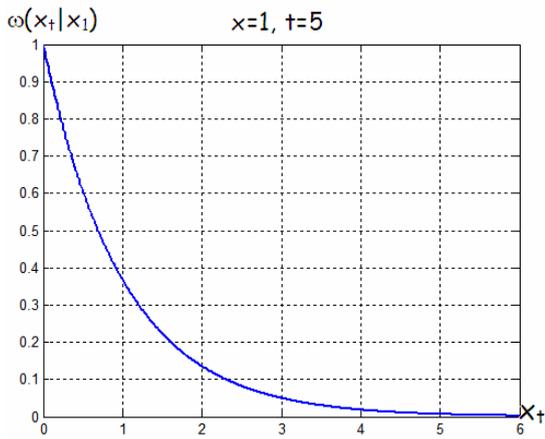


Figura 2-64: fdp exponencial donde $x=1, t=5$

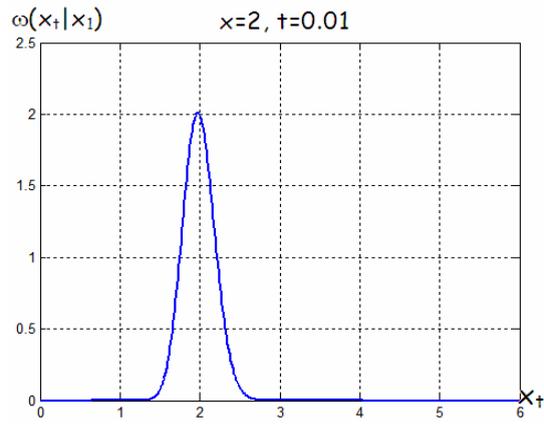


Figura 2-65: fdp exponencial donde $x=2, t=0.01$

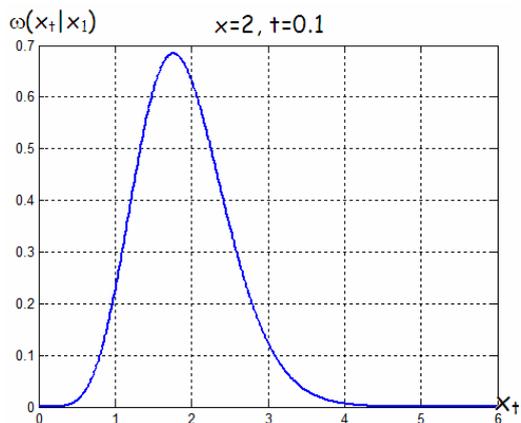


Figura 2-66: fdp exponencial donde $x=2, t=0.1$

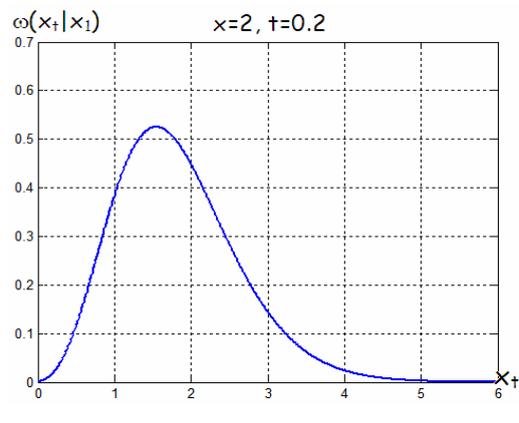


Figura 2-67: fdp exponencial donde $x=2, t=0.2$

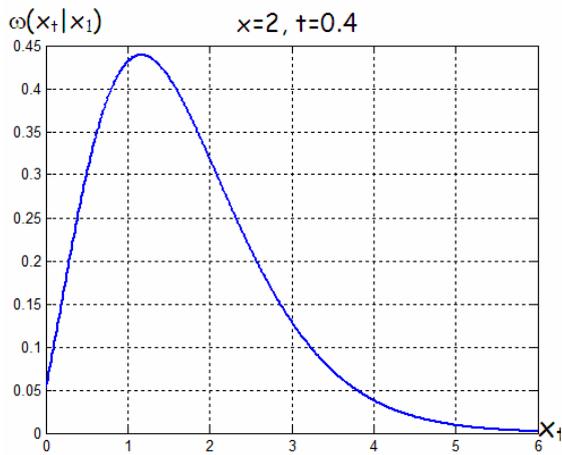


Figura 2-68: fdp exponencial donde $x=2$, $t=0.4$

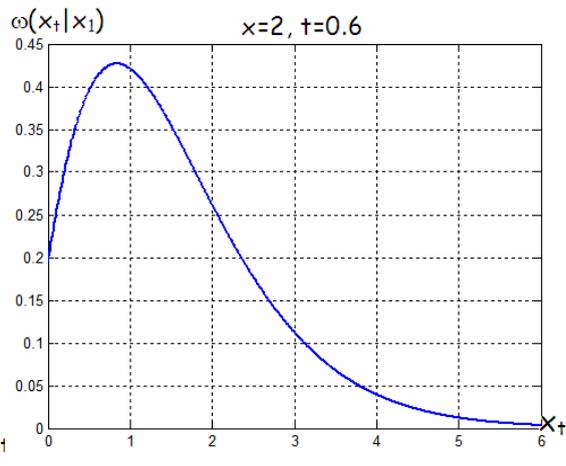


Figura 2-69: fdp exponencial donde $x=2$, $t=0.6$

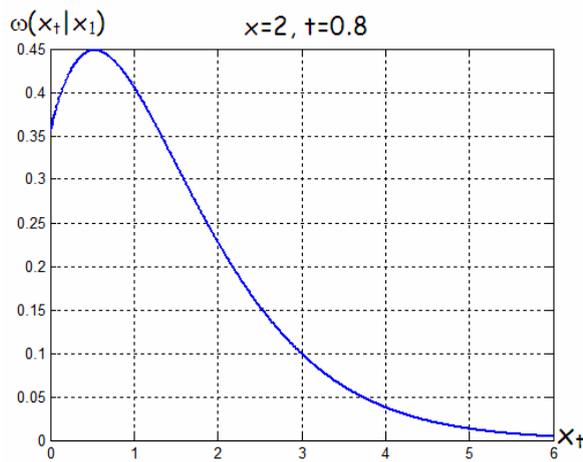


Figura 2-70: fdp exponencial donde $x=2$, $t=0.8$

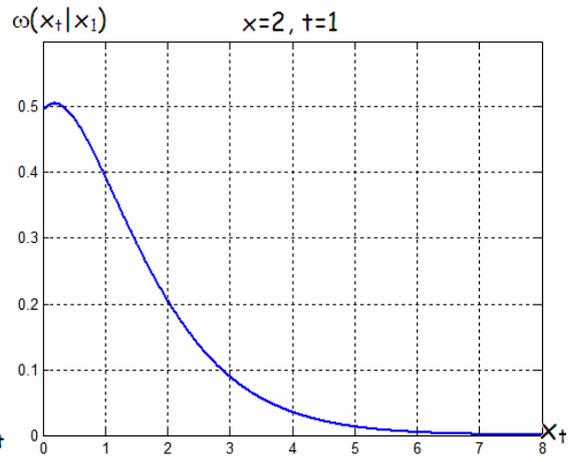


Figura 2-71: fdp exponencial donde $x=2$, $t=1$

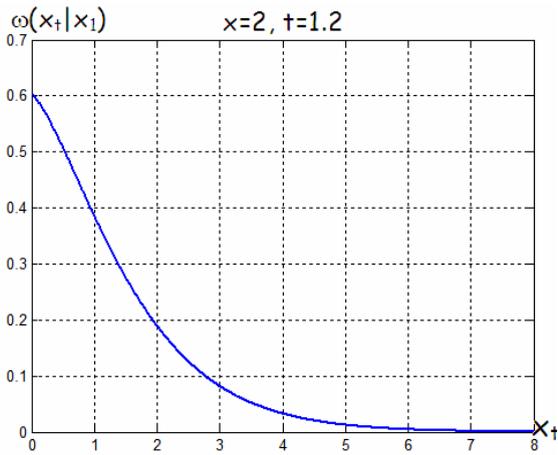


Figura 2-72: fdp exponencial donde $x=2$, $t=1.2$

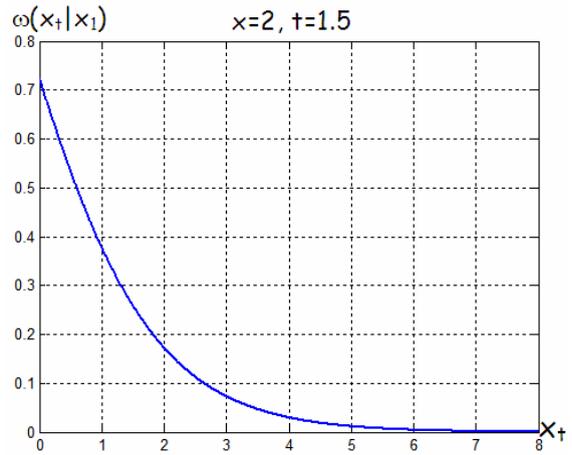


Figura 2-73: fdp exponencial donde $x=2$, $t=1.5$

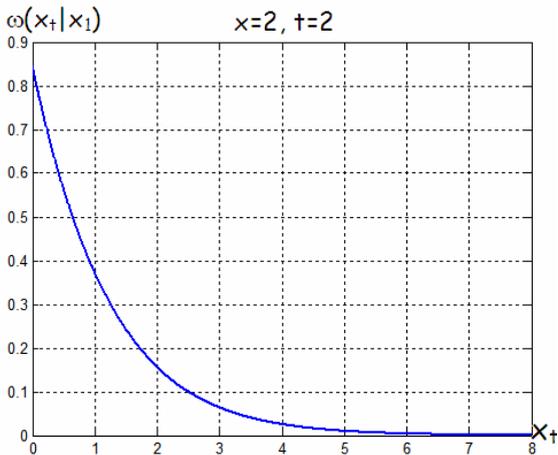


Figura 2-74: fdp exponencial donde $x=2$, $t=2$

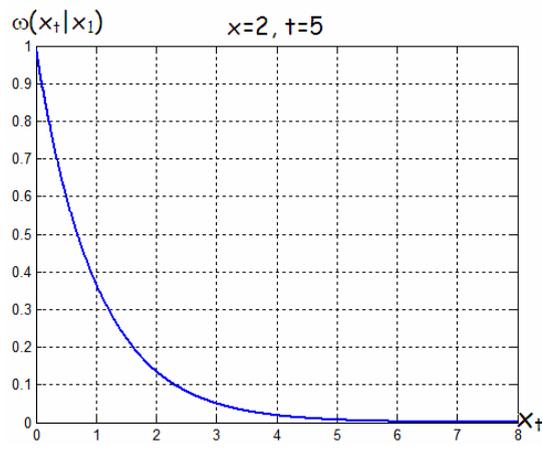


Figura 2-75: fdp exponencial donde $x=2$, $t=5$

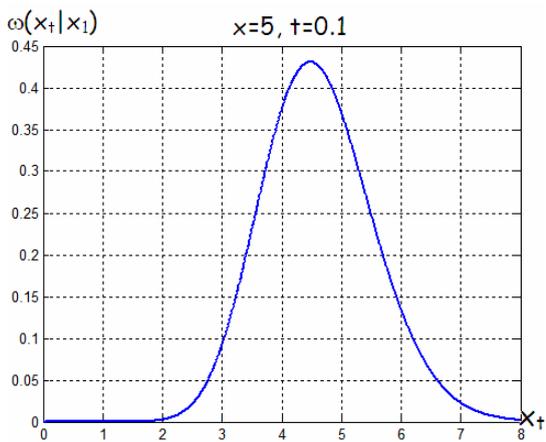


Figura 2-76: fdp exponencial donde $x=5$, $t=0.1$

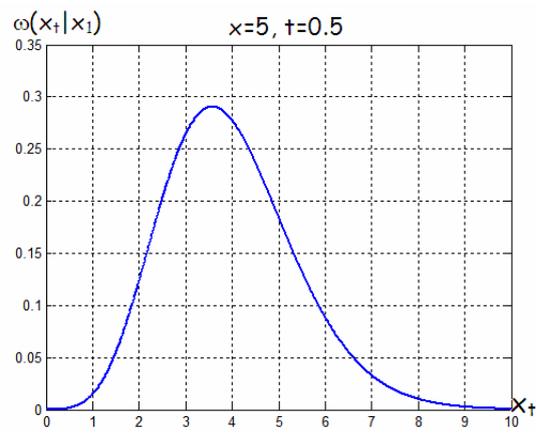


Figura 2-77: fdp exponencial donde $x=5$, $t=0.5$

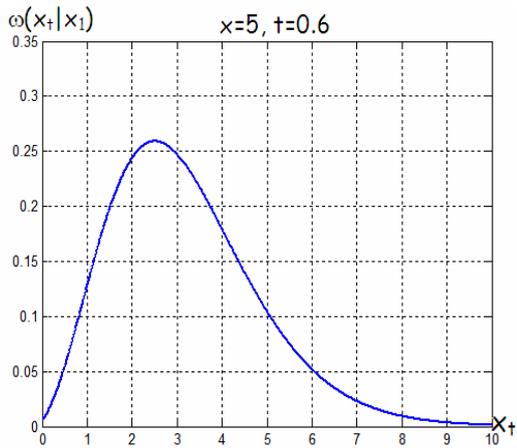


Figura 2-78: fdp exponencial donde $x=5$, $t=0.6$

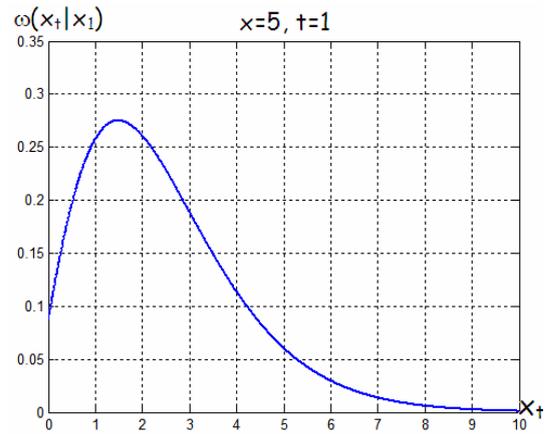


Figura 2-79: fdp exponencial donde $x=5$, $t=1$

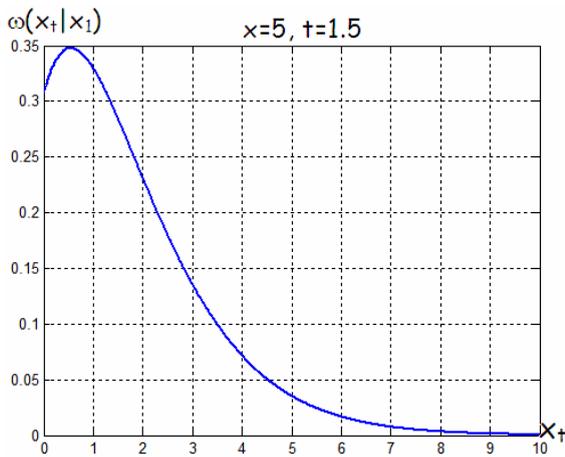


Figura 2-80: fdp exponencial donde $x=5$, $t=1.5$

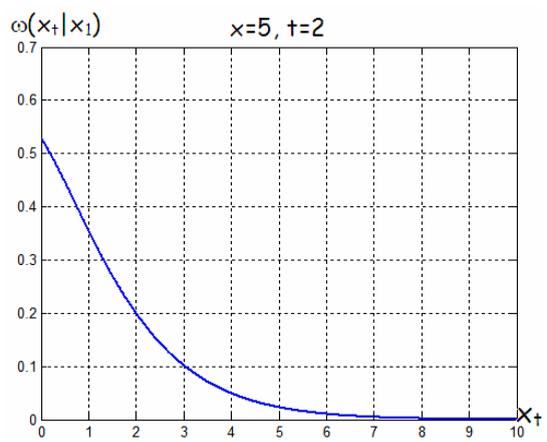


Figura 2-81: fdp exponencial donde $x=5$, $t=2$

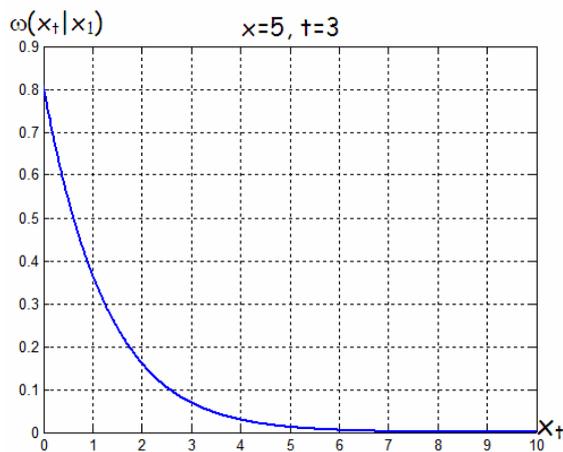


Figura 2-82: fdp exponencial donde $x=5$, $t=3$

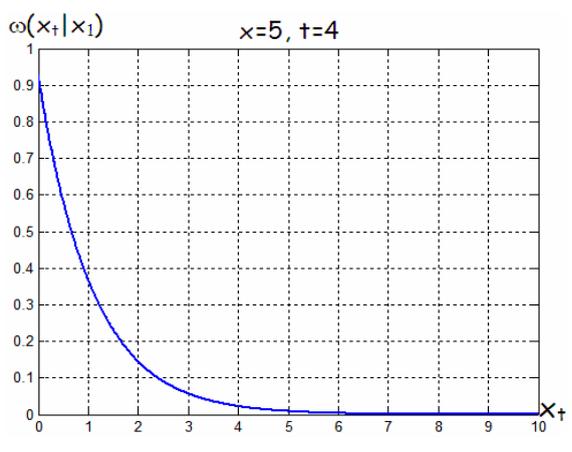


Figura 2-83: fdp exponencial donde $x=5$, $t=4$

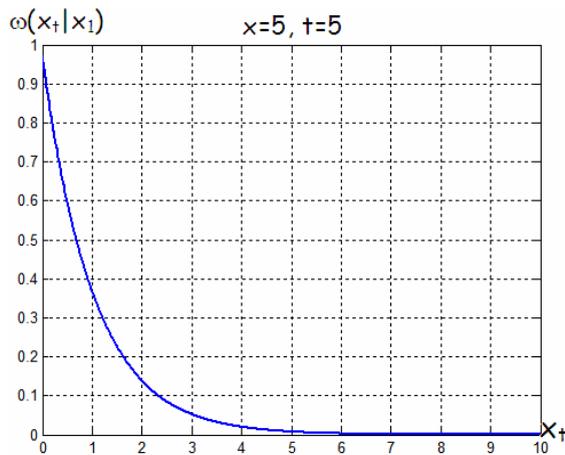


Figura 2-84: fdp exponencial donde $x=5, t=5$

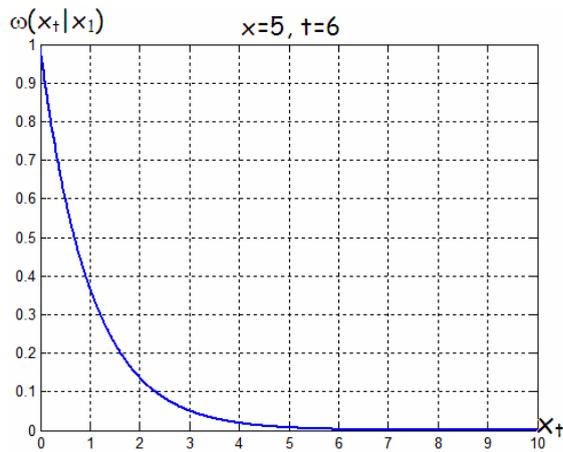


Figura 2-85: fdp exponencial donde $x=5, t=6$

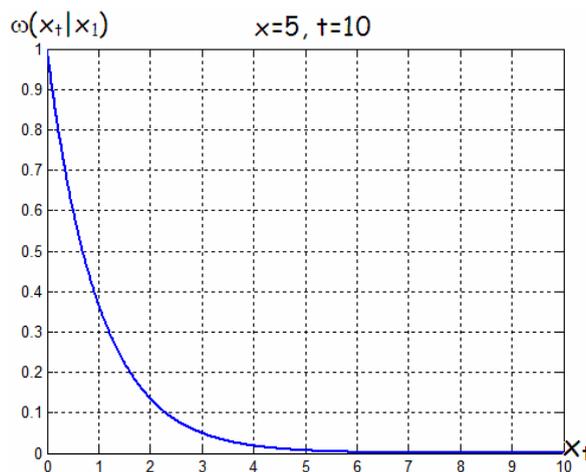


Figura 2-86: fdp exponencial donde $x=5, t=10$

Para obtener las expresiones para las funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción, seguimos un procedimiento análogo al de Rayleigh, entonces:

$$\tilde{m}_x(t) = \int \frac{x}{1-Q} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q}\right) dx, \quad (2.28)$$

$$Q = \exp(-e_0 t), \quad (2.29)$$

y para la función de error de reconstrucción:

$$s_x^2 = \int \frac{x^2}{1-Q} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q}\right) dx - \left(\int \frac{x}{1-Q} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q}\right) dx \right)^2 \quad (2.30)$$

Los resultados de los cálculos numéricos de las características de extrapolación del PMR con la función exponencial son presentados en las figuras siguientes:

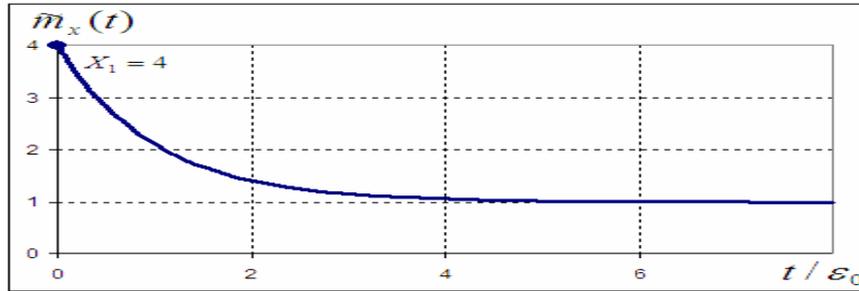


Figura 2-87: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial con el valor muestra $x_1=4$

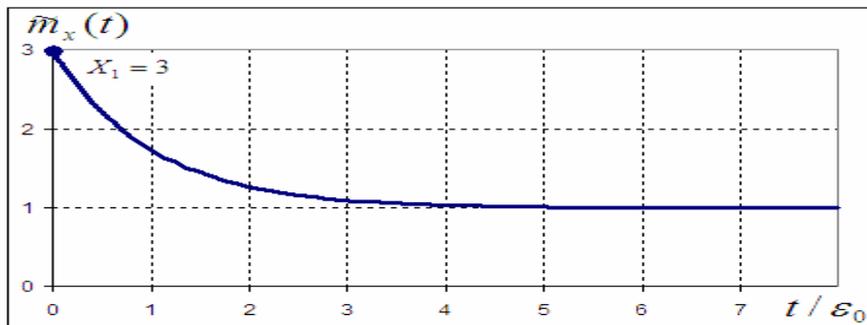


Figura 2-88: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial con el valor muestra $x_1=3$

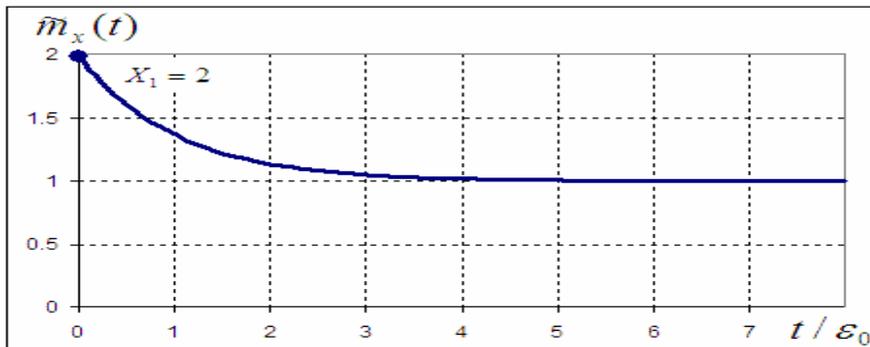


Figura 2-89: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial con el valor muestra $x_1=2$

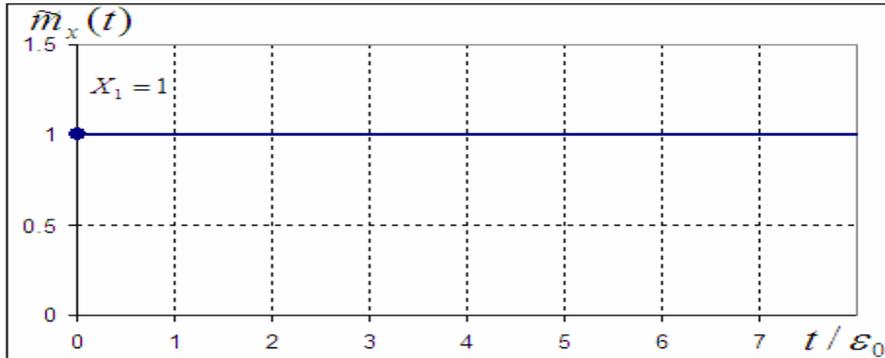


Figura 2-90: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial con el valor muestra $x_1=1$

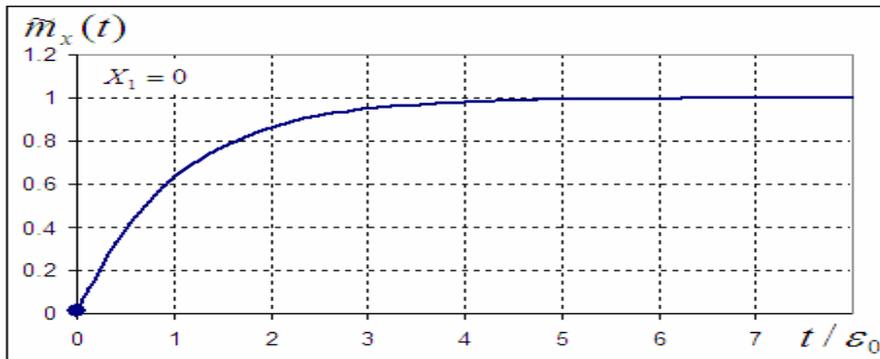


Figura 2-91: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial con el valor muestra $x_1=0$

El parámetro de las curvas es el valor de la muestra x_1 , tal como en la función de Rayleigh. Como se puede observar hay un periodo de transición hasta llegar a un estado estacionario, cuyo valor incondicional para la fdp exponencial es 1. Dicho de otra forma, las curvas tienen un comportamiento: $\tilde{m}_x(t) \rightarrow m_x = 1$. Vemos que en este caso en determinado tiempo las curvas de reconstrucción toman el valor incondicional y la magnitud de la muestra no es tan importante en este aspecto dado que pasado cierto tiempo todas las gráficas han llegado al valor incondicional.

Vemos qué sucede con las funciones de error de reconstrucción para valorar nuestros resultados sobre las funciones de reconstrucción anteriores en función del tiempo.

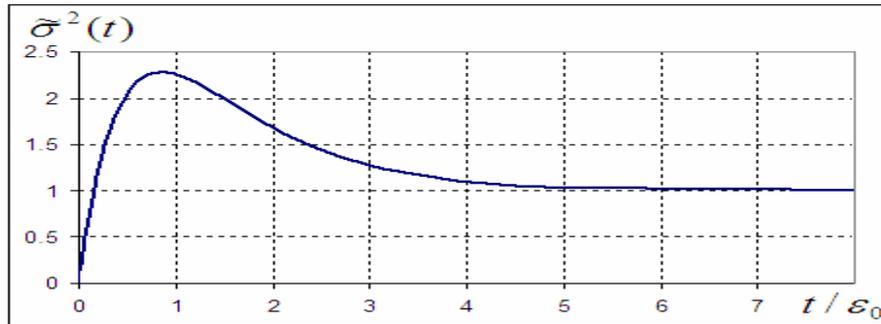


Figura 2-92: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano con la fdp exponencial para el valor muestra $x_1=4$

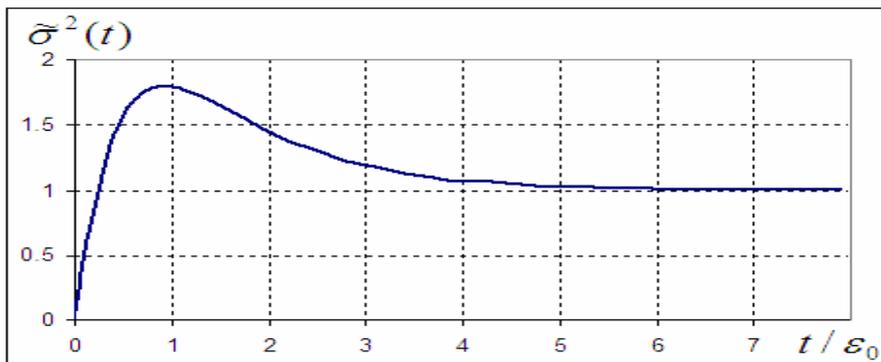


Figura 2-93: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano con la fdp exponencial para el valor muestra $x_1=3$

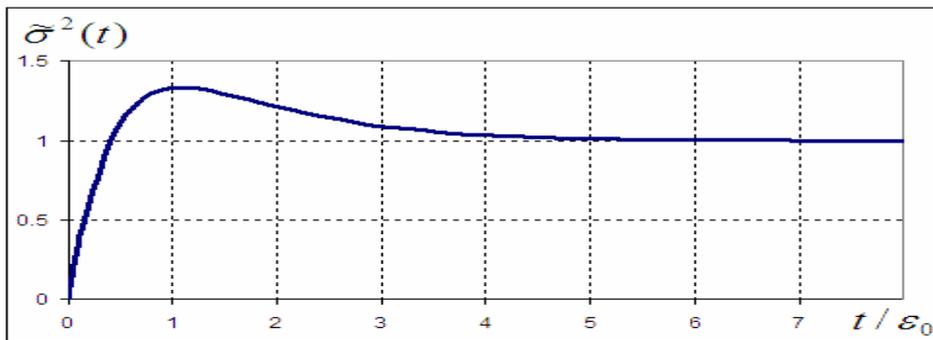


Figura 2-94: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano con la fdp exponencial para el valor muestra $x_1=2$

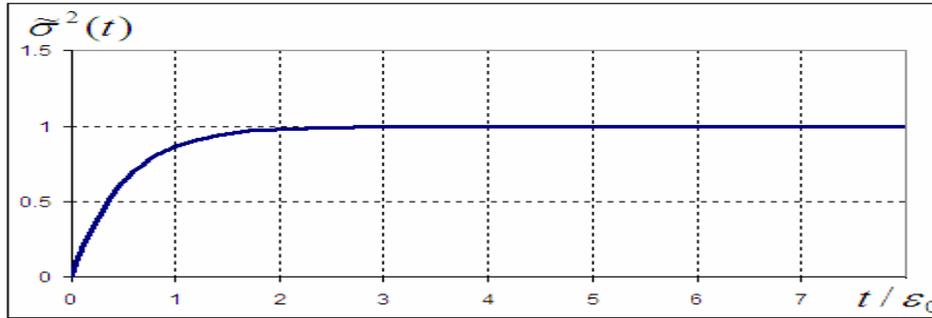


Figura 2-95: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano con la fdp exponencial para el valor muestra $x_1=1$

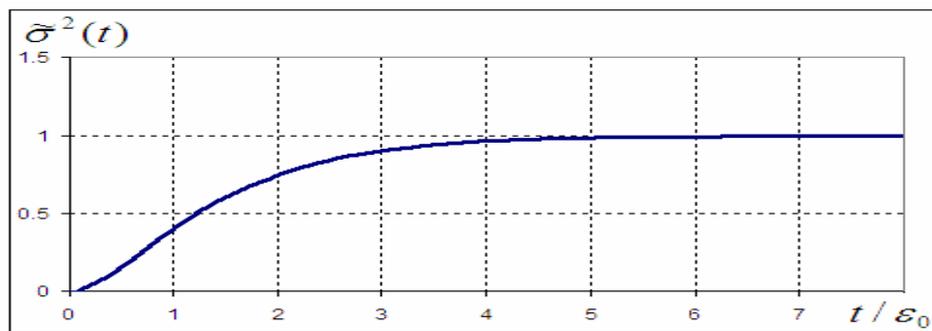


Figura 2-96: Función error de reconstrucción (extrapolación) del proceso Markoviano con la fdp exponencial para el valor muestra $x_1=0$

Las graficas anteriores nos permiten observar primeramente que en tanto nos alejamos del valor muestra se va incrementando la función de error, por un lado y por el otro entre $x_1 \gg m_x$, es decir entre más alejado esté el valor muestra del valor incondicional de la fdp exponencial, más grande será el pico formado en la función de error de reconstrucción

Por ejemplo, cuando $x_1=4$ se alcanza un valor pico de 2.28 aproximadamente, y si comparamos con $x_1=2$, el pico alcanza un error aproximado de 1.33, éstos valores nos manifiestan cuál de los dos valores muestra está más alejado del valor incondicional.

Las gráficas después del estado transitorio convergen al error del 100% ($\mathbf{s}_x^2(t) \rightarrow \mathbf{s}_x^2 = 1$), lo cual es esperado, ya que al alejarnos algún tiempo del valor muestra, la reconstrucción que hagamos estará totalmente equivocada.

