

**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**



**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA  
MECÁNICA Y ELÉCTRICA**



**SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

**INVESTIGACIÓN DE LOS ALGORITMOS ÓPTIMOS Y NO  
ÓPTIMOS DE MUESTREO – RECONSTRUCCIÓN DE  
ALGUNOS PROCESOS NO GAUSSIANOS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN  
INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIONES**

**PRESENTA:**

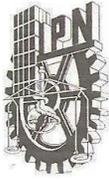
**ING. YAIR FÉLIX OLVERA MEJÍA**

**DIRECTOR DE TESIS:**

**DR. VLADIMIR KAZAKOV**

**MÉXICO, D. F.**

**DICIEMBRE DE 2009**



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

SIP-14

**ACTA DE REVISIÓN DE TESIS**

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 12:30 horas del día 26 del mes de Noviembre del 2009 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E. S. I. M. E. para examinar la tesis de titulada:

**“INVESTIGACIÓN DE LOS ALGORITMOS ÓPTIMOS Y NO ÓPTIMOS DE MUESTREO-RECONSTRUCCIÓN DE ALGUNOS PROCESOS NO GAUSSIANOS”.**

Presentada por el alumno:

**OLVERA**

Apellido paterno

**MEJIA**

Apellido materno

**YAIR FELIX**

Nombre(s)

Con registro: 

A	0	8	0	2	8	1
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIONES**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

**LA COMISION REVISORA**

Director de tesis

DR. VLADIMIR KAZAKOV

Segundo Vocal

Presidente

DR. MAURO ALBERTO ENCISO AGUILAR

Tercer Vocal

DR. FRANCISCO JAVIER GALLEGOS FUNES

Secretario

DR. OLEKSIY POGREBNIYAK

Suplente

M. EN C. MIGUEL SÁNCHEZ MERAZ

DR. MARTHA CECILIA GALAZ LARIOS

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. JAIME ROBLES GARCIA





**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

**CARTA CESIÓN DE DERECHOS**

En la Ciudad de México, Distrito Federal, el día 16 del mes de diciembre del año 2009, el (la) que suscribe Yair Félix Olvera Mejía alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Telecomunicaciones con número de registro A080281, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Vladimir Kazakov y cede los derechos del trabajo titulado Investigación de los algoritmos óptimos y no óptimos de Muestreo – Reconstrucción de algunos procesos no Gaussianos, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección yairfom@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

---

Yair Félix Olvera Mejía

## *\*AGRADECIMIENTOS\**

*A mis padres, Félix e Imelda, por ayudarme a cumplir todos mis sueños y a ser una mejor persona.*

*A mis hermanas, Talina y Mahetzy, a quienes admiro por todos sus logros y son un modelo a seguir.*

*A mi tía Reme, por todo su apoyo mostrado día con día.*

*Al Dr. Kazakov, por brindarme sus conocimientos y demás enseñanzas muy valiosas.*

*A mis amigos, por las experiencias agradables que comparten conmigo.*

**A TODOS, MUCHAS GRACIAS!!!**

# CONTENIDO

---

Lista de símbolos	iii
Índice de tablas	iv
Índice de figuras	iv
Objetivos	xi
Justificación	xi
Resumen	xii
Abstract	xiii
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Teoremas de muestreo	1
1.2 Teorema de Balakrishnan	4
1.2.1 Observaciones en relación al teorema de Balakrishnan	5
1.3 Procesos aleatorios estacionarios	6
1.4 Función de covarianza	7
1.5 Sistemas no lineales no inerciales	9
1.6 Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción en la salida de dispositivos no lineales	11
1.7 Consideraciones de este trabajo	13
<b>2 Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción de procesos aleatorios Gaussianos</b>	<b>15</b>
2.1 Introducción	15
2.2 Respuesta de un sistema lineal con procesos aleatorios	17
2.3 Propiedades de los procesos Gaussianos	19
2.4 Regla de la esperanza matemática condicional	19
2.5 Reconstrucción del proceso en la salida de filtros <i>RC</i>	23
2.5.1 Procesos Markovianos	24
2.5.2 Procesos no Markovianos con filtros <i>RC</i> de dos etapas	28
2.5.3 Procesos no Markovianos con filtros <i>RC</i> de tres etapas	32
2.6 La función <i>sen c</i> como un caso particular	35
2.7 Comparación de los procedimientos de reconstrucción	41
2.8 Resumen	44
<b>3 Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción de procesos aleatorios de Rayleigh</b>	<b>45</b>
3.1 Introducción	45
3.2 Funciones de momentos condicionales	48
3.3 Características estadísticas del proceso	48
3.4 Algoritmo óptimo	50
3.5 Algoritmo no óptimo	51
3.6 Reconstrucción en la región de extrapolación	51
3.6.1 Algoritmos óptimos y no óptimos de procesos Markovianos	53
3.6.2 Algoritmos óptimos y no óptimos de procesos no Markovianos	56
3.7 Reconstrucción en la región de interpolación	58
3.7.1 Algoritmos óptimos y no óptimos de procesos Markovianos	60
3.7.2 Algoritmos óptimos y no óptimos de procesos no Markovianos	63
3.8 Resumen	66

<b>4</b>	<b>Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción de procesos aleatorios en la salida de un convertidor exponencial</b>	<b>67</b>
4.1	Introducción	67
4.2	Funciones de momentos en la salida	68
4.3	Características del proceso en la salida	69
4.3.1	Función de Densidad de Probabilidad	70
4.3.2	Esperanza matemática	71
4.3.3	Varianza	71
4.3.4	Función y tiempo de covarianza	72
4.4	Algoritmo óptimo	73
4.5	Algoritmo no óptimo	74
4.6	Reconstrucción en la región de extrapolación	74
4.6.1	Algoritmos óptimos y no óptimos de procesos Markovianos	76
4.6.2	Algoritmos óptimos y no óptimos de procesos no Markovianos	79
4.7	Reconstrucción en la región de interpolación	84
4.7.1	Algoritmos óptimos y no óptimos de procesos Markovianos	85
4.7.2	Algoritmos óptimos y no óptimos de procesos no Markovianos	89
4.8	Resumen	96
<b>5</b>	<b>Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción de procesos aleatorios en la salida de un convertidor polinomial</b>	<b>97</b>
5.1	Introducción	97
5.2	Funciones de momentos en la salida	98
5.3	Características del proceso en la salida	99
5.3.1	Función de Densidad de Probabilidad	99
5.3.2	Esperanza matemática	100
5.3.3	Varianza	100
5.3.4	Función y tiempo de covarianza	101
5.4	Algoritmo óptimo	101
5.5	Algoritmo no óptimo	104
5.6	Reconstrucción en la región de extrapolación	105
5.6.1	Algoritmos óptimos y no óptimos de procesos Markovianos	108
5.6.2	Algoritmos óptimos y no óptimos de procesos no Markovianos	117
5.7	Reconstrucción en la región de interpolación	123
5.7.1	Algoritmos óptimos y no óptimos de procesos Markovianos	123
5.7.2	Algoritmos óptimos y no óptimos de procesos no Markovianos	133
5.8	Resumen	141
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>143</b>
6.1	Trabajos a futuro	146
Apéndices:		
A.	Programas de cómputo	147
B.	Artículos escritos	153
<b>Referencias</b>		<b>155</b>

# LISTA DE SÍMBOLOS

---

$\alpha$	El inverso de la constante de tiempo de un filtro $RC$ , donde $\alpha = 1/RC$ .
$a_{ij}$	Elementos de la matriz de covarianza inversa.
$b_j(t)$	Función básica de la $j$ -enésima muestra.
$C$	Constante de normalización de la función de covarianza.
$\Delta T$	Intervalo de muestreo.
$h(t)$	Respuesta al impulso.
$H(j\omega)$	Función de transferencia de un sistema lineal.
$I_0$	Función Bessel modificada de orden cero.
$i, j, k, m, n, x, y$	Variables enteras.
$K_x(\tau)$	Función de covarianza.
$a_0, \beta$	Constantes.
$m(t)$	Función de la esperanza matemática.
$\tilde{m}(t)$	Función de la esperanza matemática condicional.
$n(t)$	Ruido blanco Gaussiano.
$\eta(t)$	Proceso aleatorio en la salida.
$P(x)$	Probabilidad de la variable aleatoria $x$ .
$Q$	Función auxiliar empleada como función de covarianza.
$R(x)$	Función de covarianza normalizada.
$\sigma^2(t)$	Función de la varianza matemática
$\tilde{\sigma}^2(t)$	Función de la varianza matemática condicional
$S_x(\omega)$	Densidad espectral de potencia.
$t$	Tiempo.
$\tau$	Variable independiente de la función de covarianza, $\tau = t_2 - t_1$ .
$\tau_c$	Tiempo de covarianza.
$T_i$	Instante de muestreo de la $i$ -enésima muestra.
$u(t), \xi(t)$	Proceso aleatorio en la entrada.
$\omega_m[x(t)]$	Función de densidad de probabilidad de orden $m$ .
$\omega$	Frecuencia angular en radianes, $\omega = 2\pi W$ .
$\omega_b$	Frecuencia restringida de un espectro de potencia.
$W$	Máxima componente de frecuencia de una señal en Hz.
$x(t)$	Proceso aleatorio.
$\tilde{x}(t)$	Proceso aleatorio condicional.
$x(T_i)$	Valor de una muestra de un proceso aleatorio en un instante de tiempo $T_i$ .
$\langle \rangle$	Operador del promedio estadístico.
$\Xi_m(u)$	Función característica de $m$ dimensiones.

## ÍNDICE DE TABLAS

---

2.1	Valores de muestreo de procesos Gaussianos con $\Delta T = 0.5$	25
2.2	Valores de muestreo de procesos Gaussianos con $\Delta T = 2$	27
2.3	Valores de muestreo de procesos Gaussianos con 23 muestras y $\Delta T = 0.5$	41
3.1	Valores de muestreo de procesos Markovianos y no Markovianos de Rayleigh en la región de extrapolación	52
3.2	Valores de muestreo de procesos Markovianos y no Markovianos de Rayleigh en la región de interpolación	58
4.1	Valores de muestreo de procesos Markovianos y no Markovianos en la salida del convertidor exponencial en la región de extrapolación	76
4.2	Tiempos de covarianza de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial	86
4.3	Valores de muestreo de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial en la región de interpolación	86
4.4	Valores de muestreo de procesos no Markovianos en la salida de un convertidor exponencial en la región de interpolación	90
5.1	Valores de muestreo de procesos Markovianos y no Markovianos en la salida del convertidor polinomial en la región de extrapolación	105
5.2	Tiempos de covarianza de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial	124
5.3	Valores de muestreo de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial de tercer orden en la región de interpolación	124
5.4	Valores de muestreo de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial de quinto orden en la región de interpolación	128
5.5	Tiempos de covarianza de procesos no Markovianos con filtros <i>RC</i> de dos etapas en la salida del convertidor polinomial	133
5.6	Valores de muestreo de procesos no Markovianos en la salida del convertidor polinomial de tercer orden en la región de interpolación	134
5.7	Tiempos de covarianza de procesos no Markovianos con filtros <i>RC</i> de tres etapas en la salida del convertidor polinomial	137
5.8	Valores de muestreo de procesos no Markovianos en la salida del convertidor polinomial de quinto orden en la región de interpolación	138

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

1.1	Función de covarianza $K_x(\tau)$ teniendo: a) Un proceso suave, b) Un proceso caótico	8
1.2	Sistema de comunicaciones	9
1.3	Relación funcional entre el proceso de salida $\eta(t)$ y el proceso de entrada $\xi(t)$	13
2.1	Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria Gaussiana	16
2.2	Posibles realizaciones de un proceso aleatorio condicional dado un conjunto de muestras $X, T$	20
2.3	Transformaciones lineales del proceso aleatorio Gaussiano cuando pasa a través del filtro <i>RC</i> de a) Una etapa, b) Dos etapas, c) Tres etapas, teniendo como entrada ruido blanco Gaussiano	23

2.4	Funciones básicas de un proceso Markoviano con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 0.5$	25
2.5	Función de reconstrucción de un proceso Markoviano con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 0.5$	26
2.6	Función de error de reconstrucción de un proceso Markoviano con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 0.5$	26
2.7	Funciones básicas de un proceso Markoviano con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 2$	27
2.8	Función de reconstrucción de un proceso Markoviano con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 2$	27
2.9	Función de error de reconstrucción de un proceso Markoviano con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 2$	28
2.10	Funciones básicas de un proceso no Markoviano con filtros <i>RC</i> de dos etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 0.5$	29
2.11	Función de reconstrucción de un proceso no Markoviano con filtros <i>RC</i> de dos etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 0.5$	30
2.12	Función de error de reconstrucción de un proceso no Markoviano con filtros <i>RC</i> de dos etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 0.5$	30
2.13	Funciones básicas de un proceso no Markoviano con filtros <i>RC</i> de dos etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 2$	31
2.14	Función de reconstrucción de un proceso no Markoviano con filtros <i>RC</i> de dos etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 2$	31
2.15	Función de error de reconstrucción de un proceso no Markoviano con filtros <i>RC</i> de dos etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 2$	32
2.16	Funciones básicas de un proceso no Markoviano con filtros <i>RC</i> de tres etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 0.5$	33
2.17	Función de reconstrucción de un proceso no Markoviano con filtros <i>RC</i> de tres etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 0.5$	34
2.18	Función de error de reconstrucción de un proceso no Markoviano con filtros <i>RC</i> de tres etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 0.5$	34
2.19	Función de reconstrucción obtenida con un filtro ideal con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 0.5$	40
2.20	Función de error de reconstrucción obtenida con un filtro ideal con seis muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 0.5$	41
2.21	Funciones de reconstrucción obtenidas con cuatro diferentes tipos de filtros con 23 muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 0.5$	42
2.22	Función de error de reconstrucción obtenidas con cuatro diferentes tipos de filtros con 23 muestras tomadas en un intervalo de $\Delta T = 0.5$	43
3.1	Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria de Rayleigh	46
3.2	Función de covarianza de Rayleigh	49
3.3	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo	54
3.4	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo	55
3.5	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de extrapolación	55
3.6	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos de Rayleigh con filtros <i>RC</i> de dos etapas en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo	56
3.7	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos de Rayleigh con filtros <i>RC</i> de dos etapas en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo	57

3.8	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos de Rayleigh con filtros RC de dos etapas en la región de extrapolación	58
3.9	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de interpolación con $\Delta T = 0.5$ . Algoritmo óptimo	60
3.10	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de interpolación con $\Delta T = 0.5$ . Algoritmo no óptimo	61
3.11	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de interpolación con $\Delta T = 0.5$	62
3.12	Comparación de los algoritmos en la función de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de interpolación con $\Delta T = 1.5$	62
3.13	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de interpolación con $\Delta T = 1.5$	63
3.14	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos de Rayleigh con filtros RC de dos etapas en la región de interpolación con $\Delta T = 2$ . Algoritmo óptimo	64
3.15	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos de Rayleigh con filtros RC de dos etapas en la región de interpolación con $\Delta T = 2$ . Algoritmo no óptimo	65
3.16	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos de Rayleigh con filtros RC de dos etapas en la región de interpolación con $\Delta T = 2$	65
4.1	No linealidad del convertidor exponencial	68
4.2	No linealidad del convertidor exponencial con diferentes valores de $a_0$ y $\beta$	75
4.3	Función de Densidad de Probabilidad de no linealidades exponenciales	75
4.4	Función de covarianza en la salida de no linealidades exponenciales	76
4.5	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$ en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo	77
4.6	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$ en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo	79
4.7	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$ en la región de extrapolación	80
4.8	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = \exp[0.5\xi(t)]$ en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo	81
4.9	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = \exp[0.5\xi(t)]$ en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo	82
4.10	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = \exp[0.5\xi(t)]$ en la región de extrapolación	83
4.11	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = 1.5\exp[\xi(t)]$ en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo	83
4.12	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = 1.5\exp[\xi(t)]$ en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo	85
4.13	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = 1.5\exp[\xi(t)]$ en la región de extrapolación	86
4.14	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.1$ . Algoritmo óptimo	87

4.15	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.1$ . Algoritmo no óptimo	88
4.16	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.1$	88
4.17	Comparación de los algoritmos en la función de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$ en la región de interpolación con $\Delta T = 1.5$	89
4.18	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$ en la región de interpolación con $\Delta T = 1.5$	90
4.19	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = \exp[0.5\xi(t)]$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.1$ . Algoritmo óptimo	91
4.20	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = \exp[0.5\xi(t)]$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.1$ . Algoritmo no óptimo	92
4.21	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = \exp[0.5\xi(t)]$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.1$	92
4.22	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = 1.5\exp[\xi(t)]$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.1$ . Algoritmo óptimo	93
4.23	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = 1.5\exp[\xi(t)]$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.1$ . Algoritmo no óptimo	94
4.24	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = 1.5\exp[\xi(t)]$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.1$	95
4.25	Comparación de los algoritmos en la función de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = 1.5\exp[\xi(t)]$ en la región de interpolación con $\Delta T = 1.5$	95
4.26	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor exponencial $\eta(t) = 1.5\exp[\xi(t)]$ en la región de interpolación con $\Delta T = 1.5$	96
5.1	No linealidad del convertidor polinomial	98
5.2	No linealidades del convertidor polinomial de tercer orden	106
5.3	Función de Densidad de Probabilidad de no linealidades polinomiales de tercer orden	106
5.4	Función de covarianza en la salida de no linealidades polinomiales de tercer orden	107
5.5	No linealidades del convertidor polinomial de quinto orden	108
5.6	Función de covarianza en la salida de no linealidades polinomiales de quinto orden	108
5.7	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$ en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo	109
5.8	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$ en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo	110
5.9	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$ en la región de extrapolación	111
5.10	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$ en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo	112

5.11	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$ en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo	113
5.12	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$ en la región de extrapolación	114
5.13	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46.\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$ en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo	115
5.14	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46.\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$ en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo	116
5.15	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46.\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$ en la región de extrapolación	117
5.16	Función de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$ en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo	118
5.17	Función de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$ en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo	119
5.18	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$ en la región de extrapolación	120
5.19	Función de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$ en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo	121
5.20	Función de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$ en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo	122
5.21	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$ en la región de extrapolación	123
5.22	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.089$ . Algoritmo óptimo	125
5.23	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.089$ . Algoritmo no óptimo	126
5.24	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.089$	126
5.25	Comparación de los algoritmos en la función de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 1.5$	127
5.26	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 1.5$	127
5.27	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.038$ . Algoritmo óptimo	128
5.28	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.038$ . Algoritmo no óptimo	129

5.29	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.038$	130
5.30	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.046$ . Algoritmo óptimo	130
5.31	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.046$ . Algoritmo no óptimo	131
5.32	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.046$	131
5.33	Comparación de los algoritmos en la función de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 1.5$	132
5.34	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 1.5$	133
5.35	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.0792$ . Algoritmo óptimo	134
5.36	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.0792$ . Algoritmo no óptimo	135
5.37	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción para procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.0792$	136
5.38	Comparación de los algoritmos en la función de reconstrucción para procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 1.5$	136
5.39	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción para procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 1.5$	137
5.40	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.0216$ . Algoritmo óptimo	138
5.41	Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.0216$ . Algoritmo no óptimo	139
5.42	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción para procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 0.0216$	140
5.43	Comparación de los algoritmos en la función de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 1.5$	140
5.44	Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor polinomial $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$ en la región de interpolación con $\Delta T = 1.5$	141

## OBJETIVOS

---

Realizar el estudio del Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción de algunos procesos aleatorios no Gaussianos en base a dos algoritmos. Para cada uno de estos métodos de reconstrucción se toman en cuenta diferentes funciones de covarianza en la entrada, con la finalidad de calcular la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción de los procesos estocásticos teniendo los siguientes sistemas no lineales no inerciales:

- Procesos de Rayleigh
- Convertidores exponenciales
- Convertidores polinomiales de tercer y quinto orden

Comparar ambos algoritmos y en base a los resultados obtenidos demostrar que el algoritmo óptimo, formado por la regla de la esperanza matemática condicional, presenta ventajas en la descripción estadística del Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción, en relación al algoritmo no óptimo, compuesto por la función de covarianza en la salida.

## JUSTIFICACIÓN

---

Un problema fundamental de la teoría de las comunicaciones es establecer una descripción estadística que defina el comportamiento de los procesos aleatorios no Gaussianos cuando pasan a través de distintas etapas en un sistema. La mayoría de las investigaciones que abordan este asunto se fundamentan en el teorema de Balakrishnan. Pero al estudiar esta generalización del teorema clásico de muestreo, es notable que existen diversos puntos cuestionables sobre su formulación. Principalmente porque el teorema no toma en cuenta las características estadísticas del proceso, como pueden ser, la función de densidad de probabilidad, los momentos de alto orden, un número finito de muestras, entre otras.