2.2.3 PMR del proceso Markoviano con la fdp exponencial en el régimen de interpolación.

Para obtener los resultados de interpolación es necesario tomar (2.24) y adecuarla a distintos tiempos para usarla en (2.3), para así obtener la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción de la siguiente manera:

$$w(x, t | x_1, t_1) = \frac{1}{1-Q_1} \exp\left(-\frac{x + Q_1 x_1}{1-Q_1}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x x_1}}{1-Q_1}\right), \quad (2.31)$$

$$w(x_2, t_2 | x, t) = \frac{1}{1-Q_2} \exp\left(-\frac{x_2 + Q_2 x}{1-Q_2}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x}}{1-Q_2}\right), \quad (2.32)$$

$$w(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \frac{1}{1-Q_3} \exp\left(-\frac{x_2 + Q_3 x_1}{1-Q_3}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x_1}}{1-Q_3}\right), \quad (2.33)$$

$$Q_1 = \exp(-\mathbf{e}_0 | t - t_1 |), \quad (2.34)$$

$$Q_2 = \exp(-\mathbf{e}_0 | t_2 - t |), \quad (2.35)$$

$$Q_3 = \exp(-\mathbf{e}_0 | t_2 - t_1 |), \quad (2.36)$$

entonces usando (2.3):

$$\tilde{m}_x(t) = \int x \left(\frac{\frac{1}{1-Q_1} \exp\left(-\frac{x + Q_1 x_1}{1-Q_1}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x x_1}}{1-Q_1}\right) \frac{1}{1-Q_2} \exp\left(-\frac{x_2 + Q_2 x}{1-Q_2}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x}}{1-Q_2}\right)}{\frac{1}{1-Q_3} \exp\left(-\frac{x_2 + Q_3 x_1}{1-Q_3}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x_1}}{1-Q_3}\right)} \right) dx, \quad (2.37)$$

y para la función de error de reconstrucción, de acuerdo con (2.4):

$$\begin{aligned} s_x^2(t) = & \int x^2 \left(\frac{\frac{1}{1-Q_1} \exp\left(-\frac{x + Q_1 x_1}{1-Q_1}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x x_1}}{1-Q_1}\right) \frac{1}{1-Q_2} \exp\left(-\frac{x_2 + Q_2 x}{1-Q_2}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x}}{1-Q_2}\right)}{\frac{1}{1-Q_3} \exp\left(-\frac{x_2 + Q_3 x_1}{1-Q_3}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x_1}}{1-Q_3}\right)} \right) dx - \\ & - \left(\int x \left(\frac{\frac{1}{1-Q_1} \exp\left(-\frac{x + Q_1 x_1}{1-Q_1}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x x_1}}{1-Q_1}\right) \frac{1}{1-Q_2} \exp\left(-\frac{x_2 + Q_2 x}{1-Q_2}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x}}{1-Q_2}\right)}{\frac{1}{1-Q_3} \exp\left(-\frac{x_2 + Q_3 x_1}{1-Q_3}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x_1}}{1-Q_3}\right)} \right) dx \right)^2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Los resultados de los cálculos numéricos de las características de *interpolación* del PMR son presentadas en las figuras siguientes para distintos intervalos de discretización $T=8/e_0$ y $T=1/e_0$.

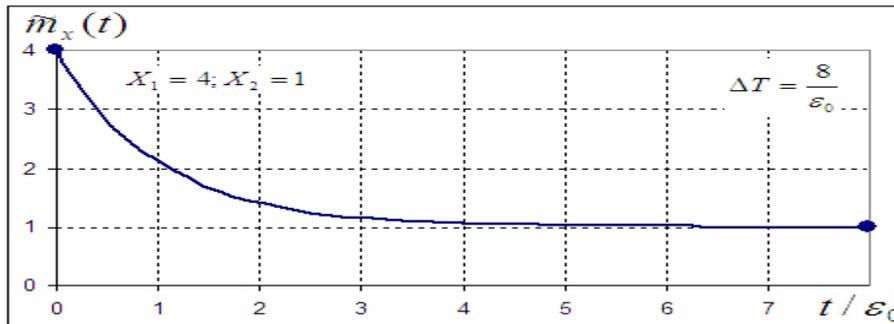


Figura 2-97: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=4; X_2=1$ y $T=8/e_0$.

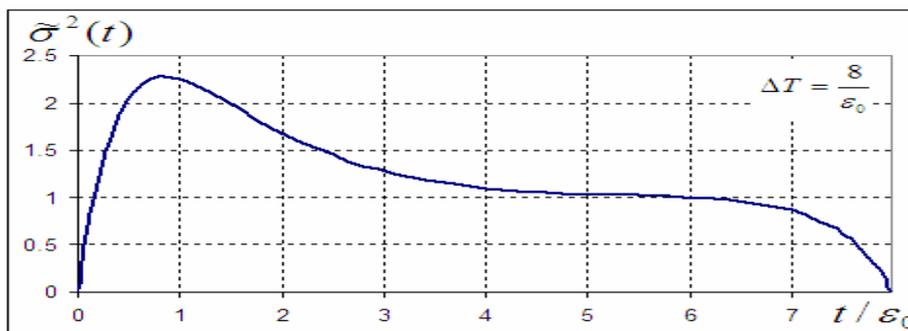


Figura 2-98: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=4; X_2=1$ y $T=8/e_0$.

Para un intervalo $T=8/e_0$ podemos observar que la función de reconstrucción busca el valor incondicional, para la mitad del intervalo ya casi se encuentra en este valor de la fdp exponencial; y después tiende al valor de la muestra x_2 , que en este caso coincide con el valor incondicional.

La función de error de reconstrucción nos muestra el pico ya característico cuando el valor $x \gg m_x$, que si comparamos con el régimen de extrapolación el valor para la función de error de $X_1=4$ es casi el mismo, y la forma también es similar en la parte de la función de error que corresponde a $x_1=0$ que en el régimen de extrapolación.

A continuación se presenta el ejemplo para otro par de muestras:

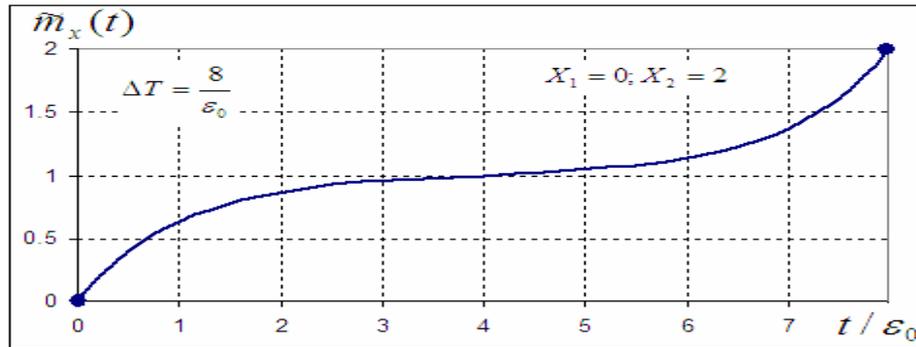


Figura 2-99: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=0; X_2=2$ y $T=8/\epsilon_0$.

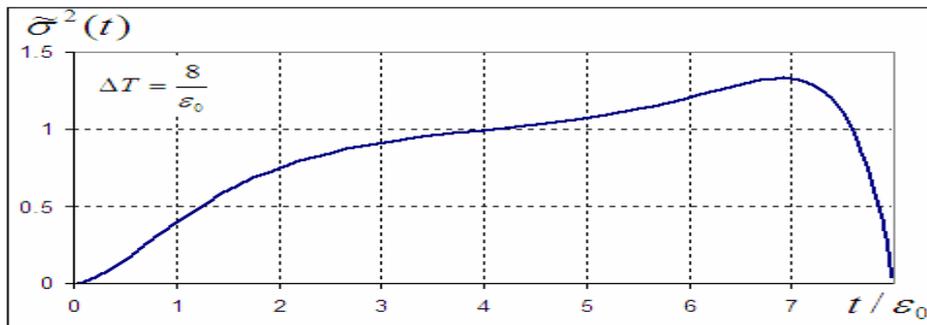


Figura 2-100: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=0; X_2=2$ y $T=8/\epsilon_0$.

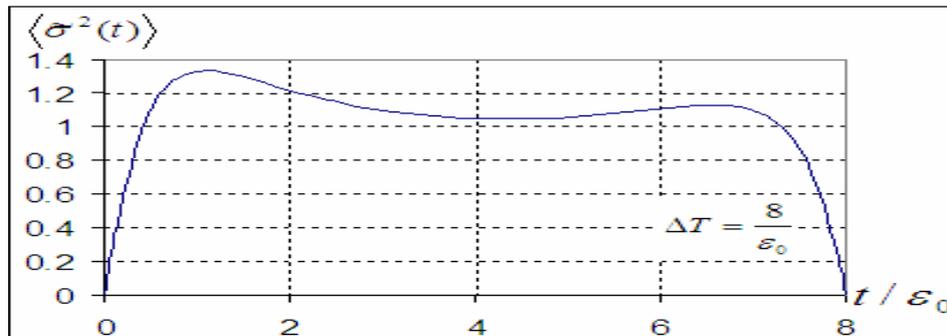


Figura 2-101: Error promedio (interpolación) de reconstrucción con la fdp exponencial y $T=8/\epsilon_0$.

En este ejemplo también podemos ver que de igual manera la función de reconstrucción pasa por el valor incondicional por un instante, que justamente es la mitad del intervalo, de la función de error podemos resaltar el pico que se forma por las circunstancias antes mencionadas, y que en el caso de las muestras de magnitud mayor al valor incondicional se alcanza una magnitud de error igual al que se tiene en el régimen de extrapolación. Reducimos el intervalo de tiempo entre muestras en la reconstrucción para ver los resultados de tal efecto.

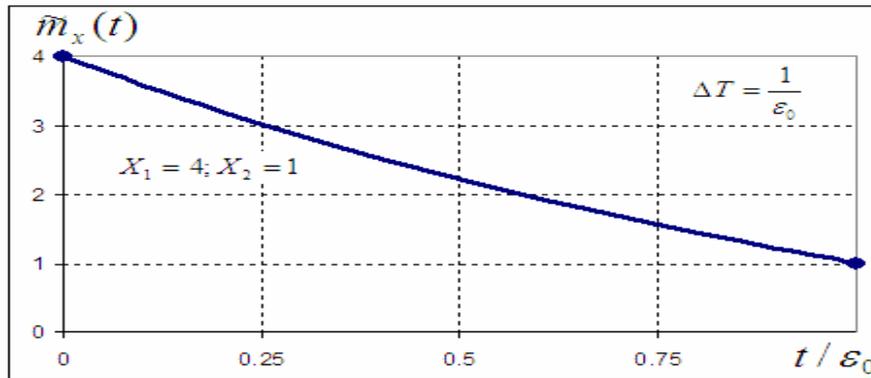


Figura 2-102: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=4; X_2=1$ y $T=1/\epsilon_0$.

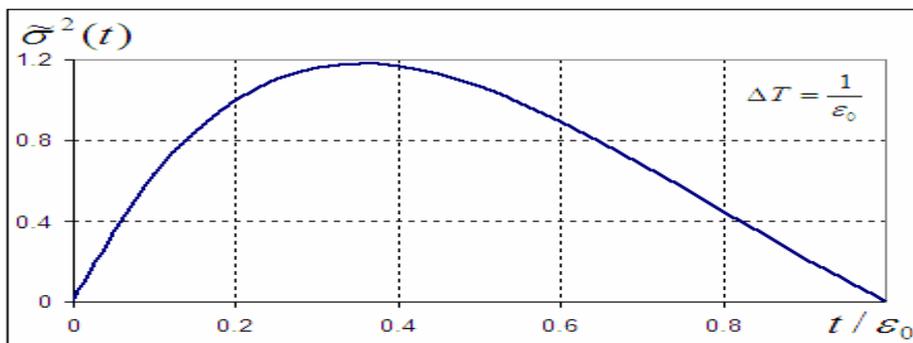


Figura 2-103: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=4; X_2=1$ y $T=1/\epsilon_0$.

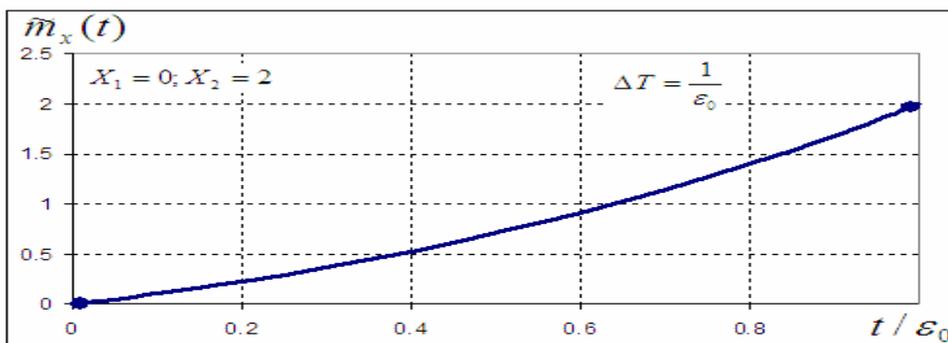


Figura 2-104: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=0; X_2=2$ y $T=1/\epsilon_0$.

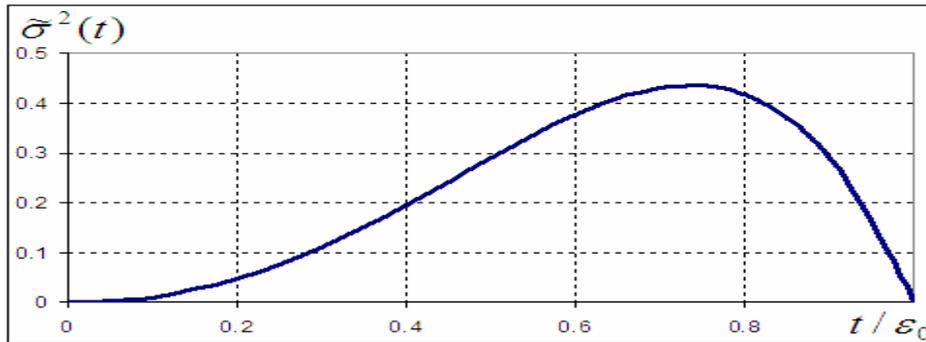


Figura 2-105: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=0; X_2=2$ y $T=1/e_0$.

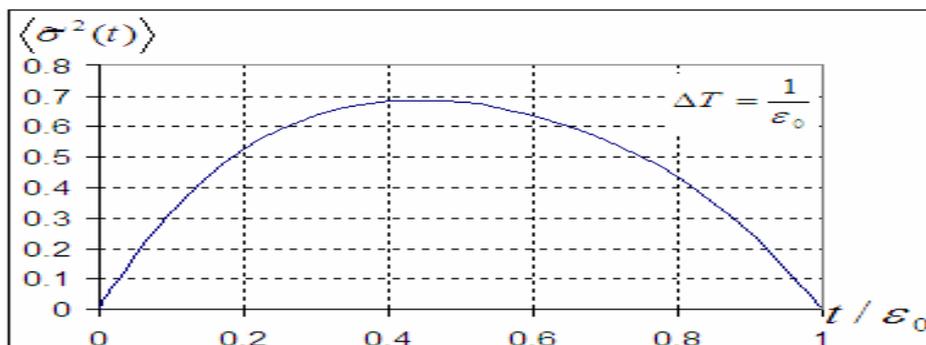


Figura 2-106: Error promedio de reconstrucción con la fdp exponencial y $T=1/e_0$.

Reducimos aún más el intervalo de tiempo entre muestras para ver si se ven afectadas de manera importante tanto la función de reconstrucción como la función de error de reconstrucción:

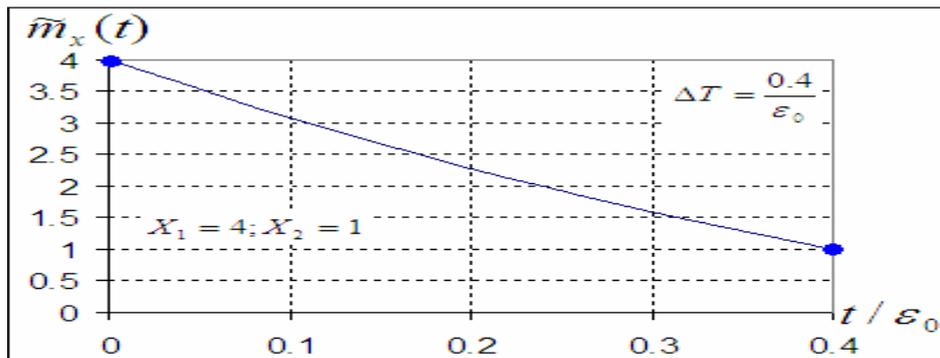


Figura 2-107: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=4; X_2=1$ y $T=0.4/e_0$.

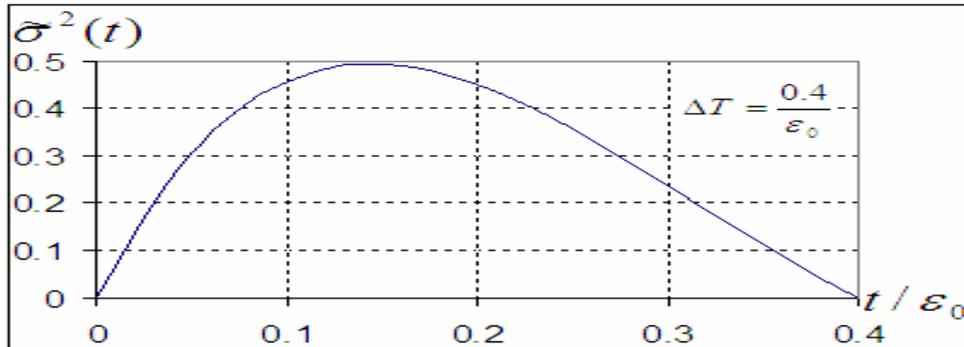


Figura 2-108: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=4; X_2=1$ y $T=0.4/\epsilon_0$.

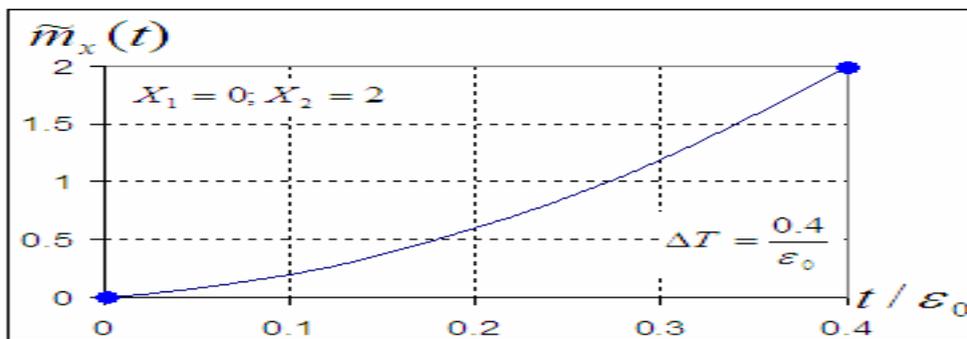


Figura 2-109: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=0; X_2=2$ y $T=0.4/\epsilon_0$.

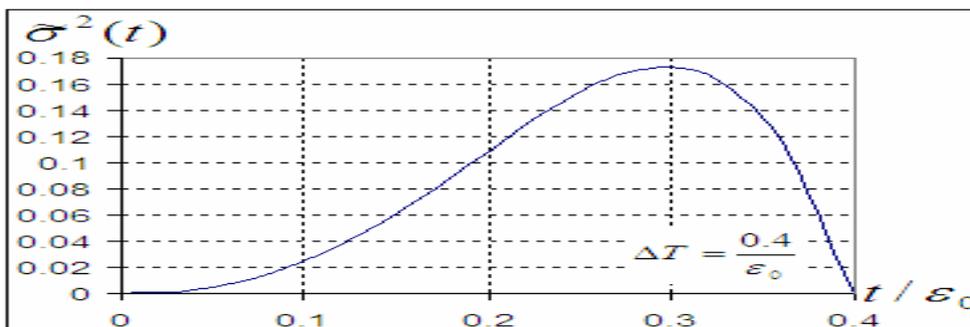


Figura 2-110: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano con la fdp exponencial para los pares de muestras $X_1=0; X_2=2$ y $T=0.4/\epsilon_0$.

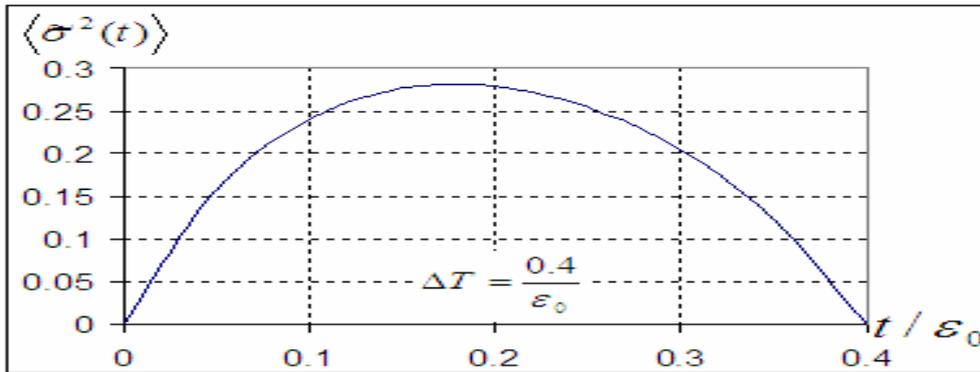


Figura 2-111: Error promedio de reconstrucción (interpolación) con la fdp exponencial y $\Delta T = 0.4/\varepsilon_0$.

Vemos que al reducir el intervalo las funciones de reconstrucción tienden a formar una línea casi recta entre las muestras, debido a la reducción en tiempo de reconstrucción y a la forma exponencial de la función Q . En las funciones de error de reconstrucción podemos apreciar que adquieren una forma de campana estrecha, a diferencia de cuando el intervalo es más grande. También se puede describir que la inclinación de la campana es hacia donde se encuentra la muestra de mayor valor, si se tuvieran 2 muestras con el mismo valor, la campana estaría centrada. Otra observación es que a pesar de la reducción en tiempo del intervalo de reconstrucción el valor de error pico en la figura 2-103 no está por debajo del valor 1, lo que nos sugiere que si deseamos una calidad mayor en nuestra reconstrucción en la fdp exponencial debemos reducir aun más el intervalo de tiempo de reconstrucción.

Reduciendo ΔT a $0.4/\varepsilon_0$ logramos una mejor calidad en la reconstrucción que se refleja en las funciones de error de reconstrucción en forma significativa y podemos ver que la función de reconstrucción no cambia en su forma, por lo que al trabajar con estos intervalos de tiempo (o aún menores) tendremos como consecuencia una disminución en error y no cambiará la función de error de reconstrucción.

Capítulo 3

La descripción estadística del procedimiento de Muestreo-Reconstrucción de procesos aleatorios no Markovianos no Gaussianos

Introducción

.....

En este capítulo vamos a considerar un par de casos más complejos que los del capítulo anterior, trabajando con nuevas funciones de covarianza normalizadas, pero con tiempo de covarianza normalizado $t_c=1$, para llegar a una comparación de resultados. Primeramente consideraremos la descripción del Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción de un proceso aleatorio no Gaussiano no Markoviano, con las dos fdp con las cuales se viene trabajando, utilizando distintas funciones de covarianza normalizadas.

3.1 Reconstrucción del proceso de Rayleigh no Markoviano

Primero obtenemos resultados con la función de distribución de probabilidad de Rayleigh, y dos funciones de covarianza nuevas, se obtendrán resultados para los ejemplos que se presentaron en el capítulo anterior, tanto para el régimen de extrapolación como el de interpolación y lograremos entonces comparar todos los resultados, con base en la teoría estadística que toma en cuenta lo necesario para un PMR de procesos no Gaussianos.

3.1.1 Reconstrucción del proceso de Rayleigh no Markoviano con la función $Q = (1 + a | t |) \exp(-a | t |)$.

En esta sección describiremos el PMR de un proceso aleatorio no Gaussiano de Rayleigh con ayuda de una función más suave que la de el capítulo anterior.

El tiempo de covarianza τ_c de esta función es:

$$t_c = \int_0^{\infty} |R_x(t)| dt = \int_0^{\infty} (1 + a | t |) \exp(-a | t |) dt = \frac{2}{a}, \quad (3.1)$$

donde el tiempo de covarianza depende del valor a , entonces para trabajar con resultados normalizados obtenemos el valor de a adecuado para tener $t_c = 1$, este valor es $a=2$.

Recordemos las expresiones para la función de covarianza de Rayleigh:

$$k_x(t) = \langle xx_t \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{ps^2}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 Q^2(t) + \left(\frac{1}{8} \right)^2 Q^4(t) + \left(\frac{3}{48} \right)^2 Q^6(t) + \dots \right\}, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} r_x(t) &= \frac{k_x(t)}{s_x^2} = \frac{p}{4-p} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 Q^2(t) + \left(\frac{1}{8} \right)^2 Q^4(t) + \left(\frac{3}{48} \right)^2 Q^6(t) + \dots \right\} = \quad (3.3) \\ &= 0.921Q^2(t) + 0.058Q^4(t) + \dots \approx Q^2(t) \end{aligned}$$

Podemos obtener algunas gráficas de las expresiones anteriores para ver su forma y poder obtener el tiempo de covarianza, dado por la expresión:

$$t_c = \int_0^{\infty} |R(t)| dt, \quad (3.4)$$

Donde $R(t)$ es sustituido por (3.2) y (3.3). Las gráficas para las expresiones (3.2) y (3.3) con $Q = (1 + 2|t|) \exp(-2|t|)$ son presentadas a continuación, primero se presenta la gráfica para la expresión (3.2), para la cual el tiempo de covarianza es 0.5991:

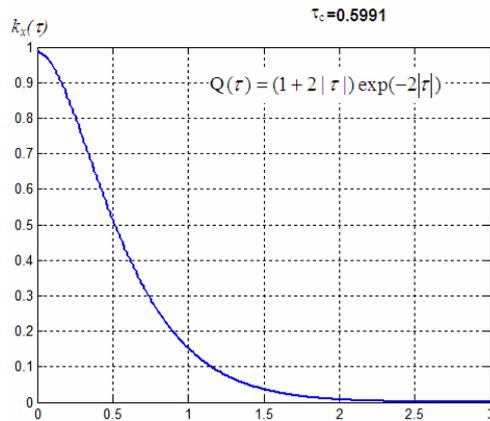


Figura 3-1: función de covarianza de Rayleigh (3.2) con $Q = (1 + 2|t|) \exp(-2|t|)$

Ahora se presenta la gráfica para la expresión (3.3), para la cual el tiempo de covarianza es 0.6250:

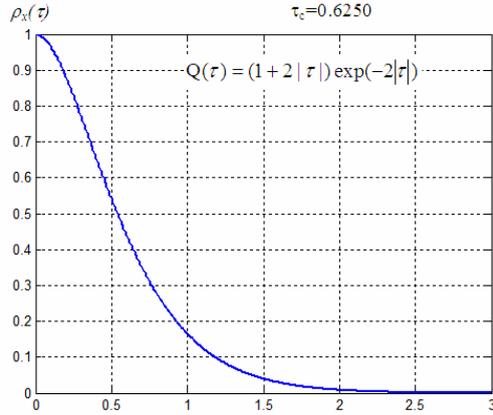


Figura 3-2: función de covarianza normalizada de Rayleigh con $Q = (1 + 2 |t|) \exp(-2 |t|)$

3.1.1.1 Régimen de extrapolación

Para obtener los resultados para este régimen utilizamos la expresión (2.7):

$$\tilde{w}(x, t | x_1, t_1) = \frac{x}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q^2 x^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right),$$

$$\text{donde } Q = (1 + e_0 |t - t_1|) \exp(-e_0 |t - t_1|), \quad (3.5)$$

y se utiliza un procedimiento análogo al de la sección 3.1.2 para obtener las expresiones necesarias, estas expresiones para la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción son las siguientes:

$$\tilde{m}_x(t) = \int \frac{x^2}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right) dx \quad (3.6)$$

$$s_x^2 = \int \frac{x^3}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right) dx \quad (3.7)$$

$$-\left[\int \frac{x^2}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right) dx \right]^2$$

Los resultados de los cálculos numéricos para este caso son presentados a continuación:

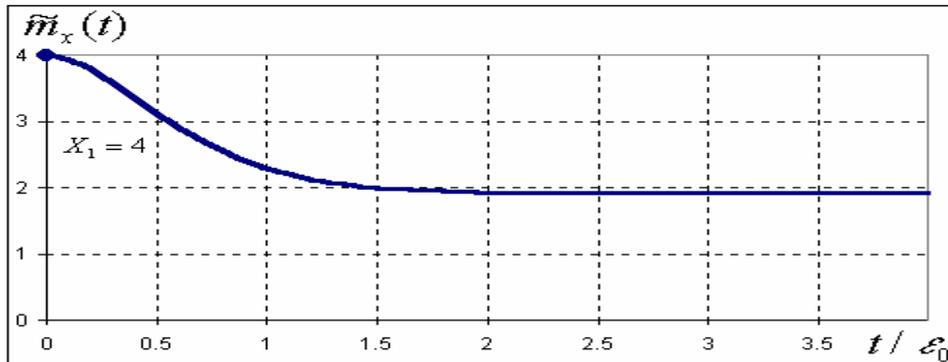


Figura 3-3: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=4$.

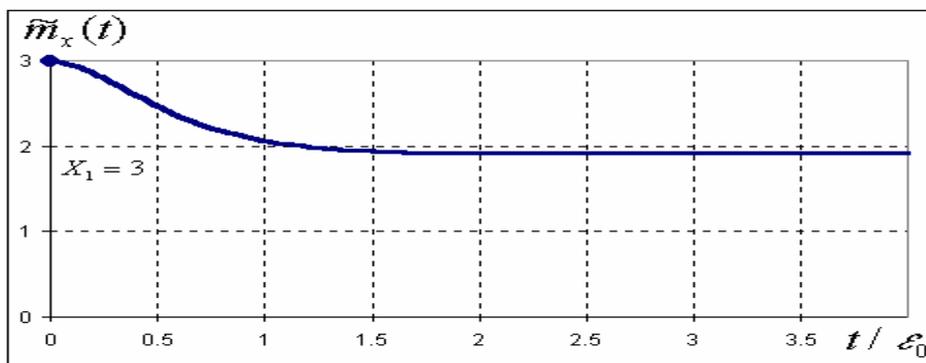


Figura 3-4: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=3$.

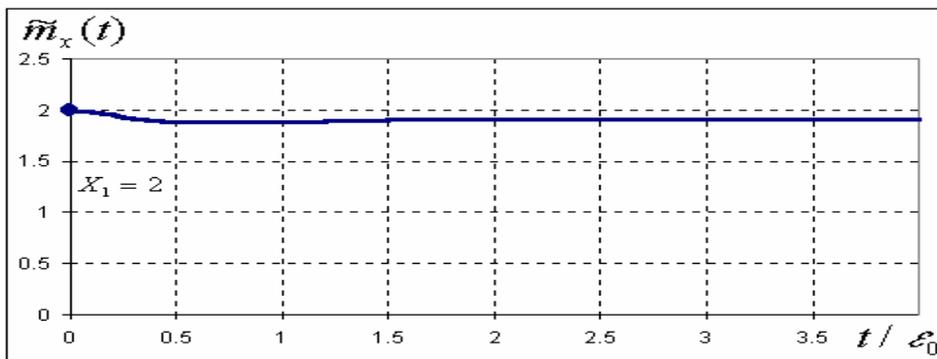


Figura 3-5: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=2$.

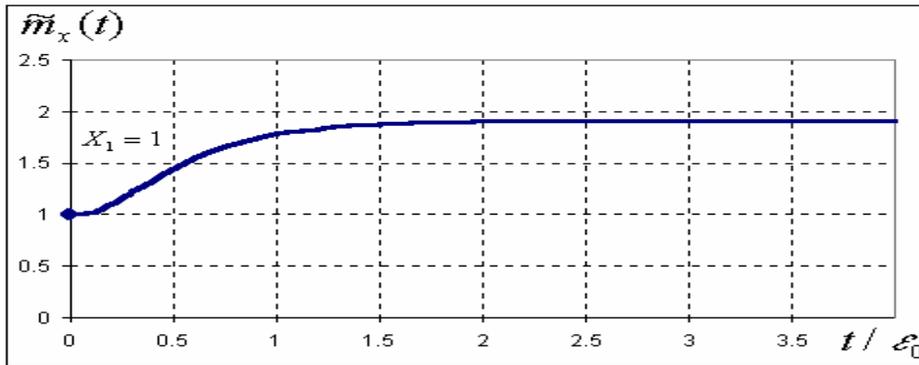


Figura 3-6: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=1$.

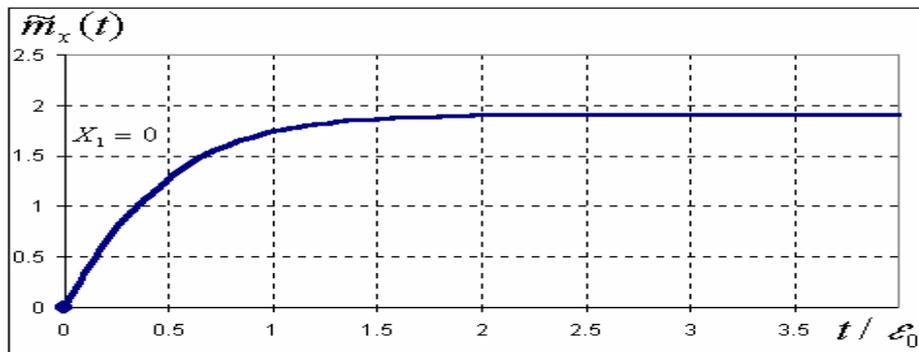


Figura 3-7: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=0$.

Las funciones de reconstrucción anteriores comparadas con el caso Markoviano son ligeramente más suaves para todas y cada una de las reconstrucciones anteriores; en cuanto al tiempo en el que las reconstrucciones alcanzan el valor incondicional de la función de Rayleigh no parece haber cambios significativos.

Ahora veamos las funciones de error de reconstrucción para cuantificar el error de cada una de las reconstrucciones anteriores.

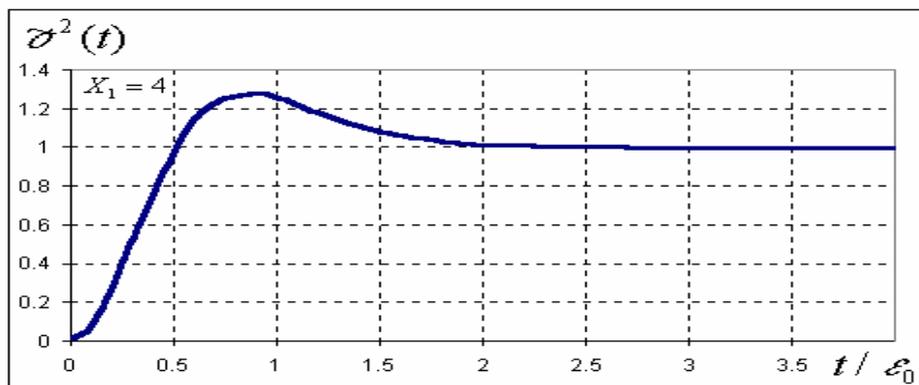


Figura 3-8: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso

no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, con $x_1=4$

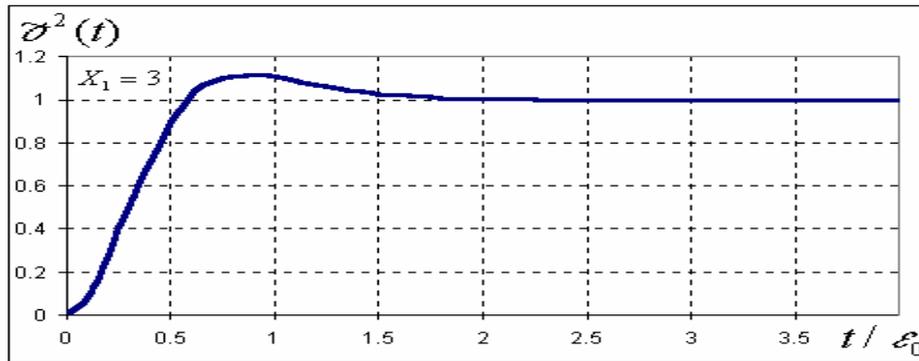


Figura 3-9: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, con $x_1=3$

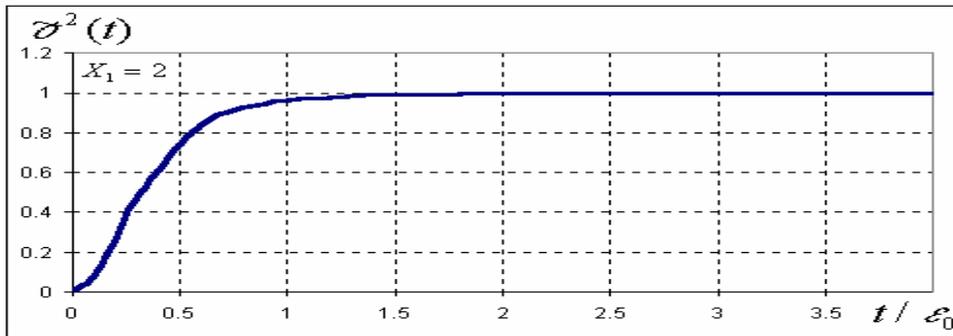


Figura 3-10: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, con $x_1=2$

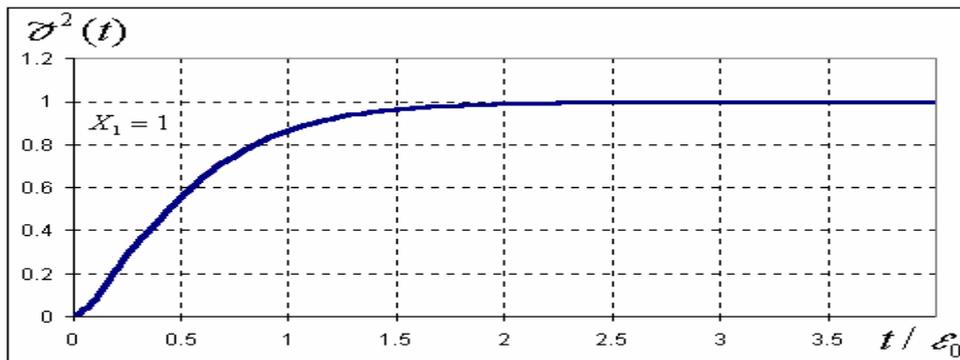


Figura 3-11: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, con $x_1=1$

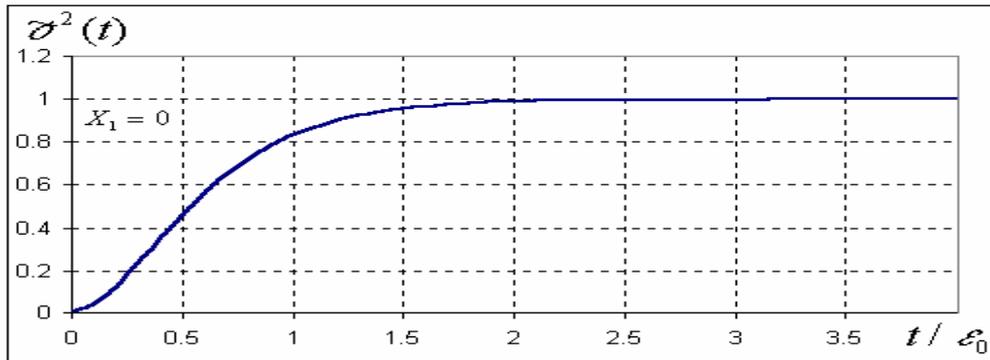


Figura 3-12: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, con $x_1=0$

En las graficas anteriores nos permite ver, en concordancia con el capítulo anterior, que se manifiesta la diferencia entre el valor muestra x_I y el valor incondicional de la función de Rayleigh, y si tal valor $x_I > m_x$, se tendrá un pico proporcional a esta diferencia. Comparando estas gráficas de error con las de el caso Markoviano también notamos una ligera mayor suavidad de la tendencia de la curva hacia el valor unitario de error, y tampoco hay una diferencia significativa en cuanto al tiempo en que se alcanza este valor.

A continuación se presenta el error promedio para observar la tendencia general de la función error.

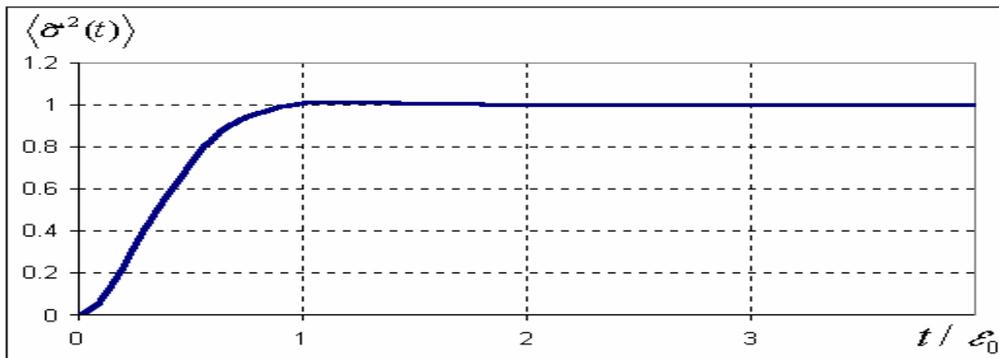


Figura 3-13: Error promedio de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$.

La gráfica error promedio nos clarifica que el periodo de transición es hasta aproximadamente $x_I = 2/\epsilon_0$. Esto nos explica que no importando de manera significativa el valor muestra, al llegar a este tiempo ya habrá pasado su estado transitorio del comportamiento de la curva del error.

3.1.1.2 Régimen de interpolación

Ahora obtenemos los resultados para el régimen de interpolación, que se obtendrán de manera análoga a la parte Markoviana, observando los cambios necesarios, quedando las expresiones de la siguiente forma:

$$\tilde{m}_x(t) = \int \left(\frac{x^2}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q^2 x^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right) \frac{x_2}{s^2(1-Q_2^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q_2^2 x_2^2}{2s^2(1-Q_2^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_2^2} \frac{x_2 x}{s^2}\right) \right) dx \quad (3.8)$$

$$\frac{x_2}{s^2(1-Q_3^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q_3^2 x_2^2}{2s^2(1-Q_3^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_3}{1-Q_3^2} \frac{x_2 x_1}{s^2}\right)$$

$$s_x^2(t) = \int \left(\frac{x^3}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q^2 x^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right) \frac{x_2}{s^2(1-Q_2^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q_2^2 x_2^2}{2s^2(1-Q_2^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_2^2} \frac{x_2 x}{s^2}\right) \right) dx - \frac{x_2}{s^2(1-Q_3^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q_3^2 x_2^2}{2s^2(1-Q_3^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_3}{1-Q_3^2} \frac{x_2 x_1}{s^2}\right) \quad (3.9)$$

$$\left[\int \left(\frac{x^2}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q^2 x^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right) \frac{x_2}{s^2(1-Q_2^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q_2^2 x_2^2}{2s^2(1-Q_2^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_2^2} \frac{x_2 x}{s^2}\right) \right) dx \right]^2 - \frac{x_2}{s^2(1-Q_3^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q_3^2 x_2^2}{2s^2(1-Q_3^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_3}{1-Q_3^2} \frac{x_2 x_1}{s^2}\right) \quad (3.10)$$

donde: $Q = (1 + e_0 |t - t_1|) \exp(-e_0 |t - t_1|)$.

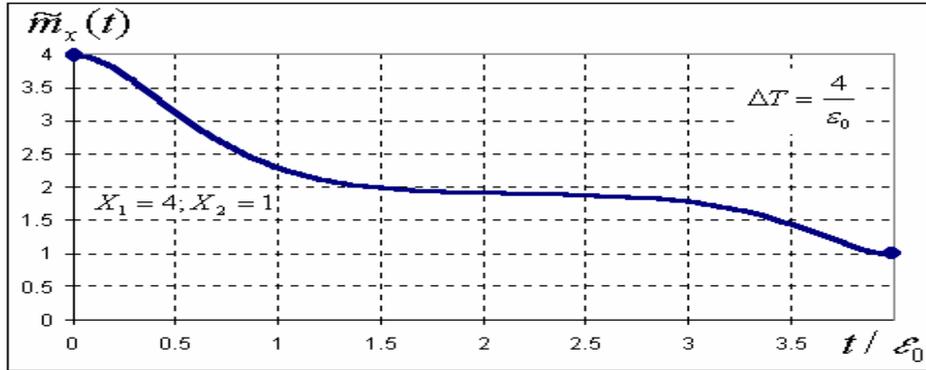


Figura 3-14: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=4/e_0$.

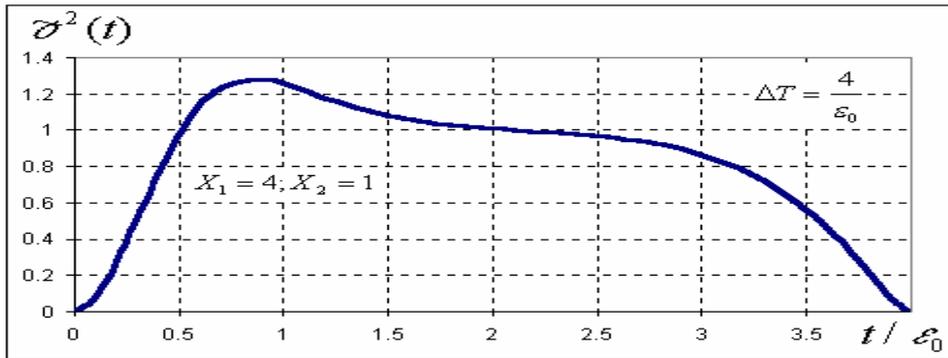


Figura 3-15: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=4/e_0$.

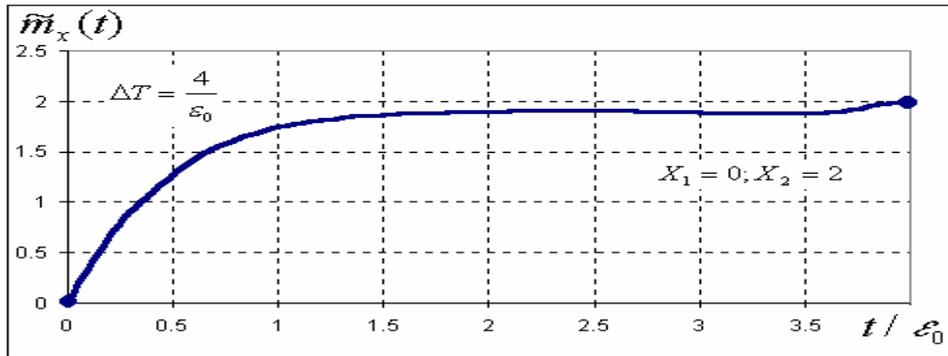


Figura 3-16: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=4/\epsilon_0$.

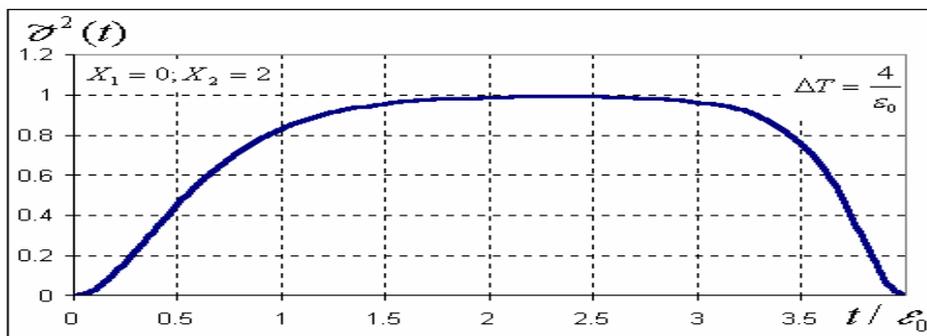


Figura 3-17: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh al pasar por un filtro RC de dos etapas, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=4/\epsilon_0$.

Las gráficas de las funciones de reconstrucción nos muestran que cuando el intervalo de reconstrucción es grande la curva en su parte media se ubicará en el valor incondicional de la función y después buscará llegar al valor de la segunda muestra, estas gráficas muestran similitud con el caso Markoviano sólo que en este caso son formadas con una mayor suavidad.

Ahora se presenta la gráfica para el error promedio basada en las gráficas de error anteriores:

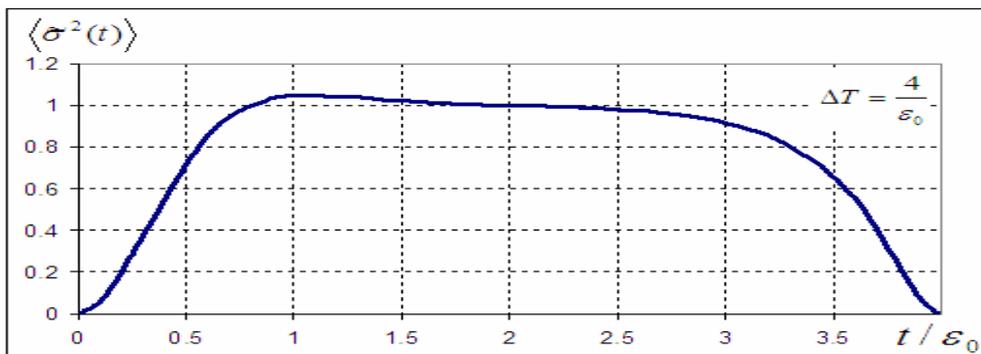


Figura 3-18: Error promedio de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $T=4/\epsilon_0$.

Esta gráfica nos enseña que el valor de una muestra grande en magnitud comparada con el valor incondicional presenta una gran influencia en la gráfica de error de reconstrucción a pesar de que la gráfica es resultado de un promedio de errores.

Ahora entonces reducimos el intervalo de reconstrucción a fin de comparar resultados y efectos.

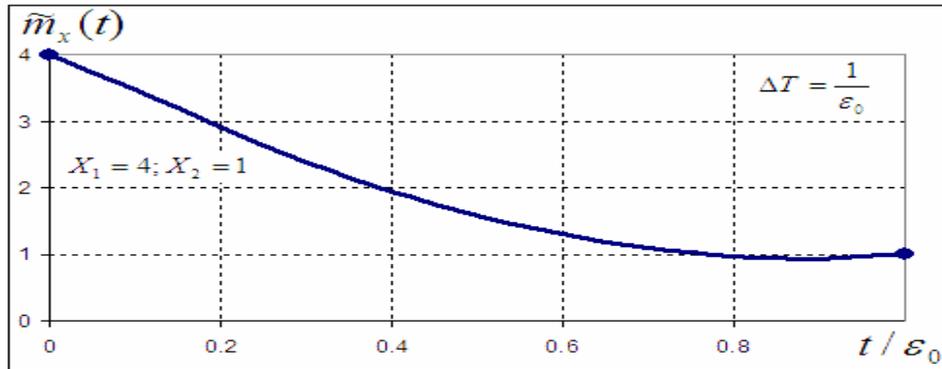


Figura 3-19: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=1/\epsilon_0$.

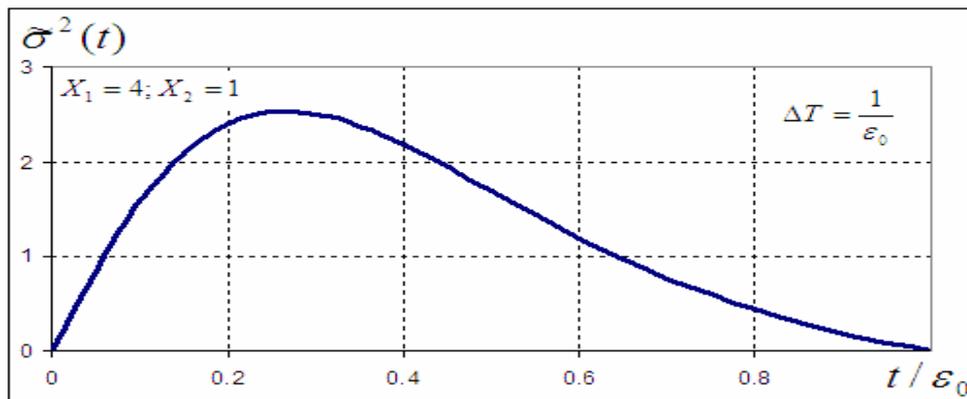


Figura 3-20: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=1/\epsilon_0$.

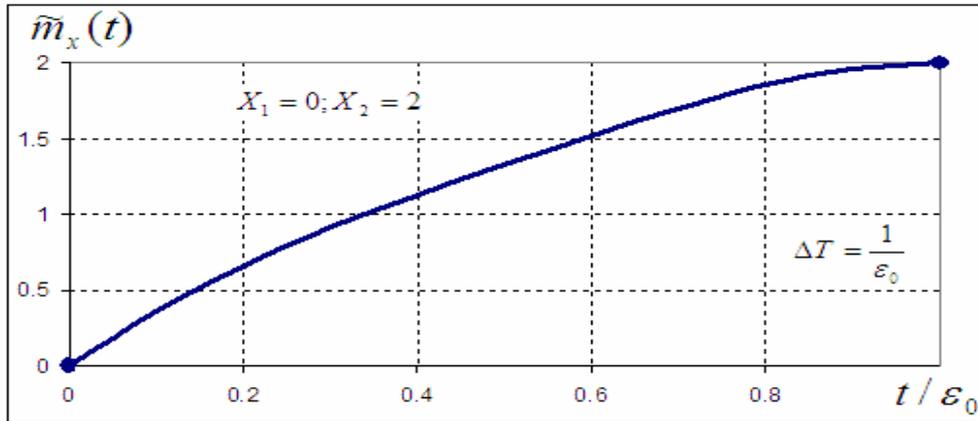


Figura 3-21: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=1/e_0$.

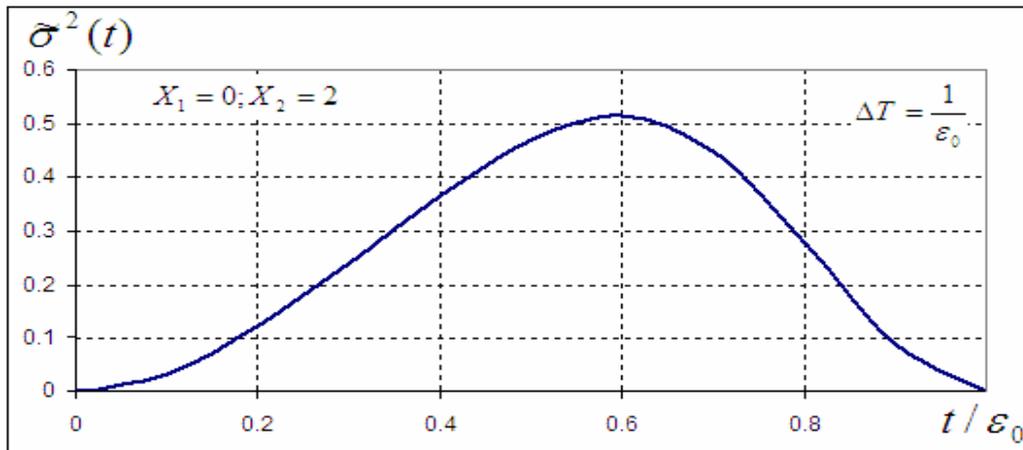


Figura 3-22: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=1/e_0$.

Estas gráficas nos presentan un incremento en el error pico (comparado con el caso Markoviano) en donde la muestra $x_1=4$ o algún valor mayor lejano al valor incondicional de la función de Rayleigh se encuentre presente, esto en un intervalo corto de muestreo tal como $T=1/e_0$. Para el caso en donde están presentes muestras no tan lejanas al valor incondicional de la función, el error sí disminuye de manera muy tenue el error comparando con el caso Markoviano. En el intervalo $T=4/e_0$ únicamente la curva es formada con mayor suavidad, pero no se alcanzan magnitudes ni mayores ni menores de manera significativa comparados con el caso Markoviano.

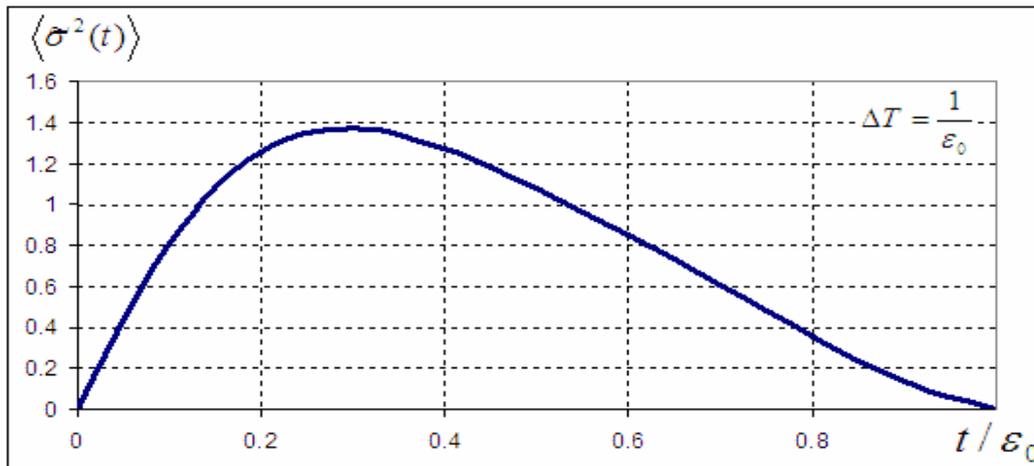


Figura 3-23: Error promedio (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + a |t|) \exp(-a |t|)$, donde $T = 1/\varepsilon_0$.

En ésta última gráfica del error promedio se puede observar la gran influencia del error provocado por la muestra $x_I=4$, tanto en la magnitud del error como en la inclinación de la campana, esta inclinación predomina en la curva sobre cualquier influencia de otra muestra.

3.1.2 Reconstrucción del proceso de Rayleigh no Markoviano con $Q = s^2 (1 + a |t| + \frac{at^2}{3}) e^{-a|t|}$

En la presente sección trataremos con el Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción de un proceso aleatorio no Gaussiano del tipo no Markoviano de Rayleigh con ayuda de una tercera función.

El tiempo de covarianza τ_c de esta función es:

$$t_c = \int_0^{\infty} |R_x(t)| dt = \int_0^{\infty} (1 + a |t| + \frac{at^2}{3}) e^{-a|t|} dt = \frac{8}{3a}, \quad (3.11)$$

donde el tiempo de covarianza depende del valor a , entonces para continuar trabajando con resultados normalizados obtenemos el valor de a adecuado para tener $t_c = 1$, este valor es $a = 8/3$.

Nuevamente usamos las expresiones (3.2) y (3.3) para la función de covarianza de Rayleigh y realizamos las gráficas donde $Q(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2) \exp(-\frac{8}{3}|t|)$:

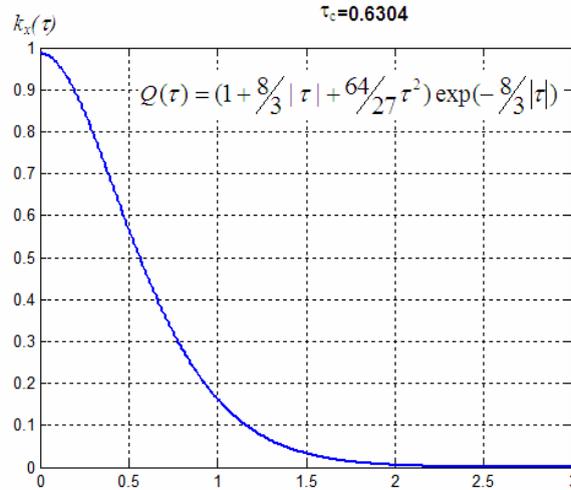


Figura 3-24: función de covarianza de Rayleigh, $Q(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$.

Para la gráfica anterior el tiempo de covarianza (3.4) es: 0.6304. Ahora se presenta la gráfica para la expresión (3.3) y $Q(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$:

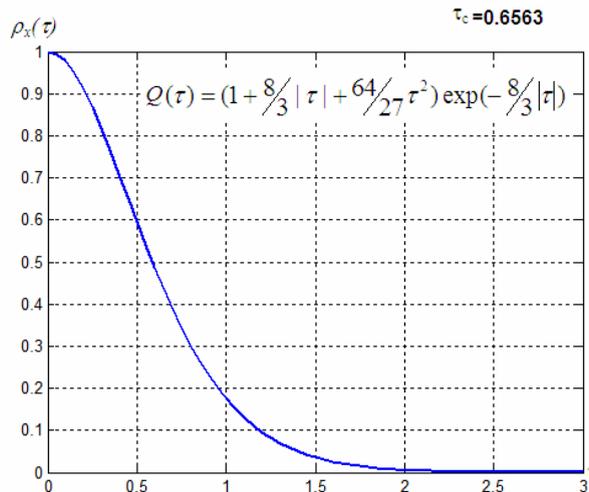


Figura 3-25: Función de covarianza normalizada de Rayleigh con $Q(t) = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$

Para la gráfica anterior el tiempo de covarianza es: 0.6563.

3.1.2.1 Régimen de extrapolación

Para obtener los resultados para este régimen utilizamos la expresión (2.7):

$$w(x, t | x_1, t_1) = \frac{x}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q^2 x^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right), \quad (3.12)$$

$$\text{donde } Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|), \quad (3.13)$$

y se utiliza un procedimiento análogo al de la sección 3.1.2 para obtener las expresiones necesarias, estas expresiones para la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción son las siguientes:

$$\hat{m}_x(t) = \int \frac{x^2}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right) dx \quad (3.14)$$

$$s_x^2 = \int \frac{x^3}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right) dx - \left[\int \frac{x^2}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right) dx \right]^2 \quad (3.15)$$

Los resultados de los cálculos numéricos para este caso son presentados a continuación:

Los resultados obtenidos son los siguientes:

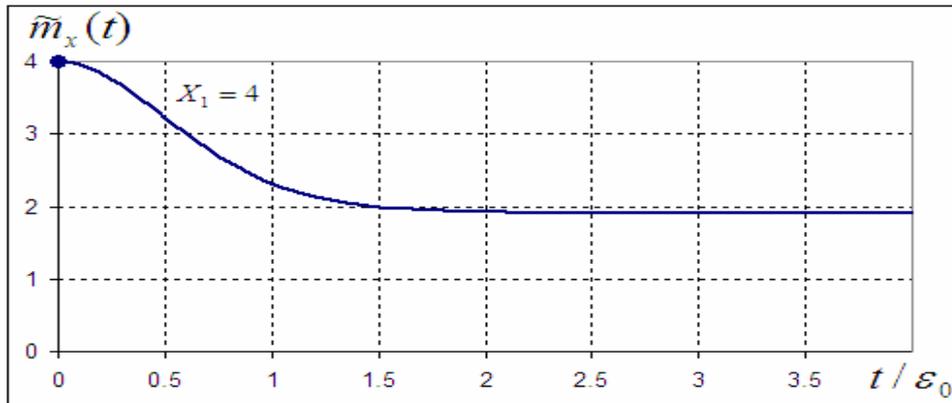


Figura 3-26: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $x_1=4$.

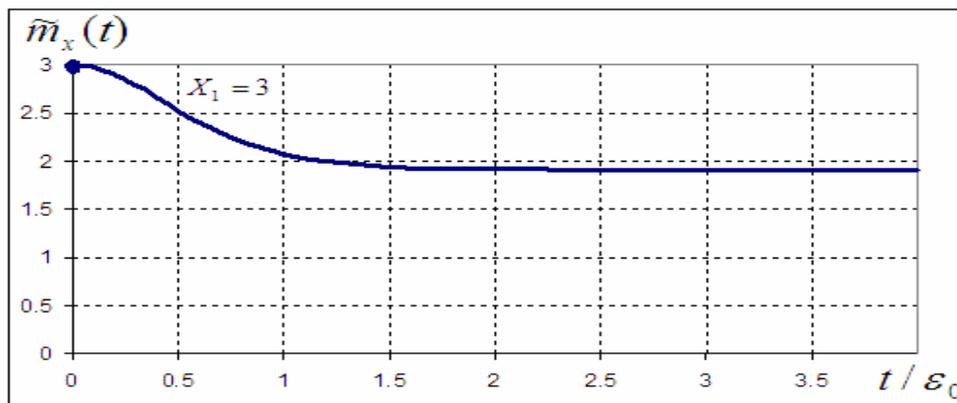


Figura 3-27: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $x_1=3$.

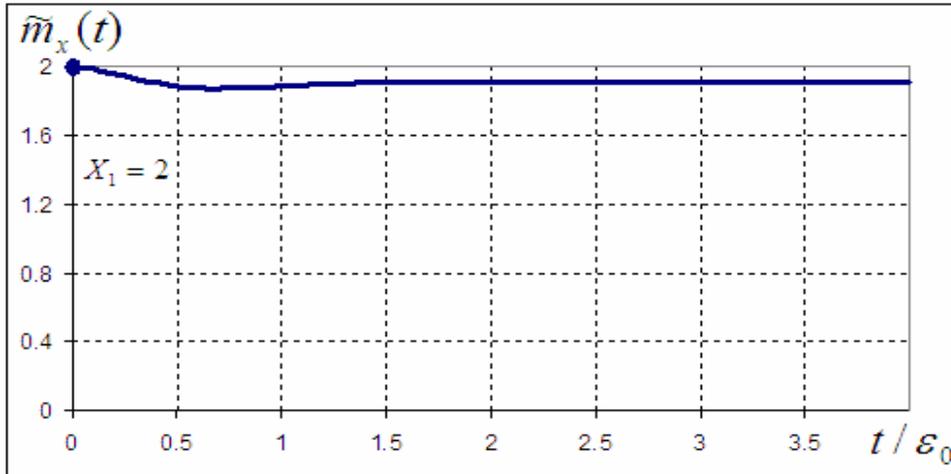


Figura 3-28: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $x_1=2$.

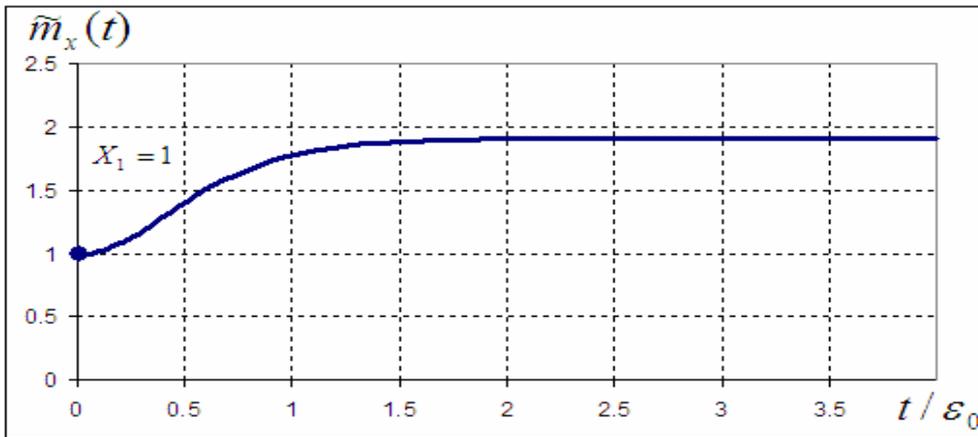


Figura 3-29: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $x_1=1$.