Esto no quiere decir que el teorema de Balakrishnan sea incorrecto, simplemente se debe de especificar para qué clase de procesos estocásticos arroja resultados adecuados. Por lo que se propone emplear la regla de la esperanza matemática condicional, la cual nos permite investigar nuevos aspectos sobre este problema, considerando las propiedades fundamentales del proceso aleatorio. Para así demostrar que la función de reconstrucción de los procesos no Gaussianos es una función no lineal de sus muestras.

## RESUMEN

---

La reconstrucción de procesos estocásticos es un problema muy común en las comunicaciones. Por lo que el presente trabajo está dedicado a la descripción estadística del Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción de procesos no Gaussianos. Esto se realiza investigando dos algoritmos de reconstrucción: el algoritmo óptimo y el algoritmo no óptimo. El primero de ellos se basa en la regla de la esperanza matemática condicional y considera las principales propiedades del proceso estocástico. Mientras que el segundo toma únicamente la función de covarianza en la salida. Se comparan ambos algoritmos para establecer bajo qué condiciones se debe utilizar cada uno para obtener resultados correctos. La principal característica de este trabajo es considerar la mayor cantidad de parámetros que permitan conocer con claridad cuál es el medio correcto para reconstruir un proceso aleatorio. Por lo tanto, el estudio abarca diversos sistemas no lineales no inerciales, como son: procesos de Rayleigh, y convertidores exponenciales y polinomiales.

El teorema de Balakrishnan menciona que todo proceso aleatorio estacionario con densidad espectral finita puede ser reconstruido sin tener error únicamente mediante su función de covarianza o por su espectro de potencia. Aunque es un teorema muy utilizado, surgen dudas sobre su generalización hacia todo proceso estocástico, debido a que su formulación sigue un patrón de características exclusivas de los procesos Gaussianos ó lineales. Por lo que en la presente investigación se le denomina algoritmo no óptimo.

La metodología propuesta y empleada en este estudio se basa en la regla de la esperanza matemática condicional. La cual permite reconstruir un proceso aleatorio no Gaussiano mediante el conocimiento de las características estadísticas del proceso de entrada, la función de transferencia del proceso no lineal, el conjunto de muestras en la salida, y demás propiedades del proceso. Por lo que se le llama algoritmo óptimo.

Bajo estas dos formulaciones se obtienen las funciones de reconstrucción y funciones de error de reconstrucción para los sistemas no lineales ya mencionados. Los resultados demuestran que el algoritmo no óptimo refleja una reconstrucción con funciones lineales, como si se tratase de un proceso Gaussiano. Mientras que en el algoritmo óptimo la reconstrucción es una función no lineal de las muestras, lo que concuerda con las características de un proceso no Gaussiano.

# ABSTRACT

---

The reconstruction of stochastic processes is a very common problem in communications. Therefore, the present work is devoted to the statistical description of the Sampling - Reconstruction Procedure of non Gaussian processes. This is done investigating two reconstruction algorithms: the optimal algorithm and the non optimal algorithm. The first one is based on the conditional mean rule and considers the main properties of the stochastic process. Meanwhile, the second considers only the covariance function on the output. Comparing both algorithms, it is possible to establish under what conditions to use each one for obtaining right results. The main feature of this work is to consider the higher quantity of parameters which show clearly the right way to reconstruct a random process. The study covers various noninertial nonlinear systems, such as: Rayleigh processes, and exponential and polynomial converters.

Balakrishnan's theorem states that any stationary random process with finite spectral density can be reconstructed without error only through its covariance function or its power spectrum. Although it is a theorem so used, there are questions about its generalization to all stochastic process, because its formulation follows a kind of features unique of the Gaussian or linear processes. Because of that, it is called non optimal algorithm in this investigation.

The methodology proposed and used in this study is based on the conditional mean rule. It allows reconstructing a non Gaussian random process through knowledge of the statistical characteristics of the input process, the transfer function of the nonlinear process, the group of samples in the output, and other properties of the process. So, it is named optimal algorithm.

Under these two formulations, the reconstruction functions and the error reconstruction functions are obtained for the nonlinear systems mentioned above. The results demonstrate that the non optimal algorithm reflects a reconstruction based on linear functions, as if the process is Gaussian. The reconstruction on the optimal algorithm is a nonlinear function of the samples, that agrees with the characteristics of a non Gaussian process.

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

En el mundo práctico de la ingeniería y la ciencia, es necesario poder trabajar con formas de onda en el tiempo. Frecuentemente, se encuentran sistemas prácticos con formas de onda temporales *aleatorias*. Casi siempre, una señal *deseada* de un sistema será aleatoria. Por ejemplo, el flujo de bits en un sistema de comunicaciones binario es un mensaje aleatorio. Por otra parte, una señal deseada a menudo va acompañada de una forma aleatoria no deseada, el *ruido*, que interfiere con el mensaje y limita el rendimiento del sistema. Por tanto, para determinar el rendimiento del sistema y adaptarlo a ciertas necesidades, se deben describir y tratar dichas formas de onda, para así poder aplicar la metodología correcta que permita conocer de manera óptima al proceso aleatorio.

Un problema vital en el área de las telecomunicaciones es la reconstrucción de los procesos aleatorios a partir de un conjunto de valores de muestreo dados. Para obtener una descripción correcta del *Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción (PMR)*, es necesario detallar la teoría estadística necesaria para resolver el problema. Por su sencillez, primeramente se debe investigar el caso Gaussiano, y observando los resultados, seguir con casos más complejos y de mayor interés como son los de tipo no Gaussiano.

### 1.1 TEOREMAS DE MUESTREO

El problema de reconstrucción de una señal o de una función que pasa a través de determinados puntos conocidos como *muestras*, se ha tratado de resolver desde el siglo XIX. En un principio se utilizó la propiedad básica que tienen los polinomios algebraicos para determinar un polinomio adecuado  $P_n(x)$  que permita obtener los valores  $y_0, y_1, \dots, y_n$  de una función asociados con todas las  $n + 1$  abscisas diferentes  $t_0, t_1, \dots, t_n$ . A esta propiedad se le conoce como *fórmula de interpolación de Lagrange*:

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(t) \quad (1.1)$$

donde,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Además:

$$L_k(t) = \frac{g_{n+1}(t)}{(t-t_k)g'_{n+1}(t_k)} \quad ; \quad g_{n+1}(t) = (t-t_0)\dots(t-t_n) \quad (1.2)$$

Tales expresiones fueron presentadas en Paris en 1795 por J. L. Lagrange [1], para determinar la interpolación definida por el polinomio  $P_n(x)$  en términos de las muestras.

La interpolación entre determinados puntos de una función fue también analizado por E. T. Whittaker en 1915 [2], donde plantea el problema para encontrar los valores de una función  $f(t)$  que pasa a través de ciertos puntos  $(t_k, f_k)$  donde  $t_k = a + kw$ ,  $f_k = f(t_k)$ ,  $a, w$  son complejos y  $k \in \mathbb{Z}$ . Llamó al conjunto de todas las funciones como *conjunto cotabular* asociado con la secuencia  $\{f_k\}$  de valores conocidos y destacó a una función especial, a la cual él llamo *función cardinal del conjunto cotabular*:

$$C(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(a + kw) \frac{\operatorname{Sen} \frac{\pi}{w}(t - a - kw)}{\frac{\pi}{w}(t - a - kw)} \quad (1.3)$$

El teorema de muestreo fue presentado en 1933 en la Unión Soviética en un artículo publicado por Kotel'nikov [3]. Shannon en 1948 [4,5] utilizó el teorema de muestreo para demostrar que una señal analógica limitada en banda es equivalente a la secuencia de sus muestras tomadas a un intervalo determinado y conocido como *intervalo de Nyquist* [6]. Posteriormente, se establecieron algunas pruebas al teorema que hoy es conocido como el *teorema de muestreo de Whittaker – Kotel'nikov – Shannon (WKS)*, y dice lo siguiente:

*Toda función de una señal  $f(t)$  definida en  $\mathbb{R}$  que está limitada en banda dentro de un intervalo  $[-\omega, \omega]$  (donde  $\omega > 0$ ) puede ser completamente reconstruida con*

respecto a toda  $t \in \mathbb{R}$  partiendo de sus valores muestreados  $f(k\pi/\omega)$  que son tomados en los puntos  $k\pi/\omega$  (donde  $k \in \mathbb{Z}$ ) igualmente espaciados sobre el eje real  $\mathbb{R}$ , en términos de:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega}\right) \frac{\text{Sen}(\omega t - k\pi)}{\omega t - k\pi} \quad (1.4)$$

Cronológicamente en 1957 A. V. Balakrishnan generaliza el teorema de muestreo para procesos aleatorios estacionarios [7]. En 1960 A. Linden y N. M. Abramson [8] proporcionan una generalización mediante la expansión de las  $M$  – derivadas de una función limitada en banda, aproximándola a una serie de Taylor caracterizada con una densidad Gaussiana sobre cada muestra. En 1962 P. Petersen y D. Middleton [9] extienden el teorema de muestreo para dimensiones espaciales de mayor orden. El teorema WKS en la mayoría de sus generalizaciones es válido para funciones determinísticas con espectro limitado [10-13]. De igual forma existen publicaciones dedicadas a generalizaciones para *procesos aleatorios estacionarios* [14-15], y para *procesos aleatorios no estacionarios* [16-19]. La aplicación de estos últimos es difícil, debido a que primero se deben transformar en procesos estacionarios para después poder reconstruir el proceso [20,21].

En años recientes, existen muy pocas investigaciones sobre la reconstrucción de procesos aleatorios en base a sus muestras. La mayor parte de los trabajos se centran en los procesos determinísticos. Sin embargo, podemos destacar algunas publicaciones relacionadas a los procesos estocásticos. Por ejemplo, en 2002 M. Pawlak [24] dio una extensión a la formula de reconstrucción de interpolación escrita en el teorema de Whittaker – Shannon, y la aplicó a procesos en presencia de ruido, sean o no limitados en banda. En 2004 B. Lacaze y C. Mailhes [25] realizaron la reconstrucción de procesos aleatorios estacionarios, su solución era en términos del filtrado lineal de las muestras observadas, dando la expresión del mínimo error de reconstrucción. El mismo B. Lacaze en 2005 [26] consideró el espectro de potencia dado por la descripción de dispositivos físicos para reconstruir al proceso aleatorio estacionario, asumiendo que los tiempos de muestreo son conocidos. Y en 2009 [27] criticó la formula de Shannon basada en instantes de muestreo periódicos, variando esta secuencia dentro y fuera del área de muestreo, acercándola más a una reconstrucción real. En 2007 H. Ogawa y A. Hirabayashi [28] propusieron un teorema de muestreo con un número finito de muestras, comparando los resultados obtenidos mediante un pulso real y un pulso ideal, también usaron procesos Gaussianos Markovianos. Estos teoremas no hablan sobre la función de densidad de probabilidad y demás propiedades estadísticas del proceso para realizar su reconstrucción.

## 1.2 TEOREMA DE BALAKRISHNAN

La generalización más importante fue hecha por A. Balakrishnan [7], y determina el camino a tomar para plantear gran parte de los problemas dedicados a la reconstrucción de los procesos aleatorios de una manera general. La mayoría de las generalizaciones están relacionadas con la descripción del PMR de funciones determinísticas. Sin embargo, el *teorema de Balakrishnan* transfiere el significado del teorema clásico de muestreo WKS utilizado para funciones determinísticas sobre todos los procesos estocásticos estacionarios con espectro finito. Por esta razón a veces es llamado *teorema WKS para los procesos estocásticos*. El teorema dice [7]:

Sea  $x(t) - \infty < t < \infty$  un proceso estocástico evaluado real o complejo, estacionario en el “sentido amplio” y que posee una densidad espectral, la cual desaparece fuera del intervalo de la frecuencia angular  $[-2\pi W, 2\pi W]$ . Entonces  $x(t)$  tiene una representación:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N x\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\text{Sen } \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)} \quad (1.5)$$

para cada  $t$ , donde  $\lim$  simboliza el límite en el sentido cuadrático medio. Más explícitamente, esto significa:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left[ x(t) - \sum_{n=-N}^N x\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\text{Sen } \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)} \right]^2 \right\} = 0 \quad (1.6)$$

... se asume que todos los procesos tienen sus varianzas y promedios finitos.

La descripción del PMR de los procesos estocásticos basado en este teorema deja lugar a muchas preguntas. Sin embargo, no significa que el teorema de Balakrishnan sea incorrecto, simplemente es necesario declararlo de una forma particular

### 1.2.1 OBSERVACIONES AL TEOREMA DE BALAKRISHNAN

El principal problema del teorema de Balakrishnan es la función de densidad de probabilidad (fdp) de los procesos estocásticos, ya que el autor no menciona como es ella en relación al proceso analizado. Aunque este criterio fue sustentado por varios autores, entre ellos [14-23], por lo que se podría aceptar que el teorema es correcto para todos los procesos aleatorios con una fdp arbitraria. Siguiendo el instinto, es difícil imaginar que todos los tipos de procesos estocásticos, con sólo un parámetro idéntico  $W$ , puedan ser reconstruidos mediante el mismo algoritmo (1.5) y con un error de cero (1.6) [7]. De la misma manera, la función básica que se ocupa para muestrear los procesos aleatorios siempre es la función  $\sin x/x$ , independientemente del proceso aleatorio que se esté tratando y sin depender del número de muestras.

Como es sabido, cualquier variable aleatoria unidimensional debe estar totalmente caracterizada por su conjunto de *momentos iniciales y centrales*. Estas características están relacionadas por expresiones matemáticas. Por lo que al conocer alguna de ellas es posible determinar las demás. Asimismo, cuando se tiene el conjunto de momentos de la variable aleatoria, es posible encontrar las funciones características y por consiguiente sus funciones de densidad de probabilidad. Específicamente, la variable aleatoria unidimensional Gaussiana tiene sus primeros dos momentos, la esperanza matemática y la varianza, diferentes a cero, y los momentos de mayor orden impares iguales a cero [29-33]. Pero esos momentos no pueden existir por medio de cumulantes. En cambio, en los procesos no Gaussianos las funciones de momentos de mayor orden no son iguales a cero, además de que también pueden ser obtenidas por medio de cumulantes.

Los procesos Gaussianos pueden ser caracterizados por 3 funciones: la función de la esperanza matemática, la función de la varianza y la función de covarianza. Cada función de los momentos de cualquier orden está relacionada a su correspondiente función espectral mediante la transformada de Fourier [33,34]. Los procesos Gaussianos están solamente caracterizados por el espectro de potencia, el cual se relaciona con la función de covarianza mediante el teorema de Wiener – Khintchine. El teorema de Balakrishnan trabaja solamente con el espectro de potencia y utiliza la función de covarianza para su demostración, con lo que el autor supone que todos los espectros de mayor orden del proceso estocástico considerado son iguales a cero. Esto indica que el teorema de Balakrishnan trata exclusivamente con procesos Gaussianos, y considera a su función de reconstrucción como una función lineal de las muestras.

El teorema clásico de muestreo para funciones determinísticas y el teorema de Balakrishnan para procesos aleatorios tienen la misma expresión analítica. Estos teoremas se relacionan especialmente con un proceso de características muy singulares, el cual posee un espectro de potencia restringido. Específicamente, este espectro de potencia está definido con un solo parámetro que es la frecuencia de corte  $W$ . Existen únicamente dos ejemplos donde se pueden considerar procesos aleatorios con aquel espectro de potencia restringido, y son los que se encuentran en la salida del filtro lineal de baja frecuencia y del filtro pasa – banda ideal, pero estos tipos de filtros no son realizables. Adicionalmente, el proceso que se obtiene a la salida de esos filtros tiene la característica de ser infinitamente diferenciable, tal como ocurre con algunos procesos determinísticos, de aquí que el error de reconstrucción sea igual a cero cuando el número de muestras es infinito. Por considerar un número infinito de muestras, la descripción del proceso solo se lleva a cabo en la región de interpolación. Por otra parte, si se considera un número finito de muestras, la función básica  $\text{sen } x/x$  no provee la reconstrucción óptima o el mínimo error cuadrático medio en la reconstrucción del proceso. Además es posible la descripción en la región de extrapolación.

### 1.3 PROCESOS ALEATORIOS ESTACIONARIOS

Suponiendo que se conocen las funciones de densidad de probabilidad unidimensionales  $\omega[x(t_1)], \omega[x(t_2)], \dots, \omega[x(t_m)]$  de un proceso aleatorio, donde es importante tener en cuenta los tiempos en que son calculadas, ya que la estructura puede ser diferente en cada instante. Entonces, es posible obtener la mayor información estadística acerca del proceso, como puede ser:

- *Función de la esperanza matemática:*

$$m(t) = \langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \omega[x(t)] dx(t) \quad (1.7)$$

- *Función de la varianza:*

$$\sigma^2(t) = \langle (x(t) - m(t))^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m(t))^2 \omega[x(t)] dx(t) \quad (1.8)$$

- *Función del momento inicial de orden n:*

$$\langle x(t)^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^n \omega[x(t)] dx(t) \quad (1.9)$$

- *Función del momento central de orden n:*

$$\langle \overset{\circ}{x}(t)^n \rangle = \langle (x(t) - m(t))^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m(t))^n \omega[x(t)] dx(t) \quad (1.10)$$

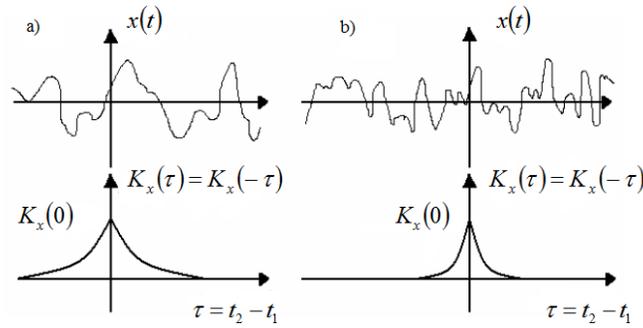
## 1.4 FUNCIÓN DE COVARIANZA

La *función de covarianza*  $K_x(t_1, t_2)$ , es una característica estadística que refleja las diferencias de la estructura en el tiempo de los diferentes procesos aleatorios. Esta función es determinística con dos argumentos del tiempo  $t_1$  y  $t_2$ , que demuestran como el momento de covarianza cambia cuando la distancia entre estas dos secciones cambia también:

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= \langle \overset{\circ}{x}(t_1) \overset{\circ}{x}(t_2) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2)) \omega_2[x; t_2 - t_1] dx(t_1) dx(t_2) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Si fijamos a  $t_1$  (de preferencia  $t_1 = 0$ ) y desplazamos a  $t_2$ , se puede ver el grado de dependencia estadística del proceso en ese intervalo. Es independiente cuando  $t_2$  se aleja de  $t_1$ . Si la función de covarianza tiende a cero lentamente cuando  $t_2$  se aleja, es un *proceso suave*, y si tiende a cero rápidamente es un *proceso caótico*. Esto se ve en la Figura 1.1.

En procesos estacionarios de segundo orden, la función de covarianza  $K(t_1, t_2)$  es solo una función de diferencia en el tiempo  $\tau = t_2 - t_1$ , por lo cual, puede ser representada mediante  $K(\tau) = K(t_1, t_2)$ .



**Figura 1.1** Función de covarianza  $K_x(\tau)$  teniendo: a) Un proceso suave, b) Un proceso caótico.

La función de covarianza cumple con las siguientes propiedades [23]:

- Tiene su valor máximo cuando  $t_1 = t_2$ , donde  $\tau = t_2 - t_1 = 0$ :

$$K_x(0) = \langle \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t + \tau) \rangle = \langle \overset{\circ}{x}(t)^2 \rangle = \sigma^2(t) = \sigma_x^2 \quad (1.12)$$

- Es una función par:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau) \quad (1.13)$$

- Tiende a cero cuando  $\tau \rightarrow \infty$ :

$$K_x(\infty) = 0 \quad (1.14)$$

- Tiene una función de covarianza normalizada  $R_x(\tau)$ :

$$R_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)} = \frac{K_x(\tau)}{\sigma_x^2} \quad (1.15)$$

- Su rango de valores está contenido en:

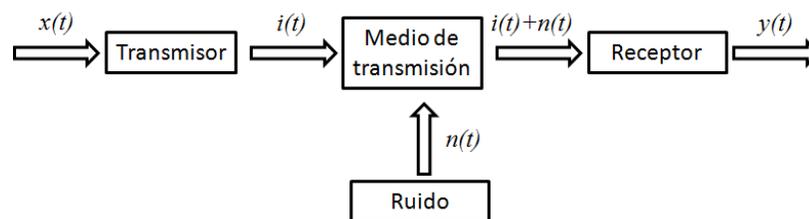
$$|K_x(\tau)| \leq K_x(0), \text{ por lo tanto: } 0 \leq |R_x(\tau)| \leq 1 \quad (1.16)$$

- Se relaciona con el *tiempo de covarianza*  $\tau_c$  en función de  $R_x(\tau)$ . El cual indica el tiempo en que existe dependencia o influencia entre los mismos valores del proceso. Cuando un proceso es caótico se tiene un tiempo de covarianza pequeño, y en un proceso suave el tiempo de covarianza es grande.