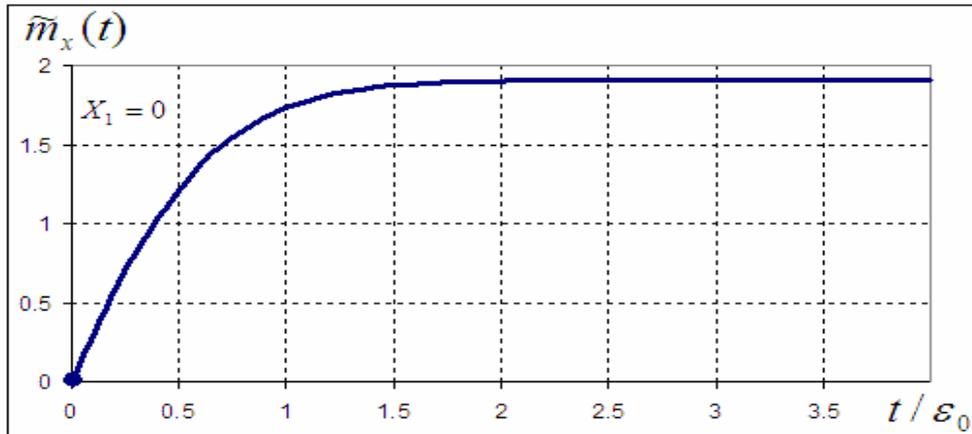


Figura 3-30: Función de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $x_1=0$.

Las curvas de funciones de reconstrucción presentan gran similitud con los dos grupos de gráficas correspondientes anteriores, no se nota la influencia del cambio hecho de la función Q .

Ahora se presentan los resultados para la función de error de reconstrucción de las gráficas anteriores:

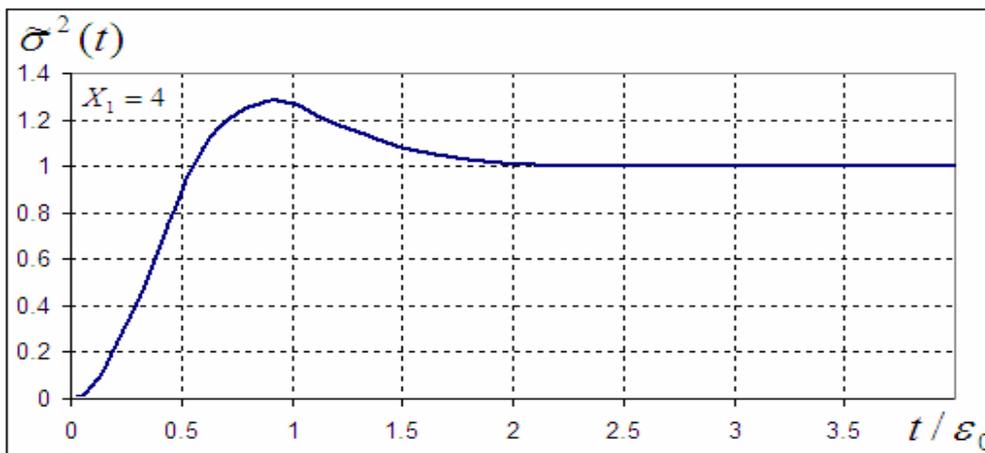


Figura 3-31: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, con $x_1=4$.

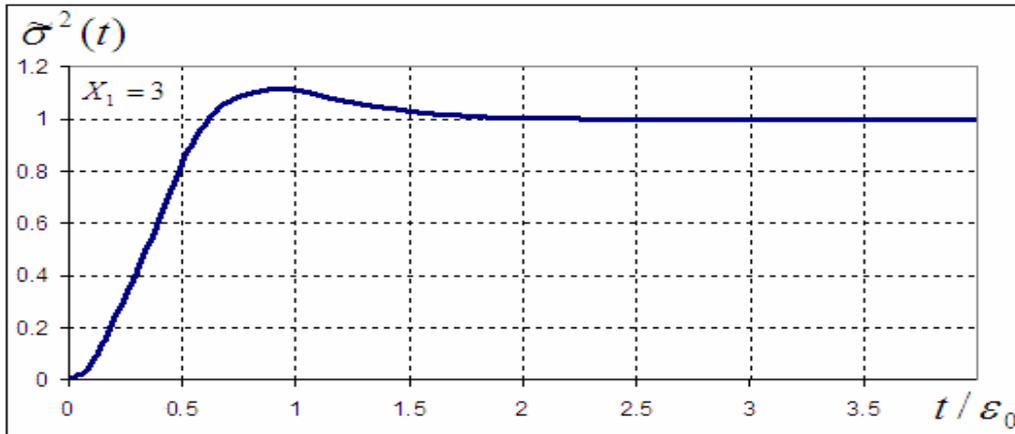


Figura 3-32: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, con $x_1=3$.

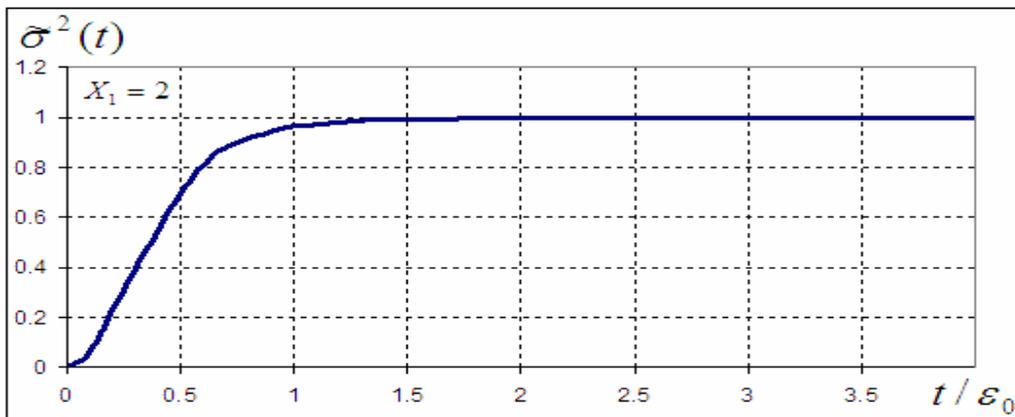


Figura 3-33: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, con $x_1=2$.

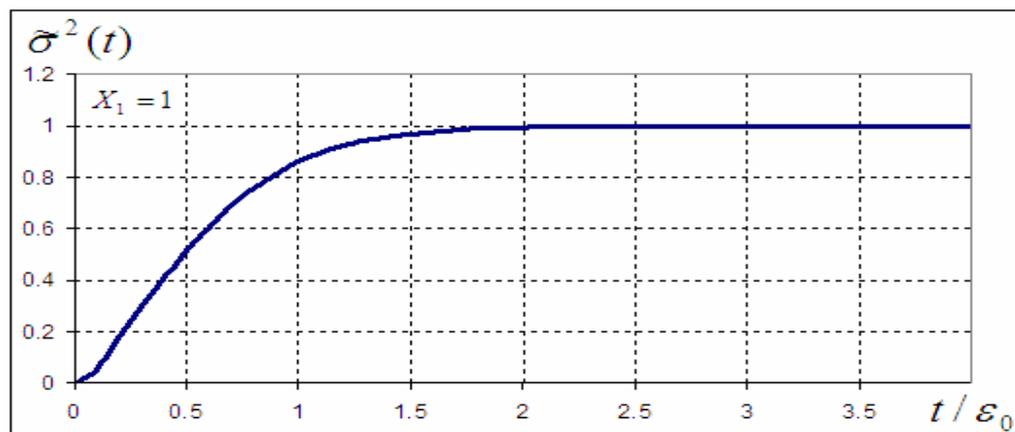


Figura 3-34: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, con $x_1=1$.

no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, con $x_1=1$.

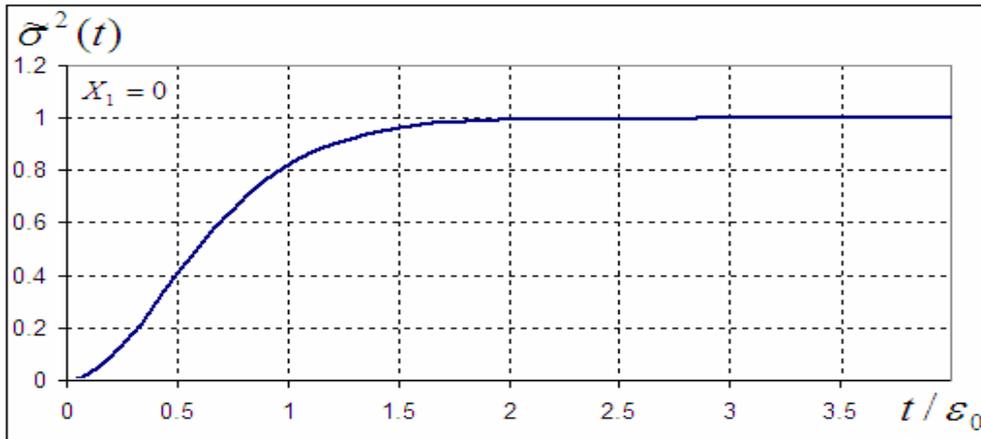


Figura 3-35: Función de error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, con $x_1=0$.

Las gráficas de error de reconstrucción también presentan una gran similitud con las correspondientes presentadas con anterioridad, no se ve ni incremento ni decremento de error, tampoco se presenta incremento en el tiempo de caída de la función de error de reconstrucción debido a que se trabaja con tiempos de covarianza unitarios para todas las funciones.

Ahora se presenta la gráfica de error promedio de las funciones de error de reconstrucción anteriores:

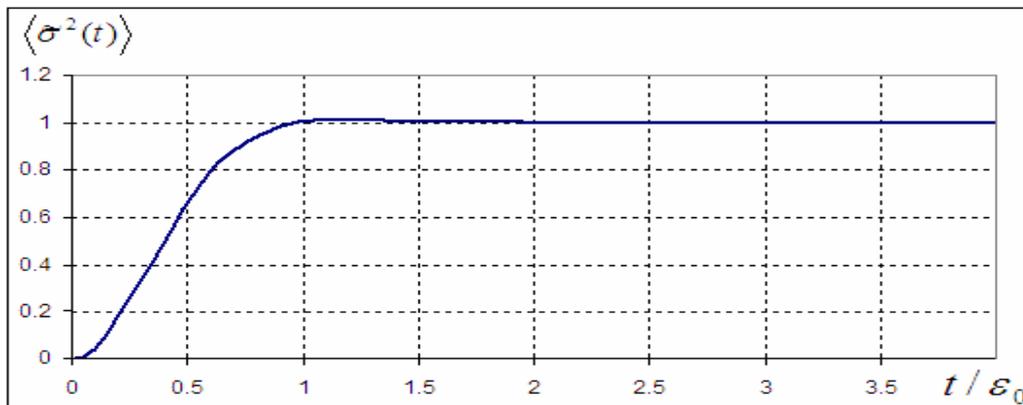


Figura 3-36: Error promedio (extrapolación) para el proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$.

La gráfica promedio es solamente un poco más suave que los casos anteriores, pero toma el valor de 1 en un tiempo igual al del caso anterior.

3.1.2.2 Régimen de interpolación

Ahora veamos qué sucede en el régimen de interpolación usando $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$ en la función de Rayleigh, recordemos las expresiones necesarias para obtener tanto la función de reconstrucción como la función de error de reconstrucción.

$$\tilde{m}_x(t) = \int \left(\frac{\frac{x^2}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q^2 x^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right) \frac{x_2}{s^2(1-Q_2^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q_2^2 x_2^2}{2s^2(1-Q_2^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_2^2} \frac{x_2 x}{s^2}\right)}{\frac{x_2}{s^2(1-Q_3^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q_3^2 x_2^2}{2s^2(1-Q_3^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_3}{1-Q_3^2} \frac{x_2 x_1}{s^2}\right)} \right) dx \quad (3.16)$$

$$s_x^2(t) = \int \left(\frac{\frac{x^3}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q^2 x^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right) \frac{x_2}{s^2(1-Q_2^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q_2^2 x_2^2}{2s^2(1-Q_2^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_2^2} \frac{x_2 x}{s^2}\right)}{\frac{x_2}{s^2(1-Q_3^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q_3^2 x_2^2}{2s^2(1-Q_3^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_3}{1-Q_3^2} \frac{x_2 x_1}{s^2}\right)} \right) dx - \quad (3.17)$$

$$- \left(\int \left(\frac{\frac{x^2}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q^2 x^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{s^2}\right) \frac{x_2}{s^2(1-Q_2^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q_2^2 x_2^2}{2s^2(1-Q_2^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_2^2} \frac{x_2 x}{s^2}\right)}{\frac{x_2}{s^2(1-Q_3^2)} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + Q_3^2 x_2^2}{2s^2(1-Q_3^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_3}{1-Q_3^2} \frac{x_2 x_1}{s^2}\right)} \right) dx \right)^2$$

donde: $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$. (3.18)

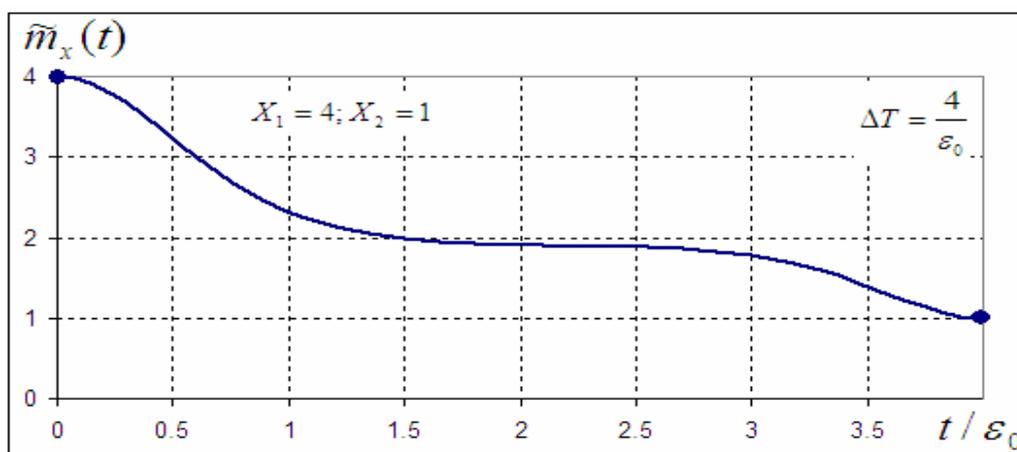


Figura 3-37: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=4/\epsilon_0$.

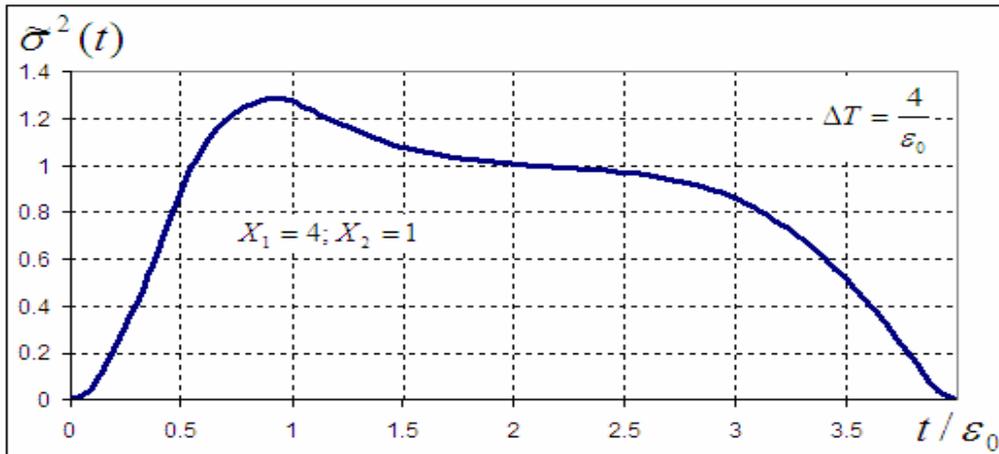


Figura 3-38: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=4/\epsilon_0$.

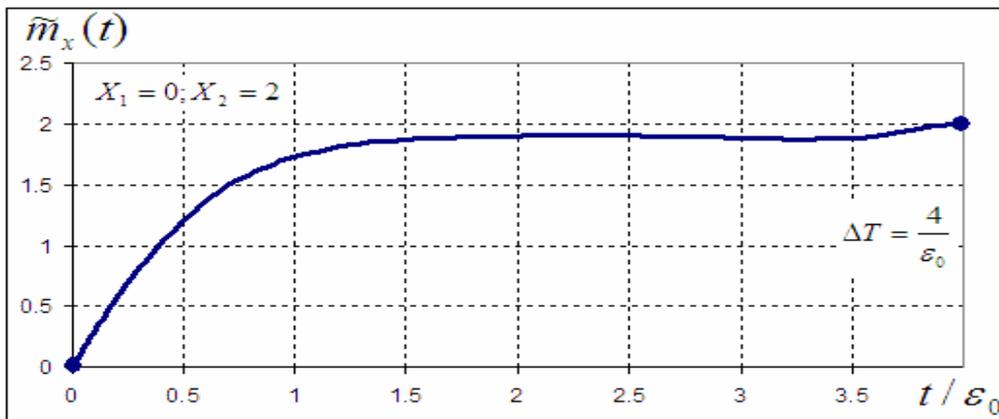


Figura 3-39: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=4/\epsilon_0$.

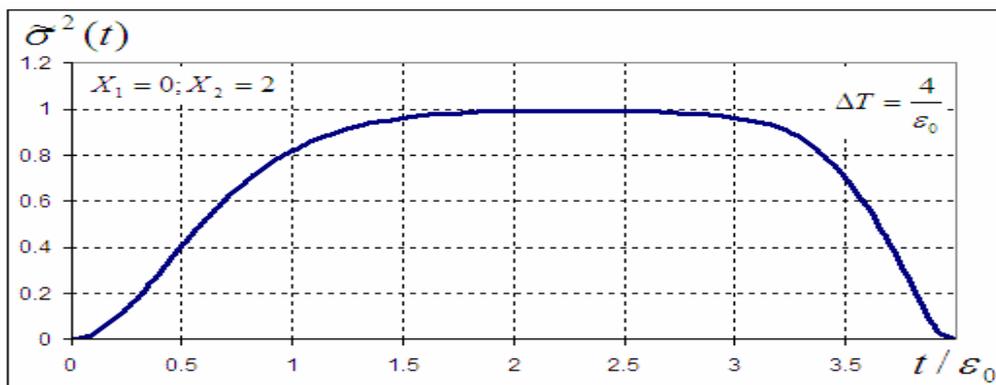


Figura 3-40: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=4/\epsilon_0$.

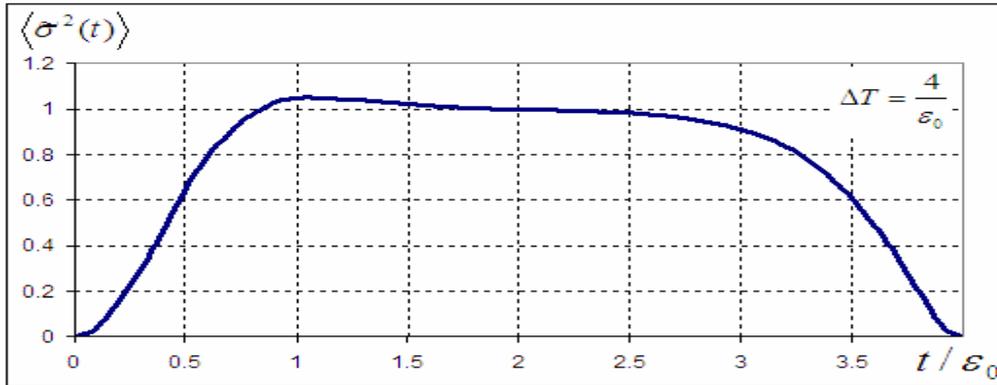


Figura 3-41: Error promedio de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $T=4/\varepsilon_0$.

Los resultados nos dejan ver que la función de reconstrucción continúa pasando por el valor incondicional de la función aproximadamente a la mitad del intervalo y en los extremos la función se comporta como lo hacía en el régimen de extrapolación por supuesto guardando las proporciones dependiendo de qué valor muestra se trate. Las magnitudes de las gráficas de error de interpolación son en este intervalo de tiempo casi iguales que en los de la función Q anterior.

Ahora se presentan los resultados reduciendo el intervalo de reconstrucción a $T=1/\varepsilon_0$:

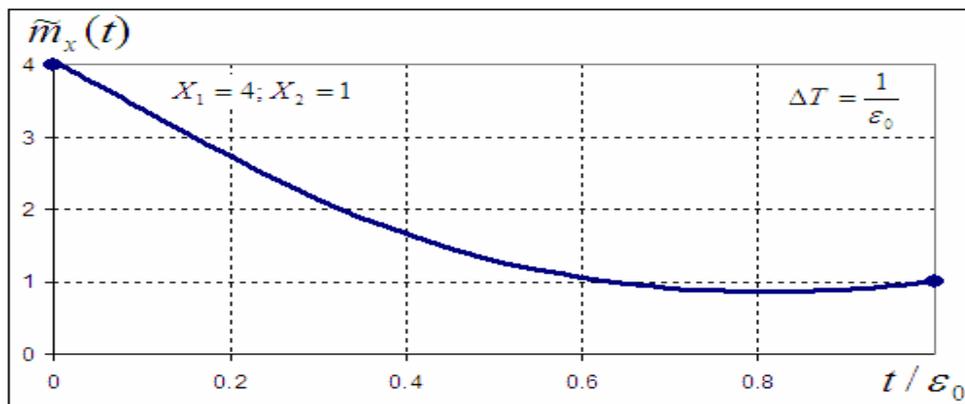


Figura 3-42: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=1/\varepsilon_0$.

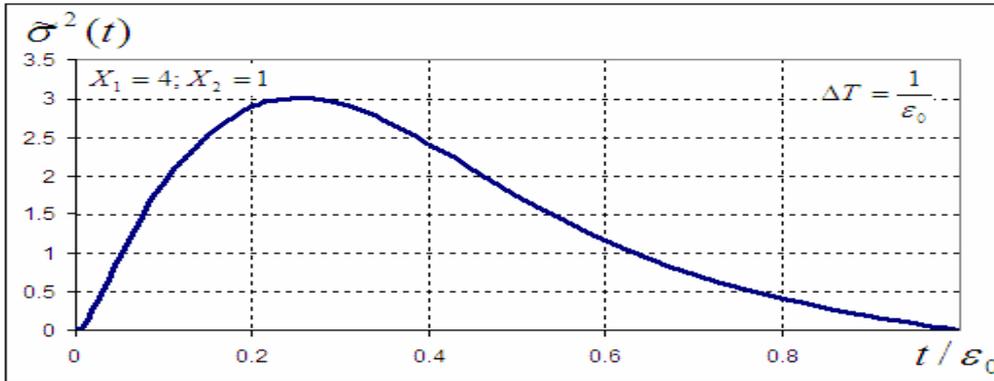


Figura 3-43: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=1/\epsilon_0$.

Aquí notamos un incremento en el error pico (comparado con el caso Markoviano) que se forma en el lado de la muestra de mayor valor $x_1=4$, que además es un valor lejano al valor incondicional, y que en este intervalo de tiempo de reconstrucción corto es notorio este efecto de incremento de error cuando se encuentra una muestra de magnitud lejana al valor incondicional de la función.

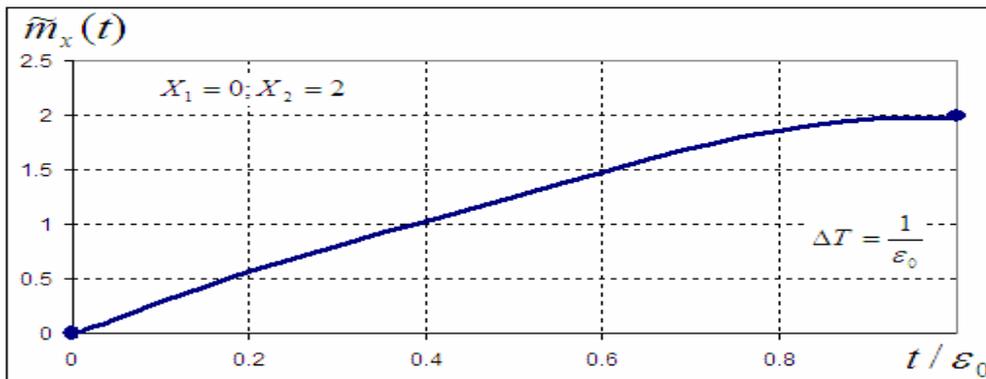


Figura 3-44: Función de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=1/\epsilon_0$.

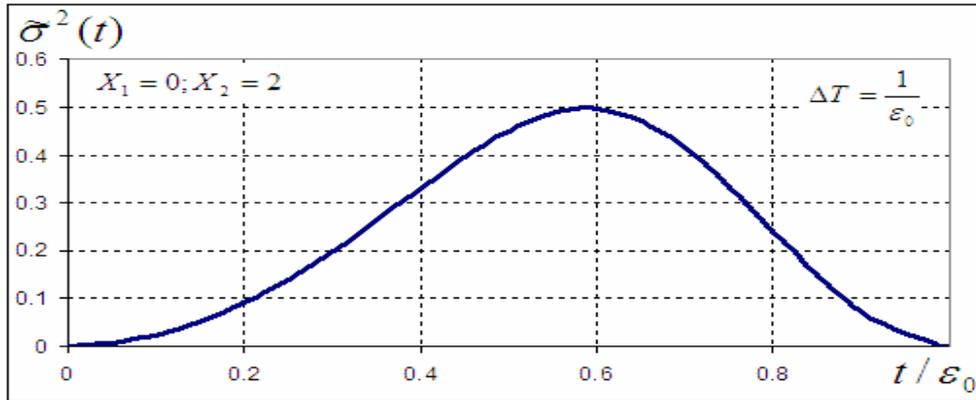


Figura 3-45: Función de error de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=1/\epsilon_0$.

En el ejemplo anterior dado que los valores muestra x_1 y x_2 no están lejos del valor incondicional de la función aquí no hay un incremento de error comparado con ejemplos anteriores sino que por el contrario existe una muy pequeña disminución del mismo, pero siempre presentándose en todos los ejemplos la inclinación de la campana de error hacia la muestra cuyo valor está más lejano al mencionado valor incondicional de la función.

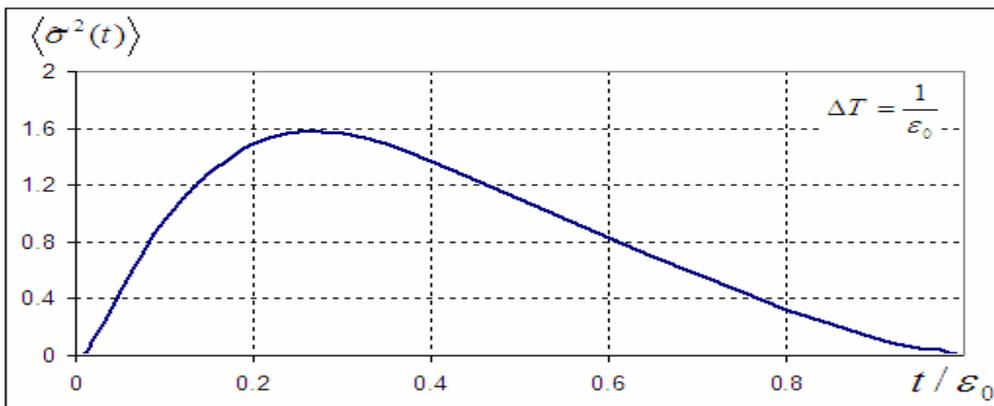


Figura 3-46: Error promedio de reconstrucción (interpolación) del proceso no Markoviano de Rayleigh con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2)\exp(-\frac{8}{3}|t|)$, donde $T=1/\epsilon_0$.

Esta gráfica promedio presenta la gran influencia en error que aporta una muestra de valor $x_1=4$ presente en alguna función de reconstrucción del tipo no Gaussiano y dependiendo de qué función de distribución de probabilidad se esté hablando además del valor incondicional que tenga la misma.

3.2 Reconstrucción del proceso no Markoviano con la fdp exponencial

Ahora vamos a obtener lo necesario para el Procedimiento de Muestreo y Reconstrucción del proceso aleatorio no Gaussiano con la función de distribución de probabilidad exponencial, y con esto llegar a la finalización del trabajo, para sus dos regímenes extrapolación y interpolación, para finalmente dar las conclusiones del trabajo realizado.

3.2.1 Reconstrucción del proceso no Gaussiano no Markoviano con la fdp exponencial con $Q = (1 + a | t |)e^{-at}$

De acuerdo con la estructura con que se viene realizando el trabajo nos corresponde finalmente realizar los cálculos numéricos para el proceso no Markoviano con una tercera función Q para la función exponencial, para poder compararlos con los casos correspondientes anteriores.

3.2.1.1 Régimen de extrapolación

A continuación se exponen las expresiones necesarias, que han sido utilizadas en secciones anteriores para realizar los cálculos correspondientes al régimen de extrapolación:

La función de distribución de probabilidad para esta función está dada por:

$$w(x_t | x_1) = \frac{1}{1-Q} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q}\right), \quad (3.19)$$

la expresión para la función de reconstrucción es:

$$\tilde{m}_x(t) = \int \frac{x}{1-Q} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q}\right) dx, \quad (3.20)$$

y la función de error de reconstrucción está representada por:

$$s_x^2 = \int \frac{x^2}{1-Q} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q}\right) dx - \left(\int \frac{x}{1-Q} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q}\right) dx \right)^2 \quad (3.21)$$

$$\text{donde: } Q = (1 + 2 | t |)e^{-2|t|} \quad (3.22)$$

Los resultados numéricos de éste régimen son entonces presentados a continuación:

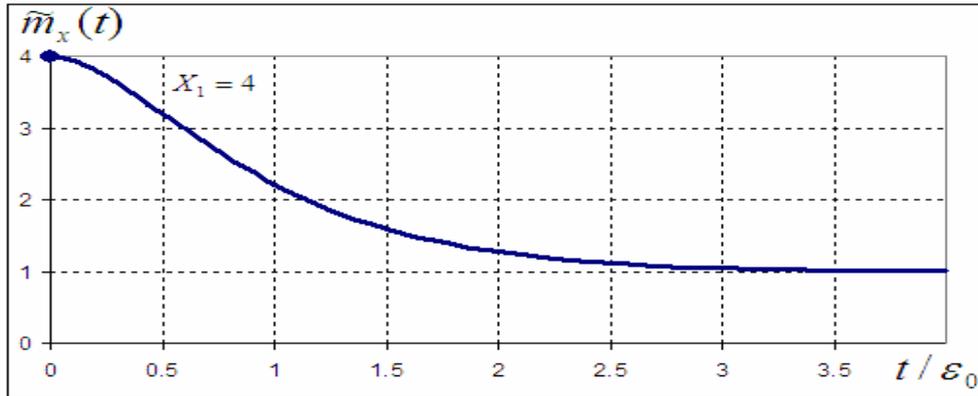


Figura 3-47: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=4$.

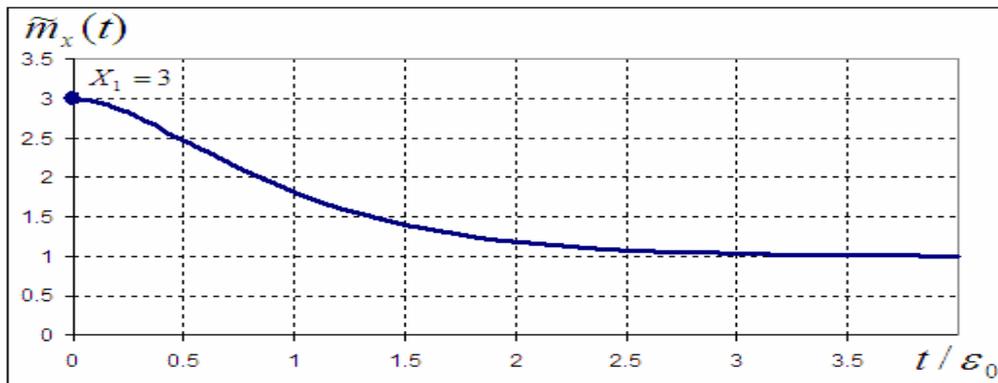


Figura 3-48: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=3$.

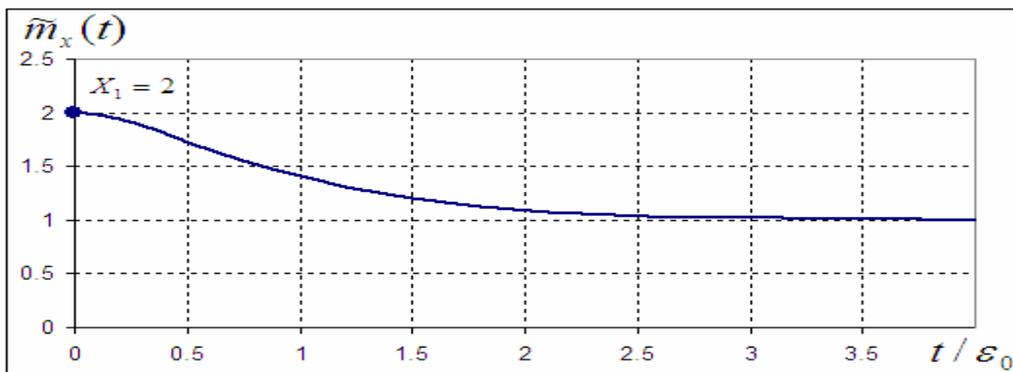


Figura 3-49: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=2$.