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau \quad (1.17)$$

## 1.5 SISTEMAS NO LINEALES NO INERCIALES

Los sistemas de comunicaciones, como el que se muestra en la Figura 1.2, en general pueden subdividirse en no lineales no inerciales y en lineales inerciales (o dinámicos). En un principio, todo elemento debe considerarse como elemento no lineal e inercial. Sin embargo, en la actualidad no existe un método general para analizar sistemas no lineales inerciales, incluso cuando los procesos son determinísticos [35].



**Figura 1.2** Sistema de comunicaciones.

En los sistemas lineales la función de correlación y el espectro de potencia están determinados unívocamente por la respuesta frecuencial del sistema y por la función de correlación (o el espectro) del proceso en su entrada. En un elemento no lineal no es suficiente conocer solamente el espectro en su entrada, sino que es imprescindible conocer por lo menos la función bidimensional de distribución del proceso en la entrada [35].

Un sistema es no lineal si no se aplica el principio de superposición. Por tanto, para un sistema no lineal la respuesta a dos entradas no puede calcularse tratando cada entrada a la vez y sumando los resultados. En la práctica, muchos sistemas electromecánicos,

hidráulicos, neumáticos, etc., involucran relaciones no lineales entre las variables. Por ejemplo, los amortiguadores que se utilizan en los sistemas físicos pueden ser lineales para operaciones a baja velocidad, pero pueden ser no lineales a altas velocidades [36].

La descripción de un elemento no lineal no inercial en los cuales el valor de la función de salida  $\eta(t)$  en cualquier instante de tiempo es determinado por el valor de la función de entrada  $x(t)$  en el mismo instante de tiempo es:

$$\eta(t) = g[x(t)] \quad (1.18)$$

donde  $g(x)$  es una función no lineal [31]. A este dispositivo se le conoce como *convertidor no lineal no inercial* o de memoria cero. La ecuación (1.18) es la función característica o función equivalente del convertidor no lineal y es determinada experimentalmente de las características de corriente – voltaje de elementos no lineales. Los convertidores que presentan estas características, en la mayoría de los casos, describen con suficiente exactitud el funcionamiento de un grupo considerable de elementos de comunicaciones de los cuales forman parte los limitadores de amplitud, los rectificadores, mezcladores, convertidores de frecuencia, los moduladores y detectores, etc. [35].

Para transformaciones no lineales de memoria cero de la forma (1.18), la solución esencial del problema se obtiene si se conoce la densidad de probabilidad  $N$  – dimensional  $\omega_\xi(\xi_1, \dots, \xi_N)$  de las variables aleatorias  $\xi_1 = \xi(t_1), \dots, \xi_N = \xi(t_N)$ , y si se desea encontrar la densidad de probabilidad  $\omega_\eta(\eta_1, \dots, \eta_N)$  de las nuevas variables aleatorias:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= g_1(\xi_1, \dots, \xi_N), \\ \eta_2 &= g_2(\xi_1, \dots, \xi_N), \\ &\vdots \\ \eta_N &= g_N(\xi_1, \dots, \xi_N), \end{aligned} \quad (1.19)$$

Las funciones  $g_1, \dots, g_N$  son continuas a trozos. Si el inverso del sistema (1.19) es:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= h_1(\eta_1, \dots, \eta_N), \\
\xi_2 &= h_2(\eta_1, \dots, \eta_N), \\
&\vdots \\
\xi_N &= h_N(\eta_1, \dots, \eta_N),
\end{aligned} \tag{1.20}$$

donde las funciones  $h_1, \dots, h_N$  son univaluadas. Entonces la densidad de probabilidad es:

$$\omega_\eta(\eta_1, \dots, \eta_N) = \omega_\xi[h_1(\eta_1, \dots, \eta_N), \dots, h_N(\eta_1, \dots, \eta_N)] |D_N| \tag{1.21}$$

$D_N$  es el jacobiano de la transformación de las variables aleatorias  $\xi_1, \dots, \xi_N$  a las variables aleatorias  $\eta_1, \dots, \eta_N$ , es decir:

$$D_N = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial \eta_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_N}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial \eta_N} \end{vmatrix} \tag{1.22}$$

Este procedimiento tiene mucho interés práctico en las transformaciones no lineales de las fpd. Sin embargo, pueden surgir dificultades en la aplicación de la formula (1.21) a las transformaciones de memoria cero. Por ejemplo, si se tiene una función característica  $g(x)$  de tipo polinomial cuyo grado sea mayor de tres, sería complicado encontrar la función inversa  $h(\eta)$  de forma general, lo que significa que es difícil encontrar una solución analítica de la ecuación (1.18). Por tal motivo, es necesario utilizar otra metodología que permita encontrar las características estadísticas del proceso aleatorio, y así poder establecer la reconstrucción a partir de un conjunto dado de muestras [31,37].

## 1.6 ANÁLISIS DEL PMR EN LA SALIDA DE DISPOSITIVOS NO LINEALES

Para determinar la *función de reconstrucción* y la *función de error de reconstrucción* de un proceso no Gaussiano en la salida  $\eta(t)$ , se debe conocer el proceso de entrada  $\xi(t)$

caracterizado por la fpd multidimensional  $\omega_N[\xi(t_1), \dots, \xi(t_N)]$ , el conjunto de muestras del proceso de salida  $\eta(t) = \{\eta(t_1), \dots, \eta(t_N)\}$  con sus tiempos de ocurrencia  $T = \{T_1, \dots, T_N\}$ , la función de transferencia del convertidor no lineal  $\eta(t) = g[x(t)]$ , así como su función inversa única  $\xi(t) = h[\eta(t)]$ .

Existe una gran cantidad de realizaciones del proceso aleatorio que pasan por todas las muestras. La realización discretizada es solo una de un número infinito de realizaciones del proceso. Por lo tanto, no se conoce con exactitud cuál de ellas es, solo se puede estimar estadísticamente su valor para cualquier tiempo  $t$ . Para lograr esto, se debe de escoger la metodología adecuada, con el fin de obtener una reconstrucción óptima del proceso. Este problema fue resuelto primeramente en [38].

Para definir las funciones de momentos condicionales del proceso en la salida  $\eta(t)$ , se deben calcular los momentos condicionales de orden  $N$  de  $\eta(t)$  cuando el conjunto de muestras  $\eta(t) = \{\eta(t_1), \dots, \eta(t_N)\}$  está fijo, es decir:

$$\bar{m}_N^\eta(t) = \langle [\eta(t)]^N | \eta(T) \rangle = \langle g[\xi(t)]^N | \eta(T) \rangle \quad (1.23)$$

Como la función inversa  $\xi(t) = h[\eta(t)]$  es única, se pueden recalculan todos los elementos del conjunto  $\eta(t) = \{\eta(t_1), \dots, \eta(t_N)\}$  fijo, sobre el conjunto de elementos  $\Xi(T) = \{\xi(T_1), \dots, \xi(T_N)\}$ , por medio de la dependencia determinística  $\xi(t) = h[\eta(T_j)]$ . De tal forma que las funciones de momentos condicionales en la salida son:

$$\bar{m}_N^\eta(t) = \langle g[\xi(t)]^N | \Xi(T) \rangle \quad (1.24)$$

Por lo tanto, la función de reconstrucción se define por el primer momento condicional de salida, es decir, por la *función de la esperanza condicional*:

$$\bar{m}_1^\eta(t) = \langle g[\xi(t)] | \Xi(T) \rangle \quad (1.25)$$

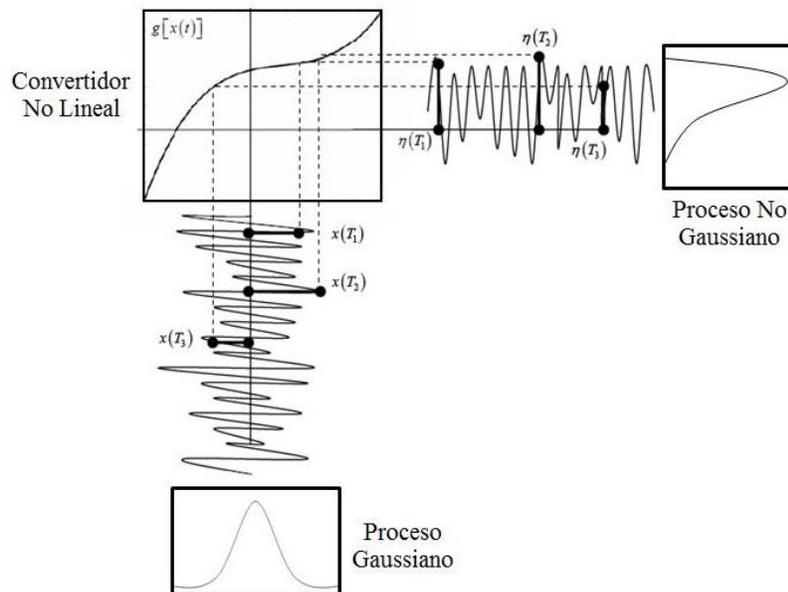
y la función de error de reconstrucción por la *función de la varianza condicional*:

$$\sigma_{\eta}^2(t) = \tilde{m}_2^{\eta}(t) - [\tilde{m}_1^{\eta}(t)]^2 \quad (1.26)$$

donde el segundo momento condicional a la salida se calcula a partir de la ecuación (1.24).

## 1.7 CONSIDERACIONES DE ESTE TRABAJO

El propósito de este trabajo es proponer un algoritmo que sea capaz de describir el Procedimiento de Muestreo - Reconstrucción tomando en cuenta las principales características de los procesos aleatorios, como son la fdp, un número finito de muestras, momentos de alto orden, etc. Esto se aplica a los *procesos no Gaussianos*, los cuales están compuestos a la entrada de un *proceso Gaussiano* y a la salida de un *convertidor no lineal no inercial*, como se observa en la Figura 1.3.



**Figura 1.3** Relación funcional entre el proceso de salida  $\eta(t)$  y el proceso de entrada  $\xi(t)$ .

Se utilizan *procesos de Rayleigh*, así como *convertidores no lineales de tipo exponencial y polinomial*. La metodología propuesta es la *regla de la esperanza*

*matemática condicional*, la cual considera las principales propiedades estadísticas del proceso aleatorio, por lo que también se le llama algoritmo óptimo. Los resultados obtenidos se comparan con el método tradicional de reconstrucción, basado en el teorema de Balakrishnan, el cual toma en cuenta solo la densidad espectral de potencia, por lo que se le denomina algoritmo no óptimo. Observando ambos algoritmos se puede conocer bajo qué condiciones se debe utilizar cada uno para obtener resultados correctos.

También se puede comprobar que la regla de la esperanza matemática condicional ofrece muchas ventajas en la descripción del PMR teniendo procesos no Gaussianos, debido a que es un método matemático muy simple. Esta regla ya ha sido aplicada en diversos procesos, principalmente de tipo Gaussianos, por ejemplo [38-44]. La ventaja primordial que provee esta metodología es el cálculo de las curvas exactas de la función que describe el mínimo error de reconstrucción como función del tiempo.

El trabajo tiene la siguiente estructura: el capítulo 2 se refiere al PMR de los procesos Gaussianos, además se describe la regla de la esperanza matemática condicional. En el capítulo 3 se menciona el PMR en la salida de los procesos de Rayleigh. En los capítulos 4 y 5 se presentan los PMRs de procesos aleatorios en la salida del convertidor exponencial y polinomial respectivamente. Finalmente el capítulo 6 corresponde a las conclusiones, así como a recomendaciones y trabajos a futuro.

# Capítulo 2

## PROCEDIMIENTO DE MUESTREO – RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS ALEATORIOS GAUSSIANOS

La densidad Gaussiana es la más importante de todas las densidades y se emplea prácticamente en todas las áreas de las ciencias y la ingeniería. Su importancia radica en que permite describir de forma precisa muchas magnitudes importantes del mundo real, específicamente cuando son el resultado de pequeños efectos aleatorios que se combinan para crear la magnitud de interés. Por ejemplo, la tensión en una resistencia a la salida de un amplificador puede ser aleatoria (una tensión de ruido), debido a una corriente aleatoria que es el resultado de la contribución de otras corrientes aleatorias que se producen en el amplificador. En este capítulo se presenta la descripción del Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción de los procesos aleatorios cuando su función de densidad es *Gaussiana*.

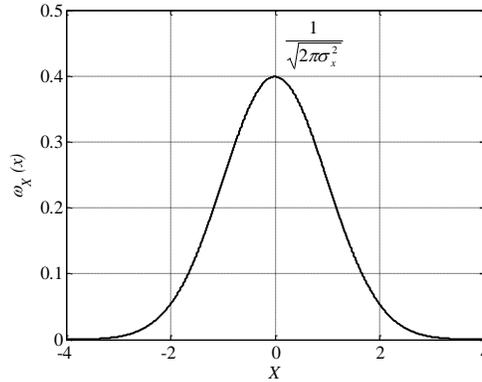
### 2.1 INTRODUCCIÓN

Una variable aleatoria  $X$  es de tipo *Gaussiana* si su función de densidad tiene la forma [45]:

$$\omega_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-(x-m_x)^2/2\sigma_x^2} \quad (2.1)$$

donde  $\sigma_x^2 > 0$  es la varianza y  $-\infty < m_x < \infty$  es la media, ambas constantes reales. Esta función se ha dibujado en la Figura 2.1. Su valor máximo  $(2\pi\sigma_x^2)^{-1/2}$  se produce en

$x = m_X$ . Su “amplitud” alrededor del punto  $x = m_X$  está relacionada con  $\sigma_X^2$ . La función decrece a 0.607 veces su máximo en  $x = m_X + \sigma_X^2$  y  $x = m_X - \sigma_X^2$ . De Moivre la dedujo hace 200 años y más tarde, de forma independiente, lo hicieron Gauss y Laplace [46].



**Figura 2.1** Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria Gaussiana.

La función de distribución usando (2.1) es:

$$\Omega_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \int_{-\infty}^x e^{-(x-m_X)^2/2\sigma_X^2} dx \quad (2.2)$$

Esta integral no tiene una solución cerrada conocida y debe evaluarse por métodos numéricos o aproximaciones. Para disponer de resultados de forma general, se han desarrollado un conjunto de tablas de  $\Omega_X(x)$  para distintos valores de  $x$  con  $m_X$  y  $\sigma_X^2$  como parámetros. Sin embargo este método tiene un valor limitado por el número infinito de las posibles combinaciones, aunque existe un caso normalizado donde  $m_X = 0$  y  $\sigma_X^2 = 1$  [45].

Un proceso aleatorio  $x(t)$  es Gaussiano si las variables aleatorias

$$x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), \dots, x_N = x(t_N) \quad (2.3)$$

cuentan con una fdp Gaussiana  $N$ -dimensional para cualquier  $N$  y cualquier  $t_1, t_2, \dots, t_N$ . Su función de densidad es:

$$\omega_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}[x - \bar{X}]^t [C_X]^{-1} [x - \bar{X}]\right\}}{\sqrt{(2\pi)^N [C_X]}} \quad (2.4)$$

donde  $[x - \bar{X}]$  y  $[C_X]$  son matrices, (a esta última también se le conoce como matriz de covarianza) y  $\bar{X}$  es la media de  $X(t_i)$ .

## 2.2 RESPUESTA DE UN SISTEMA LINEAL CON PROCESOS ALEATORIOS

Si en la entrada de un sistema lineal se tiene un *proceso aleatorio Gaussiano*  $u(t)$ , del que se conocen algunas propiedades como las funciones de la esperanza matemática, varianza y covarianza [47]. Para determinar las propiedades del proceso aleatorio en la salida del sistema lineal, se necesita usar primeramente la función de covarianza en la salida:

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= \left\langle \overset{\circ}{x}(t_1) \overset{\circ}{x}(t_2) \right\rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) \overset{\circ}{u}(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) \overset{\circ}{u}(t_2 - \tau_2) d\tau_2 \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) d\tau_2 \left\langle \overset{\circ}{u}(t_1 - \tau_1) \overset{\circ}{u}(t_2 - \tau_2) \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) d\tau_2 K_u(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde  $h(\tau)$  es la respuesta al impulso unitario del sistema lineal. Si el proceso en la entrada es estacionario en el sentido amplio, se tiene que:

$$K_u(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) = K_u(\tau - \tau_1 + \tau_2) \quad (2.6)$$

donde  $\tau = t_1 - t_2$ . En este caso, la función de covarianza a la salida es:

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) d\tau_2 K_u(\tau - \tau_1 + \tau_2) \quad (2.7)$$

Con este resultado, si el proceso aleatorio en la entrada de un sistema lineal es estacionario en el sentido amplio, en la salida también lo será. El *teorema de Wiener-Khintchine* establece que la función de covarianza  $K_x(\tau)$  está relacionada con la función de densidad espectral de potencia  $S_x(\omega)$  mediante la transformada de Fourier [48,49]:

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.8)$$

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.9)$$

Por lo que la densidad espectral del proceso aleatorio en la salida del sistema lineal a partir de las ecuaciones (2.7) y (2.9) es:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) d\tau_2 K_u(\tau - \tau_1 + \tau_2) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.10)$$

Introduciendo una nueva variable  $z = \tau - \tau_1 + \tau_2$ , despejando se tiene  $\tau = z + \tau_1 - \tau_2$ . A partir de la ecuación (2.10), la densidad espectral de potencia en la salida del sistema lineal es igual al cuadrado de la magnitud de la función del sistema multiplicado por la densidad espectral de potencia del proceso aleatorio de entrada, obteniendo:

$$S_x(\omega) = H(j\omega)H^*(j\omega)S_u(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_u(\omega). \quad (2.11)$$

Lo anterior, se puede aplicar a sistemas lineales en cascada.

## 2.3 PROPIEDADES DE LOS PROCESOS GAUSSIANOS [49]

- La fdp Gaussiana  $N$ -dimensional está completamente especificada por los momentos de primer y segundo orden (es decir, medias, varianzas y covarianzas).
- Un proceso Gaussiano estacionario en el sentido amplio también es estacionario en el sentido estricto. Esto significa que los procesos que cumplen con la expresión  $\omega_n[x_1, t_1; \dots; x_n, t_n] = \omega_n[x_1, t_1 + t'; \dots; x_n, t_n + t']$  son llamados *procesos estacionarios en el sentido estricto*. Una forma menos estricta de estacionaridad se presenta cuando la función de covarianza depende únicamente de la diferencia de dos argumentos del tiempo  $K_x(\tau) = K_x(t_2 - t_1) = \langle x(t_1) - m(t_1) \rangle \langle x(t_2) - m(t_2) \rangle$ . Cuando un proceso obedece a ésta expresión se dice que es *estacionario en el sentido amplio* o estacionario de segundo orden.
- Si la matriz de covarianza es diagonal, las variables aleatorias no están correlacionadas. Además, las variables Gaussianas aleatorias son independientes cuando no existe correlación.
- Ya que  $\{x_i = x(t_i)\}$  son conjuntamente gaussianos, los términos  $x_i = x(t_i)$  son individualmente Gaussianos.
- Una transformación lineal de un conjunto de variables aleatorias Gaussianas produce otro conjunto de las mismas.

## 2.4 REGLA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL

Si se tiene un proceso estocástico  $x(t)$  obtenido en la salida de un sistema lineal, el cual está caracterizado por sus funciones de probabilidad multidimensionales  $\omega_m[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)]$ . Una realización de este proceso es discretizada en los instantes de tiempo  $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ . Por lo tanto, se forma un conjunto de muestras  $X, T = x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)$ , donde el número de muestras  $N$  y sus tiempos de ocurrencia  $T$  son arbitrarios. Esto quiere decir que las funciones de sus momentos iniciales y centrales y sus

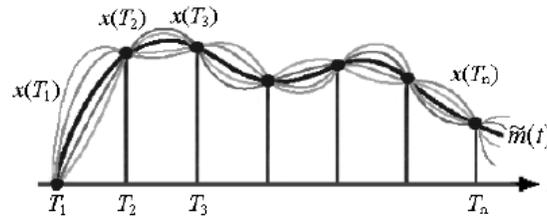
densidades de probabilidad se ven modificadas. Ahora, son condicionales o a posteriori, y dependen del valor de cada muestra  $x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)$  [30]:

$$\omega[x(t)|X, T] = \omega[x(t)|x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_n)] \quad (2.12)$$

$$\tilde{m}(t) = \langle x(t)|X, T \rangle = \langle x(t)|x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \omega[x(t)|X, T] dx(t) \quad (2.13)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \langle (x(t) - \tilde{m}(t))^2 | X, T \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - \tilde{m}(t))^2 \omega[x(t)|X, T] dx(t) \quad (2.14)$$

Por lo que la reconstrucción del proceso resultante depende del conjunto de muestras  $X, T = x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)$  y de su fdp  $\omega_m[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)]$ , donde  $N < m$ . El conjunto de diferentes realizaciones del proceso aleatorio condicional  $\tilde{x}(t) = x(t)|X, T$  pasa a través de todas las muestras  $X, T = x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)$ , como se observa en la Figura 2.2. Cada realización es una entre un número infinito de realizaciones del proceso estocástico condicional  $\tilde{x}(t)$ . Es claro que no se puede conocer la realización exactamente, pero se puede obtener una aproximación estadística para cada momento de tiempo  $t$ . Para esto es necesario seleccionar la regla estadística adecuada.