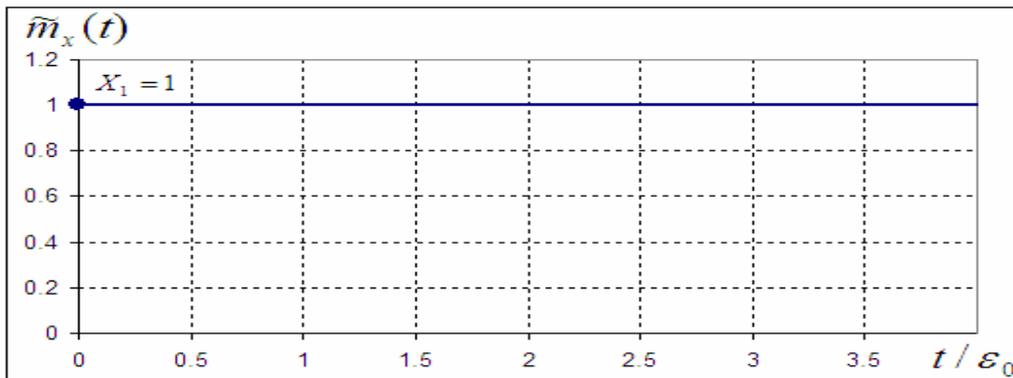


Figura 3-50: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=1$.

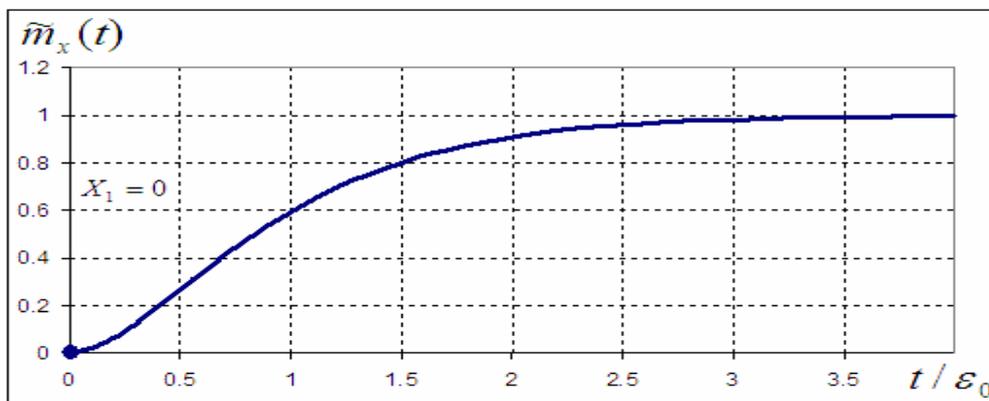


Figura 3-51: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=0$.

Vemos que las funciones de reconstrucción anteriores comparadas con las que se obtuvieron en la parte Markoviana son más suaves ya que las anteriores presentan una forma marcada de exponencial; en cuanto al tiempo en que las funciones de reconstrucción tardan en llegar al valor incondicional de la función que en este caso es 1 las figuras 3-43 a 3-47 lo logran en un tiempo ligeramente menor a las del caso Markoviano.

Ahora cuantificamos el error a través de las funciones de error de reconstrucción correspondientes a cada una de las reconstrucciones anteriores:

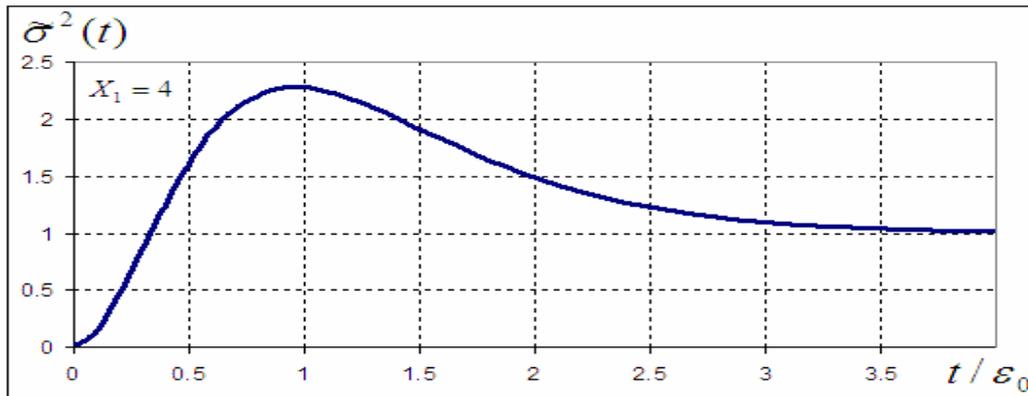


Figura 3-52: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=4$.

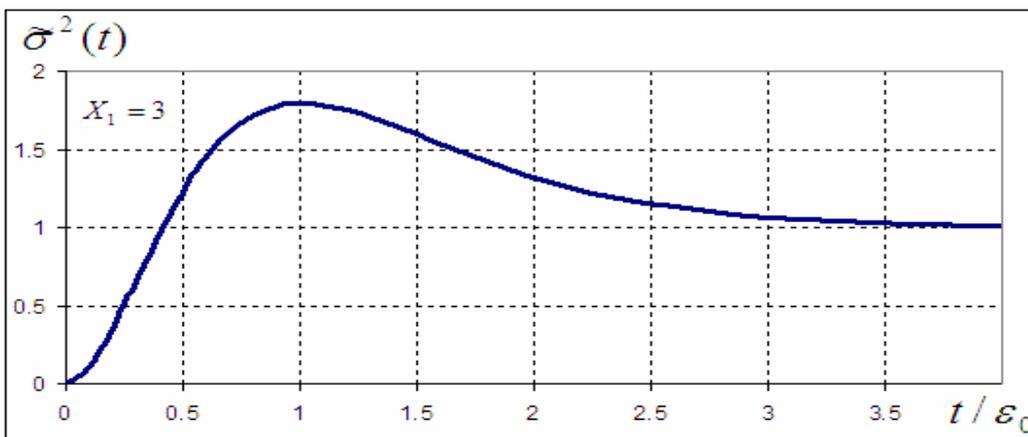


Figura 3-53: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=3$.

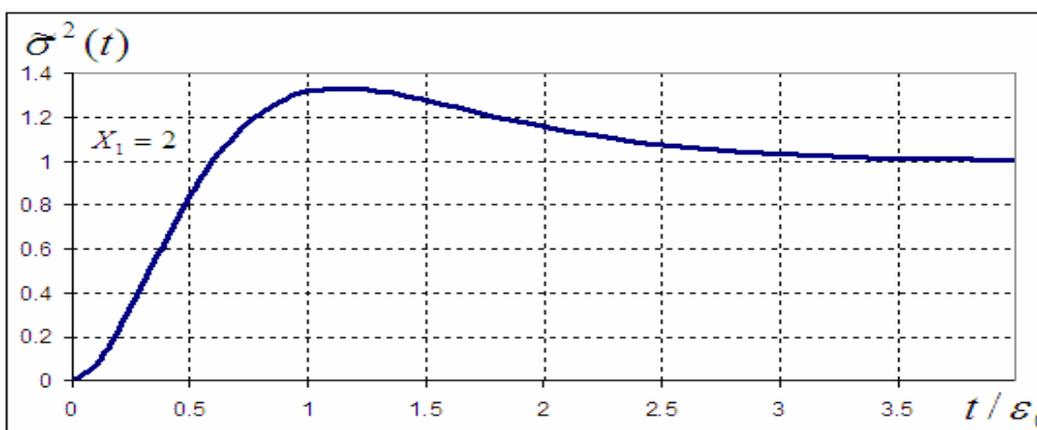


Figura 3-54: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=2$.

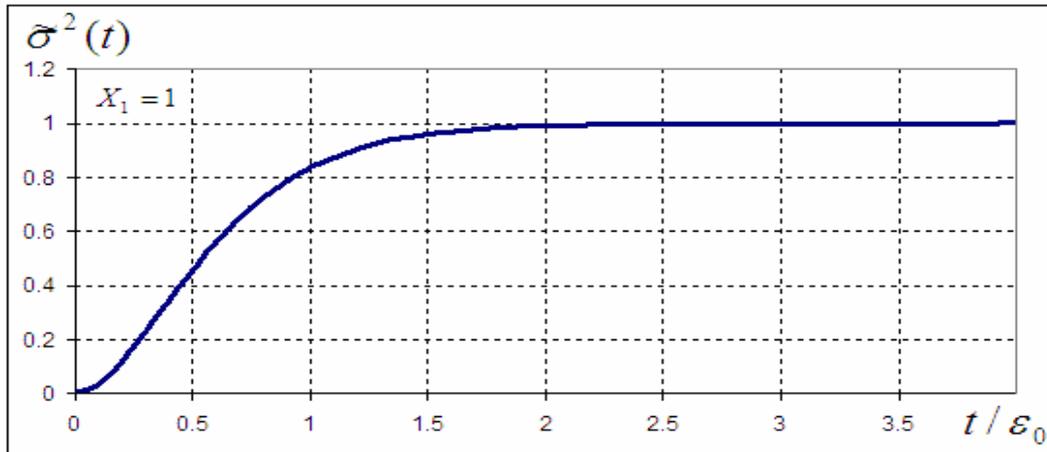


Figura 3-55: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=1$.

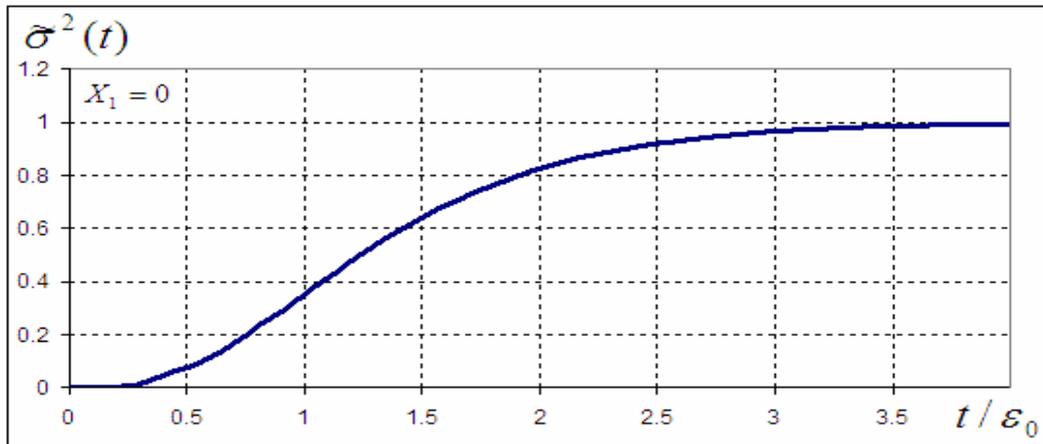


Figura 3-56: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $x_1=0$.

Las gráficas de error de reconstrucción correspondientes a las reconstrucciones anteriores también están más suavizadas que las correspondientes a la parte Markoviana, pero en cuanto a magnitud de error no se ven ni disminuidas ni aumentadas, lo que nos da a pensar que no es tan importante la forma de Q para la reconstrucción, sino es más influyente la magnitud de las muestras que se toman en cuenta.

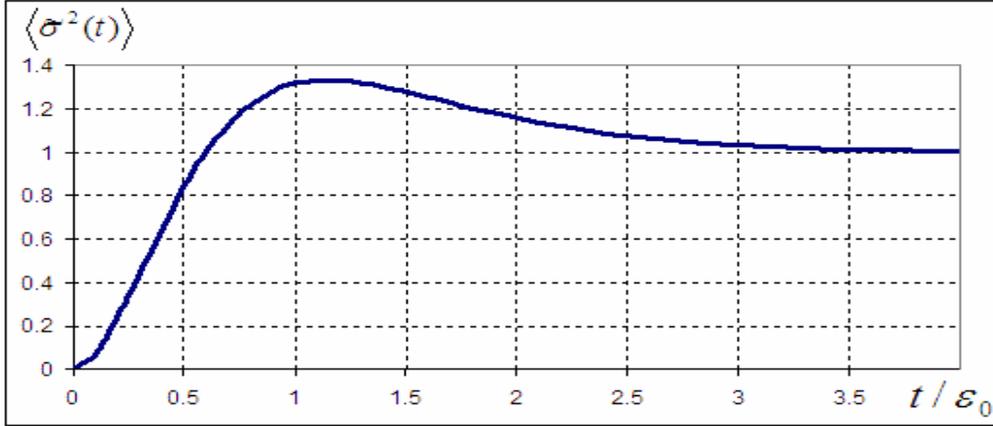


Figura 3-57: Error promedio (extrapolación) del proceso no Markoviano

con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$.

La gráfica de error promedio que se obtiene es para tratar de dar una forma un tanto general del comportamiento de las funciones de error de reconstrucción en el régimen de extrapolación.

3.2.1.2 Régimen de interpolación

Primero vamos a recordar las expresiones necesarias para obtener las gráficas en este régimen y para tal función de distribución de probabilidad, primero la función de reconstrucción:

$$\tilde{m}_x(t) = \int_x \left(\frac{\frac{1}{1-Q_1} \exp\left(-\frac{x+Q_1x_1}{1-Q_1}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x}x_1}{1-Q_1}\right) \frac{1}{1-Q_2} \exp\left(-\frac{x_2+Q_2x}{1-Q_2}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2x}}{1-Q_2}\right)}{\frac{1}{1-Q_3} \exp\left(-\frac{x_2+Q_3x_1}{1-Q_3}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2x_1}}{1-Q_3}\right)} \right) dx, \quad (3.23)$$

y después la función de error de reconstrucción, dada por:

$$s_x^2(t) = \int_x \left(\frac{\frac{1}{1-Q_1} \exp\left(-\frac{x+Q_1x_1}{1-Q_1}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x}x_1}{1-Q_1}\right) \frac{1}{1-Q_2} \exp\left(-\frac{x_2+Q_2x}{1-Q_2}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2x}}{1-Q_2}\right)}{\frac{1}{1-Q_3} \exp\left(-\frac{x_2+Q_3x_1}{1-Q_3}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2x_1}}{1-Q_3}\right)} \right) dx - \left(\int_x \left(\frac{\frac{1}{1-Q_1} \exp\left(-\frac{x+Q_1x_1}{1-Q_1}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x}x_1}{1-Q_1}\right) \frac{1}{1-Q_2} \exp\left(-\frac{x_2+Q_2x}{1-Q_2}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2x}}{1-Q_2}\right)}{\frac{1}{1-Q_3} \exp\left(-\frac{x_2+Q_3x_1}{1-Q_3}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2x_1}}{1-Q_3}\right)} \right) dx \right)^2 \quad (3.24)$$

Los resultados de los cálculos numéricos son los siguientes:

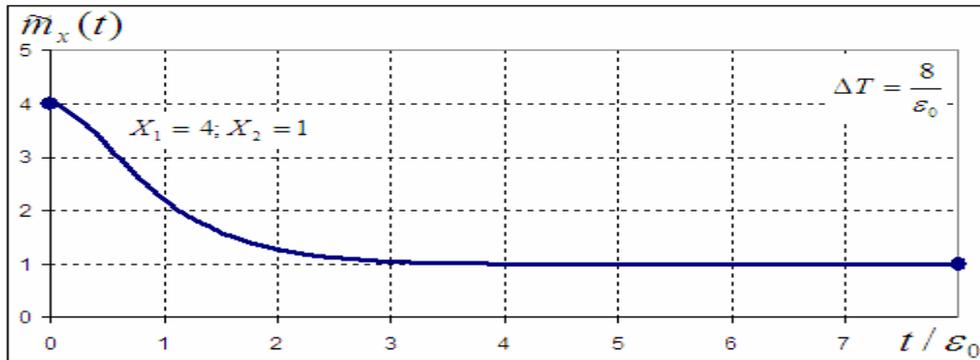


Figura 3-58: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=8/\epsilon_0$.

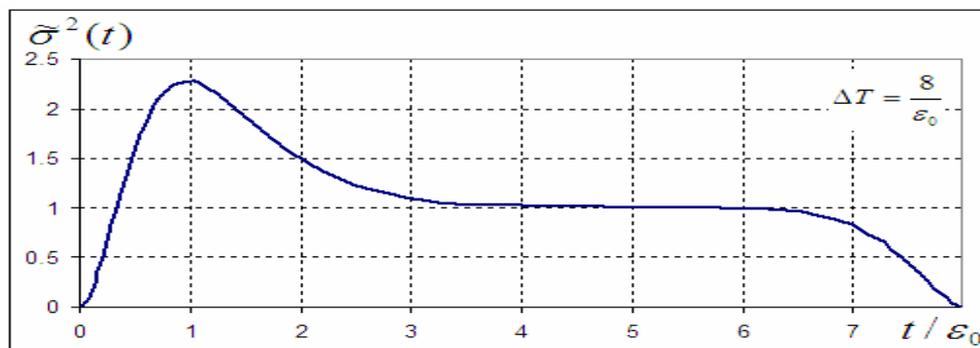


Figura 3-59: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=8/\epsilon_0$.

Las funciones de reconstrucción obtenidas se comportan de un modo esperado de acuerdo con b que se viene obteniendo en los resultados anteriores, en este caso cuando el intervalo de reconstrucción es largo la función pasa una gran parte de la reconstrucción en su parte media en el valor incondicional de la función con que se esté tratando, en este caso las funciones de reconstrucción pasan por el valor incondicional de la función exponencial que es 1.

En cuanto a las funciones de error de reconstrucción en estas gráficas donde el intervalo es $T=8/\epsilon_0$, no hay ganancia en cuanto a la disminución del error por uso de una función Q más suave, simplemente la curva de error se forma con una suavidad ligeramente mayor.

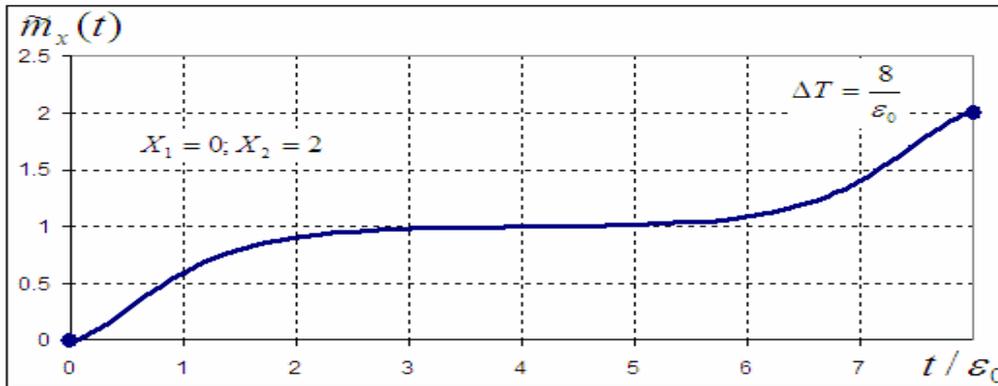


Figura 3-60: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=8/\epsilon_0$.

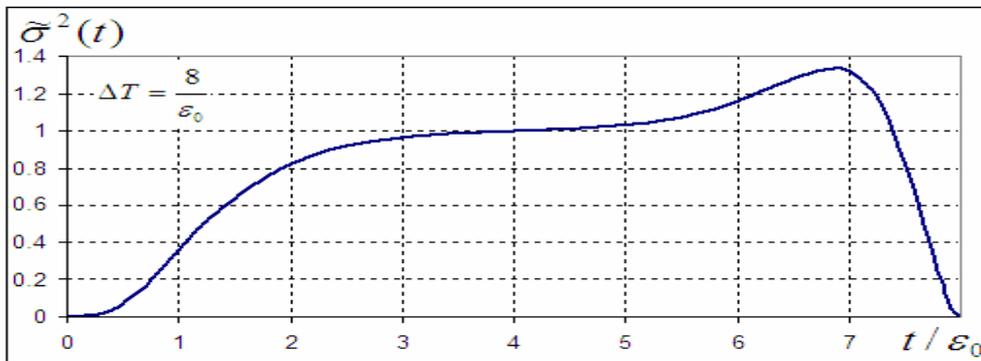


Figura 3-61: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=8/\epsilon_0$.

Aquí se presenta la gráfica de error promedio correspondiente a éste intervalo:

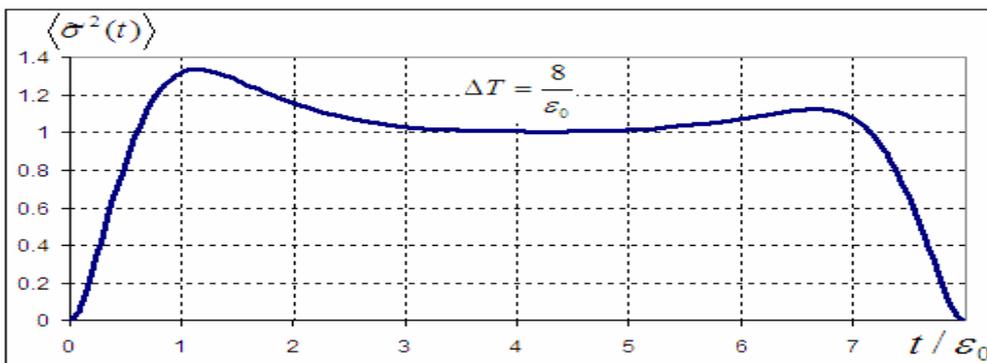


Figura 3-62: Error promedio de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $T=8/\epsilon_0$.

La curva promedio de error anterior nos deja ver algo del comportamiento general de la función de error en este caso, haciendo una analogía con la función de Rayleigh nos damos cuenta que como el valor incondicional para la función exponencial es 1, ahora las muestras de valor mayor a 1 tienen una repercusión en la formación de la función de error

de reconstrucción formando crestas (de mayor o menor magnitud dependiendo de su valor) que no se hacían notar por ejemplo en la función de distribución de Rayleigh, ya que su valor incondicional es otro.

Reduciendo el intervalo de reconstrucción a $\Delta T = 1/e_0$, los resultados son los siguientes:

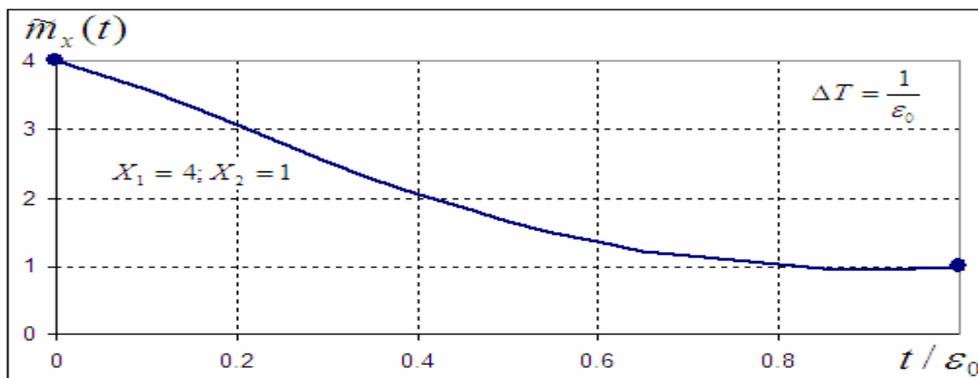


Figura 3-63: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=4; x_2=1$ y $\Delta T=1/e_0$.

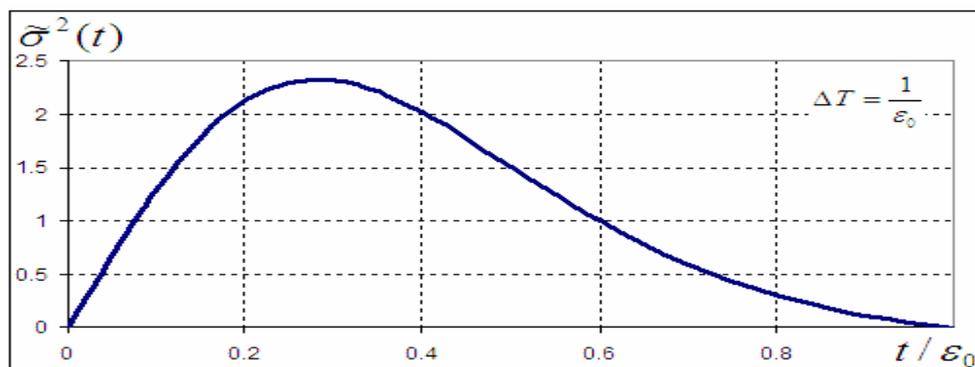


Figura 3-64: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=4; x_2=1$ y $\Delta T=1/e_0$.

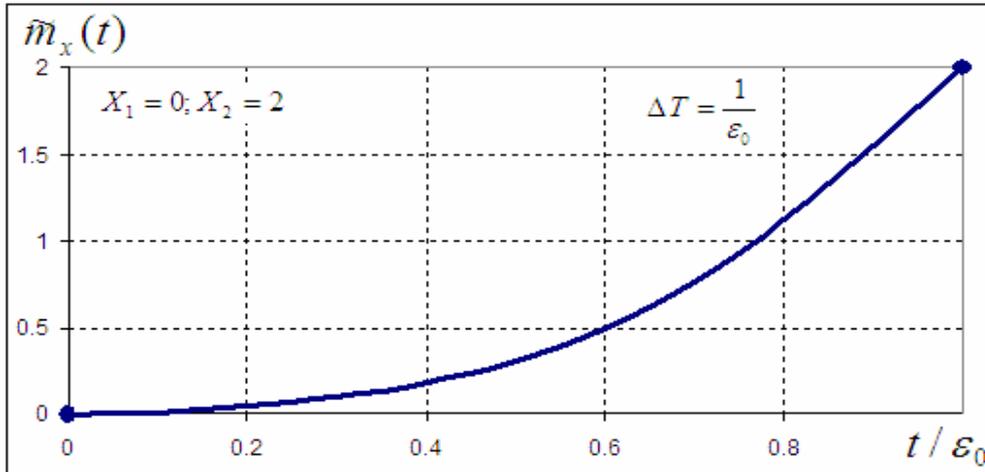


Figura 3-65: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=1/e_0$.

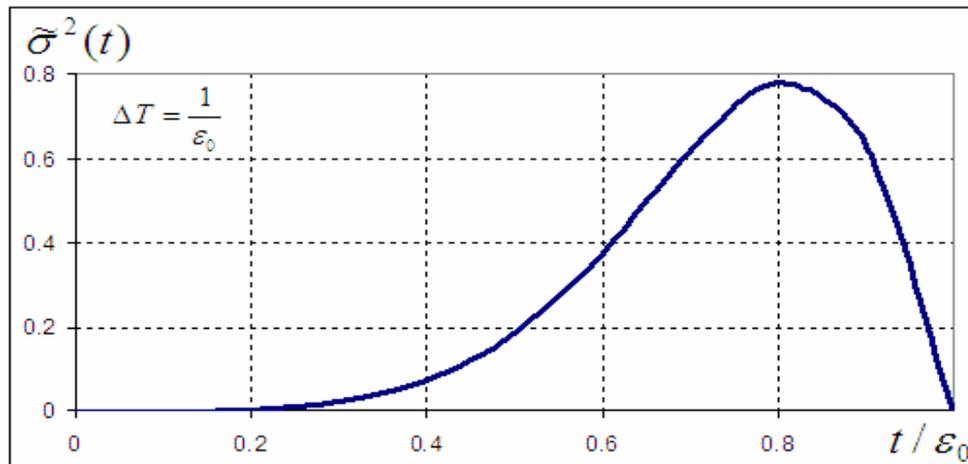


Figura 3-66: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=1/e_0$.

Las funciones de reconstrucción para el intervalo $T=1/e_0$, nos permite reafirmar la situación análoga a la función de distribución de Rayleigh. Cuando el intervalo de reconstrucción se ha reducido la función de reconstrucción no pasa una parte importante del tiempo de reconstrucción en el valor incondicional sino que se nota una función más suave que la exponencial uniendo a los pares de muestras.

Otra observación importante es el cambio en la forma de la función de error de reconstrucción, ya que para la parte Markoviana era más bien una campana y ahora tiene otra distribución que alcanza valores pico de error superiores al caso Markoviano, afectados nuevamente por la relativa lejanía del valor muestra al valor incondicional de la función exponencial, que para esta función es más notoria en el par $x_1=0; x_2=2$, que cuando lo fue para la función de Rayleigh, reafirmando esto cuando $T=1/e_0$.

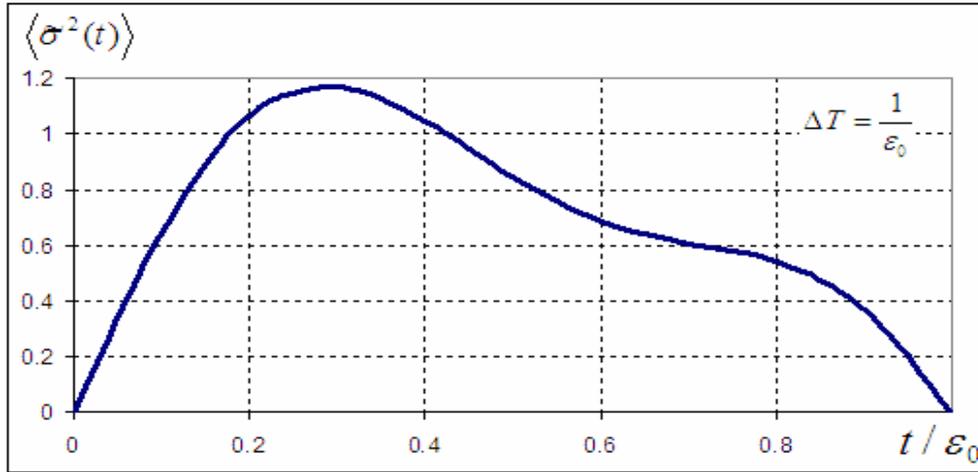


Figura 3-67: Error promedio de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$ y $T=1/\varepsilon_0$.

Esta gráfica de error promedio de reconstrucción reafirma que la muestra de mayor peso en cuanto al error se refiere es la de valor $x_1=4$, sin que la muestra $x_1=2$ deje de hacerse presente.

3.2.2 Reconstrucción del proceso no Markoviano con la fdp exponencial con $Q = (1 + a|t| + \frac{at^2}{3})e^{-a|t|}$

3.2.2.1 Régimen de extrapolación

Veamos las expresiones para realizar los cálculos numéricos, la mayoría de ellas ya han sido utilizadas con anterioridad, las volvemos a escribir las expresiones para tener presente el origen de las gráficas.

La función de distribución de probabilidad para esta función está dada por:

$$w(x_t | x_1) = \frac{1}{1-Q} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q}\right), \quad (3.25)$$

la expresión para la función de reconstrucción es:

$$\tilde{m}_x(t) = \int \frac{x}{1-Q} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q}\right) dx, \quad (3.26)$$

y la función de error de reconstrucción está representada por:

$$s_x^2 = \int \frac{x^2}{1-Q} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q}\right) dx - \left(\int \frac{x}{1-Q} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q}\right) dx \right)^2 \quad (3.27)$$

$$\text{donde: } Q = \left(1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64}{27}t^2\right) e^{-\frac{8}{3}|t|} \quad (3.28)$$

Los resultados numéricos de éste régimen son entonces presentados a continuación:

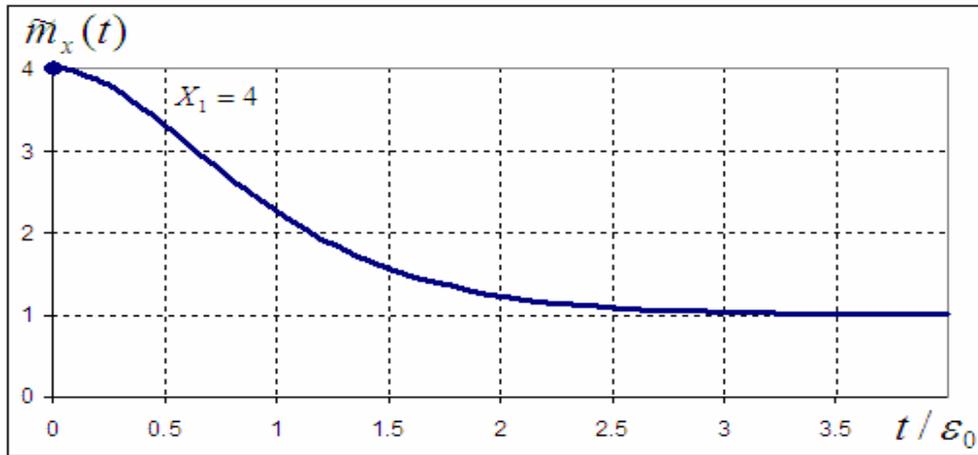


Figura 3-68: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=4$.

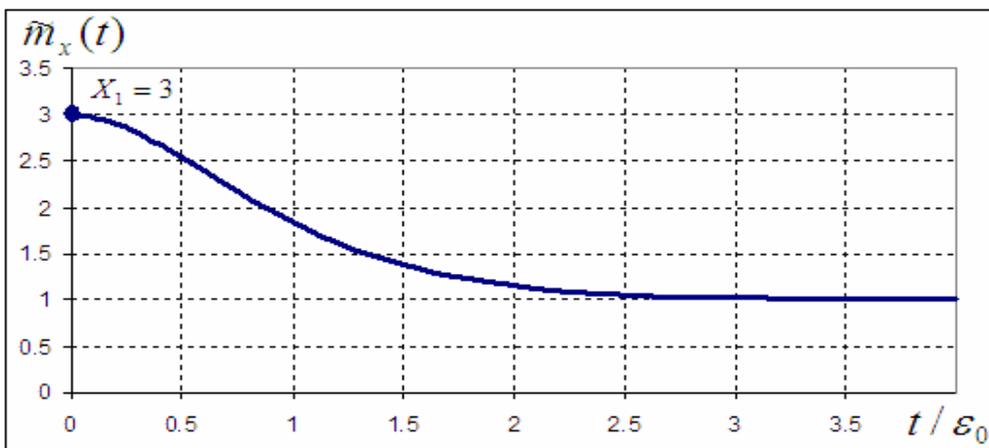


Figura 3-69: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=3$.

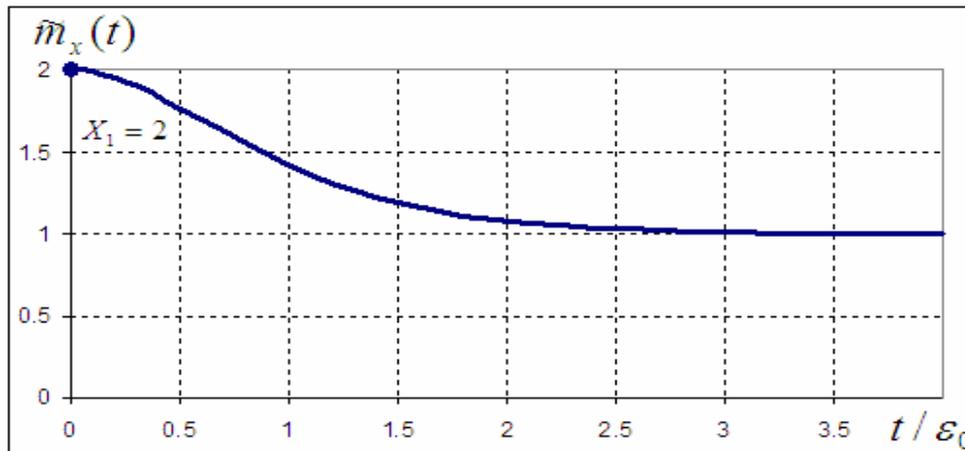


Figura 3-70: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=2$.

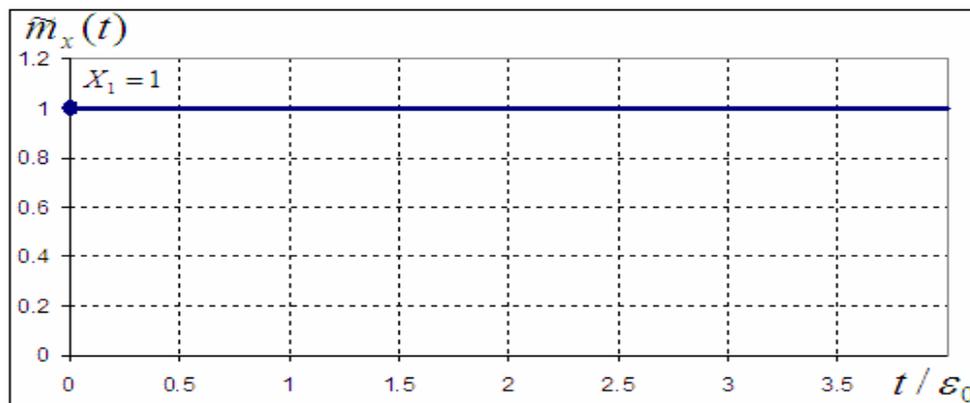


Figura 3-71: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=1$.

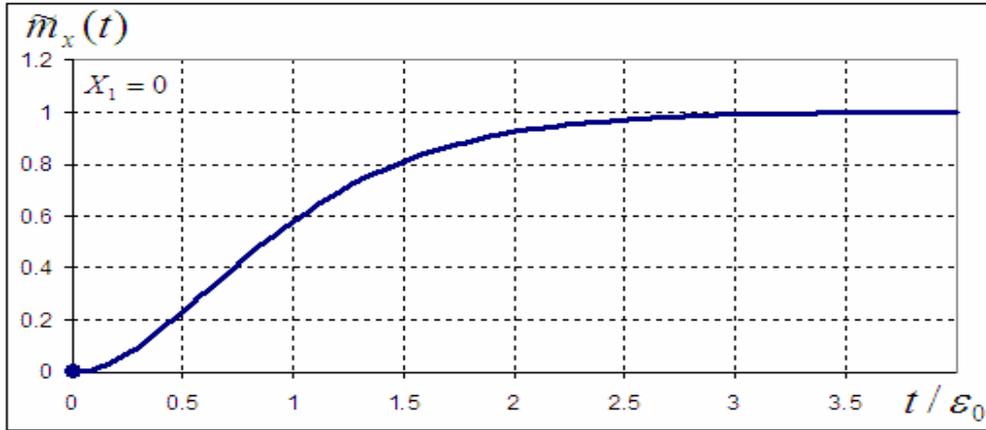


Figura 3-72: Función de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=0$.

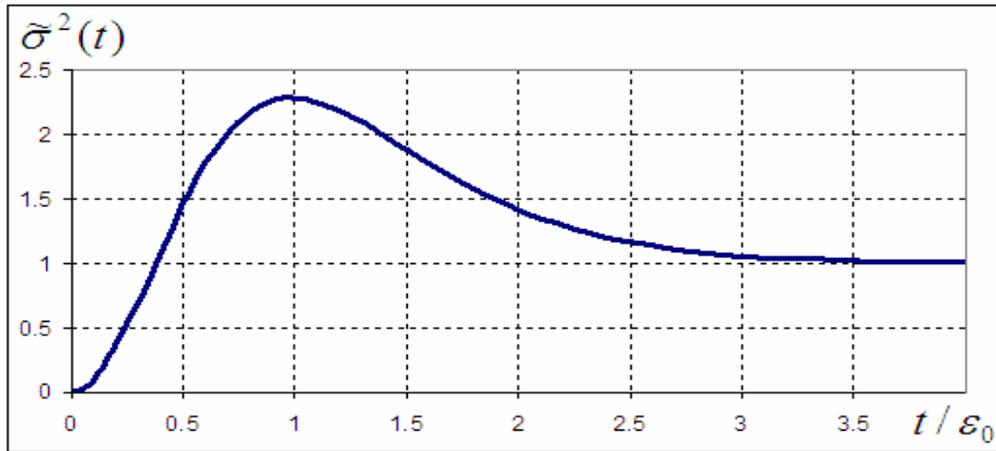


Figura 3-73: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=4$.

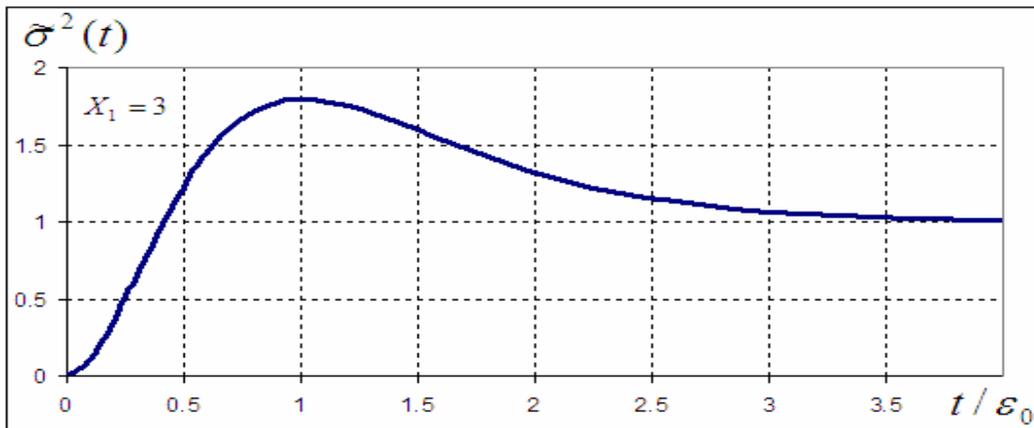


Figura 3-74: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano

con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=3$.

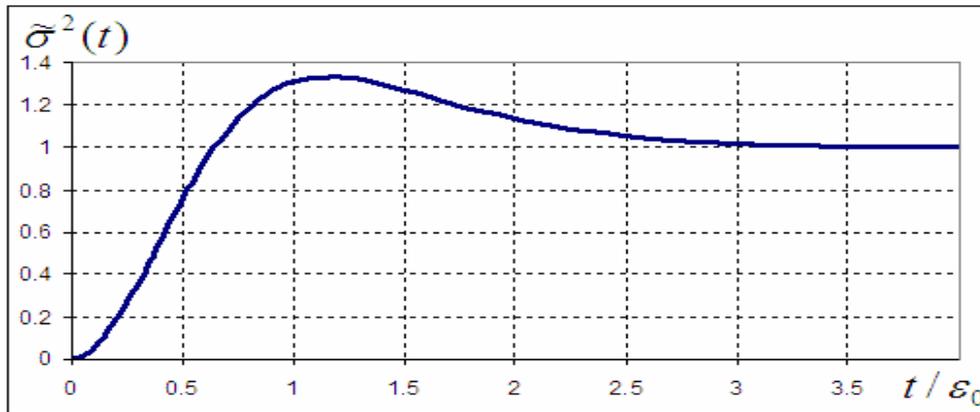


Figura 3-75: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano

con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=2$.

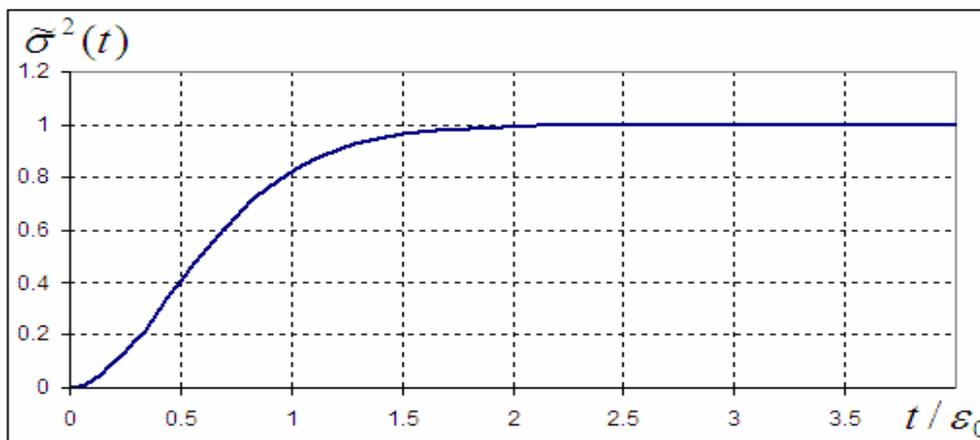


Figura 3-76: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano

con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=1$.

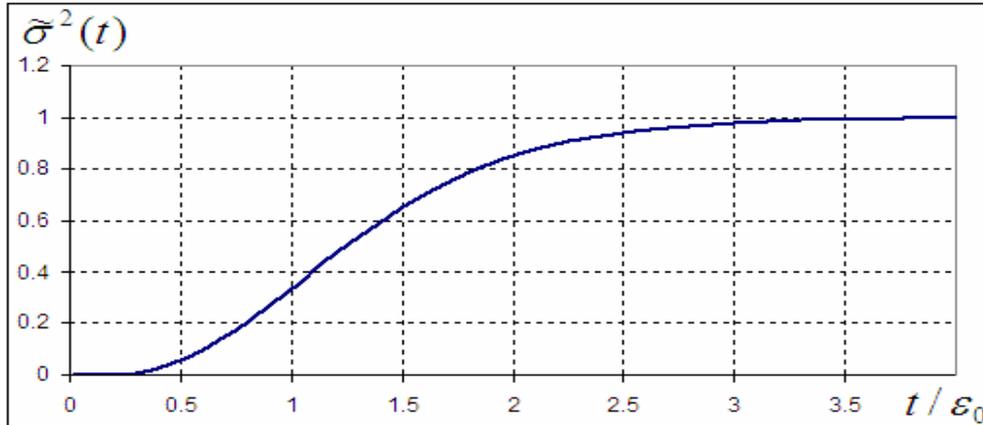


Figura 3-77: Función de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano

con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $x_1=0$.

Tanto las gráficas de funciones de reconstrucción como las gráficas de error de reconstrucción tienen una total similitud a las gráficas correspondientes a usar la función: $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$.

No se presenta algún cambio en las gráficas más que alguna casi imperceptible suavidad en la formación de las gráficas.

Presentamos la gráfica promedio a fin de revisar si se presenta alguna diferencia con la función Q anterior:

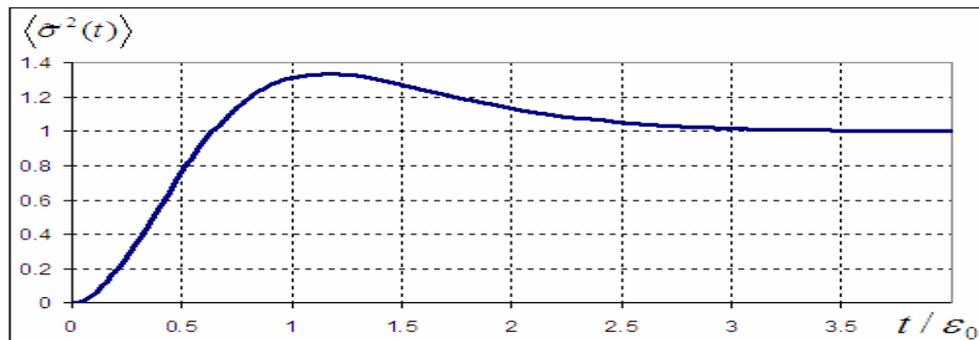


Figura 3-78: Promedio de error de reconstrucción (extrapolación) del proceso no Markoviano

con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$.

3.2.2.2 Régimen de interpolación

Veamos ahora los resultados obtenidos para este régimen, para ver similitudes y diferencias de usar esta nueva función Q , para ello recordemos las expresiones necesarias para llevarlo a cabo:

$$\tilde{m}_x(t) = \int x \left(\frac{\frac{1}{1-Q_1} \exp\left(-\frac{x+Q_1 x_1}{1-Q_1}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x x_1}}{1-Q_1}\right) \frac{1}{1-Q_2} \exp\left(-\frac{x_2+Q_2 x}{1-Q_2}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x}}{1-Q_2}\right)}{\frac{1}{1-Q_3} \exp\left(-\frac{x_2+Q_3 x_1}{1-Q_3}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x_1}}{1-Q_3}\right)} \right) dx, \quad (3.29)$$

y después la función de error de reconstrucción, dada por:

$$s_x^2(t) = \int x^2 \left(\frac{\frac{1}{1-Q_1} \exp\left(-\frac{x+Q_1 x_1}{1-Q_1}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x x_1}}{1-Q_1}\right) \frac{1}{1-Q_2} \exp\left(-\frac{x_2+Q_2 x}{1-Q_2}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x}}{1-Q_2}\right)}{\frac{1}{1-Q_3} \exp\left(-\frac{x_2+Q_3 x_1}{1-Q_3}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x_1}}{1-Q_3}\right)} \right) dx - \left(\int x \left(\frac{\frac{1}{1-Q_1} \exp\left(-\frac{x+Q_1 x_1}{1-Q_1}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x x_1}}{1-Q_1}\right) \frac{1}{1-Q_2} \exp\left(-\frac{x_2+Q_2 x}{1-Q_2}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x}}{1-Q_2}\right)}{\frac{1}{1-Q_3} \exp\left(-\frac{x_2+Q_3 x_1}{1-Q_3}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x_1}}{1-Q_3}\right)} \right) dx \right)^2 \quad (3.30)$$

$$- \left(\int x \left(\frac{\frac{1}{1-Q_1} \exp\left(-\frac{x+Q_1 x_1}{1-Q_1}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x x_1}}{1-Q_1}\right) \frac{1}{1-Q_2} \exp\left(-\frac{x_2+Q_2 x}{1-Q_2}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x}}{1-Q_2}\right)}{\frac{1}{1-Q_3} \exp\left(-\frac{x_2+Q_3 x_1}{1-Q_3}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{x_2 x_1}}{1-Q_3}\right)} \right) dx \right)^2$$

donde:

$$Q = \left(1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64 t^2}{27}\right) e^{-\frac{8}{3} |t|} \quad (3.31)$$

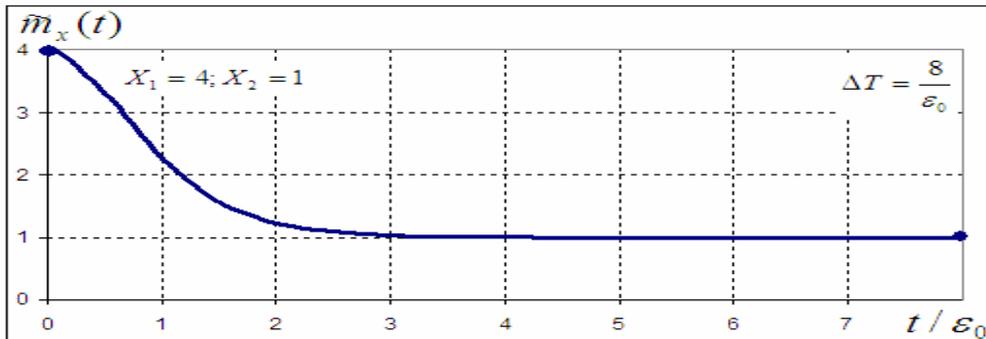


Figura 3-79: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = \left(1 + \frac{8}{3} |t| + \frac{64 t^2}{27}\right) e^{-\frac{8}{3} |t|}$ donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=8/\epsilon_0$.

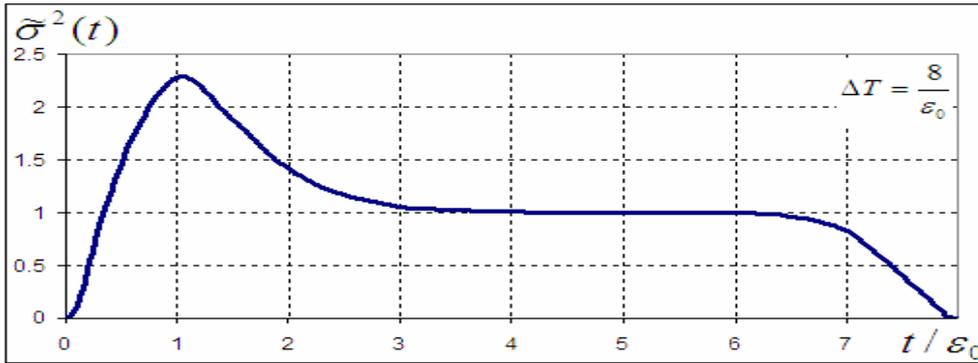


Figura 3-80: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=8/\epsilon_0$.

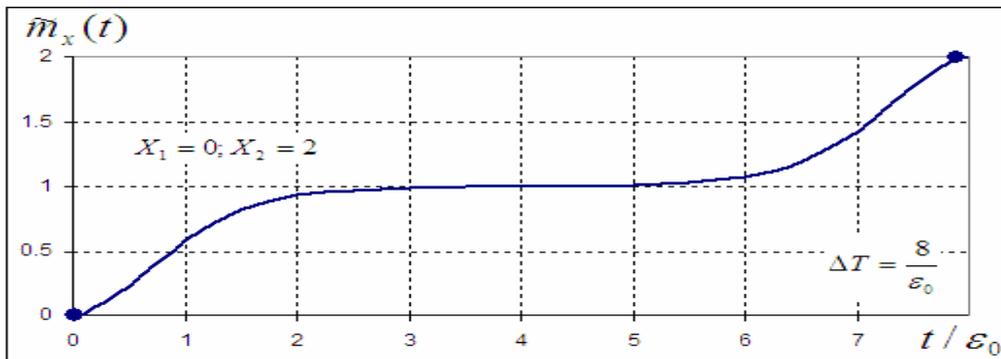


Figura 3-81: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=8/\epsilon_0$.

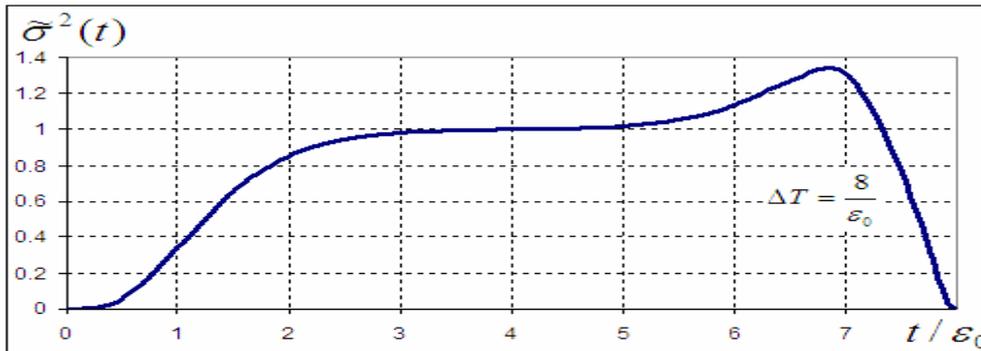


Figura 3-82: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=8/\epsilon_0$.

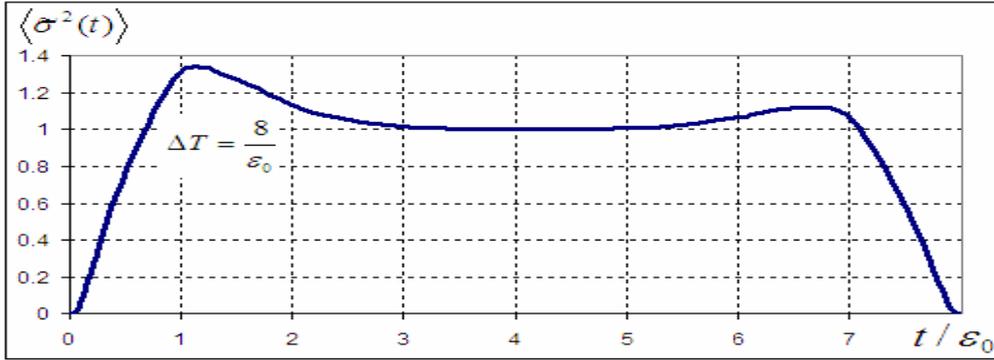


Figura 3-83: Error promedio de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $T=8/\varepsilon_0$.

Vemos que en este intervalo de reconstrucción no se nota ningún cambio comparado con la función Q anterior, las gráficas son prácticamente iguales.

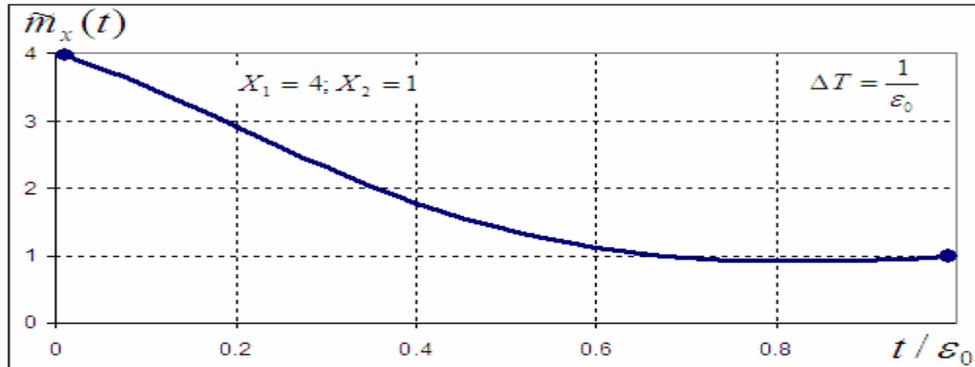


Figura 3-84: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=1/\varepsilon_0$.

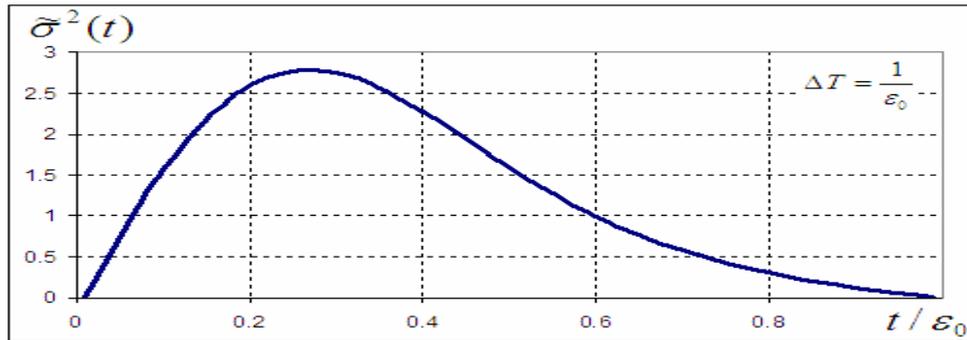


Figura 3-85: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ donde $x_1=4; x_2=1$ y $T=1/\varepsilon_0$.

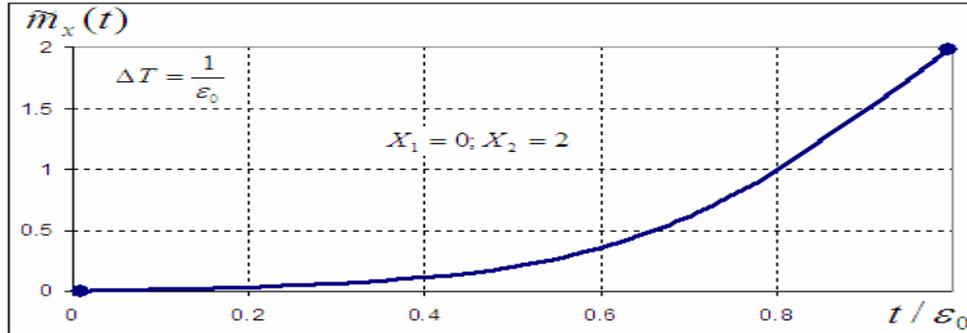


Figura 3-86: Función de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=1/e_0$.

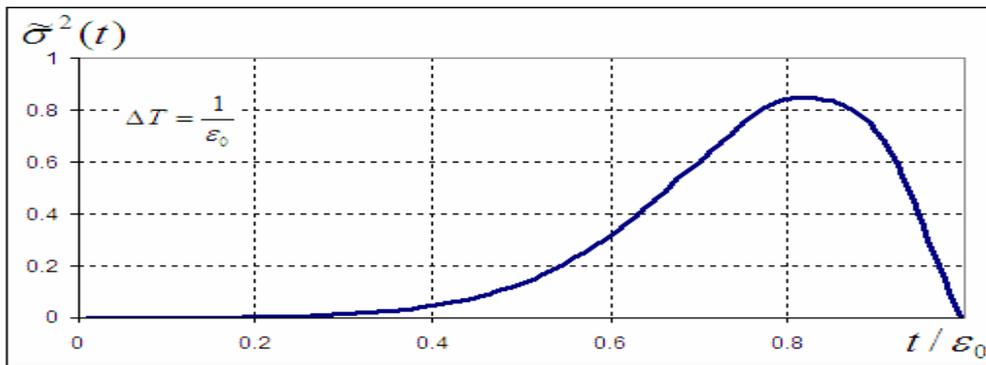


Figura 3-87: Función de error de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ donde $x_1=0; x_2=2$ y $T=1/e_0$.

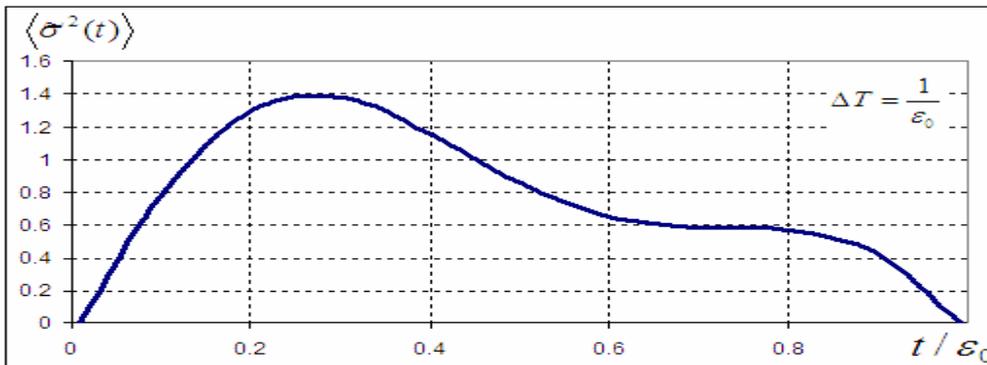


Figura 3-88: Error promedio de reconstrucción (interpolación) para el proceso no Markoviano con la fdp exponencial, con $Q = (1 + \frac{8}{3}|t| + \frac{64t^2}{27})e^{-\frac{8}{3}|t|}$ y $T=1/e_0$.

Vemos que al reducir el intervalo a $T=1/e_0$, se incrementa el error en los picos de las funciones de error de reconstrucción con respecto a la función $Q = (1 + 2|t|)e^{-2|t|}$, esto nos indica que el cambio en la función Q al suavizarla nos provoca un incremento de error cuando el intervalo de reconstrucción es corto, y esto aunque los valores de las muestras no tengan gran diferencia con el valor incondicional esperado de la función exponencial.

Haciendo una analogía con la función de Rayleigh a ésta no lo afectaba en gran medida una muestra $x_1=2$, pero ahora vemos que para la función exponencial sí se presenta un incremento de error en un intervalo corto para éste mismo valor de muestra, debido a que el valor incondicional de la función de Rayleigh es mayor que el valor incondicional esperado de la función exponencial.

Conclusiones

En el presente trabajo se trataron de resolver cuestionamientos acerca del Procedimiento de Muestreo - Reconstrucción óptimo, con base en la teoría estadística de la regla de esperanza matemática condicional, además mostrando resultados de simulaciones con las que se muestra que el teorema de Balakrishnan, para el caso Gaussiano, no es incorrecto si no que simplemente debe quedar definido de una mejor manera.

Para el caso Gaussiano se deben tomar en cuenta sus funciones momento inicial y central de segundo orden, tales como las empleadas para los resultados del presente trabajo que son la esperanza matemática condicional y la varianza condicional, todos los momentos de orden mayor son iguales a cero. En algunos algoritmos empleados comúnmente solamente se habla del espectro de potencia, ésta característica no es suficiente ya que muchos procesos aleatorios pueden tener el mismo espectro de potencia y no la misma fdp. La función $\sin x/x$ tan comúnmente empleada para todo proceso de muestreo y reconstrucción es sólo un caso particular de la regla de la esperanza matemática.

También se ha comprobado que sólo cuando se tiene el valor muestra en ese mismo instante de tiempo el error es cero y que en ningún caso en donde se estima una función de reconstrucción se obtiene un error nulo. No es suficiente con querer realizar al Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción con base en sólo un parámetro que es la frecuencia de corte.

Con estas bases se realizó el Proceso de Muestreo- Reconstrucción basado en algoritmos óptimos para algunos procesos estocásticos no Gaussianos, para dos funciones de distribución de probabilidad en especial: Rayleigh y exponencial, ya que para tales funciones las expresiones específicas necesarias son conocidas. El método puede ser usado para otras funciones de distribución de probabilidad con procedimientos análogos a los presentados en este trabajo.

La función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción son funciones no lineales en el caso de los procesos no Gaussianos.

Para el caso Gaussiano el Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción no depende de los valores específicos que posean las muestras, además de que la función básica juega un papel determinante en la forma de reconstrucción además de que el error se logra disminuir en forma considerable cambiando ésta función básica.

Para el caso no Gaussiano el valor específico de cada muestra determina totalmente cómo será la función de reconstrucción, y también dependiendo de la

diferencia entre el valor muestra y el valor incondicional esperado se tendrá un valor pico de error en las funciones de error de reconstrucción. Como la función de error de reconstrucción depende de la magnitud de las muestras debemos promediar esta característica, por tanto se presentaron gráficas promedio en tiempo para los ejemplos presentados.

Se trabajó con distintos intervalos en tiempo de reconstrucción a fin de que dependiendo la calidad que se desee se tengan referencias de cómo serán los comportamientos de las reconstrucciones y como consecuencia se tendrá una magnitud en las funciones de error que puede ser revalorada según la conveniencia que se persiga, tales diferencias en las funciones de error fueron trabajadas con detalle en el capítulo 2 donde también se notó que con intervalos de tiempo pequeños entre muestras la función de reconstrucción es prácticamente la misma. Por tanto en las secciones posteriores se trabajó con intervalos de tiempo demostrativos conociendo de antemano los efectos de reducir o ampliar estos intervalos de tiempo.

La función de distribución de probabilidad, que en este trabajo se trabajó con Rayleigh y exponencial, en el capítulo 2 Markovianos y en el Capítulo 3 no Markovianos, también tiene suma importancia en cada función de reconstrucción, ya que dependiendo de tales expresiones será el comportamiento de la función de reconstrucción.

También se pudo notar que en el caso no Gaussiano la función de covarianza con que se trabaje no presenta efectos tan notorios en las funciones de reconstrucción ni en las funciones error de reconstrucción, definitivamente lo más influyente son tanto los valores muestra como la función de distribución de probabilidad con que se esté tratando.

Con este trabajo se ha demostrado que la aplicación de la regla de la esperanza matemática condicional es más amplia, y más adecuada porque se trabaja con algoritmos óptimos, ya que se hace uso de la herramienta estadística adecuada para los procesos estocásticos no Gaussianos.