**Figura 2.2** Posibles realizaciones de un proceso aleatorio condicional dado un conjunto de muestras  $X, T$ .

Existe un criterio estadístico conocido para la estimación de una variable aleatoria, la *regla de la esperanza matemática condicional*. Esta regla proporciona el mínimo error de la estimación para las variables aleatorias con una fdp arbitraria. Asimismo, es posible usar la función de la media condicional  $\tilde{m}(t) = \langle x(t)|X, T \rangle$  como *función de reconstrucción*. La

calidad de la reconstrucción es evaluada con la función de la varianza condicional  $\tilde{\sigma}^2(t) = \langle (x(t) - \tilde{m}(t))^2 | X, T \rangle$  que es utilizada como *función de error de reconstrucción* [38].

Considerando el caso general de un *proceso gaussiano no estacionario*  $x(t)$ , la esperanza matemática  $m(t)$ , la varianza  $\sigma^2(t)$  y la función de covarianza  $K_x(\tau)$  constituyen la información completa acerca del proceso dado. Debido a esto, la expresión exacta de la fdp multidimensional de orden  $m$  arbitraria se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \omega_m[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)] &= (2\pi)^{-m/2} [Det K_x(t_i, t_j)]^{-1/2} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [x(T_i) - m(T_i)] a_{ij} [x(T_j) - m(T_j)] \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde  $Det K_x(t_i, t_j)$  es el determinante de la matriz de covarianza:

$$\|K_x(t_i, t_j)\| = \begin{vmatrix} K_x(t_1, t_1) & K_x(t_1, t_2) & \dots & K_x(t_1, t_m) \\ K_x(t_2, t_1) & K_x(t_2, t_2) & \dots & K_x(t_2, t_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_x(t_m, t_1) & K_x(t_m, t_2) & \dots & K_x(t_m, t_m) \end{vmatrix} \quad (2.16)$$

y  $\|a_{ij}\|$  representa la matriz inversa de covarianza:

$$\|a_{ij}\| = \|K_x(t_i, t_j)\|^{-1} \quad (2.17)$$

Fijando el conjunto de muestras  $X, T = x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)$ , la fdp condicional es Gaussiana. Las características principales del proceso condicional son [31,50]:

$$\tilde{m}(t) = m(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t, T_i) a_{ij} [x(T_j) - m(T_j)] \quad (2.18)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \sigma^2(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t, T_i) a_{ij} K_x(T_j, t) \quad (2.19)$$

$$\tilde{K}_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t_1, T_i) a_{ij} K_x(T_j, t_2) \quad (2.20)$$

donde  $m(t)$  y  $\sigma^2(t)$  son la media y varianza no condicionales del proceso inicial  $x(t)$ .  $a_{ij}$  representa los elementos de la matriz inversa de covarianza en función de los instantes de muestreo  $A = K^{-1}(T_i, T_j)$ . Partiendo de un proceso estacionario Gaussiano caracterizado por tener una esperanza matemática  $m(t) = m = 0$  y una función de covarianza  $K(t, T_i)$ , es posible encontrar una expresión determinística que describa la influencia que proporciona cada muestra en la reconstrucción del proceso. Por lo tanto, en lugar de (2.18) se tiene:

$$\tilde{m}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t, T_i) a_{ij} [x(T_j)] = \sum_{j=1}^N x(T_j) b_j(t) \quad (2.21)$$

Este resultado arroja una fórmula para la función de reconstrucción del proceso que solamente depende de la sumatoria del producto de cada muestra  $x(T_j)$  por una función llamada función básica  $b_j(t)$ , la cual se determina por:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N K(t - T_i) a_{ij} \quad (2.22)$$

En el caso general, la función básica  $b_j(t)$  depende principalmente del comportamiento de la función de covarianza  $K(\tau)$ , aunque también del número actual  $j$  de la muestra, de la cantidad de muestras  $N$ , del conjunto de tiempos de muestreo arbitrarios  $T_i$ , y del momento de covarianza que existe entre las secciones del proceso en los instantes  $T_i$  y  $T_j$ , además existe una para cada muestra. Por lo que de la misma forma que influyen estos parámetros en la función básica  $b_j(t)$ , influirán en la función de reconstrucción  $\tilde{m}(t)$  y en la función de error de reconstrucción  $\tilde{\sigma}^2(t)$ .

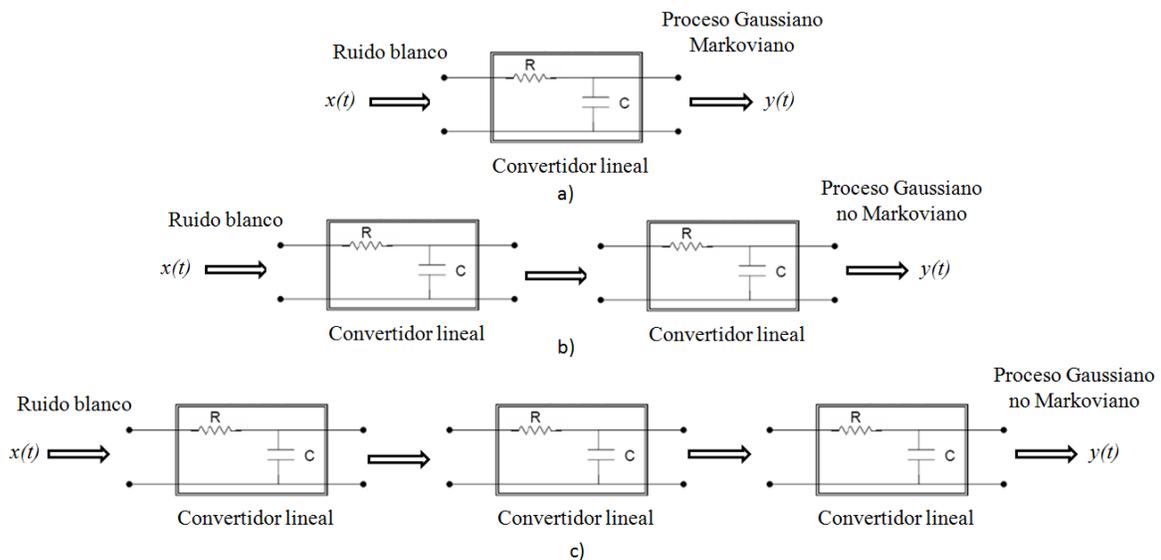
## 2.5 RECONSTRUCCIÓN DEL PROCESO EN LA SALIDA DE FILTROS RC

Un *sistema lineal* es aquel que satisface el principio de superposición. De forma sencilla, el principio de superposición exige que la respuesta del sistema a una suma ponderada de señales sea igual a la correspondiente suma ponderada de las salidas a cada una de las señales de entrada. Por tanto, un sistema es lineal si y sólo si:

$$y(t) = \ell[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1\ell[x_1(t)] + a_2\ell[x_2(t)] \quad (2.23)$$

donde  $\ell[\cdot]$  denota el operador de sistema lineal (ecuación diferencial) que actúa sobre  $[\cdot]$ ,  $y(t)$  es la salida y  $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$  es la entrada [51].

Inicialmente se aplica la regla de la media condicional en casos Gaussianos. Como los que se obtienen en la salida de un filtro RC lineal, cuando la entrada es alimentada con ruido blanco Gaussiano, como se ve en la Figura 2.3. La respuesta de los filtros RC está dada por una función de covarianza normalizada de tipo exponencial. Las características estadísticas no condicionales del proceso aleatorio de entrada son: la media  $m(t) = 0$  y la varianza  $\sigma^2(t) = 1$ .



**Figura 2.3** Transformaciones lineales del proceso aleatorio Gaussiano cuando pasa a través del filtro RC de a) Una etapa, b) Dos etapas, c) Tres etapas, teniendo como entrada ruido blanco Gaussiano.

## 2.5.1 PROCESOS MARKOVIANOS

Primeramente se analiza el caso más simple del Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción, que ocurre al tener un *proceso Gaussiano Markoviano unidimensional* (ver Figura 2.3a). Su respuesta está dada por la función de covarianza normalizada:

$$R_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) \quad (2.24)$$

Para tener las mismas condiciones en el proceso de reconstrucción, se trabaja con la función de covarianza normalizada  $R_x(\tau)$  en cada proceso, y con un tiempo de covarianza  $\tau_c$  igual a la unidad. Para determinar este tiempo, se sustituye (2.24) en (1.17):

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha|\tau|) d\tau = \frac{1}{\alpha}. \quad (2.25)$$

Mediante la expresión anterior se observa que el tiempo de covarianza depende del valor de  $\alpha = 1/RC$ . Por lo cual, para que el tiempo de covarianza del proceso sea unitario, es necesario que el valor de  $\alpha$  sea igual a 1. Con esto, las expresiones respectivas de la función básica (2.22), la función de reconstrucción (2.21) y la función de error de reconstrucción (2.19) son:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N R_x(t - T_i) a_{ij} = \sum_{i=1}^N \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij} \quad (2.26)$$

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) b_j(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{i=1}^N \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij} \quad (2.27)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij} \exp(-\alpha|T_j - t|) \quad (2.28)$$

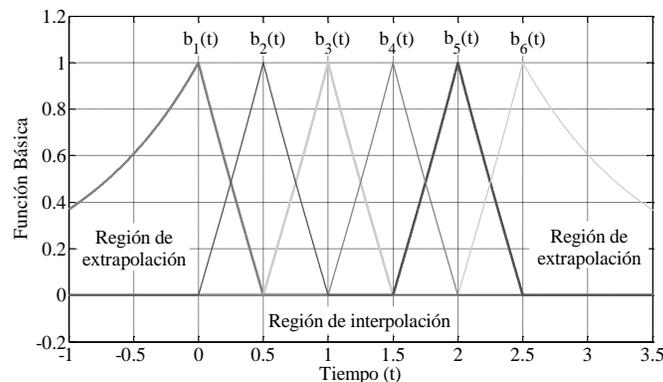
Debido a que se trabaja con funciones normalizadas, aparece el término  $R_x(\tau)$  en lugar de  $K_x(\tau)$ . Asimismo, la matriz inversa de covarianza con elementos  $a_{ij}$  depende de  $R_x(\tau)$ .

Se considera un proceso aleatorio con 6 muestras, separadas en un intervalo de  $\Delta T = 0.5$ . Los valores de las muestras y sus instantes de tiempo se indican en la Tabla 2.1. El rango de separación está ligado con el tiempo de covarianza, ya que debe de ser menor para tener una reconstrucción apropiada.

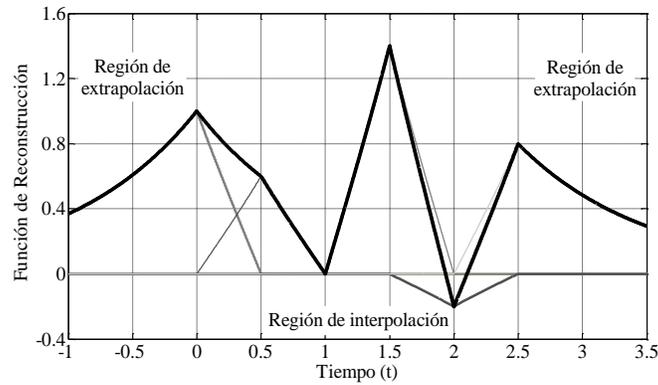
Valor de la muestra $x(T_j)$	Instante de muestreo $T_j$ [seg.]
$x(T_1) = 1$	$T_1 = 0$
$x(T_2) = 0.6$	$T_2 = 0.5$
$x(T_3) = 0$	$T_3 = 1$
$x(T_4) = 1.4$	$T_4 = 1.5$
$x(T_5) = -0.2$	$T_5 = 2$
$x(T_6) = 0.8$	$T_6 = 2.5$

**Tabla 2.1** Valores de muestreo de procesos Gaussianos con  $\Delta T = 0.5$ .

En la Figura 2.4 se observa la función básica (2.26). Son seis debido a que por cada muestra hay una función básica cuya amplitud máxima es igual a la unidad, dicho valor se encuentra sobre los instantes de tiempo de muestreo  $T_j$ . Cada función básica  $b_j(t)$  se multiplica por su correspondiente valor de la muestra  $x(T_j)$ , sumando al final las formas de onda resultantes para obtener la función de reconstrucción (2.27) de la Figura 2.5.

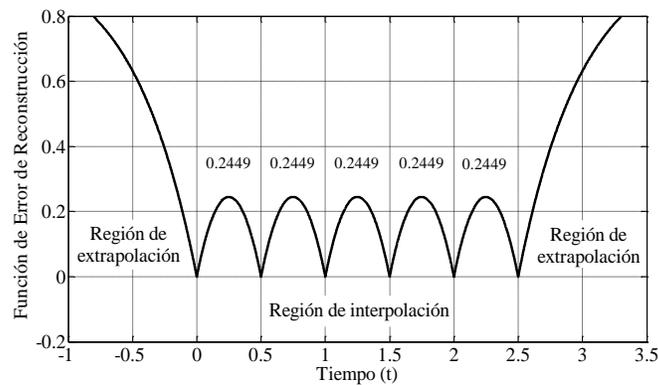


**Figura 2.4** Funciones básicas de un proceso Markoviano con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 0.5$ .



**Figura 2.5** Función de reconstrucción de un proceso Markoviano con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 0.5$ .

La reconstrucción del proceso en la región de interpolación ( $T_1 = 0 < t < T_6 = 2.5$ ), solo depende de las dos muestras más cercanas según la posición del tiempo  $t$  en la reconstrucción, y no existe influencia de las muestras restantes. En la región de extrapolación, la reconstrucción depende de una sola muestra, que es la ubicada en el extremo inicial  $x(T_1)$  o final  $x(T_6)$ , según sea el caso. Esta influencia se percibe mejor en la función de error de reconstrucción (2.28) que se expresa en la Figura 2.6. El error entre cada intervalo de muestreo es el mismo y no depende del número de muestras existente, solamente de las muestras adyacentes. El máximo error se encuentra a la mitad de cada intervalo, y el mínimo error existe en los puntos o instantes de muestreo.



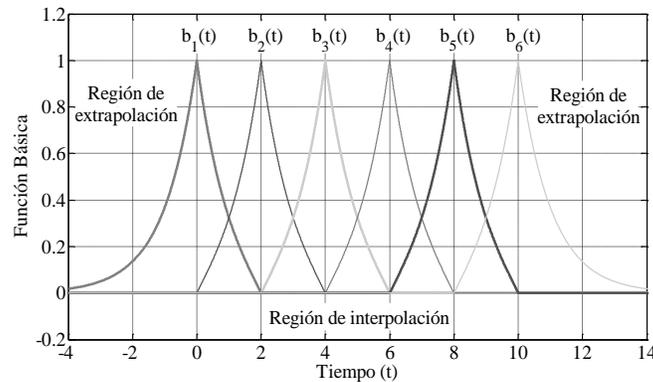
**Figura 2.6** Función de error de reconstrucción de un proceso Markoviano con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 0.5$ .

En la reconstrucción del proceso anterior, se tomó un intervalo de muestreo de  $\Delta T = 0.5$ , es decir,  $\Delta T < 1$ . Si se aumenta este intervalo, las características de las funciones que describen el proceso tienden a tener un mayor comportamiento. Esto se expone considerando las muestras e instantes de tiempo mostrados en la Tabla 2.2.

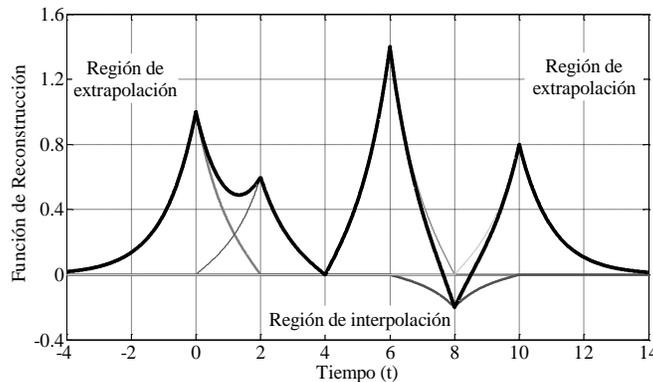
Valor de la muestra $x(T_j)$	Instante de muestreo $T_j$ [seg.]
$x(T_1) = 1$	$T_1 = 0$
$x(T_2) = 0.6$	$T_2 = 2$
$x(T_3) = 0$	$T_3 = 4$
$x(T_4) = 1.4$	$T_4 = 6$
$x(T_5) = -0.2$	$T_5 = 8$
$x(T_6) = 0.8$	$T_6 = 10$

**Tabla 2.2** Valores de muestreo de procesos Gaussianos con  $\Delta T = 2$ .

La Figura 2.7 presenta la función básica (2.26), donde existe un comportamiento exponencial más marcado. A pesar de la distancia de separación entre las muestras, la función de reconstrucción (2.27), que se ve en la Figura 2.8, es similar a la que se tiene cuando  $\Delta T = 0.5$ , dado que su forma es idéntica en cada intervalo.

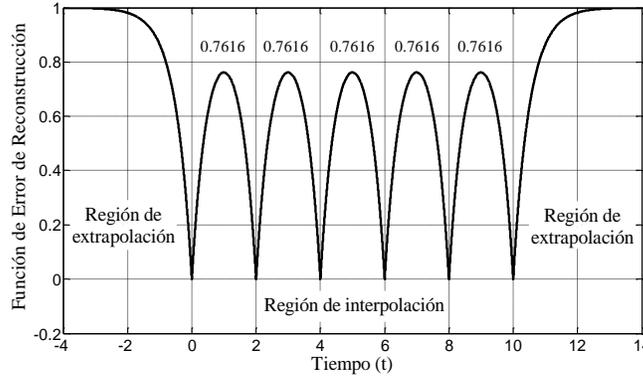


**Figura 2.7** Funciones básicas de un proceso Markoviano con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 2$ .



**Figura 2.8** Función de reconstrucción de un proceso Markoviano con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 2$ .

La diferencia aparece en la magnitud del error, que aumenta debido a la separación de las muestras. La Figura 2.9 exhibe dicha función de error de reconstrucción (2.28). En la región de extrapolación el error tiende a uno rápidamente. Asimismo, tanto para  $\Delta T = 0.5$  como para  $\Delta T = 2$ , el comportamiento de la función básica  $b_j(t)$  y la función de reconstrucción  $\tilde{m}(t)$  es el mismo, variando solo la magnitud entre ellas, esto también en la región de extrapolación.



**Figura 2.9** Función de error de reconstrucción de un proceso Markoviano con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 2$ .

## 2.5.2 PROCESOS NO MARKOVIANOS CON FILTROS RC DE DOS ETAPAS

Ahora se examina el PMR utilizando *procesos Gaussianos no Markovianos* que se obtienen a la salida de un *filtro RC de dos etapas* (ver Figura 2.3b). Este filtro tiene una respuesta más suave. Su función de covarianza normalizada es:

$$R_x(\tau) = (1 + \alpha|\tau|)\exp(-\alpha|\tau|) \quad (2.29)$$

El tiempo de covarianza  $\tau_c$  de esta función es:

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} (1 + \alpha|\tau|)\exp(-\alpha|\tau|) d\tau = \frac{2}{\alpha} \quad (2.30)$$

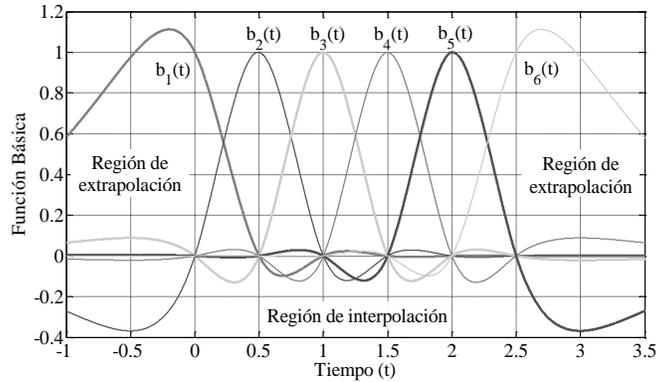
Nuevamente, el tiempo de covarianza  $\tau_c$  depende del valor de  $\alpha = 1/RC$ , por lo que para obtener un valor unitario, se necesita que  $\alpha = 2$ . Las expresiones de la función básica (2.22), la función de reconstrucción (2.21) y la función de error de reconstrucción (2.19) son:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N R_x(t - T_i) a_{ij} = \sum_{i=1}^N (1 + \alpha|t - T_i|) \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij} \quad (2.31)$$

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) b_j(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{i=1}^N (1 + \alpha|t - T_i|) \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij} \quad (2.32)$$

$$\sigma^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (1 + \alpha|t - T_i|) \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij} (1 + \alpha|T_j - t|) \exp(-\alpha|T_j - t|) \quad (2.33)$$

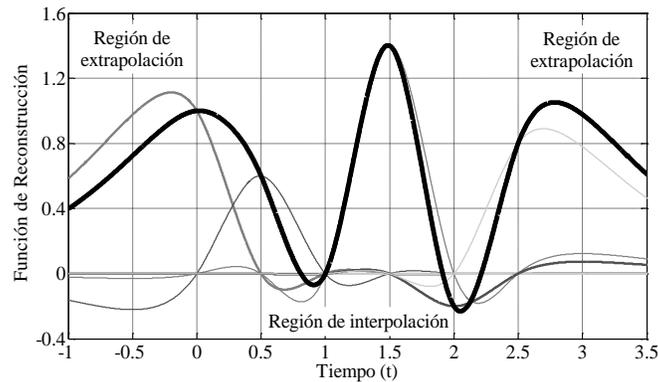
Si el proceso tiene muestras, valores e instantes de tiempo mostrados en la Tabla 2.1, en la Figura 2.10 se proyecta la función básica (2.31).



**Figura 2.10** Funciones básicas de un proceso no Markoviano con filtros RC de dos etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 0.5$ .

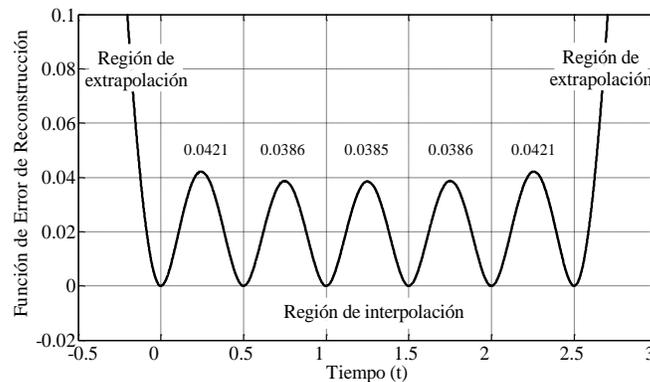
Es notable de que la función básica no es lineal, ni exponencial, solo se manifiesta como una serie de curvas que mantienen valores más allá de los intervalos adyacentes. En la región de extrapolación cada función básica correspondiente a cada muestra tiene valores

diferentes a cero, incluso mayores a uno. Esto debido a la influencia que proporcionan las muestras que se encuentran en la región de interpolación. En el caso Markoviano sólo las funciones  $b_1(t)$  y  $b_4(t)$  mostraban algún comportamiento en cada extremo. La función de reconstrucción (2.32) se ilustra en la Figura 2.11



**Figura 2.11** Función de reconstrucción de un proceso no Markoviano con filtros RC de dos etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 0.5$ .

La reconstrucción es ahora una señal más suave en su estructura, debido a que cada muestra tiene cierta influencia en cada intervalo de muestreo para definir la forma del proceso reconstruido, inclusive en la región de extrapolación. Esto se observa mejor en la función de error de reconstrucción (2.33) mostrada en la Figura 2.12.

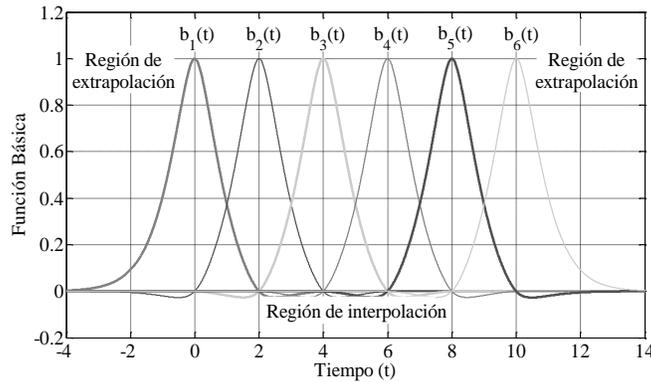


**Figura 2.12** Función de error de reconstrucción de un proceso no Markoviano con filtros RC de dos etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 0.5$ .

La gráfica de la función de error de reconstrucción tiene grandes diferencias respecto a la del caso Markoviano. Ya que cada muestra proporciona una mayor influencia,

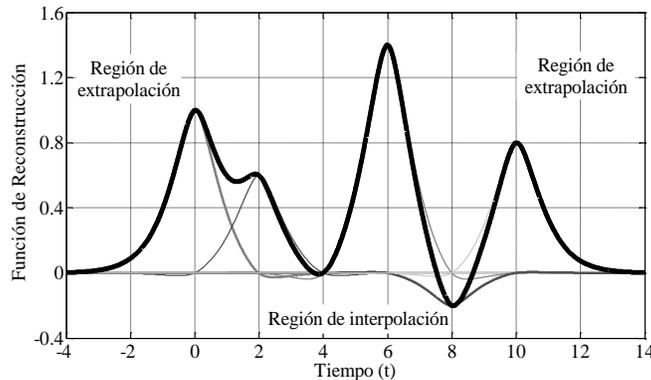
y es más visible para el intervalo central de la región de interpolación, donde el error es menor debido a que más muestras la rodean, mientras que en los intervalos de extremo la influencia es mayor hacia un lado que hacia el otro. Al igual que en las curvas de las funciones básicas, las curvas de error mantiene cierta simetría.

Equivalentemente en los procesos Markovianos, es posible aumentar el intervalo de muestreo de acuerdo a la Tabla 2.2. La figura 2.13 presenta la función básica (2.31).



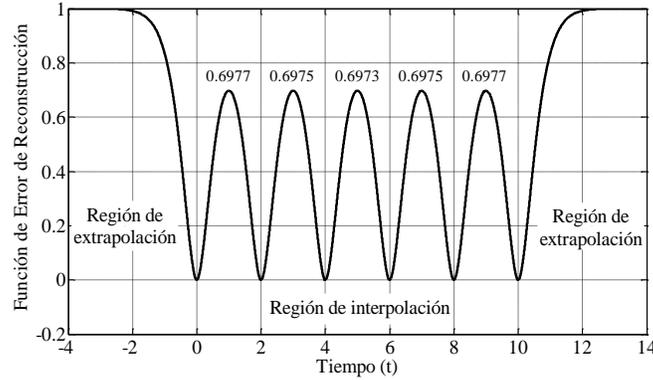
**Figura 2.13** Funciones básicas de un proceso no Markoviano con filtros RC de dos etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 2$ .

Como la distancia es mayor, la influencia entre las muestras es mínima en comparación a lo que se tenía en la Figura 2.10. Incluso en la región de extrapolación la magnitud máxima no pasa el valor de uno. La gráfica de la función de reconstrucción (2.32) expresada en la Figura 2.14, tiene igualmente poca influencia entre sus muestras.



**Figura 2.14** Función de reconstrucción de un proceso no Markoviano con filtros RC de dos etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 2$ .

En la función de error de reconstrucción (2.33) expuesta en la Figura 2.15, se ve que en el intervalo central el error sigue siendo menor no obstante la distancia. En la región de extrapolación existen características similares a las del caso Markoviano con  $\Delta T = 2$ .



**Figura 2.15** Función de error de reconstrucción de un proceso no Markoviano con filtros RC de dos etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 2$ .

### 2.5.3 PROCESOS NO MARKOVIANOS CON FILTROS RC DE TRES ETAPAS

Agregando otra etapa al filtro de la sección anterior, se forma un proceso *Gaussiano no Markoviano* con *filtros RC de tres etapas* (ver Figura 2.3c). Su respuesta es aún más suave, y se representa por:

$$R_x(\tau) = \left( 1 + \alpha|\tau| + \frac{\alpha^2\tau^2}{3} \right) \exp(-\alpha|\tau|) \quad (2.34)$$

El tiempo de covarianza  $\tau_c$  es:

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} \left( 1 + \alpha|\tau| + \frac{\alpha^2\tau^2}{3} \right) \exp(-\alpha|\tau|) d\tau = \frac{8}{3\alpha} \quad (2.35)$$

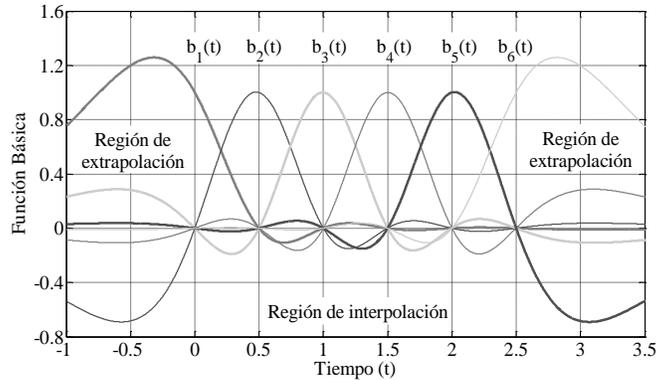
Como se mencionó previamente, es necesario tener a la función de covarianza con parámetros normalizados y un tiempo de covarianza  $\tau_c$  unitario. Por lo tanto, para que esto se cumpla, se tiene que  $\alpha = 8/3$ . Obteniendo un valor mayor que en los dos filtros anteriores. Conservando las características de entrada, las expresiones de la función básica (2.22), la función de reconstrucción (2.21) y la función de error de reconstrucción (2.19) se representan por:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N \left( 1 + \alpha |t - T_i| + \frac{\alpha^2 (t - T_i)^2}{3} \right) \exp(-\alpha |t - T_i|) a_{ij} \quad (2.36)$$

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{i=1}^N \left( 1 + \alpha |t - T_i| + \frac{\alpha^2 (t - T_i)^2}{3} \right) \exp(-\alpha |t - T_i|) a_{ij} \quad (2.37)$$

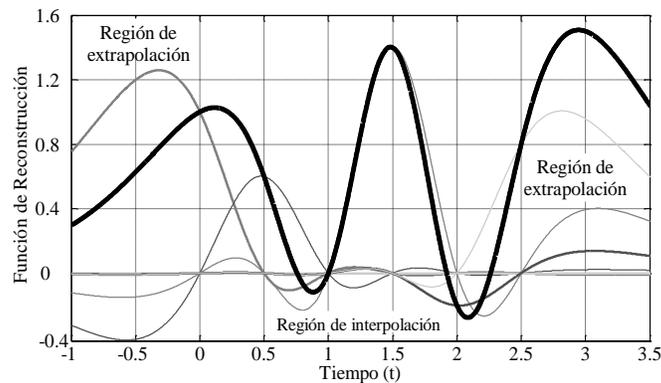
$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2(t) = & 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( 1 + \alpha |t - T_i| + \frac{\alpha^2 (t - T_i)^2}{3} \right) \exp(-\alpha |t - T_i|) a_{ij} \times \\ & \times \left( 1 + \alpha |T_j - t| + \frac{\alpha^2 (T_j - t)^2}{3} \right) \exp(-\alpha |T_j - t|) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Tomando los parámetros mostrados en la Tabla 2.1, en la Figura 2.16 se encuentra la función básica (2.36).

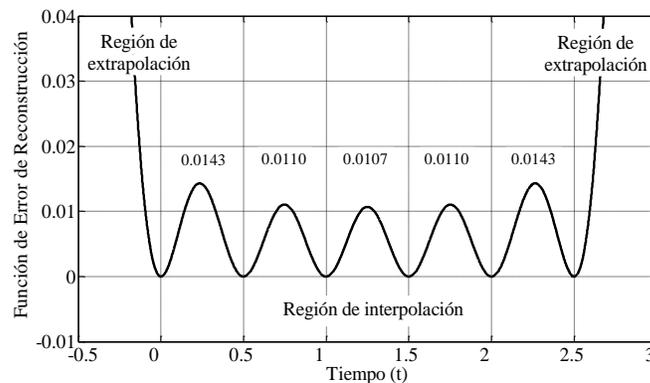


**Figura 2.16** Funciones básicas de un proceso no Markoviano con filtros RC de tres etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 0.5$ .

El comportamiento de las funciones básicas  $b_j(t)$ , es parecido al obtenido con el filtro  $RC$  de dos etapas. La diferencia es que en este caso existe una mayor influencia entre cada muestra, ya que incluso hasta una cuarta muestra es capaz de proporcionar un efecto considerable en la reconstrucción. La función de reconstrucción (2.37) y la función de error de reconstrucción (2.38) se proyectan en la Figura 2.17 y Figura 2.18 respectivamente.



**Figura 2.17** Función de reconstrucción de un proceso no Markoviano con filtros  $RC$  de tres etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 0.5$ .



**Figura 2.18** Función de error de reconstrucción de un proceso no Markoviano con filtros  $RC$  de tres etapas con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 0.5$ .

Tanto la función de reconstrucción como la función de error de reconstrucción, tienen curvas más suaves que las obtenidas con el filtro  $RC$  de dos etapas. La magnitud del error es menor debido a la influencia de un mayor número de muestras.

Utilizando las muestras de la Tabla 2.2, las curvas para todas las funciones serían casi iguales a las obtenidas con los filtros  $RC$  teniendo los mismos parámetros. La magnitud del error sería menor y la única diferencia.

Por lo visto en los filtros *RC*, la influencia que puede proporcionar cada muestra depende en gran medida del tiempo de covarianza  $\tau_c$  y de la función de covarianza  $R_x(\tau)$ . Para que esta influencia sea la indicada y determine correctamente la reconstrucción del proceso, es necesario que la distancia entre muestras sea menor al tiempo de covarianza que define al filtro lineal, es decir, se deben considerar intervalos de muestreo de  $\Delta T < \tau_c$ . Por lo que en intervalos de muestreo mayores, la reconstrucción del proceso ya no sería óptima.

## 2.6 LA FUNCIÓN *SEN C* COMO UN CASO PARTICULAR

Mediante las fórmulas (2.8) y (2.9), se puede expresar la función  $b_j(t)$  con el espectro de potencia  $S_x(\omega)$  del proceso dado  $x(t)$ . Primero se aplica el teorema de Wiener – Khintchine en la función de covarianza  $K_x(t - T_j)$ :

$$K_x(t - T_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega(t-T_i)} d\omega \quad (2.39)$$

Por lo que en lugar de (2.22) se tiene la función básica:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega(t-T_i)} d\omega \quad (2.40)$$

Con la ecuación anterior, es posible considerar cualquier caso Gaussiano con espectro limitado en  $-\omega_b < \omega < \omega_b$ , resultando:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} S_x(\omega) e^{j\omega(t-T_i)} d\omega \quad (2.41)$$

La función básica ahora depende de la frecuencia de corte  $\omega_b$  y del tipo de la función espectral  $S_x(\omega)$ . Asimismo, los momentos de covarianza  $K_x(T_i - T_j)$ , y por tanto

los elementos  $a_{ij}$ , deben ser calculados basándose en la función de covarianza  $K_x(\tau)$  correspondiente al espectro limitado. Si algún parámetro en (2.41) cambia, la forma de la función básica cambia también. Por lo que depende de las principales características estadísticas del proceso y de los parámetros de discretización, no solamente de la frecuencia de corte  $\omega_b$ . La función básica no es del tipo  $\text{Sen } x/x$ , debido a que la función  $\text{Sen } x/x$  surge de un caso particular, que es cuando el espectro  $S_x(\omega)$  es rectangular [39]:

$$S_x(\omega) = \begin{cases} S_0 = \pi/\omega_b, & |\omega| \leq \omega_b \\ 0, & |\omega| > \omega_b \end{cases} \quad (2.42)$$

Sustituyendo (2.42) en (2.39) se obtiene la función de covarianza  $K_x(t - T_i)$ :

$$K_x(t - T_i) = \frac{S_0 \omega_b}{\pi} \frac{\text{Sen } \omega_b (t - T_i)}{\omega_b (t - T_i)} \quad (2.43)$$

Entonces, la expresión para la función básica es escrita como:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{S_0 \omega_b}{\pi} \frac{\text{Sen } \omega_b (t - T_i)}{\omega_b (t - T_i)} \quad (2.44)$$

Asumiendo que el intervalo de muestreo está determinado por:

$$\Delta T = \frac{\pi}{\omega_b} \quad (2.45)$$

Las expresiones (2.43) y (2.45) establecen que todas las muestras son independientes, esto es,  $K_x(T_i - T_j) = 0$  para  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , si  $i \neq j$ . Por tanto, la matriz de covarianza  $K_x(T_i, T_j)$  es diagonal con los elementos  $\sigma^2 = S_0/\Delta T$ , y la matriz inversa de covarianza es diagonal con los elementos  $(\sigma^2)^{-1} = \Delta T/S_0$ . De (2.44) se obtiene:

$$b_j(t) = \frac{\text{Sen } \omega_b(t - T_j)}{\omega_b(t - T_j)} \quad (2.46)$$

La función básica  $b_j(t)$  está determinada por la función  $\text{Sen } x/x$  en un caso particular, que es cuando el proceso Gaussiano es caracterizado por el espectro rectangular. En consecuencia, mediante (2.21) y (2.45), se adquiere la función de reconstrucción  $\tilde{m}(t)$  para el espectro rectangular:

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N [x(T_j)] b_j(t) = \sum_{j=1}^N [x(T_j)] \frac{\text{Sen } \omega_b(t - T_j)}{\omega_b(t - T_j)} = \sum_{j=1}^N \left[ x \left( j \frac{\pi}{\omega_b} \right) \right] \frac{\text{Sen } (\omega_b t - j\pi)}{(\omega_b t - j\pi)} \quad (2.47)$$

Si  $\omega_b = 2\pi W$  y  $j$  es el subíndice de la suma, sustituyendo tenemos que:

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N \left[ x \left( \frac{j}{2W} \right) \right] \frac{\text{Sen } \pi(2Wt - j)}{\pi(2Wt - j)} \quad (2.48)$$

Comparando (2.47) y (2.48) con (1.4) y (1.5), que definen el teorema clásico de muestreo y el teorema de Balakrishnan respectivamente, se nota que se llega a los mismos resultados utilizando el PMR de los procesos aleatorios basado en la regla de la esperanza matemática condicional. Lo que significa que este procedimiento es muy útil para describir el comportamiento de la función de reconstrucción de los procesos Gaussianos con varias funciones de covarianza o espectros de potencia limitados o no limitados en banda.