Recomendaciones para trabajos futuros

La regla de la esperanza matemática tiene una gran aplicación en los Procedimientos de Muestreo – Reconstrucción por lo que hay un gran campo de investigación en esta materia. Esta regla se puede aplicar en procesos con un número de muestras limitado, para procesos limitados en banda o arbitrarios, para procesos estacionarios o no estacionarios, para intervalos de reconstrucción periódicos o no periódicos. Con ayuda de la tecnología en procesamiento computacional, debido a sus grandes velocidades, a que existen herramientas de software muy poderosas es posible realizar cálculos numéricos de expresiones matemáticas necesarias para este tipo de investigación. En la época actual la tecnología de procesamiento de información es tan necesaria que debe ser llevada a cabo de una forma más adecuada para cada tipo de información, cada proceso tiene propiedades estadísticas que ayudan a que su procesamiento sea realizado de una mejor manera.

Algunas opciones para continuar con este trabajo son tomar en cuenta el “jitter” para el PMR; realizar los experimentos con tiempos de muestreo aleatorios, no periódicos; tal vez muestreando con una distribución de probabilidad de Poisson. Otra posibilidad es realizar el Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción para procesos aleatorios Multidimensionales.

Anexo A: Programas utilizados para los cálculos

1. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción para el proceso Markoviano Gaussiano con $R_x(t) = s^2 e^{-\alpha|t|}$

```
disp('Calculo de la esperanza matematica condicional y varianza condicional para e{T}');
distancia=input('Teclea la distancia entre la primera y la ultima muestra: ');
nmues=input('Introduce el numero de muestras (entre 2 y 40) ');
ti=input('Introduce la posicion en tiempo de la primera muestra ');
delta=distancia/(nmues-1);
for m=1:nmues
    TI(m)=delta*(m-1);
end
disp('Introduccion del valor de las muestras: ')
for n=1:1:nmues
    Xi(n)=input('Valor= ');
end
disp('Calculo de la matriz correlacion "k" ')
sigma=1;
alfa=1;
for o=1:1:nmues
    for p=1:1:nmues
        corr(o,p)=(sigma*sigma)*exp((-1)*alfa*abs(TI(o)-TI(p)));
    end
end

disp('Se calcula la matriz inversa de "k"')
AIJ=inv(corr);

disp('Se calcula la matriz unidimensional "Media", calculo de la media unidimensional')
disp('Calculo de las variables de decision')
divic=(nmues-1)*15;
tinicial=0;
tvvarianza=distancia/(15*(nmues-1));
disp('Calculo de la media matematica condicional')
for q=1:1:divic+1
    T=tinicial+(q-1)*tvvarianza;
    MEDIA(q)=0;
    for r=1:1:nmues
        for s=1:1:nmues
            MEDIA (q)=MEDIA(q)+(sigma*sigma)*exp((-1)*alfa*abs(T-TI(r)))*AIJ(r,s)*Xi(s);
        end
    end
end

disp('Se grafica la media condicional')
tinicial=ti;
for z=1:1:divic+1
    EX(z)=tinicial+((z-1)*tvvarianza);
end
EX(z);
plot(EX,MEDIA,'b -'),grid,title('MEDIA CONDICIONAL')

disp('Se calcula la varianza matematica condicional')
tinicial=0;
for t=1:1:divic+1
    T=tinicial+(t-1)*tvvarianza;
    VARI(t)=sigma*sigma;
    for u=1:1:nmues
```

```

    for v=1:1:nmues
        VARI(t)=VARI(t)-(sigma*sigma*sigma*sigma)*exp((-1)*alfa*abs(T-TI(u)))*AIJ(u,v)*exp((-1)*alfa*abs(TI(v)-
T));
    end
end
end

disp('Se grafica la varianza condicional')

figure
plot(EX,VARI,'b -'),grid,title('VARIANZA CONDICIONAL')

```

2. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción para el proceso no Markoviano Gaussiano con $R_x(\mathbf{t}) = \mathbf{s}^2 (1 + \mathbf{a} | \mathbf{t} |) e^{-\mathbf{a}|\mathbf{t}|}$

```

disp('Calculo de la esperanza matematica condicional y varianza condicoional para (1+alfa(T))*e{T}');
distancia=input('Teclea la distancia entre la primera y la ultima muestra: ');
nmues=input('Introduce el numero de muestras (entre 2 y 40) ');
ti=input('Introduce la posicion en tiempo de la primera muestra ');
delta=distancia/(nmues-1);
for m=1:nmues
    TI(m)=delta*(m-1);
end
disp('Introduccion del valor de las muestras: ')
for n=1:1:nmues
    Xi(n)=input('Valor= ');
end
disp('Calculo de la matriz correlacion "k" ')
sigma=1;
alfa=2;
for o=1:1:nmues
    for p=1:1:nmues
        corr(o,p)=(sigma*sigma)*(1+(alfa*abs(TI(o)-TI(p))))*exp((-1)*alfa*abs(TI(o)-TI(p)));
    end
end

disp('Se calcula la matriz inversa de "k"')
AIJ=inv(corr);

disp('Se calcula la matriz unidimensional "Media", calculo de la media unidimensional')
disp('Calculo de las variables de decision')
divic=(nmues-1)*20;
tinicial=0;
tvarianza=distancia/(20*(nmues-1));
disp('Calculo de la media matematica condicional')
for q=1:1:divic+1
    T=tinicial+(q-1)*tvarianza;
    MEDIA(q)=0;
    for r=1:1:nmues
        for s=1:1:nmues
            MEDIA(q)=MEDIA(q)+(sigma*sigma)*(1+(alfa*abs(T-TI(r))))*exp((-1)*alfa*abs(T-TI(r)))*AIJ(r,s)*Xi(s);
        end
    end
end

disp('Se grafica la media condicional')
tinicial=ti
for z=1:divic+1

```

```

EX(z)=tinicial+(z-1)*tvarianza;
end
EX(z);
plot(EX,MEDIA,'b -'),grid,title('MEDIA CONDICIONAL')

disp('Se calcula la varianza matematica condicional')
tinicial=0;
for t=1:1:divic+1
    T=tinicial+(t-1)*tvarianza;
    VARI(t)=sigma*sigma;
    for u=1:1:nmues
        for v=1:1:nmues
            VARI(t)=VARI(t)-(sigma*sigma*sigma*sigma)*(1+(alfa*abs(T-TI(u))))*exp((-1)*alfa*abs(T-TI(u)))*AIJ(u,v)*(1+(alfa*abs(TI(v)-T)))*exp((-1)*alfa*abs(TI(v)-T));
        end
    end
end

disp('Se grafica la varianza condicional')

figure
plot(EX,VARI,'b -'),grid,title('VARIANZA CONDICIONAL')

```

3. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción para el proceso no Markoviano Gaussiano con

$$R_x(t) = s^2 \left(1 + a |t| + \frac{at^2}{3}\right) e^{-a|t|}$$

```

disp('Calculo de la esperanza matematica condicional y varianza condicoional para e{T}(3)');
distancia=input('Teclea la distancia entre la primera y la ultima muestra: ');
nmues=input('Introduce el numero de muestras (entre 2 y 40) ');
ti=input('Introduce la posicion en tiempo de la primera muestra ');
delta=distancia/(nmues-1);
for m=1:nmues
    TI(m)=delta*(m-1);
end
disp('Introduccion del valor de las muestras: ')
for n=1:1:nmues
    Xi(n)=input('Valor= ');
end
disp('Calculo de la matriz correlacion "k" ')
sigma=1.0;
alfa=(8/3);
for o=1:1:nmues
    for p=1:1:nmues
        corr(o,p)=(sigma^2)*(1+(alfa*abs(TI(o)-TI(p)))+(64/27)*((TI(o)-TI(p))^2))*exp((-alfa)*abs(TI(o)-TI(p)));
    end
end
end

```

```

disp('Se calcula la matriz inversa de "k"')
AIJ=inv(corr);

```

```

disp('Se calcula la matriz unidimensional "Media", calculo de la media unidimensional')
disp('Calculo de las variables de decision')
divic=(nmues-1)*20;
tinicial=0;
tvarianza=distancia/(20*(nmues-1));
disp('Calculo de la media matematica condicional')
for q=1:1:divic+1
    T=tinicial+(q-1)*tvarianza;
    MEDIA(q)=0;
end

```

```

for r=1:1:nmues
    for s=1:1:nmues
        MEDIA(q)=MEDIA(q)+(sigma^2)*(1+(alfa*abs(T-TI(r)))+((64/27)*((T-TI(r))^2)))*exp(-alfa*abs(T-
TI(r)))*AIJ(r,s)*Xi(s);
    end
end
end

disp('Se grafica la media condicional')
tinicial=ti;
for z=1:divic+1
    EX(z)=tinicial+(z-1)*tvarianza;
end

plot(EX,MEDIA,'b -'),grid,title('MEDIA CONDICIONAL')

disp('Se calcula la varianza matematica condicional')
tinicial=0;
for t=1:1:divic+1
    T=tinicial+(t-1)*tvarianza;
    VARI(t)=sigma^2;
    for u=1:1:nmues
        for v=1:1:nmues
            VARI(t)=VARI(t)-(sigma^4)*(1+(alfa*abs(T-TI(u)))+((64/27)*((T-TI(u))^2)))*exp(-alfa*abs(T-
TI(u)))*AIJ(u,v)*(1+(alfa*abs(TI(v)-T))+((64/27)*((TI(v)-T)^2)))*exp(-alfa*abs(TI(v)-T));
        end
    end
end

disp('Se grafica la varianza condicional')

figure
plot(EX,VARI,'b -'),grid,title('VARIANZA CONDICIONAL')

```

4. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción para la función sampling

```

disp('Calculo de la esperanza matematica condicional y varianza condicional para sampling');
distancia=input('Teclea la distancia entre la primera y la ultima muestra: ');
nmues=input('Introduce el numero de muestras (entre 2 y 40) ');
ti=input('Introduce la posicion en tiempo de la primera muestra ');
delta=distancia/(nmues-1);
for m=1:nmues
    TI(m)=delta*(m-1);
end
disp('Introduccion del valor de las muestras: ')
for n=1:1:nmues
    Xi(n)=input('Valor= ');
end
disp('Calculo de la matriz correlacion "k" ')
for o=1:1:nmues
    for p=1:1:nmues
        if (o==p)
            corr(o,p)=1;
        else corr(o,p)=(delta/(pi*(TI(o)-TI(p))))*(sin(pi*(TI(o)-TI(p))/delta));
        end
    end
end
disp('Se calcula la matriz inversa de "k"')
AIJ=inv(corr);

```

```

disp('Se calcula la matriz unidimensional "Media", calculo de la media unidimensional')
disp('Calculo de las variables de decision')
divic=(nmues -1)*20;
tinicial=0;
tvarianza=distancia/(20*(nmues-1));
disp('Calculo de la media matematica condicional')
for q=1:1:divic+1
    T=tinicial+(q-1)*tvarianza;
    MEDIA(q)=0;
    for r=1:1:nmues
        if (T==TI(r))
            vari=1;
        else
            vari=(delta/(pi*(T-TI(r))))*sin(pi*(T-TI(r))/delta);
        end

        for s=1:1:nmues
            MEDIA(q)=MEDIA(q)+vari*AIJ(r,s)*Xi(s);
        end
    end
end

disp('Se grafica la media condicional')
tinicial=ti;
for z=1:1:divic+1
    EX(z)=tinicial+((z -1)*tvarianza);
end
plot(EX,MEDIA,'b -'),grid,title('MEDIA CONDICIONAL')

disp('Se calcula la varianza matematica condicional')
tinicial=0;
for t=1:1:divic+1
    T=tinicial+(t-1)*tvarianza;
    VARI(t)=1;
    for u=1:1:nmues
        if (T==TI(u))
            vari=1;
        else
            vari=(delta/(pi*(T-TI(u))))*sin(pi*(T-TI(u))/delta);
        end

        for v=1:1:nmues
            if (T==TI(v))
                varj=1;
            else
                varj=(delta/(pi*(TI(v)-T)))*sin(pi*(TI(v)-T)/delta);
            end

            VARI(t)=VARI(t)-vari*AIJ(u,v)*varj;
        end
    end
end
disp('Se grafica la varianza condicional')
figure
plot(EX,VARI,'b -'),grid,title('VARIANZA CONDICIONAL')

```

5. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano no Gaussiano con fdp de Rayleigh con $Q = s^2 e^{-a|t|}$

```
%Programa nuevo para la extrapolacion y el error para la funcion de rayleigh
disp('PROGRAMA NUEVO PARA LA EXTRAPOLACION DE LA FUNCION DE RAYLEIGH')
x1=input('Dame el valor de la muestra X1: ');
t=input('Introduce el tiempo en el que quieres la respuesta: ');
E0=1;
sg=1.52498570332604666;
I=20;
%for t=0.2:0.2:6
t
Q=exp(-E0*t);
syms x
Y=(x/((sg^2)*(1-(Q^2))))*exp(-((x^2)+((Q^2)*(x1^2)))/(2*(sg^2)*(1-(Q^2))))*besseli(0,((Q/(1-
(Q^2)))*(x1*x)/(sg^2)))));
M=int((x*Y),0,I);
M=double(M)
inte2=int((x^2)*Y,0,I);
error=inte2-(M^2);
error=double(error)
%end
```

6. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano no Gaussiano con fdp de Rayleigh con $Q = s^2 e^{-a|t|}$

```
%Programa para graficar la interpolacion (2 muestras) para la funcion de Rayleigh con el primer exponente simple
'markoviano'
%Se utilizan 3 fdp, con las formulas 42 y 44
x1=input('Valor de la muestra X1: ');
t1=input('Tiempo de X1 (T1): ');
x2=input('Valor de la muestra X2: ');
t2=input('Tiempo de X2 (T2): ');
%t=input('Dame el tiempo en el que quieres las respuesta: ');
I=20;
E0=1;
sg=1.52498570332604666;
for t=0.1:0.1:9
t
Q1=exp(-E0*abs(t-t1));
Q2=exp(-E0*abs(t2-t));
Q3=exp(-E0*abs(t2-t1));
syms w1 w2 w3 w x
w1=(x/((sg^2)*(1-(Q1^2))))*exp(-((x^2)+(Q1^2)*(x1^2))/(2*(sg^2)*(1-(Q1^2))))*besseli(0,((Q1/(1-
(Q1^2)))*(x*x1)/(sg^2)))));
w2=(x2/((sg^2)*(1-(Q2^2))))*exp(-((x2^2)+(Q2^2)*(x^2))/(2*(sg^2)*(1-(Q2^2))))*besseli(0,((Q2/(1-
(Q2^2)))*(x2*x)/(sg^2)))));
w3=(x2/((sg^2)*(1-(Q3^2))))*exp(-((x2^2)+(Q3^2)*(x1^2))/(2*(sg^2)*(1-(Q3^2))))*besseli(0,((Q3/(1-
(Q3^2)))*(x2*x1)/(sg^2)))));
w=((w1*w2)/w3);
inte1=int(x*w,0,I);
m=double(inte1)
inte2=int((x^2)*w,0,I);
error=inte2-(m^2);
error=double(error)
end
```

7. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano no Gaussiano con fdp de Rayleigh con $Q = s^2(1 + a|t|)e^{-a|t|}$

```
%Programa nuevo para la extrapolacion y el error para la funcion de rayleigh
disp('PROGRAMA NUEVO PARA LA EXTRAPOLACION DE LA FUNCION DE RAYLEIGH con Tc=1')
x1=input('Dame el valor de la muestra X1: ');
t=input('Introduce el tiempo en el que quieres la respuesta: ');
E0=2;
sg=1.52498570332604666;
I=80;
%for t=0.3:0.3:3.9
t
Q=(1+(E0*t))*exp(-E0*t);
syms x
Y=((x/((sg^2)*(1-(Q^2))))*exp(-(x^2)+((Q^2)*(x1^2)))/(2*(sg^2)*(1-(Q^2))))*besseli(0,((Q/(1-(Q^2)))*(x1*x)/(sg^2)))));
M=int((x*Y),0,I);
M=double(M)
inte2=int((x^2)*Y,0,I);
error=inte2-(M^2);
error=double(error)
%end
```

8. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano no Gaussiano con fdp de Rayleigh con $Q = s^2(1 + a|t|)e^{-a|t|}$

```
%Programa para graficar la interpolacion para la funcion de Rayleigh con el 2do. exponente
%Se utilizan 3 fdp. con las formulas 42 y 44
disp('PROGRAMA PARA INTERPOLACION RAYLEIGH CON EXP 2');
x1=input('Valor de la muestra X1: ');
t1=input('Tiempo de X1 (T1): ');
x2=input('Valor de la muestra X2: ');
t2=input('Tiempo de X2 (T2): ');
%t=input('Dame el tiempo en el que quieres las respuesta: ');

I=180;
E0=2;
sg=1.52498570332604666;
for t=0.1:0.1:0.9
t
Q1=((1+(E0*abs(t-t1)))*exp(-E0*abs(t-t1)));
Q2=((1+(E0*abs(t-t2)))*exp(-E0*abs(t-t2)));
Q3=((1+(E0*abs(t2-t1)))*exp(-E0*abs(t2-t1)));
syms w1 w2 w3 w x
w1=(x/((sg^2)*(1-(Q1^2))))*exp(-(x^2)+(Q1^2)*(x1^2))/(2*(sg^2)*(1-(Q1^2))))*besseli(0,((Q1/(1-(Q1^2)))*(x*x1)/(sg^2)))));
w2=(x2/((sg^2)*(1-(Q2^2))))*exp(-(x^2)+(Q2^2)*(x^2))/(2*(sg^2)*(1-(Q2^2))))*besseli(0,((Q2/(1-(Q2^2)))*(x2*x)/(sg^2)))));
w3=(x2/((sg^2)*(1-(Q3^2))))*exp(-(x^2)+(Q3^2)*(x1^2))/(2*(sg^2)*(1-(Q3^2))))*besseli(0,((Q3/(1-(Q3^2)))*(x2*x1)/(sg^2)))));
w=((w1*w2)/w3);
inte1=int(x*w,0,I);
m=double(inte1)
inte2=int((x^2)*w,0,I);
error=inte2-(m^2);
```

```
error=double(error)
end
```

9. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano no Gaussiano

con fdp de Rayleigh con $Q = s^2 (1 + a | t | + \frac{at^2}{3}) e^{-a|t|}$

```
%Programa nuevo para la extrapolacion y el error para la funcion de rayleigh
disp('PROGRAMA NUEVO PARA LA EXTRAPOLACION DE LA FUNCION DE RAYLEIGH CON EL EXP 3')
x1=input('Dame el valor de la muestra X1: ');
t=input('Introduce el tiempo en el que quieres la respuesta: ');
E0=(8/3);
sg=1.52498570332604666;
I=99;
alfa=E0;
%for t=0.3:0.3:3.9
t
Q=(1+(alfa*t)+((alfa^2)/3)*(t^2))*exp(-alfa*t);
syms x
Y=((x/((sg^2)*(1-(Q^2))))*exp(-((x^2)+((Q^2)*(x1^2)))/(2*(sg^2)*(1-(Q^2))))*besseli(0,((Q/(1-(Q^2)))*(x1*x)/(sg^2)))));
M=int((x*Y),0,I);
M=double(M)
inte2=int((x^2)*Y,0,I);
error=inte2-(M^2);
error=double(error)
%end
```

10. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano no Gaussiano con

fdp de Rayleigh con $Q = s^2 (1 + a | t | + \frac{at^2}{3}) e^{-a|t|}$

```
%Programa para graficar la interpolacion para la funcion de Rayleigh con el 3er. exponente
%Se utilizan 3 fdp. con las formulas 42 y 44
disp('PROGRAMA PARA INTERPOLACION RAYLEIGH CON EXP 3');
x1=input('Valor de la muestra X1: ');
t1=input('Tiempo de X1 (T1): ');
x2=input('Valor de la muestra X2: ');
t2=input('Tiempo de X2 (T2): ');
%t=input('Dame el tiempo en el que quieres las respuesta: ');
I=99;
E0=(8/3);
sg=1.52498570332604666;
alfa=E0;
for t=0.1:0.1:0.9
t
Q1=(((1+(alfa*abs(t-t1)))+((alfa^2)/3)*((t-t1)^2))*exp(-alfa*abs(t-t1));
Q2=(((1+(alfa*abs(t2-t)))+((alfa^2)/3)*((t2-t)^2))*exp(-alfa*abs(t2-t));
Q3=(((1+(alfa*abs(t2-t1)))+((alfa^2)/3)*((t2-t1)^2))*exp(-alfa*abs(t2-t1));
syms w1 w2 w3 w x
w1=(x/((sg^2)*(1-(Q1^2))))*exp(-((x^2)+(Q1^2)*(x1^2))/(2*(sg^2)*(1-(Q1^2))))*besseli(0,((Q1/(1-(Q1^2)))*(x*x1)/(sg^2)))));
w2=(x2/((sg^2)*(1-(Q2^2))))*exp(-((x2^2)+(Q2^2)*(x^2))/(2*(sg^2)*(1-(Q2^2))))*besseli(0,((Q2/(1-(Q2^2)))*(x2*x)/(sg^2)))));
w3=(x2/((sg^2)*(1-(Q3^2))))*exp(-((x2^2)+(Q3^2)*(x1^2))/(2*(sg^2)*(1-(Q3^2))))*besseli(0,((Q3/(1-(Q3^2)))*(x2*x1)/(sg^2)))));
w=((w1*w2)/w3);
inte1=int(x*w,0,I);
```

```

m=double(inte1)
inte2=int((x^2)*w,0,I);
error=inte2-(m^2);
error=double(error)
end

```

11. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano no Gaussiano con fdp exponencial con $Q = s^2 e^{-a|t|}$

```

%Programa para graficar extrapolacion (una muestra) para la funcion gamma
disp('Programa para el error en extrapolacion para la funcion GAMMA')
x1=input('Introduce el valor de la muestra X1: ');
%t=input('Introduce el tiempo en el que quieres la respuesta: ');
I=150;
E0=2;
alfa=(0.5*E0);

for t=0.1:0.3:8.1
t
Q=exp(-alfa*t);
syms x
Y=int((x/(1-Q))*exp(-(x+(Q*x1))/(1-Q))*besseli(0,((2*sqrt(x*x1*Q))/(1-Q))),0,I);
Y=double(Y)
Z=int(((x^2)/(1-Q))*exp(-(x+(Q*x1))/(1-Q))*besseli(0,((2*sqrt(x*x1*Q))/(1-Q))),0,I);
Z=double(Z);
error=(Z-(Y^2))
end

```

12. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano no Gaussiano con fdp exponencial con $Q = s^2 e^{-a|t|}$

```

%Programa para graficar la interpolacion para la funcion GAMMA (2 muestras)
%Se utilizan 3 fdp, con las formulas 42 y 49
x1=input('Valor de la muestra X1: ');
t1=input('Tiempo de X1 (T1): ');
x2=input('Valor de la muestra X2: ');
t2=input('Tiempo de X2 (T2): ');
t=input('Dame el tiempo en el que quieres las respuesta: ');
I=200;
E0=2;
alfa=(0.5*E0);
%for t=0.1:0.1:0.9
t
Q1=exp(-alfa*abs(t-t1));
Q2=exp(-alfa*abs(t2-t));
Q3=exp(-alfa*abs(t2-t1));
syms w1 w2 w3 w x
w1=(1/(1-Q1))*exp(-(x+(Q1*x1))/(1-Q1))*besseli(0,((2*sqrt(x*x1*Q1))/(1-Q1)));
w2=(1/(1-Q2))*exp(-(x2+(Q2*x))/(1-Q2))*besseli(0,((2*sqrt(x2*x*Q2))/(1-Q2)));
w3=(1/(1-Q3))*exp(-(x2+(Q3*x1))/(1-Q3))*besseli(0,((2*sqrt(x2*x1*Q3))/(1-Q3)));
w=((w1*w2)/w3);
inte1=int(x*w,0,I);
m=double(inte1)
inte2=int((x^2)*w,0,I);
error=inte2-(m^2);
error=double(error)

```

```
%end
```

13. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano no Gaussiano con fdp exponencial con $Q = s^2(1 + a|t|)e^{-a|t|}$

```
%Programa para graficar extrapolacion (una muestra) para la funcion gamma
disp('Programa para el error en extrapolacion para la funcion GAMMA con exponente 2')
x1=input('Introduce el valor de la muestra X1: ');
t=input('Introduce el tiempo en que quieres la respuesta: ');
I=120;
E0=4;
alfa=(0.5*E0);
%for t=0.3:0.3:3.9
t
Q=(1+(alfa*t))*exp(-alfa*t);
syms x
M=int((x/(1-Q))*exp(-(x+(Q*x1))/(1-Q))*besseli(0,((2*sqrt(x*x1*Q))/(1-Q))),0,I);
M=double(M)
Z=int(((x^2)/(1-Q))*exp(-(x+(Q*x1))/(1-Q))*besseli(0,((2*sqrt(x*x1*Q))/(1-Q))),0,I);
Z=double(Z);
error=(Z-(M^2))
%end
```

14. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano no Gaussiano con fdp exponencial con $Q = s^2(1 + a|t|)e^{-a|t|}$

```
%Programa para graficar la interpolacion para la funcion GAMMA con el segundo exponente(2 muestras)
%Se utilizan 3 fdp, con las formulas 42 y 49
x1=input('Valor de la muestra X1: ');
t1=input('Tiempo de X1 (T1): ');
x2=input('Valor de la muestra X2: ');
t2=input('Tiempo de X2 (T2): ');
%t=input('Dame el tiempo en el que quieres las respuesta: ');
I=130;
E0=4;
alfa=(0.5*E0);
for t=0.1:0.1:0.9
t
Q1=(1+(alfa*abs(t-t1)))*exp(-alfa*abs(t-t1));
Q2=(1+(alfa*abs(t2-t)))*exp(-alfa*abs(t2-t));
Q3=(1+(alfa*abs(t2-t1)))*exp(-alfa*abs(t2-t1));
syms w1 w2 w3 w x
w1=(1/(1-Q1))*exp(-(x+(Q1*x1))/(1-Q1))*besseli(0,((2*sqrt(x*x1*Q1))/(1-Q1)));
w2=(1/(1-Q2))*exp(-(x2+(Q2*x))/(1-Q2))*besseli(0,((2*sqrt(x2*x*Q2))/(1-Q2)));
w3=(1/(1-Q3))*exp(-(x2+(Q3*x1))/(1-Q3))*besseli(0,((2*sqrt(x2*x1*Q3))/(1-Q3)));
w=((w1*w2)/w3);
inte1=int(x*w,0,I);
m=double(inte1)
inte2=int((x^2)*w,0,I);
error=inte2-(m^2);
error=double(error)
end
```

15. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción (extrapolación) para el proceso Markoviano no Gaussiano

con fdp exponencial con $Q = s^2(1 + a|t| + \frac{at^2}{3})e^{-a|t|}$

```
%Programa para graficar extrapolacion (una muestra) para la funcion gamma
disp('Programa para el error en extrapolacion para la funcion GAMMA con exponente 3')
x1=input('Introduce el valor de la muestra X1: ');
t=input('Introduce el tiempo en que quieres la respuesta: ');
I=150;
E0=(16/3);
alfa=0.5*E0;
%for t=0.3:0.3:3.9
t
Q=(1+(alfa*t)+((alfa^2)/3)*(t^2))*exp(-alfa*t);
syms x
M=int((x/(1-Q))*exp(-(x+(Q*x1))/(1-Q))*besseli(0,((2*sqrt(x*x1*Q))/(1-Q))),0,I);
M=double(M)
Z=int(((x^2)/(1-Q))*exp(-(x+(Q*x1))/(1-Q))*besseli(0,((2*sqrt(x*x1*Q))/(1-Q))),0,I);
Z=double(Z);
error=(Z-(M^2))
%end
```

16. Programa para calcular las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción (interpolación) para el proceso Markoviano no Gaussiano con

fdp exponencial con $Q = s^2(1 + a|t| + \frac{at^2}{3})e^{-a|t|}$

```
%Programa para graficar la interpolacion para la funcion GAMMA (2 muestras) para el exponente 3
%Se utilizan 3 fdp, con las formulas 42 y 49
disp('Interpolacion para GAMMA con el exp 3')
x1=input('Valor de la muestra X1: ');
t1=input('Tiempo de X1 (T1): ');
x2=input('Valor de la muestra X2: ');
t2=input('Tiempo de X2 (T2): ');
%t=input('Dame el tiempo en el que quieres las respuesta: ');
I=150;
E0=(16/3);
alfa=0.5*E0;
for t=0.1:0.1:0.9
t
Q1=(((1+(alfa*abs(t-t1)))+((alfa^2)/3)*((t-t1)^2))*exp(-alfa*abs(t-t1)));
Q2=(((1+(alfa*abs(t-t2)))+((alfa^2)/3)*((t-t2)^2))*exp(-alfa*abs(t-t2)));
Q3=(((1+(alfa*abs(t-t1)))+((alfa^2)/3)*((t-t1)^2))*exp(-alfa*abs(t-t1)));
syms w1 w2 w3 w x
w1=(1/(1-Q1))*exp(-(x+(Q1*x1))/(1-Q1))*besseli(0,((2*sqrt(x*x1*Q1))/(1-Q1)));
w2=(1/(1-Q2))*exp(-(x2+(Q2*x))/(1-Q2))*besseli(0,((2*sqrt(x2*x*Q2))/(1-Q2)));
w3=(1/(1-Q3))*exp(-(x2+(Q3*x1))/(1-Q3))*besseli(0,((2*sqrt(x2*x1*Q3))/(1-Q3)));

w=((w1*w2)/w3);
inte1=int(x*w,0,I);
m=double(inte1)
inte2=int((x^2)*w,0,I);
error=inte2-(m^2);
error=double(error)
end
```

Anexo B: Artículo presentado en conferencia

7º CONGRESO NACIONAL
EN INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA Y DE SISTEMAS
México D.F., 3 al 7 de Noviembre, 2003

PROCEDIMIENTO DE MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE ALGUNOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS MARKOVIANOS NO GAUSSIANOS

Vladimir Kazakov, César Elí Hernández Aquino

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Telecomunicaciones S.E.P.I. Zacatenco
C.P. 07738, México D.F. Tel. 57296000 Ext. 54904
vkazakov41@hotmail.com cesareli@hotmail.com

RESUMEN

En el presente artículo se presenta el procedimiento de muestreo y reconstrucción (PMR) de algunos procesos estocásticos no Gaussianos con base en el regla de la esperanza matemática condicional. El PMR de tales procesos es relativamente simple porque el procedimiento de interpolación depende de las 2 muestras más cercanas, otras muestras no influyen en las características estadísticas del PMR. Se obtienen las expresiones generales para el análisis y entonces se consideran dos ejemplos no triviales.

1. INTRODUCCIÓN

El teorema clásico de muestreo asociado con los nombres Whittaker-Kotelnikov-Shannon (WKS) fue establecido para funciones *determinísticas* con un espectro finito. La generalización del teorema WKS en procesos estocásticos con espectro de potencia finito fue dado por A. Balakrishnan [1]. De acuerdo con el teorema de Balakrishnan cualquier realización $x(t)$ de algún proceso estocástico con espectro de potencia finito ($S(\omega)=0$, cuando $|\omega| \geq \omega_b$, ω_b es la frecuencia límite del espectro de potencia) puede ser reconstruido con *error cero* de su infinito número de muestras $\{x(T_i)\}$ con el intervalo de discretización $\Delta T = \pi/\omega_b$:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(T_i) \psi_i(t) \quad , \quad (1)$$

donde: $\tilde{x}(t)$ es la función de reconstrucción; $\psi_i(t)$ es la función básica determinada por la expresión:

$$\psi_i(t) = \frac{\text{sen} \omega_b (t - i\Delta T)}{\omega_b (t - i\Delta T)} \quad . \quad (2)$$

Tenemos algunas observaciones al respecto:

1) Este teorema es válido para procesos Gaussianos sólo porque su prueba está basada en usar el espectro de potencia (o correspondientemente, usando la función de covarianza usual). Todos los procesos no Gaussianos son caracterizados por algunas funciones espectrales o funciones acumulativas de altos ordenes. El teorema de Balakrishnan no usa información alguna acerca de ciertas características de los procesos estocásticos. Significa que son iguales a cero y por lo tanto, este teorema parte sólo con el proceso Gaussiano. 2) La suma de las muestras lineales consideradas es postulada en el teorema de Balakrishnan. Esta afirmación no es contradictoria con el caso Gaussiano del proceso estocástico. 3) Si el número de muestras es finito entonces *el tipo de* función básica debe ser dependiente del número corriente de muestras. 4) El error de reconstrucción de *algunos tipos* de procesos estocásticos es igual al cero.

Para describir el PMR de procesos no Gaussianos es necesario, tomar en cuenta el tipo de función de densidad de probabilidad (fdp) del proceso estocástico. Aquí usamos la descripción estadística del PMR con base en la *regla de la esperanza condicional*. Esta regla provee el mínimo de error cuadrático medio para variables aleatorias con una fdp arbitraria [2].

Conociendo una fdp multidimensional uno puede encontrar tanto la función de reconstrucción (la función de la esperanza condicional) como la función de error de reconstrucción (la función de varianza condicional) cuando el número de muestras es dado.

Este acceso nos permite describir el PMR de procesos Gaussianos y no Gaussianos, procesos estacionarios y no estacionarios, procesos con espectro finito e infinito, con finito e infinito número de muestras, con intervalos de discretización periódicos y no periódicos, de procesos estocásticos unidimensionales y multidimensionales, de regímenes de reconstrucción de interpolación y extrapolación. Para procesos Gaussianos las fórmulas

generales determinadas tanto para la esperanza matemática como para la varianza condicional son conocidas.

En el caso de los procesos aleatorios **no** Gaussianos la situación no es tan simple. Generalmente, no hay muchas expresiones para fdp no Gaussianas multidimensionales así, es más bien difícil obtener algunas conclusiones generales acerca de las principales características estadísticas del SRP cuando algún número arbitrario de muestras es dado.