Utilizando las muestras de la Tabla 2.1, asumiendo que pasan por un filtro ideal el cual tiene una función de covarianza del tipo  $\text{Sen } x/x$ :

$$K_x(\tau) = \frac{\text{Sen } \omega_b \tau}{\omega_b \tau} = \frac{\text{Sen } 2\pi\tau}{2\pi\tau} \quad (2.49)$$

donde  $\omega_b = 2\pi$ , y teniendo un tiempo de covarianza  $\tau_c$  unitario:

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_X(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} \left| \frac{\text{Sen } 2\pi\tau}{2\pi\tau} \right| d\tau = 1 \quad (2.50)$$

Entonces, se puede obtener una *función de reconstrucción*:

$$\hat{m}(t) = \sum_{j=1}^N [x(T_j)] \frac{\text{Sen } \omega_b(t - T_j)}{\omega_b(t - T_j)} \quad (2.51)$$

Ahora, según el autor en [17] existe un algoritmo para calcular la *función de error de reconstrucción* de un proceso aleatorio limitado en banda cuando pasa por un filtro lineal invariante en el tiempo, conociendo únicamente la función de autocorrelación del proceso en la salida. Por lo que en base a (1.6), al autor asume que:

$$\varepsilon^2 \cong \left\{ \left[ x(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\text{Sen } \pi(t - nT)/T}{\pi(t - nT)/T} \right]^2 \right\} \quad (2.52)$$

Si la esperanza estadística y la sumatoria infinita pueden ser intercambiadas se tiene que:

$$\varepsilon^2 = K_x(t, t) - 2 \sum_m K_x(t, nT) \phi(t - nT) + \sum_n \sum_m K_x(nT, mT) \phi(t - nT) \phi(t - mT) \quad (2.53)$$

donde:

$$\phi(t) = \frac{\text{Sen } (\pi t/T)}{\pi t/T} \quad (2.54)$$

Se debe tomar en cuenta a la función  $\text{Sen } x/x$  de acuerdo al teorema de Blakrishnan. Seleccionando un número  $N$  arbitrario de muestras y centrándose en el error a la mitad del

intervalo central, el intervalo de muestreo  $\Delta T$  va a depender de la frecuencia restringida  $\omega_b$  mediante la relación expuesta en (2.45). Entonces, para calcular el error en la mitad de la región de muestreo sobre el intervalo central en donde el error es mayor, se utiliza:

$$t = \frac{\Delta T(N-1)}{2} \quad (2.55)$$

Sería más sencillo emplear en (2.53) una función de covarianza normalizada. Para esto es necesario considerar la expresión (2.8) y multiplicarla por un factor  $C$  denominado *factor de normalización*. Si el espectro está limitado en  $-\omega_b < \omega < \omega_b$ , la función es:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} C \int_{-\omega_b}^{\omega_b} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.56)$$

Primeramente se necesita calcular a  $C$ . Por lo que igualando a uno la expresión (2.56), ya que es su magnitud máxima cuando  $\tau = 0$ , se obtiene:

$$R_x(\tau = 0) = \frac{1}{\pi} C \int_0^{\omega_b} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = 1 \quad (2.57)$$

Despejando a  $C$  resulta:

$$C = \pi \left[ \int_0^{\omega_b} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \right]^{-1} \quad (2.58)$$

Sustituyendo el valor de  $C$  en (2.56) se tiene la función de covarianza normalizada para cualquier espectro de potencia limitado en banda, en términos puramente reales:

$$R_x(\tau) = \left( \int_0^{\omega_b} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \right)^{-1} \int_0^{\omega_b} S_x(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \quad (2.59)$$

Empleando la función de covarianza normalizada en (2.53) se tiene que:

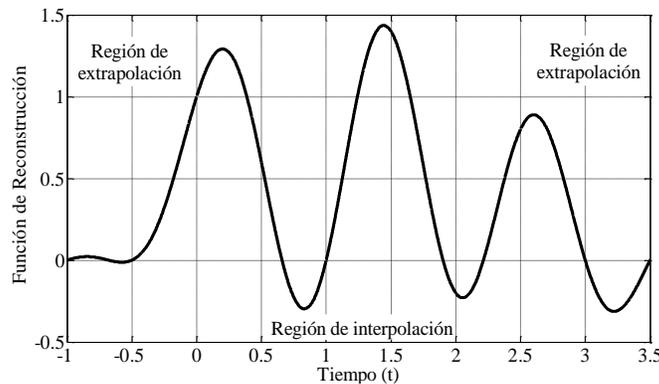
$$\varepsilon^2 = 1 - 2 \sum_m R_x(t, nT) \phi(t - nT) + \sum_n \sum_m R_x(nT, mT) \phi(t - nT) \phi(t - mT) \quad (2.60)$$

Debido a que se quiere calcular el error a la mitad del intervalo central, se deben usar:

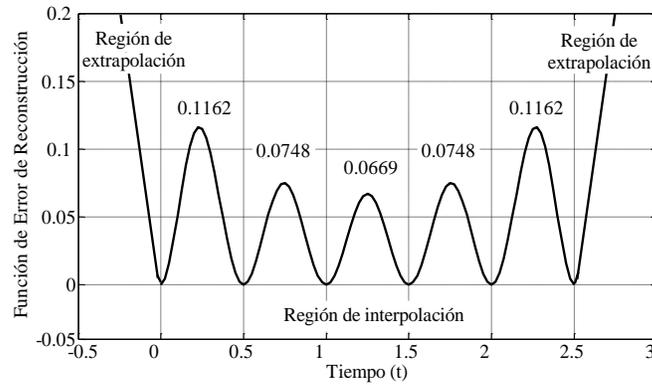
$$R_x(t, nT) = R_x\left(\frac{\pi(N-1)}{2\omega_b} - \frac{n\pi}{\omega_b}\right) = R_x\left(\frac{\Delta T(N-1)}{2} - n\Delta T\right) \quad (2.61)$$

$$\phi(t, nT) = \phi\left(\frac{\pi(N-1)}{2\omega_b} - \frac{n\pi}{\omega_b}\right) \quad (2.62)$$

Ejemplificando la metodología anterior, la función de reconstrucción (2.51) se grafica en la Figura 2.19, mientras que la función de error de reconstrucción (2.59) se ilustra en la Figura 2.20. Todas las funciones tienen forma senoidal. En la región de extrapolación existe una componente oscilante que se va desvaneciendo mientras se aleja de la zona de muestreo. Cada muestra proporciona cierta influencia en las demás, debido a la estructura y forma de la función  $\text{Sen } x/x$ . Esto se aprecia en los intervalos centrales del proceso donde la magnitud del error es menor que en los intervalos de extremo. Aunque se trata de un filtro ideal, es claro que el error no es igual a cero, es más, existe un error mayor que el obtenido con filtros  $RC$  de dos o tres etapas.



**Figura 2.19** Función de reconstrucción obtenida con un filtro ideal con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 0.5$ .



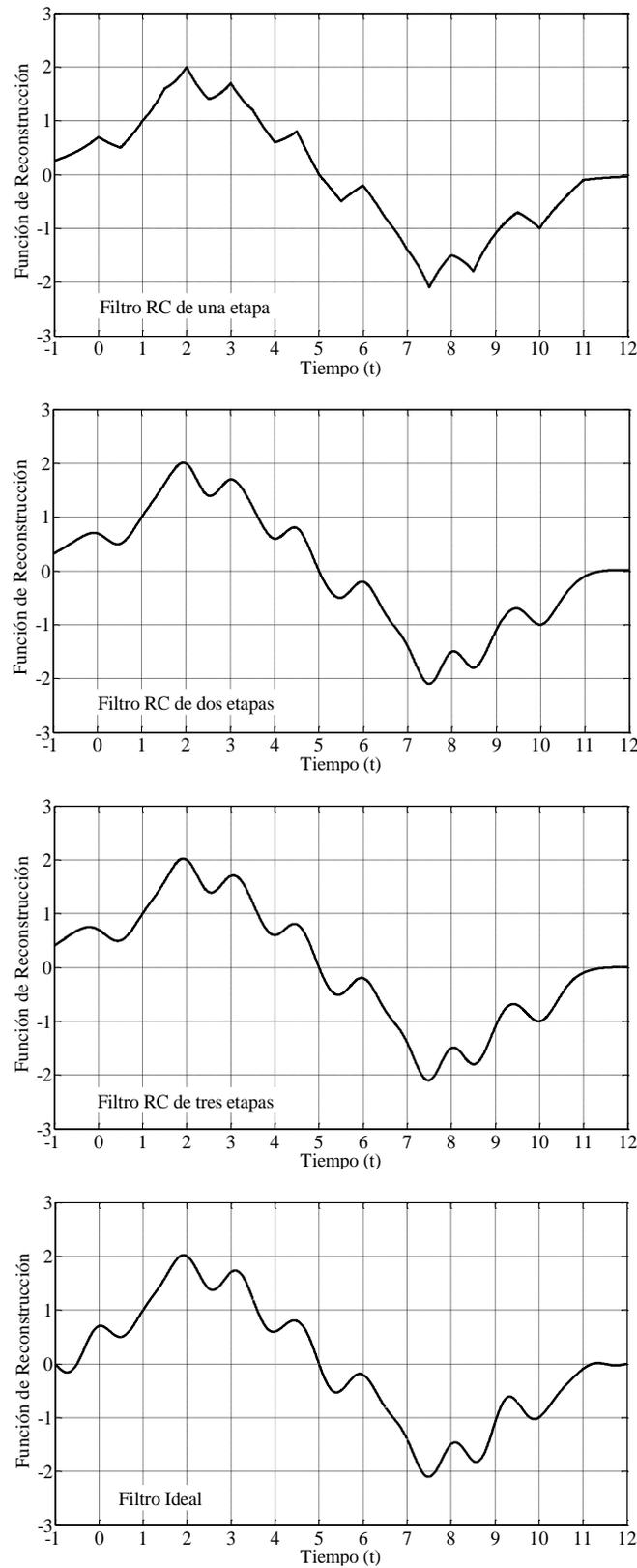
**Figura 2.20** Función de error de reconstrucción obtenida con un filtro ideal con seis muestras tomadas en un intervalo de muestreo  $\Delta T = 0.5$ .

## 2.7 COMPARACIÓN DE LOS PROCEDIMIENTOS DE RECONSTRUCCIÓN

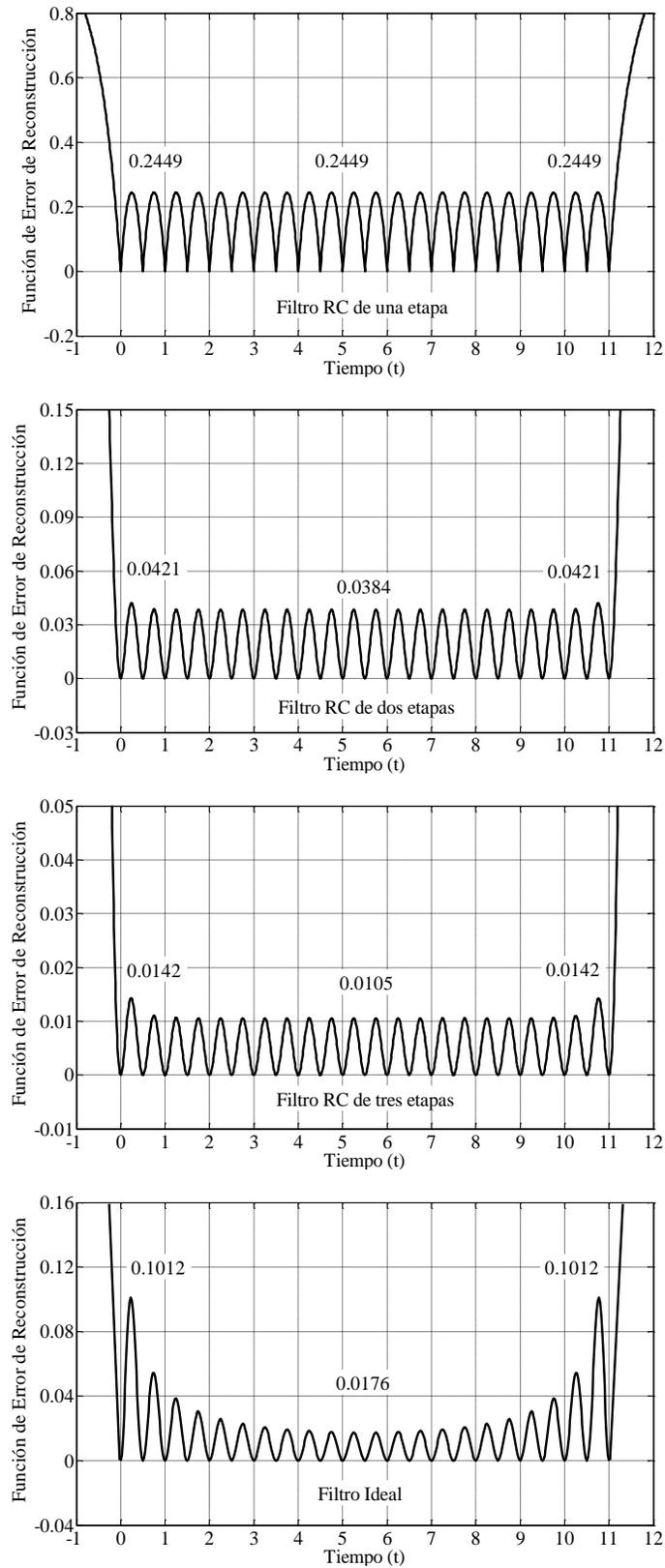
Por último se realiza una comparación entre la regla de la *esperanza matemática condicional* usando filtros *RC*, y el método de la *función sen c* equivalente a un filtro ideal. El ejemplo considera 23 muestras distribuidas uniformemente en un intervalo de  $\Delta T = 0.5$ , ellas aparecen en la Tabla 2.3. Las funciones de reconstrucción se presentan en la Figura 2.21. Mientras que las funciones de error de reconstrucción están en la Figura 2.22.

Valor de la muestra $x(T_j)$	Instante de muestreo $T_j$ [seg.]	Valor de la muestra $x(T_j)$	Instante de muestreo $T_j$ [seg.]
$x(T_1) = 0.7$	$T_1 = 0$	$x(T_{13}) = -0.2$	$T_{13} = 6$
$x(T_2) = 0.5$	$T_2 = 0.5$	$x(T_{14}) = -0.8$	$T_{14} = 6.5$
$x(T_3) = 1$	$T_3 = 1$	$x(T_{15}) = -1.4$	$T_{15} = 7$
$x(T_4) = 1.6$	$T_4 = 1.5$	$x(T_{16}) = -2.1$	$T_{16} = 7.5$
$x(T_5) = 2$	$T_5 = 2$	$x(T_{17}) = -1.5$	$T_{17} = 8$
$x(T_6) = 1.4$	$T_6 = 2.5$	$x(T_{18}) = -1.8$	$T_{18} = 8.5$
$x(T_7) = 1.7$	$T_7 = 3$	$x(T_{19}) = -1.1$	$T_{19} = 9$
$x(T_8) = 1.2$	$T_8 = 3.5$	$x(T_{20}) = -0.7$	$T_{20} = 9.5$
$x(T_9) = 0.6$	$T_9 = 4$	$x(T_{21}) = -1$	$T_{21} = 10$
$x(T_{10}) = 0.8$	$T_{10} = 4.5$	$x(T_{22}) = -0.5$	$T_{22} = 10.5$
$x(T_{11}) = 0$	$T_{11} = 5$	$x(T_{23}) = -0.1$	$T_{23} = 11$
$x(T_{12}) = -0.5$	$T_{12} = 5.5$		

**Tabla 2.3** Valores de muestreo de procesos Gaussianos con 23 muestras y  $\Delta T = 0.5$ .



**Figura 2.21** Funciones de reconstrucción obtenidas con cuatro diferentes tipos de filtros con 23 muestras tomadas en un intervalo de  $\Delta T = 0.5$ .



**Figura 2.22** Funciones de error de reconstrucción obtenidas con cuatro diferentes tipos de filtros con 23 muestras tomadas en un intervalo de  $\Delta T = 0.5$ .

La reconstrucción por medio del filtro  $RC$  de una etapa tiene un comportamiento entre muestras casi lineal. En el filtro  $RC$  de dos etapas se observa un comportamiento exponencial y suave. Se obtiene una curva similar con el filtro  $RC$  de tres etapas, aunque su respuesta es aún más suave. En el filtro ideal existen ciertas diferencias en los extremos de la reconstrucción en relación a los filtros  $RC$ , esto debido a que el error en esos intervalos laterales es mayor. El error para el filtro  $RC$  de una etapa es el mismo en cualquier intervalo de muestreo, y no cambia con el número de muestras. En el filtro  $RC$  de dos etapas se obtiene un error menor en los intervalos centrales, y aumenta hacia los intervalos de extremo dependiendo de la influencia que ejerzan las muestras vecinas. Lo mismo sucede en el filtro  $RC$  de tres etapas, pero con errores menores. En el filtro ideal hay una notable diferencia en las magnitudes de los errores, ya que va disminuyendo de manera visible de la zona lateral a la central. Aunque el error nunca es menor que el obtenido por el filtro  $RC$  de tres etapas. Pero si se llegara a considerar un número infinito de muestras, el error en el filtro ideal tendría una tendencia a cero, como lo indica el teorema de Balakrishnan.

## 2.8 RESUMEN

En este capítulo se analizó el procedimiento de Muestreo – Reconstrucción para procesos aleatorios de tipo Gaussiano. Obteniendo la fdp del proceso se establece que para tener una descripción mínima de un proceso aleatorio Gaussiano, es necesario conocer su función de la esperanza matemática  $m(t)$ , su función de la varianza  $\sigma^2(t)$  y su función de covarianza  $K(\tau)$ , con lo cual definimos el comportamiento del proceso [29-33]. Analizando los sistemas lineales, es posible obtener sus características de respuesta con respecto a su función de covarianza  $K(\tau)$  y su función de densidad espectral  $S(w)$  en la salida. Estas funciones están relacionadas mediante el teorema de Wiener – Khintchine. Revisando el teorema de Balakrishnan [7], es muy evidente que trabaja exclusivamente con el espectro de potencia, lo que significa que este teorema es óptimo solamente para los procesos Gaussianos. El teorema de Balakrishnan trata con un tipo muy específico de los procesos estocásticos que son los procesos con espectro limitado [40,52].

Se aplicó la regla de la esperanza matemática condicional para la descripción del PMR de los procesos Gaussianos. Comparando los resultados de esta regla, con los obtenidos de la función  $\text{Sen } x/x$ , la conclusión es que esta última función proporciona una reconstrucción no óptima del proceso cuando el número de muestras es finito. Esto debido a que la función  $\text{Sen } x/x$  surge de un caso muy particular, que es cuando la forma de la función de densidad espectral de potencia es rectangular. Además, se obtuvieron menores magnitudes de error aplicando la regla de la media condicional.

# Capítulo 3

## PROCEDIMIENTO DE MUESTREO - RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS ALEATORIOS DE RAYLEIGH

En este capítulo se investiga el Procedimiento de reconstrucción de los procesos aleatorios que tienen una *distribución de Rayleigh* en base a sus muestras. Ésta densidad es muy importante en el área de las comunicaciones, principalmente se utiliza en los radares y en canales de comunicación celular. El *fading* de Rayleigh en un canal de comunicación es usado en modelos de canales de comunicación móvil con multitrayectoria. Adicionalmente, con ésta distribución se estudian fenómenos físicos relacionados con la propagación de la luz y el comportamiento de partículas subatómicas.

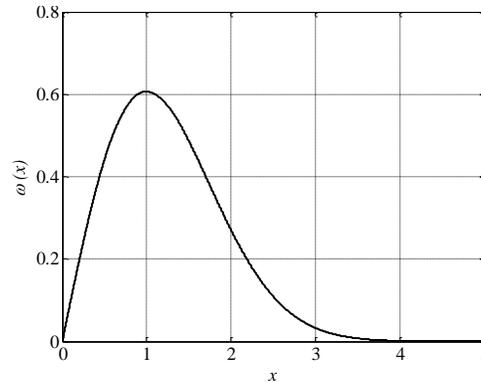
### 3.1 INTRODUCCIÓN

La distribución de Rayleigh se aplica a una variable continua positiva no limitada. La densidad de probabilidad y la distribución acumulativa vienen dadas por [53]:

$$\omega(x) = \frac{x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\sigma^2} \quad (3.1)$$

$$\Omega(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.2)$$

donde  $\sigma^2$  es la varianza no condicional. La Figura 3.1 representa la función de densidad de probabilidad  $\omega(x)$ .



**Figura 3.1** Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria de Rayleigh.

La distribución de Rayleigh suele utilizarse únicamente en las mediciones del origen, es decir, para valores bajos de  $x$ . Lo que se interpreta como: la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  tenga un valor inferior a  $x$  es proporcional al cuadrado de este valor. Si la variable considerada es una tensión por ejemplo, su cuadrado representa la potencia de la señal. En otros términos, en una escala de decibelios, la potencia disminuye 10 dB por cada década de probabilidad. Esta propiedad permite a menudo saber si un nivel recibido tiene una distribución de Rayleigh.

La densidad de Rayleigh está ligada a la distribución Gaussiana de la siguiente manera: dada una distribución Gaussiana bidimensional con dos variables independientes  $x$  e  $y$  de media cero y con la misma desviación típica  $\sigma$ , la variable aleatoria:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.3)$$

tiene una distribución de Rayleigh, y el valor más probable de  $r$  es igual a  $\sigma$ . Como  $r$  representa la longitud de un vector que une un punto de una distribución Gaussiana bidimensional con el centro de esta distribución, se puede deducir que la densidad de Rayleigh representa la distribución de la longitud de un vector que sería la suma de un gran número de vectores de menor amplitud y cuyas fases tienen una distribución uniforme.

El análisis del PMR de procesos aleatorios de Rayleigh se basa en las expresiones de las funciones de densidad de probabilidad. Aunque un proceso no Gaussiano se compone normalmente de un proceso Gaussiano en la entrada, en esta ocasión para lograr una mejor descripción del PMR, se debe excluir la condición Gaussiana del proceso de entrada. Esto debido a que no se cuenta con una metodología general para la reconstrucción de un proceso no Gaussiano, además de que se tendría que conocer la fdp no Gaussiana multidimensional. Por lo anterior es mejor tener en la entrada un proceso Markoviano o no Markoviano de Rayleigh. Con lo cual no es necesario hacer una distinción entre las muestras de entrada  $\xi(t)$  y las muestras de salida  $\eta(t)$ . Sencillamente utilizaremos un mismo parámetro  $x(t)$  para referenciarlas, ya que el valor en la entrada es el mismo que el que se obtiene en la salida. Esta característica se comprobará y discutirá en ejemplos posteriores

Se puede describir completamente el proceso condicional entre dos muestras dadas  $x_1(T_1)$  y  $x_2(T_2)$  conociendo la fdp condicional  $\omega(x, t | x_1(T_1), x_2(T_2))$ . En este punto destaca el hecho de que el proceso  $\tilde{x}(t)$  entre dos muestras de un proceso Markoviano  $x(t)$  es no Markoviano, pero es posible representar su fdp condicional con base en la fdp transitoria  $\omega(x_i, t_i | x_j, t_j)$  del proceso Markoviano dado. Si se tienen tres secciones del proceso  $x(t)$  en los tiempos  $t_1 < t < t_2$ , en el caso general no Markoviano la fdp tridimensional es presentada por:

$$\omega(x_1, t_1; x, t; x_2, t_2) = \omega(x_1, t_1) \omega(x, t | x_1, t_1) \omega(x_2, t_2 | x_1, t_1; x, t) \quad (3.4)$$

En la ecuación anterior existen tres tipos diferentes de fdp. Es claro que la más complicada de obtener es la tercera. En la variante Markoviana esta fdp tridimensional puede ser representada como un producto de una fdp unidimensional y fdp bitransitoria.

$$\omega(x_1, t_1; x, t; x_2, t_2) = \omega(x_1, t_1) \omega(x, t | x_1, t_1) \omega(x_2, t_2 | x, t) \quad (3.5)$$

Con ello, la fdp condicional que se requiere puede ser expresada por la fdp transitoria  $\omega(x_i, t_i | x_j, t_j)$  del proceso Markoviano dado. Considerando un proceso Markoviano de Rayleigh esta fdp transitoria es [31]:

$$\omega(x_i, t_i | x_j, t_j) = \frac{x_i}{\sigma^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x_i^2 + Q^2 x_j^2}{2\sigma^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{x_i x_j}{\sigma^2}\right) \quad (3.6)$$

donde  $I_0$  es la función Bessel modificada de orden cero y  $Q$  es la función auxiliar empleada como función de covarianza.

### 3.2 FUNCIONES DE MOMENTOS CONDICIONALES

De las ecuaciones (3.4) y (3.5), tenemos que:

$$\omega(x, t | x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\omega(x, t | x_1, t_1) \omega(x_2, t_2 | x, t)}{\omega(x_2, t_2 | x_1, t_1)} \quad (3.7)$$

Con esta expresión se obtienen las funciones de momentos condicionales de  $i$ -ésimo orden:

$$\tilde{m}_i^x(t) = \langle x^i(t) | x_1(T_1), x_2(T_2) \rangle \quad (3.8)$$

En dicha fórmula interviene el valor de la muestra. Y es válida para cualquier proceso no Gaussiano estacionario.

### 3.3 CARACTERÍSTICAS ESTADÍSTICAS DEL PROCESO

En la distribución de Rayleigh, las principales propiedades estadísticas ya se encuentran establecidas de manera general. Considerando que  $\sigma = 1$ , ellas son [31]:

- *Esperanza matemática:*

$$\langle x \rangle = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.253 \quad (3.9)$$

- *Varianza:*

$$\langle x^2 \rangle = \frac{4 - \pi}{2} \sigma^2 = 0.4292 \quad (3.10)$$

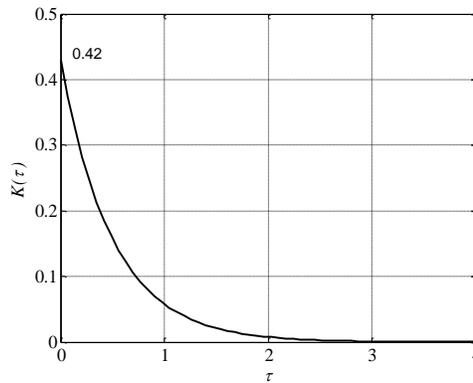
- *Función de covarianza (ver Figura 3.2):*

$$K_x(\tau) = \langle xx_\tau \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\pi \sigma^2}{2} \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^2 Q^2(\tau) + \left( \frac{1}{8} \right)^2 Q^4(\tau) + \left( \frac{3}{48} \right)^2 Q^6(\tau) + \dots \right\} \quad (3.11)$$

- *Función de covarianza normalizada:*

$$R_x(\tau) = \frac{K_x}{\sigma_x^2} = \frac{\pi}{4 - \pi} \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^2 Q^2(\tau) + \left( \frac{1}{8} \right)^2 Q^4(\tau) + \left( \frac{3}{48} \right)^2 Q^6(\tau) + \dots \right\} \quad (3.12)$$

$$= 0.921Q^2(\tau) + 0.058Q^4(\tau) + \dots \approx Q^2(\tau)$$



**Figura 3.2** Función de covarianza de Rayleigh.

- *Tiempo de covarianza:*

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_{\eta}(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} |0.921Q^2(\tau) + 0.058Q^4(\tau) + \dots| d\tau \approx \int_0^{\infty} |Q^2(\tau)| d\tau \quad (3.13)$$

### 3.4 ALGORITMO ÓPTIMO

Este algoritmo se adquiere por medio de la esperanza matemática condicional, la cual se basa en las funciones de momentos condicionales [50]. Cuando en la ecuación (3.8)  $i = 1$  se tiene la *función de reconstrucción*, media condicional o primer momento condicional:

$$\tilde{m}_1^x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\omega(x,t) dx \quad (3.14)$$

Si  $i = 2$  se obtiene el segundo momento condicional:

$$\tilde{m}_2^x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\omega(x,t) dx \quad (3.15)$$

Por lo que la varianza condicional o *función de error de reconstrucción* es:

$$\tilde{\sigma}_x^2(t) = \tilde{m}_2^x(t) - [\tilde{m}_1^x(t)]^2 \quad (3.16)$$

Dentro del algoritmo óptimo, se puede encontrar el promedio de la familia de curvas de la varianza condicional a la salida  $\tilde{\sigma}_x^2(t)$  para diferentes valores de una sola muestra mediante:

$$\langle \tilde{\sigma}_x^2(t) \rangle = \int_0^{\infty} \tilde{\sigma}_x^2(t, x(T_N)) \omega(x(T_N)) dx(T_N) \quad (3.17)$$

### 3.5 ALGORITMO NO ÓPTIMO

Este algoritmo se basa únicamente en el conocimiento de la densidad espectral de potencia, utilizando a la función de covarianza para su demostración. Es decir, la metodología para la descripción del PMR no Gaussiano, es la misma que se usa en un proceso Gaussiano. Por lo que la *función de reconstrucción* (2.18) es:

$$\tilde{m}_x(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\pi\sigma^2}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 Q^2(t-T_i) + \left(\frac{1}{8}\right)^2 Q^4(t-T_i) + \dots \right\} a_{ij} [x(T_j) - m_x(t)] \quad (3.18)$$

Y la *función de error de reconstrucción* (2.19) es:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x^2(t) = & \sigma_x^2(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\pi\sigma^2}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 Q^2(t-T_i) + \left(\frac{1}{8}\right)^2 Q^4(t-T_i) + \dots \right\} a_{ij} \times \\ & \times \frac{\pi\sigma^2}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 Q^2(T_j-t) + \left(\frac{1}{8}\right)^2 Q^4(T_j-t) + \dots \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$m_x(t)$  y  $\sigma_x^2(t)$  se obtienen por medio de (3.9) y (3.10) respectivamente.

### 3.6 RECONSTRUCCIÓN EN LA REGIÓN DE EXTRAPOLACIÓN

Cuando la reconstrucción sucede en el momento  $t > t_N$ , se dice que ocurre en la *región de extrapolación* o *fuera del área de muestreo*. Se considera una sola muestra en el instante de

tiempo  $T_1 = 0$ . Los valores de muestreo están en la Tabla 3.1 y se aplican a procesos Markovianos y no Markovianos.

	Valor de la muestra $x(T_j)$	Instante de muestreo $T_j$ [seg.]
A	$x(T_1) = 0.2$	$T_1 = 0$
B	$x(T_1) = 0.7$	$T_1 = 0$
C	$x(T_1) = 1$	$T_1 = 0$
D	$x(T_1) = 1.3$	$T_1 = 0$
E	$x(T_1) = 1.5$	$T_1 = 0$

**Tabla 3.1** Valores de muestreo de procesos Markovianos y no Markovianos de Rayleigh en la región de extrapolación.

Debido a que se trabaja con solo un tipo de fdp de Rayleigh, las formulas de las funciones de reconstrucción y de las funciones de error de reconstrucción son las mismas para todos los procesos dentro del algoritmo óptimo. Solamente cambia el valor de  $Q$  dependiendo de si es un proceso Markoviano o no Markoviano. Lo mismo sucede al aplicar la metodología del algoritmo no óptimo.

Para obtener el PMR del *algoritmo óptimo* es necesario escribir la expresión (3.6) para diferentes argumentos y sustituir en (3.7). La fdp en el régimen de extrapolación teniendo un proceso Markoviano o no Markoviano de Rayleigh queda indicada de la siguiente manera:

$$\omega(x, t | x_1, t_1) = \frac{x}{\sigma^2(1-Q^2)} \exp \left\{ -\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2\sigma^2(1-Q^2)} \right\} I_0 \left( \frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{\sigma^2} \right) \quad (3.20)$$

Conociendo esto, la función de reconstrucción (3.14), el segundo momento condicional (3.15) y la función de error de reconstrucción (3.16) son:

$$\tilde{m}_1^x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sigma^2(1-Q^2)} \exp \left\{ -\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2\sigma^2(1-Q^2)} \right\} I_0 \left( \frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{\sigma^2} \right) dx \quad (3.21)$$

$$\tilde{m}_2^x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{\sigma^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2\sigma^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{\sigma^2}\right) dx \quad (3.22)$$

$$\sigma_x^2(t) = \tilde{m}_2^x(t) - [\tilde{m}_1^x(t)]^2 \quad (3.23)$$

Aplicando el *algoritmo no óptimo*, la función de reconstrucción (3.18) y la función de error de reconstrucción (3.19) son:

$$\tilde{m}_\eta(t) = 1.25 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [0.42 \cdot Q^2(t - T_i)] a_{ij} [x(T_j) - 1.25] \quad (3.24)$$

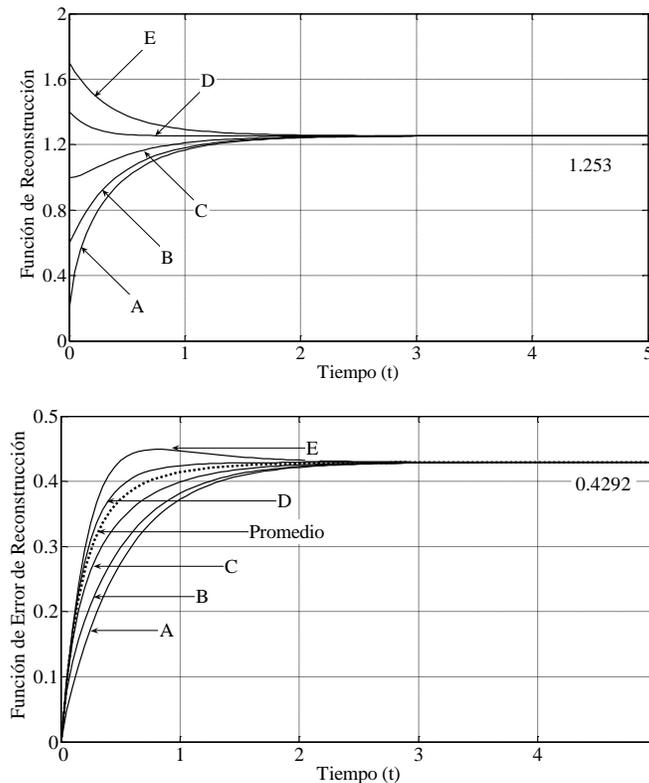
$$\sigma_\eta^2(t) = 0.42 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [0.42 \cdot Q^2(t - T_i)] a_{ij} [0.42 \cdot Q^2(T_j - t)] \quad (3.25)$$

### 3.6.1 ALGORITMOS ÓPTIMOS Y NO ÓPTIMOS DE PROCESOS MARKOVIANOS

Teniendo un *proceso Markoviano de Rayleigh*, la función auxiliar  $Q(\tau)$  toma el valor de la función de covarianza normalizada  $R_x(\tau)$  indicada en la formula (2.24). Esto debido a que es más práctico darle ese valor, ya que usamos filtros *RC* en la entrada.

Sustituyendo en las formulas del *algoritmo óptimo*, la función de reconstrucción (3.21) y la de error de reconstrucción (3.23) se observan en la Figura 3.3. Las curvas de reconstrucción tienden a la media incondicional con valor de 1.253. A diferencia del caso Gaussiano, aquí al transcurrir el tiempo y alejarse, las curvas siempre tendrán que llegar a un valor esperado, el cual depende directamente de la fdp. Las curvas de reconstrucción siguen una linealidad de acuerdo al valor de las muestras de entrada. Esto significa que el valor de las muestras en la entrada son los mismos que en las muestras a la salida. Los

procesos de Rayleigh son de los pocos procesos no Gaussianos que tienen esa característica de linealidad. La función de error considera el valor de la muestra, por lo que hay una curva por cada muestra. Ellas convergen a su varianza incondicional que es 0.4292. Las muestras con valores más grandes a la media incondicional presentan mayores errores al inicio. Las figuras incluyen el error promedio.

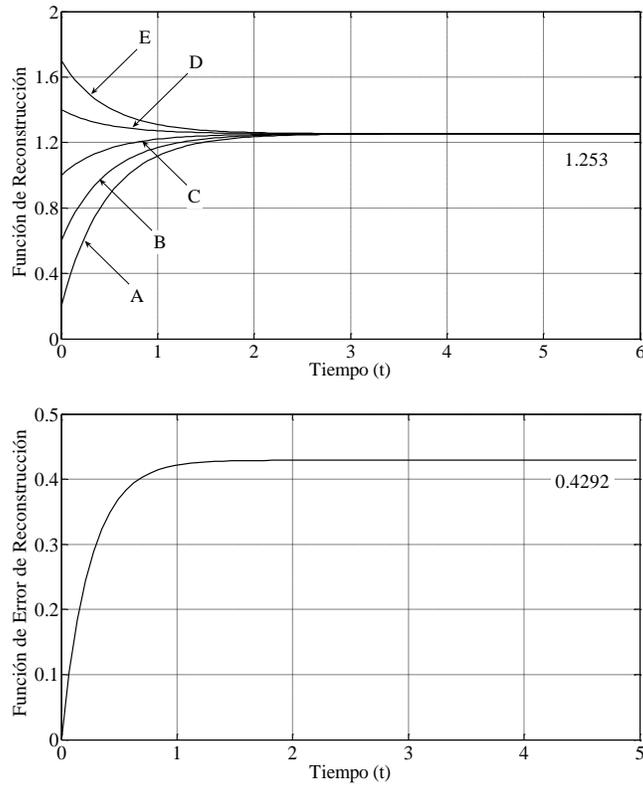


**Figura 3.3** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo.

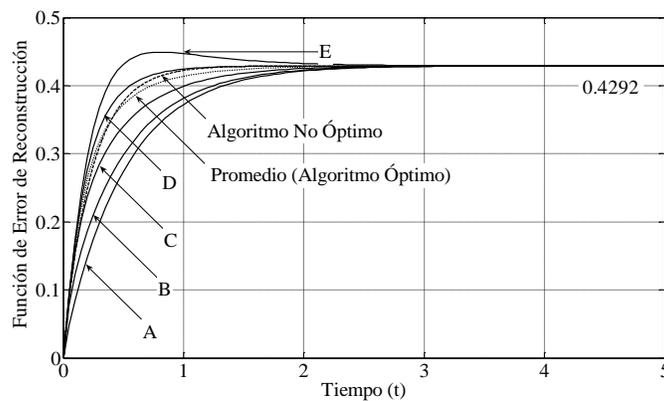
Tomando las expresiones del *algoritmo no óptimo*, las funciones de reconstrucción (3.24) y de error de reconstrucción (3.25) se muestran en la Figura 3.4. Las curvas de reconstrucción son similares a las obtenidas en el caso óptimo, es decir, la reconstrucción es una función lineal de las muestras. También tienden a la media no condicional. La diferencia radica en el error, ya que este evento no considera el valor de la muestra, por lo que solamente hay una curva, la cual converge a la varianza no condicional.

La Figura 3.5 expresa la comparación de los algoritmos de la función de error de reconstrucción. Se puede notar que las muestras con un valor menor a 1.2

aproximadamente en el caso óptimo, tienen un error menor que en el caso no óptimo. Esas muestras poseen una mayor probabilidad de ocurrencia de acuerdo a su fdp, por lo que deben de mantener un error menor.



**Figura 3.4** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo.

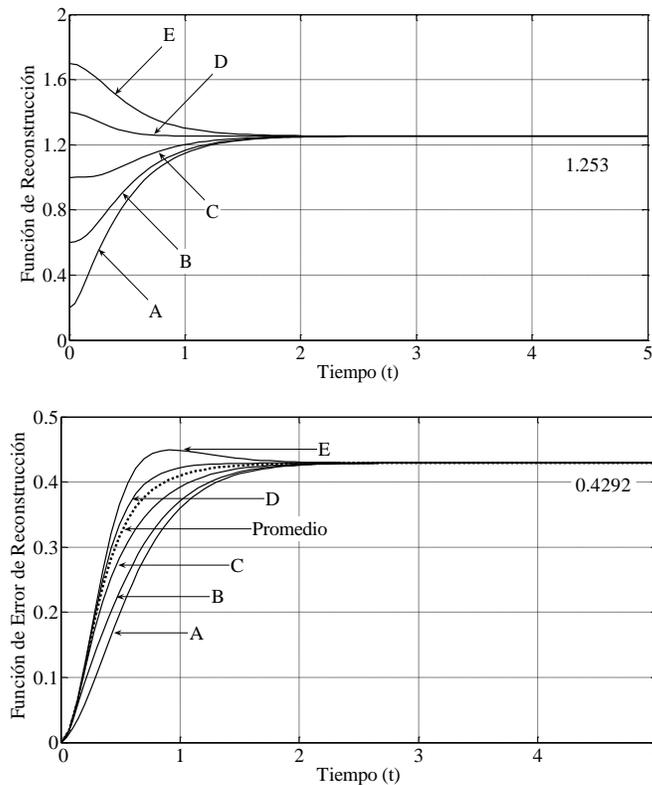


**Figura 3.5** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de extrapolación.

### 3.6.2 ALGORITMOS ÓPTIMOS Y NO ÓPTIMOS DE PROCESOS NO MARKOVIANOS

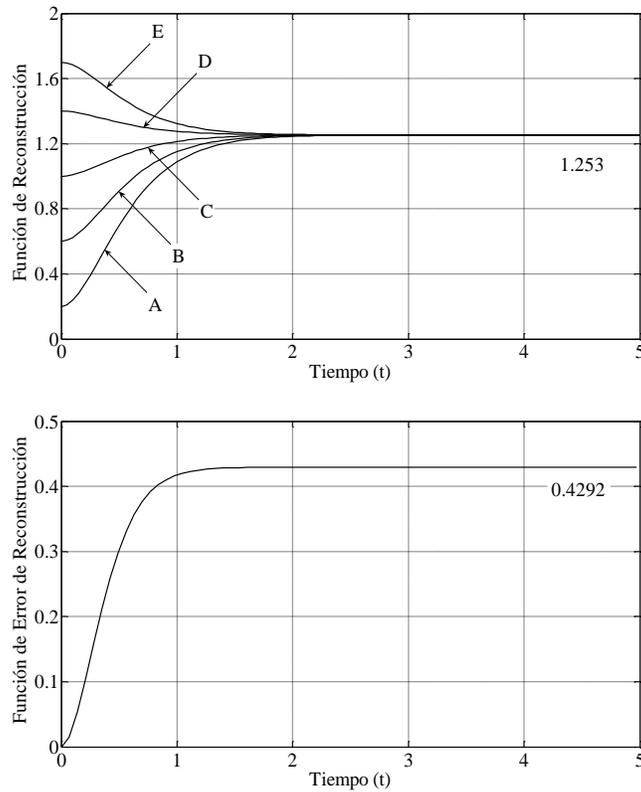
Ahora se emplean procesos de *Rayleigh no Markovianos con filtros RC de dos etapas*, los cuales tienen una función auxiliar  $Q(\tau)$  con un valor igual a la función de covarianza normalizada  $R_x(\tau)$  dada por la ecuación (2.29).

En el *algoritmo óptimo*, la función de reconstrucción (3.21) así como la función de error de reconstrucción (3.23) se presentan en la Figura 3.6. Las gráficas son muy parecidas a las originadas con procesos Markovianos. Pero en esta situación las curvas son más suaves. Eso se observa en la rápida tendencia hacia la media y varianza no condicionales.



**Figura 3.6** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos de Rayleigh con filtros RC de dos etapas en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo.

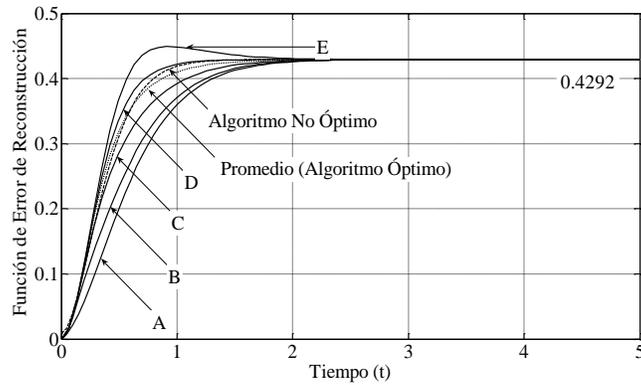
Usando el *algoritmo no óptimo*, la Figura 3.7 expone la función de reconstrucción (3.24) y la de error de reconstrucción (3.25). Las curvas también son similares, aunque más suaves. Por lo que el error al inicio de la reconstrucción será ligeramente menor.