Es claro, que tanto la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción serán determinadas por las expresiones analíticas concretas de la fdp condicional de un proceso dado.

Una de las principales conclusiones es demostrar tal hecho de que las características estadísticas de SRP de procesos no Gaussianos son *funciones no lineales de muestras*.

Podemos escribir tres de las principales características condicionales del proceso de entrada [20]:

$$\tilde{m}_x(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_x(t, T_i) a_{ij} [x_j(T_j) - m_x(T_j)] \quad (3)$$

$$\tilde{s}_x^2(t) = s_x^2(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_x(t, T_i) a_{ij} K_x(T_j) \quad (4)$$

$$\tilde{K}_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_x(t_1, T_i) a_{ij} K_x(T_j, t_2) \quad (5)$$

Estas fórmulas son las principales para los cálculos.

2. EL PMR DE PROCESOS MARKOVIANOS NO GAUSSIANOS

La consideración de un caso general de un proceso no Gaussiano es difícil porque es necesario conocer una fdp *no Gaussiana multidimensional*. Restringimos nuestra investigación a un proceso de entrada *Markoviano no Gaussiano*.

2.1 Las expresiones generales

Tomando en cuenta la propiedad principal del proceso Markoviano tenemos que usar uno $x_1(T_1)$ o dos $x_1(T_1), x_2(T_2)$ muestras sólo para ir formando la función de reconstrucción en el caso de Markov.

El proceso de reconstrucción usando una muestra $x_1(T_1)$ es una predicción trivial ($t > T_1$). Cuando es necesario encontrar la función de reconstrucción entre dos muestras $x_1(T_1), x_2(T_2)$ tenemos un procedimiento de interpolación ($T_2 > t > T_1$). Uno puede describir completamente el proceso condicional entre dos muestras dadas $x_1(T_1)$ y $x_2(T_2)$ si conocemos la fdp condicional $w(x, t | x_1(T_1), x_2(T_2))$. En este punto enfatizamos el hecho de que el proceso $x(t)$ entre dos muestras compuestas $x_1(T_1)$ y $x_2(T_2)$ de un proceso Markoviano $x(t)$ es no Markoviano [3][4], pero es posible expresar su fdp condicional con base en la fdp transitoria $w(x_i, t_i | x_j, t_j)$ del proceso Markoviano dado.

Consideremos 3 secciones del proceso $x(t)$ en los tiempos $t_1 < t < t_2$. En el caso general no Markoviano la fdp tridimensional es presentada por la fórmula:

$$w(x_1, t_1 | x, t; x_2, t_2) = w(x_1, t_1) w(x, t | x_1, t_1) w(x_2, t_2 | x, t) \quad (6)$$

Hay tres tipos diferentes de fdp en (6). De ellas es difícil tener la tercera. En la variante Markoviana esta fdp tridimensional puede ser representada como un producto de una pdf unidimensional y fdp bitransitoria:

$$w(x_1, t_1 | x, t; x_2, t_2) = w(x_1, t_1) w(x, t | x_1, t_1) w(x_2, t_2 | x, t) \quad (7)$$

entonces la pdf condicional requerida puede ser fácilmente expresada por la fdp transitoria $w(x_i, t_i | x_j, t_j)$ del proceso Markoviano dado. Se puede ver que:

$$w(x, t | x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{w(x, t | x_1, t_1) w(x_2, t_2 | x, t)}{w(x_2, t_2 | x_1, t_1)} \quad (8)$$

La expresión (8) da una posibilidad de determinar las funciones momento condicionales requerido $\tilde{\alpha}_i^x(t) = \langle x^i(t) | x_1(T_1), x_2(T_2) \rangle$ de i -ésimo orden. Cuando $i=1$ tenemos la función de reconstrucción $\tilde{m}_x(t)$ (la esperanza matemática condicional), cuando $i=2$ la función del segundo momento $\tilde{\alpha}_2^x(t)$. Entonces usando la fórmula:

$$\tilde{s}_x^2 = \tilde{\alpha}_2^x(t) - \tilde{m}_x^2(t) \quad (9)$$

uno puede encontrar la función de error de reconstrucción (la varianza condicional). Por consiguiente, el problema será conectado con algunos cálculos (numéricos) de las funciones condicionales $\tilde{\alpha}_2^x(t)$ y $\tilde{m}_x(t)$ con base en (8).

2.2 Ejemplo. El PMR del proceso Markoviano de Rayleigh

Consideremos el proceso Markoviano de Rayleigh. La pdf transitoria para este caso es expresada por la fórmula [5]:

$$w(x_i, t_i | x_j, t_j) = \frac{x_j}{s^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_j^2 + Q^2 x_i^2}{2s^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{x_i x_j}{s^2}\right) \quad (10)$$

donde:

$$Q = Q(t_i - t_j) = \exp(-\epsilon_0 |t_i - t_j|) \quad (11)$$

I_0 es la función de Bessel de un argumento imaginario, ϵ_0 y σ son parámetros. Es necesario escribir la expresión (10) para argumentos diferentes y ponerlos en (8). Después de eso uno puede calcular las principales características del PMR $\tilde{m}_x(t)$ y $\tilde{\alpha}_2^x(t)$.

Los cálculos de las funciones de reconstrucción y de error para el procedimiento de *extrapolación* fueron numéricamente llevados a cabo con base en las fórmulas (9)-(11). Los resultados de esos cálculos son presentados en las Fig. 1, 2 como curvas del tiempo t como parámetro. Después de la terminación del régimen de transición las

funciones de reconstrucción tienden a la expectativa matemática incondicional de la ley de distribución de Rayleigh $m_x = s\sqrt{\frac{p}{2}}$. (Fig. 1).

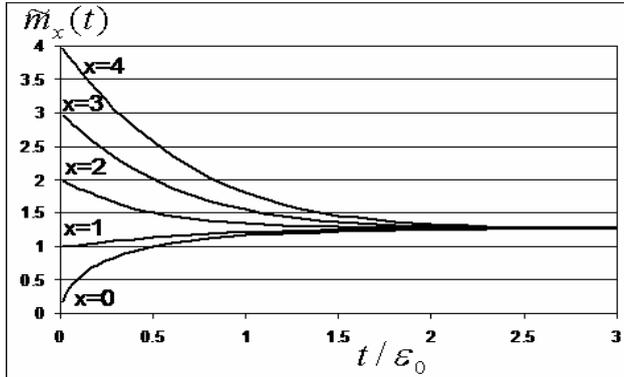


Figura 1. La función de reconstrucción extrapolación.

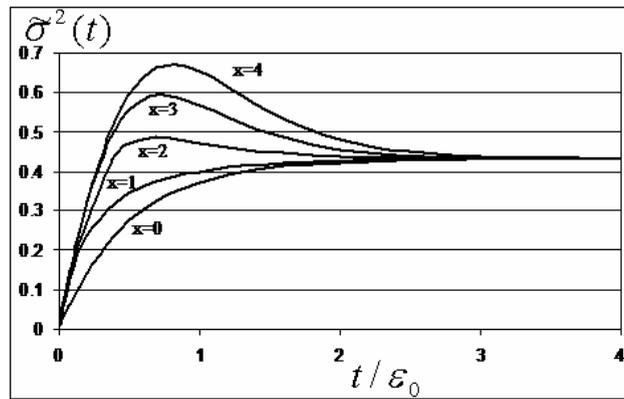


Figura 2. La función de error extrapolación del proceso Markoviano de Rayleigh para distintas muestras X_1 .

Sus máximos son grandes entonces la varianza $s_x^2 = (2 - p/2)s^2$ de la fdp de Rayleigh en el régimen estacionario. El valor más grande x_i , el más grande del máximo de la ola, y la duración de la ola incrementa.

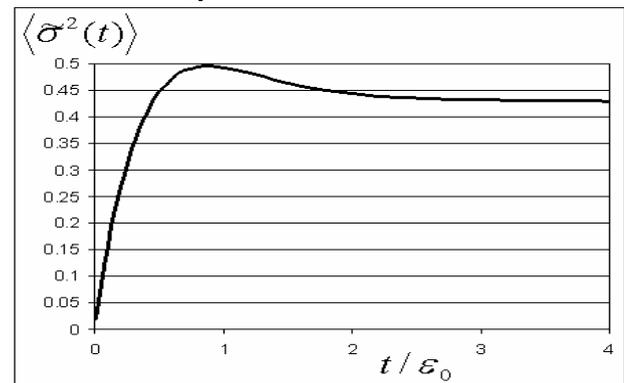


Figura 3. Promedio de la función de error de reconstrucción del proceso Markoviano de Rayleigh para distintas muestras X_1 .

Los resultados de las cálculaciones con base en (8)-(11) de las funciones de reconstrucción para el procedimiento de

interpolación con las dos muestras conocidas $x_1(T_1)$ y $x_2(T_2)$ son presentadas en la Fig. 4 para un intervalo de discretización más grande $\Delta T = 4/e_0$.

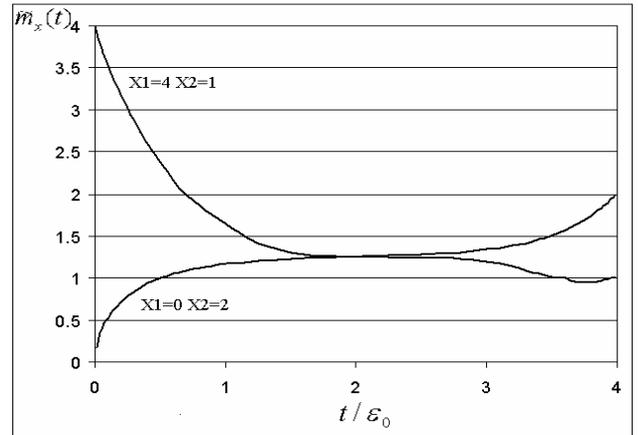


Figura 4. Funciones de reconstrucción interpolación del proceso Markoviano de Rayleigh para los pares de muestras $X_1=4, X_2=1$ y $X_1=0, X_2=2$, con un intervalo ΔT igual a $4/e_0$.

Como uno puede ver, las curvas pasan a través de las muestras y cercanamente a la mitad del intervalo de discretización son iguales a la media incondicional m_x . Las curvas análogas para un intervalo de discretización más pequeño $\Delta T = 1/e_0$ son graficadas en la Fig. 5.

Las gráficas de las funciones de error de reconstrucción $a_2^x(t)$ son presentadas en la Fig. 6 y Fig. 8 para diferentes intervalos de discretización.

Los valores de las muestras $x_1(T_1)$ y $x_2(T_2)$ son los parámetros para estas curvas. Como uno puede ver, cuando el intervalo de discretización es más grande ($\Delta T = 4/e_0$) las curvas de error tienen las olas cerca de las muestras grandes. Cuando el intervalo de discretización es más pequeño ($\Delta T = 1/e_0$) las curvas no tienen las olas. Si el valor de la muestra es grande, la función de error incrementa.

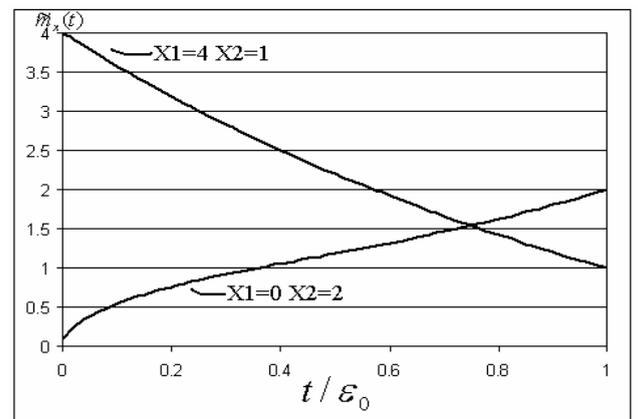


Figura 5. Funciones de reconstrucción interpolación del proceso Markoviano de Rayleigh para los pares de muestras $X_1=4, X_2=1$ y $X_1=0, X_2=2$. el intervalo de muestreo ΔT es igual a $1/e_0$.

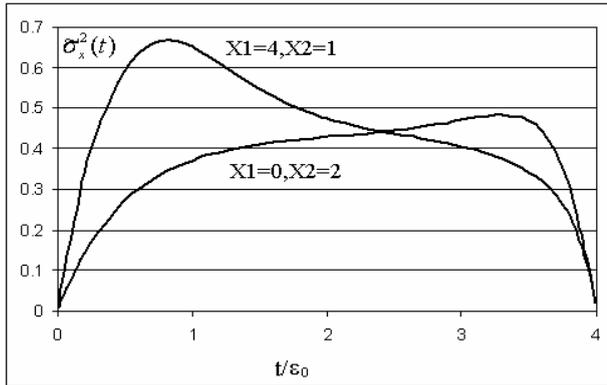


Figura 6. Funciones de error de reconstrucción para un intervalo ΔT igual a $4/\epsilon_0$.

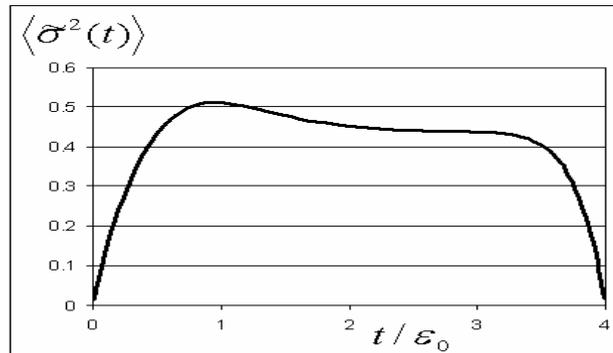


Figura 7. Promedio de la función de error de reconstrucción para un intervalo ΔT igual a $4/\epsilon_0$.

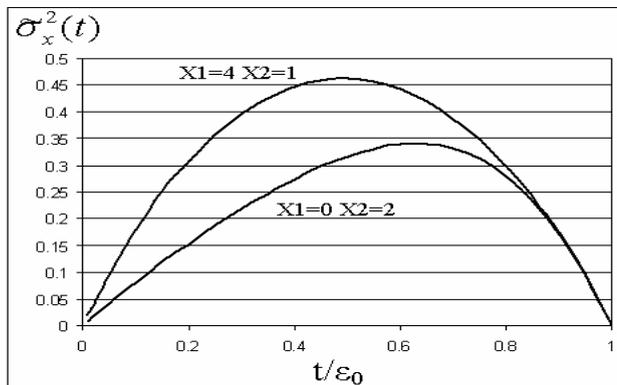


Figura 8. Funciones error de reconstrucción para un intervalo $\Delta T = 1/\epsilon_0$.

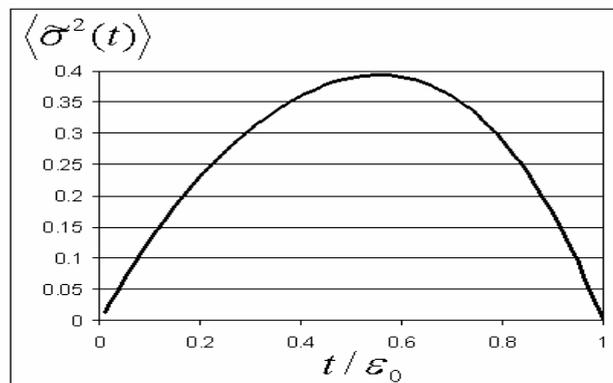


Figura 9. Promedio para funciones error de reconstrucción para un intervalo $\Delta T = 1/\epsilon_0$.

Porque no tenemos una expresión para la función de reconstrucción, es imposible demostrar analíticamente la dependencia no lineal de esta función sobre las muestras dadas. Pero es claro que tal dependencia no lineal existe, porque el resultado de la integración:

$$\tilde{m}_x(t) = \int x(t) \mathbf{w}(x(t) | x_1(T_1); x_2(T_2)) dx(t), \quad (12)$$

con las funciones (8), (10), y (11) no será una función lineal de las muestras.

2.3 Ejemplo. El PMR del proceso Markoviano con la fdp gamma

Consideremos el proceso de Markov con la ley de distribución gamma. Este proceso es caracterizado por las siguientes expresiones: la fdp unidimensional es:

$$\mathbf{w}(x) = \frac{x^a}{\Gamma(a+1)} \exp(-x), \quad a > 1, \quad (13)$$

donde $\Gamma(a+1)$ es la función gamma; la fdp de transición es:

$$\mathbf{w}(x_t | x_1) = \frac{1}{1-Q} \left(\frac{x_t}{x_1 Q} \right)^{a/2} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q} \right) I_a \left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q} \right), \quad (14)$$

donde $x_t = x(t)$; $x_1(T_1)$; I_a es la función de Bessel del argumento imaginario de orden a ; $Q = \exp(-0.5 \epsilon_0 t)$; ϵ_0 es el parámetro del proceso $x(t)$.

Ahora consideramos el caso particular de (14) cuando $a=0$. En este caso la ley de distribución gamma se transforma en la fdp *exponencial* y la fdp de transición (14) es caracterizada por la fórmula:

$$\mathbf{w}(x_t | x_1) = \frac{1}{1-Q} \exp\left(-\frac{x_t + Qx_1}{1-Q} \right) I_0 \left(\frac{2\sqrt{x_t x_1}}{1-Q} \right). \quad (15)$$

Los resultados de los cálculos numéricos de las características de extrapolación del SRP son presentados en las Figs. 10 y 11:

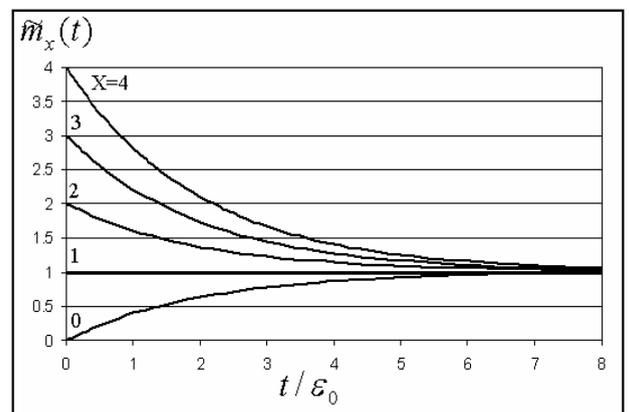


Figura 10. La función de reconstrucción extrapolación del proceso Markoviano con la distribución exponencial para distintas muestras X_1 .

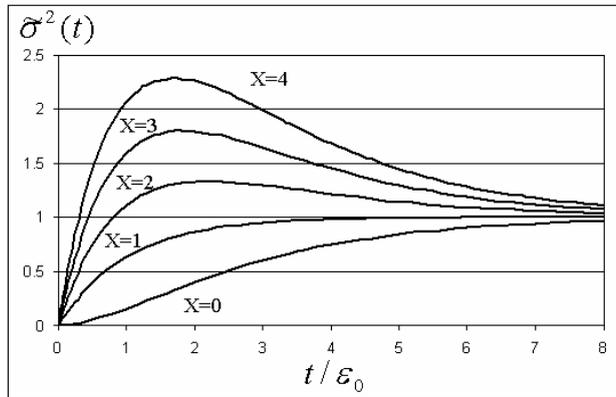


Figura 11. Función de error de reconstrucción del proceso Markoviano con la distribución exponencial para distintas muestras X_1 .

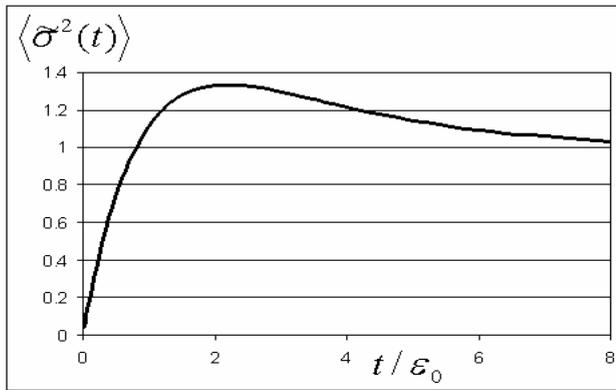


Figura 12. Promedio de función de error de reconstrucción extrapolación del proceso Markoviano con la distribución exponencial.

El parámetro de las curvas es el valor de la muestra X_1 . Las curvas tienen las asíntotas $\tilde{m}_x(t) \rightarrow m_x = 1$ y $\mathcal{S}_x^2(t) \rightarrow \mathcal{S}_2^x = 1$. Los resultados de los cálculos numéricos de las características de interpolación del PMR son presentados en las Fig. 13 – Fig. 18 para distintos intervalos de discretización $\Delta T = 8/e_0$ y $\Delta T = 1/e_0$. Las particularidades de estas graficas son las mismas que en el caso de PMR del proceso de Rayleigh.

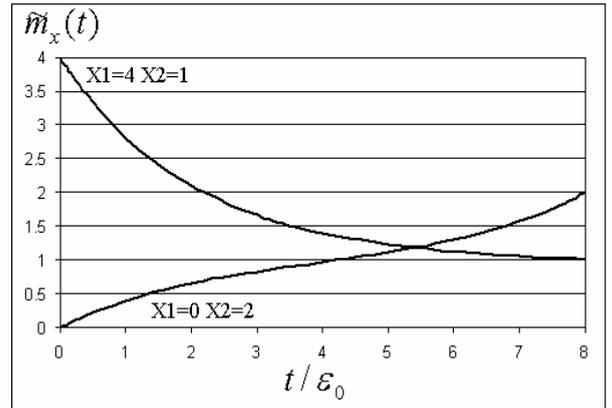


Figura 13. Funciones de reconstrucción interpolación para un proceso con la distribución exponencial, para pares de muestras $X_1=4, X_2=1, X_1=0, X_2=2$. $\Delta T = 8/e_0$.

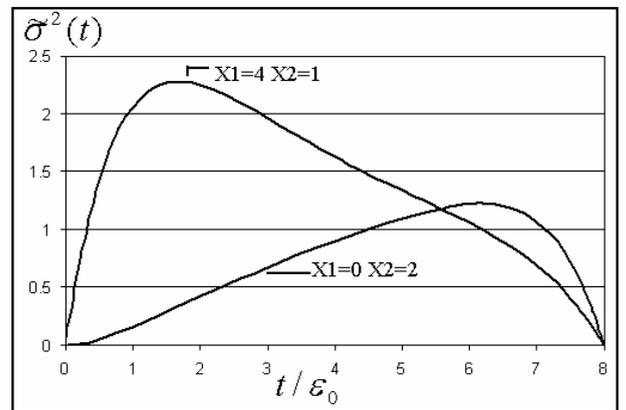


Figura 14. Funciones de error de reconstrucción para un proceso con la distribución exponencial, para una $\Delta T = 8/e_0$.

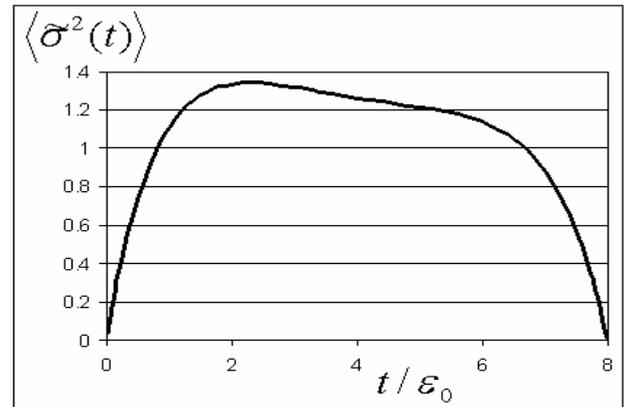


Figura 15. Promedio de funciones de error de reconstrucción para un proceso con la distribución exponencial, para una $\Delta T = 8/e_0$.

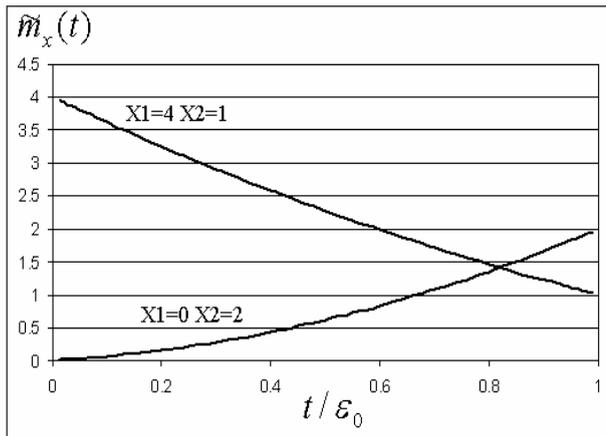


Figura 16. Funciones de reconstrucción interpolación para un proceso con la distribución exponencial, para pares de muestras $X1=4$ $X2=1$, $X1=0$ $X2=2$. $\Delta T = 1/e_0$.

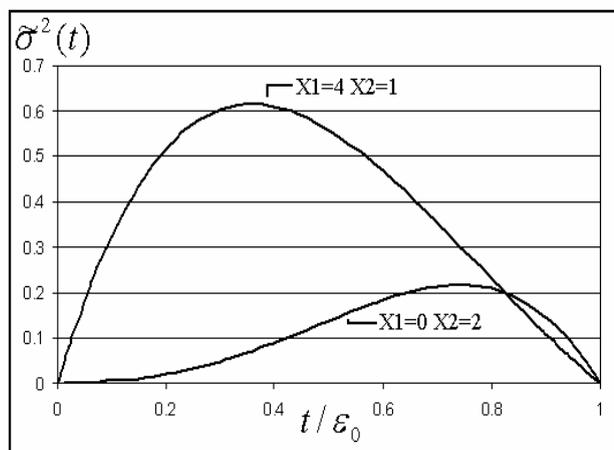


Figura 17. Funciones de error de reconstrucción para un proceso con la distribución exponencial, para los pares de muestras $X1=4$, $X2=1$ y para $X1=0$, $X2=2$. $\Delta T = 1/e_0$.

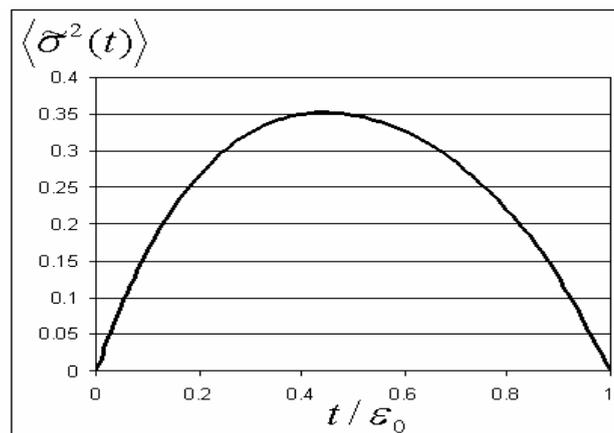


Figura 18. Promedio de funciones de error de reconstrucción para un proceso con la distribución exponencial con $\Delta T = 1/e_0$.

3. CONCLUSIONES

El método de la regla de la esperanza matemática es aplicado a la descripción estadística del PMR de algunos procesos no Gaussianos. El PMR de dos procesos continuos de Markov con las distribuciones de Rayleigh y gamma son dados. Se mostraron que: i) la función de reconstrucción es una función no lineal de la cantidad de muestras; ii) la función de error depende de la cantidad de muestras.

REFERENCIAS

- [1] A. Balakrishnan. A note on the sampling principle for continuous signals. *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. 3, pp. 143-146, junio 1957.
- [2] H. Cramer. *Mathematical methods of statistics*. Princeton University Press, 1946.
- [3] V.A.Kazakov. Kinetic coefficients in the direct equations for non-differentiable processes with aftereffect. *Radiophysics and quantum electronics*, vol. 29, No 11, pp. 1012-1020, November, 1986.
- [4] V.A.Kazakov. The Evolution of Moment and Cumulant Functions in the Generalized Fokker-Planck-Kolmogorov equation. *Izv. Vuzov-Radiofizika*, vol. 30, 1987, No 8, pp. 1042-1045.
- [5] R.L. Stratonovich. *Topics in the Theory of Random Noise*. New York: Gordon and Breach, 1963.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. Zayed and P.L. Búster. “Lagrange Interpolation and Sampling Theorems” En F. Marvasti, Editor. *“Nonuniform Sampling: Theory and Practice”*, Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, p. 924, 2001.
- [2] E.T: Whittaker. “On the Functions which are Represented by the Expansion of the Interpolation Theory”, *Proc. Royal Society of Edinburgh*, Vol. 35, pp. 181-194, 1915.
- [3] V. A. Kotel’nikov. “On the Transmission Capacity of the “Ether” and Wire in Electrocommunications”, *Izd. Red. Upr. Suyazi RKKA*, Moscow, 1933.
- [4] C. E. Shannon. “A Mathematical Theory of Communication”, *Bell System Technical Journal*, Vol. 27, pp. 379-423, 623-656, 1948.
- [5] C. E. Shannon. “Communication in Presence of Noise”, *Proc. IRE*, Vol. 37, pp. 10-21, 1949.
- [6] H. Nyquist. “Certain Topics in Telegraph Transmission Theory”, *AIEE Trans.*, vol. 47, pp. 617-644, 1928.
- [7] A. V. Balakrishnan. “A Note on the Sampling Principle for Continuous Signals”, *IRE Trans. on Inf. Theory*, Vol. IT-3, pp. 143-146, 1957.
- [8] D. A. Linden, N. M. Abramson. “A Generalization of the Sampling Theorem”, *Inf. and Control*, Vol. 3, pp. 26-31, 1960.
- [9] D. P. Petersen and D. Middleton. “Sampling and Reconstruction of Wave Number-Limited Functions in N Dimensional Euclidean Spaces”, *Information and Control*, Vol. 5, pp. 279-323, 1962.
- [10] A. J. Jerri. “The Shannon Sampling Theorem –Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Review”, *Proc. IEEE*, Vol. 65, No. 11, pp. 1565-1596, 1977.
- [11] R. J. Marks II, Editor, *“Advanced Topics on Shannon Sampling and Interpolation Theory”*, Springer-Verlag, New York, 360 p., 1993.
- [12] F. Marvasti, Editor. *“Nonuniform Sampling: Theory and Practice”*, Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, p. 924, 2001.
- [13] A. I. Zayed. *“Advances in Shannon’s Sampling Theory”*, Boca Raton: CRC Press, 334 p., 1993.
- [14] M. Zakai. “Band-Limited Functions and the Sampling Theorem”, *Information and Control*, Vol. 8, pp. 143-158, 1965.
- [15] W. A. Gardner. “A Sampling Theorem for Nonstationary Random Processes”, *IEEE Trans. on Information theory*, Vol. IT-18, pp. 808-809, Nov.1972.
- [16] Z. A. Piranashvili. “On the Problem of Interpolation of Stochastic Processes”, *Theory of Probability and its Applications*, Vol. 12, pp. 647-657, 1967.
- [17] B. D. Sharma and F. C. Metha. “A Generalized Sampling Theorem for Nonstationary Processes”, *J. Cybernetics*, pp. 87-95, 1974.
- [18] J. J. Clark, M. R. Palmer, P. D. Lawrence. “A Transformation Method for the Reconstruction of Functions from Nonuniformly Spaced Samples”, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-33, No. 4, pp. 1151-1165.

- [19] Y. Y. Zeevi and E. Shlomot. "Nonuniform Sampling and Antialiasing in Image Representation", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 41, No. 3, pp 1223-1236, Mar. 1993.
- [20] R. G. Brown, P. Y. C. Hwang. "Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering", 3rd Edition, N. Y.: J. Wiley & Sons, 1997.
- [21] D. Middleton. "An Introduction to Statistical Communication Theory", N. Y.: IEEE Press. 1996.
- [22] L. W. Couch, II. "Digital and Analog Communication Systems", 5th Edition Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1997.
- [23] W. B. Davenport, Jr. And W. L. Root. "An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise", McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.
- [24] R. L. Stratonovich. *Topics in the Theory of Random Noise*. New York: Gordon and Breach, 1963.
- [25] V. I. Tikhonov. "Las transformaciones no lineales de los procesos aleatorios", Moscú, Radio i Sviaz, 1986.
- [26] V. A. Kazakov. "Sampling-Reconstruction Procedure of Some non Gaussian Stochastic Processes", 2002.
- [27] V. A. Kazakov, S. A. Afrikanov, M. A. Beliaev. *Comparison of two algorithms of the realization restorations using random numbers of counts*. Radioelectronics and Communication Systems. Vol. 37. pp. 43-45. #4. 1994.
- [28] V. A. Kazakov, M. A. Beliaev. *Reconstruction of realizations of Gaussian processes from readings of the process and linear transformation of it*. Telecommunications and Radioengineering. Vol. 49. pp. 97-102. #9. 1995.
- [29] V. A. Kazakov, M. A. Beliaev. *Sample-reconstruction procedure of some nonstationary processes*. Radioelectronics and Communication Systems. Vol. 40, #9, pp. 43-49. 1997.
- [30] V. A. Kazakov, M. A. Beliaev. *Sampling Reconstruction Procedure for Non-Stationary Gaussian processes based on Conditional Expectation rule*. Sampling Theory in Signal and Image Processing. Vol. 1, #2, May 2002, pp. 135-153.
- [31] V. A. Kazakov. *Regeneration of samples of random processes following nonlinear inertialess conversions*. Telecommunication and Radioengineering. Vol. 45. pp. 94-96. #10, 1988.
- [32] V. A. Kazakov, S. Sánchez. *Sampling-Reconstruction Procedure of Random Processes at the Output of Exponential Non-Linear Converters*. Electromagnetic Waves and Electronic Systems. Vol. 8, #7-8, 2003, pp. 77-80.
- [33] V. A. Kazakov, César Hernández. *Procedimiento de muestreo y reconstrucción de algunos procesos estocásticos Markovianos no Gaussianos*. Memorias del 7^o. Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. SEPI-ESIME, 2003.