**Figura 3.7** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos de Rayleigh con filtros RC de dos etapas en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo.

En la Figura 3.8 se ve la comparación entre los algoritmos de la función de error de reconstrucción. Es evidente que la estructura de las Figuras 3.5 y 3.8 es prácticamente la misma. En la cual las muestras del caso óptimo con un valor menor a 1.2 aproximadamente mantienen un error menor que la curva del caso no óptimo. Cosa que concuerda con las características de un proceso aleatorio de Rayleigh. Aunque es claro que en los procesos no Markovianos existen curvas más suaves. En ambos algoritmos no hay errores muy grandes, ni existen picos, por lo que se puede decir que la reconstrucción del proceso tiene una calidad adecuada.

Analizando los procesos de *Rayleigh no Markovianos con filtros RC de tres etapas*, la función auxiliar  $Q(\tau)$  toma el valor de la función de covarianza normalizada  $R_x(\tau)$  representada por (2.34). Debido a que solo existe un tipo de fdp de Rayleigh y a los resultados logrados anteriormente, es fácil predecir que las funciones de reconstrucción y las funciones de error de reconstrucción de estos procesos son iguales a las producidas con filtros RC de dos etapas. Se lograrían curvas más suaves solamente. Por lo que no es necesario ilustrarlas.



**Figura 3.8** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos de Rayleigh con filtros RC de dos etapas en la región de extrapolación.

### 3.7 RECONSTRUCCIÓN EN LA REGIÓN DE INTERPOLACIÓN

La reconstrucción en la *región de interpolación* ocurre en el intervalo  $T_i < t < T_N$ , es decir, en el *área de muestreo*. Para una apropiada descripción del PMR, se utiliza un tamaño de la muestra de  $N = 2$ , tanto en procesos Markovianos como en no Markovianos. Los valores de las muestras se encuentran en la Tabla 3.2. Asimismo, al igual que en la región de extrapolación, las fórmulas de las funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción son las mismas para todos los procesos del algoritmo óptimo. Solo cambia el valor de  $Q$ . Lo mismo ocurre en el algoritmo no óptimo.

	Valor de la muestra $\xi(T_1)$	Valor de la muestra $\xi(T_2)$
A)	0	0.6
B)	0	1.3
C)	0	1.8
D)	0	3

**Tabla 3.2** Valores de muestreo de procesos Markovianos y no Markovianos de Rayleigh en la región de interpolación.

Por tanto, aplicando el *algoritmo óptimo* se debe apropiar la ecuación (3.6) para los distintos tiempos de las muestras y sustituirla en (3.7). En ésta última se necesitan tres diferentes fdp para diferentes tiempos y muestras, ellas son:

$$\omega(x, t | x_1, t_1) = \frac{x}{\sigma^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2\sigma^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{\sigma^2}\right) \quad (3.26)$$

$$\omega(x_2, t_2 | x, t) = \frac{x_2}{\sigma^2(1-Q_2^2)} \exp\left\{-\frac{x_2^2 + Q_2^2 x^2}{2\sigma^2(1-Q_2^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_2^2} \frac{xx_2}{\sigma^2}\right) \quad (3.27)$$

$$\omega(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \frac{x_2}{\sigma^2(1-Q_3^2)} \exp\left\{-\frac{x_2^2 + Q_3^2 x_1^2}{2\sigma^2(1-Q_3^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_3^2} \frac{x_2 x_1}{\sigma^2}\right) \quad (3.28)$$

donde  $Q_1 = Q_1(t, t_1)$ ,  $Q_2 = Q_2(t_2, t)$  y  $Q_3 = Q_3(t_2, t_1)$ . Entonces, la función de reconstrucción (3.14), el segundo momento condicional (3.15) y la función de error de reconstrucción (3.16) son:

$$\tilde{m}_1^x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\frac{x^2}{\sigma^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2\sigma^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{\sigma^2}\right) \frac{x_2}{\sigma^2(1-Q_2^2)} \exp\left\{-\frac{x_2^2 + Q_2^2 x^2}{2\sigma^2(1-Q_2^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_2^2} \frac{xx_2}{\sigma^2}\right)}{\frac{x_2}{\sigma^2(1-Q_3^2)} \exp\left\{-\frac{x_2^2 + Q_3^2 x_1^2}{2\sigma^2(1-Q_3^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_3^2} \frac{x_2 x_1}{\sigma^2}\right)} \right\} dx \quad (3.29)$$

$$\tilde{m}_2^x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\frac{x^3}{\sigma^2(1-Q^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 + Q^2 x_1^2}{2\sigma^2(1-Q^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2} \frac{xx_1}{\sigma^2}\right) \frac{x_2}{\sigma^2(1-Q_2^2)} \exp\left\{-\frac{x_2^2 + Q_2^2 x^2}{2\sigma^2(1-Q_2^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_2^2} \frac{xx_2}{\sigma^2}\right)}{\frac{x_2}{\sigma^2(1-Q_3^2)} \exp\left\{-\frac{x_2^2 + Q_3^2 x_1^2}{2\sigma^2(1-Q_3^2)}\right\} I_0\left(\frac{Q_2}{1-Q_3^2} \frac{x_2 x_1}{\sigma^2}\right)} \right\} dx \quad (3.30)$$

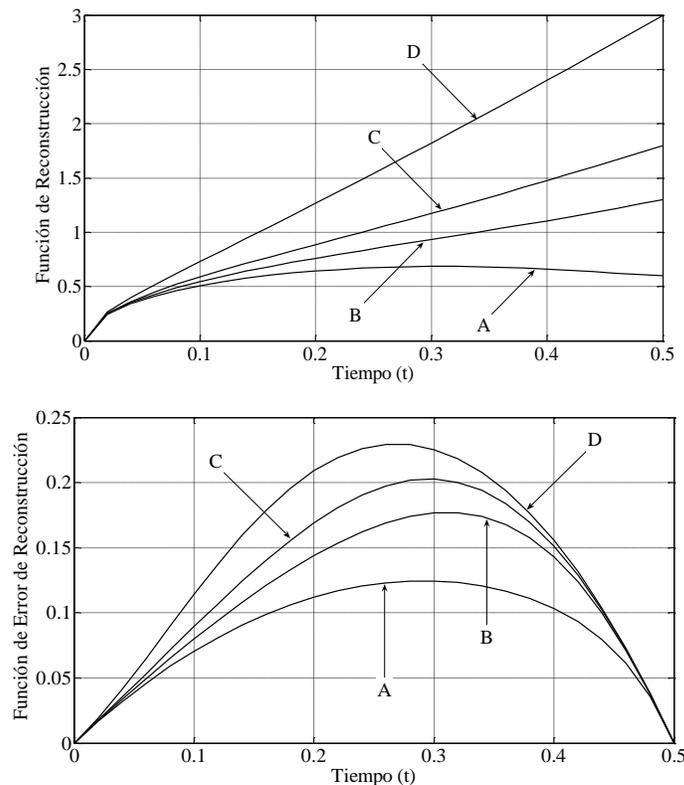
$$\sigma_x^2(t) = \tilde{m}_2^x(t) - [\tilde{m}_1^x(t)]^2 \quad (3.31)$$

Para el *algoritmo no óptimo*, la función de reconstrucción (3.18) y la función de error de reconstrucción (3.19) son las mismas ya antes utilizadas en el caso de extrapolación, es decir, las expresadas en (3.24) y (3.25) respectivamente.

### 3.7.1 ALGORITMOS ÓPTIMOS Y NO ÓPTIMOS DE PROCESOS MARKOVIANOS

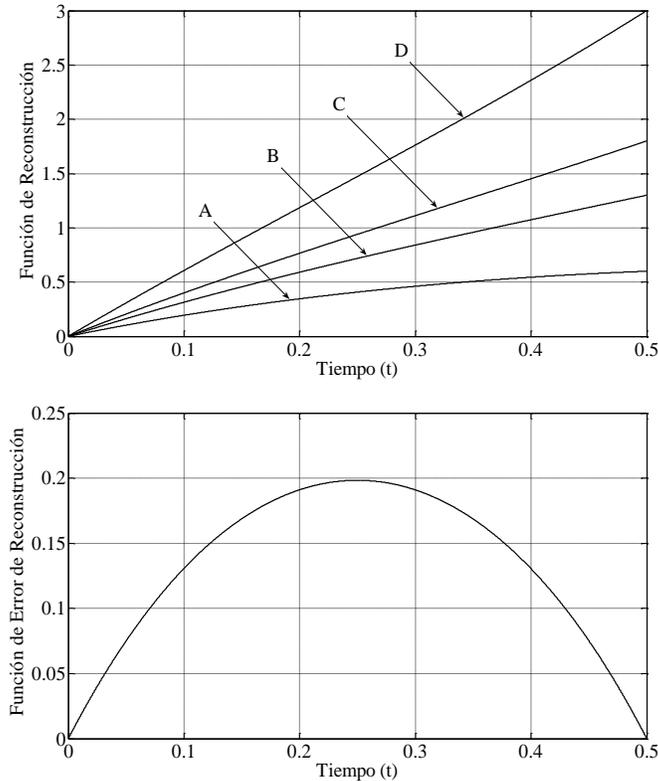
El tiempo de covarianza  $\tau_c$  para los procesos Markovianos se obtiene sustituyendo (2.24) en (3.13), dejando claro que  $Q(\tau) = R_x(\tau)$ . El resultado es un valor igual a  $\tau_c = 0.5$ . De él depende la distancia de separación entre las muestras. En esta ocasión dicho margen será el mismo tiempo de covarianza  $\tau_c$ , lo que significa que  $\Delta T = 0.5$ .

Considerando el *algoritmo óptimo*, la función de reconstrucción (3.29) y la función de error de reconstrucción (3.31) se manifiestan en la Figura 3.9. Estas curvas al igual que en el caso Gaussiano son funciones lineales de las muestras. La diferencia se encuentra en el error, ya que la metodología óptima provee una curva de error por cada muestra. Existe una inclinación de la curva hacia el extremo de la muestra con el valor más grande, como efecto de los parámetros estadísticos en la reconstrucción.



**Figura 3.9** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.5$ . Algoritmo óptimo.

Empleando el *algoritmo no óptimo*, la Figura 3.10 exhibe las funciones de reconstrucción (3.24) y de error de reconstrucción (3.25). Ambos algoritmos presentan los mismos valores en sus curvas de reconstrucción y hasta similares trayectorias, exceptuando los primeros instantes de tiempo. A causa de una separación pequeña, las funciones de reconstrucción tienden a formar una línea casi recta entre las muestras. El error no óptimo consiste en una sola curva con forma de campana que no depende del valor de las muestras.

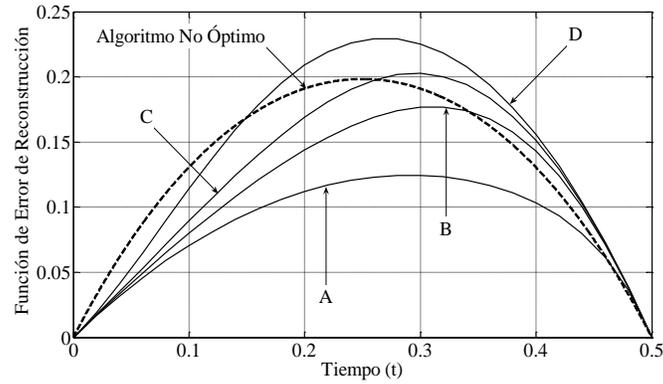


**Figura 3.10** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.5$ . Algoritmo no óptimo.

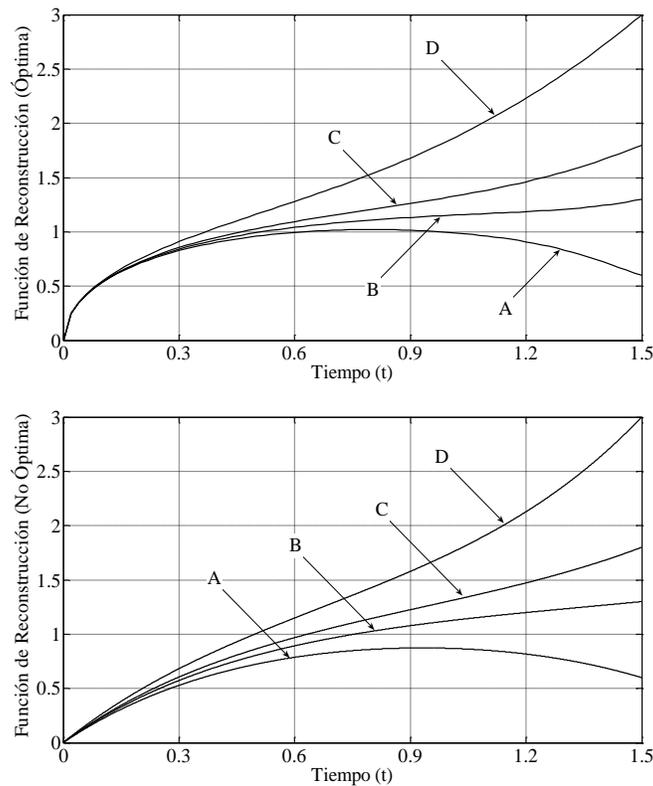
La Figura 3.11 proyecta la comparación de los algoritmos de error. En el caso óptimo hay un rango de muestras con un error menor que en el no óptimo. Aproximadamente muestras menores a 1.7, teniendo una muestra con valor de 0 en el extremo opuesto. Debido a que se toman dos muestras, hay diversas combinaciones de valores de ellas, pudiendo variar los valores límite. Además, las curvas óptimas abarcan más información acerca del proceso, por lo que el error es más preciso.

Ampliando el margen de separación entre las muestras a  $\Delta T = 1.5$ , se pueden tener algunos cambios en la estructura de las gráficas. La comparación de los algoritmos en

relación a la función de reconstrucción se observa en la Figura 3.12. Las gráficas son prácticamente iguales como consecuencia de ser funciones lineales de las muestras. La diferencia radica en la magnitud del error.

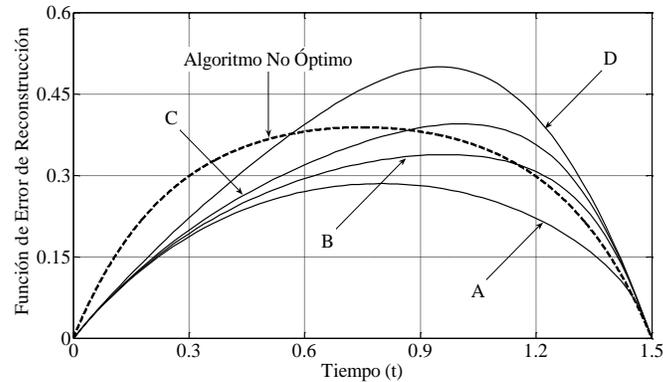


**Figura 3.11** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.5$ .



**Figura 3.12** Comparación de los algoritmos en la función de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de interpolación con  $\Delta T = 1.5$ .

En la Figura 3.13 se expresa la comparación entre los algoritmos de error de reconstrucción. En esta distribución el error no crece mucho al aumentar la distancia de muestreo. Caso contrario a las no linealidades exponenciales y polinomiales como veremos en capítulos posteriores. La magnitud del error es proporcional en los dos algoritmos. De igual forma, se mantiene el mismo rango de muestras en el caso óptimo con errores menores que en el caso no óptimo.

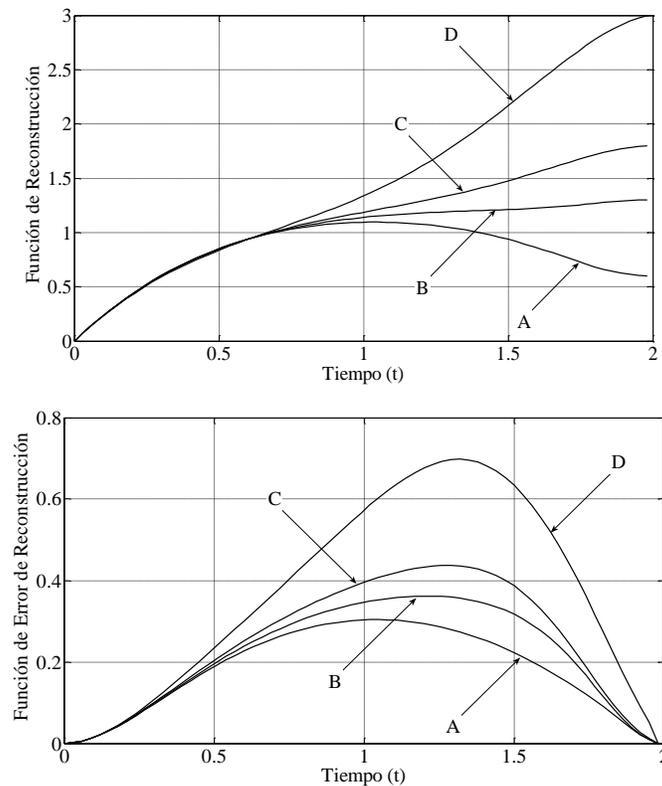


**Figura 3.13** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos de Rayleigh en la región de interpolación con  $\Delta T = 1.5$ .

### 3.7.2 ALGORITMOS ÓPTIMOS Y NO ÓPTIMOS DE PROCESOS NO MARKOVIANOS

Examinando los procesos de *Rayleigh no Markovianos con filtros RC de dos etapas*, el tiempo de covarianza  $\tau_c$  se obtiene mediante (2.29) y (3.13), y es  $\tau_c = 0.625$ . Por lo visto en ejemplos pasados, si se usa este valor de tiempo como rango de separación, se obtendrían resultados iguales a los obtenidos con procesos Markovianos debido a su cercanía en el tiempo. Por lo que es mejor ampliar la distancia y ver si ocurren cambios significativos en las funciones de reconstrucción. Entonces tenemos que  $\Delta T = 2$ .

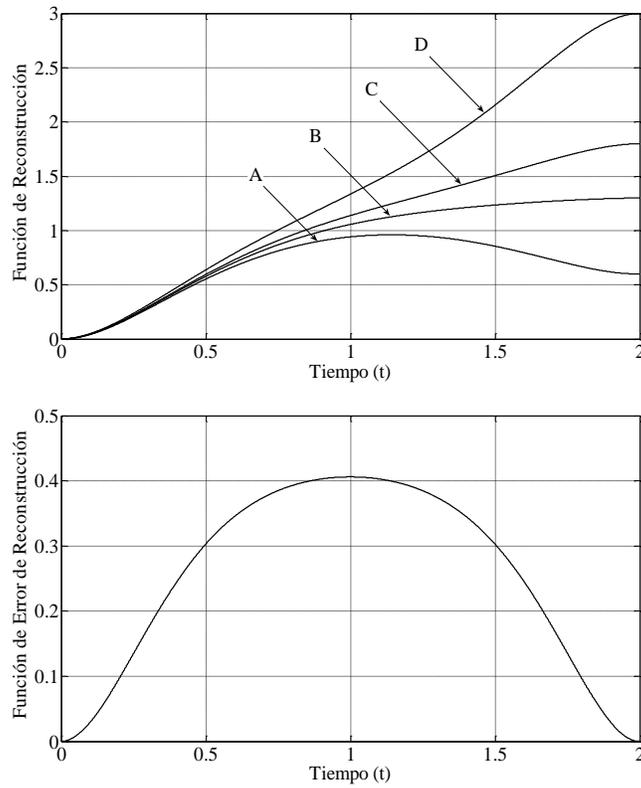
Tomando el *algoritmo óptimo*, la función de reconstrucción (3.29) se expone en la Figura 3.14 al igual que la función de error de reconstrucción (3.31). Las curvas de reconstrucción tardan un tiempo mayor en separarse para dirigirse a sus respectivos valores. En la gráfica de error existe una mayor inclinación de las curvas hacia el extremo de la muestra más grande. Además de que su magnitud aumenta.



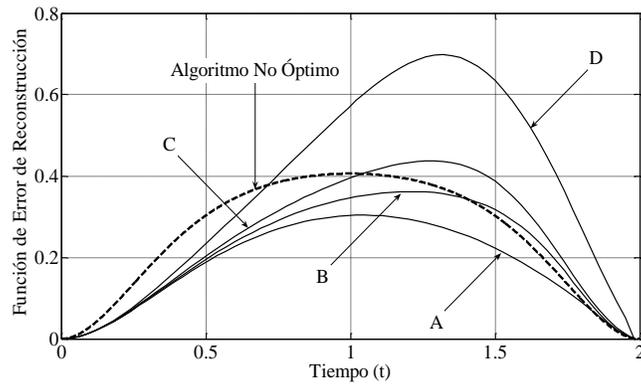
**Figura 3.14** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos de Rayleigh con filtros *RC* de dos etapas en la región de interpolación con  $\Delta T = 2$ . Algoritmo óptimo.

Utilizando el *algoritmo no óptimo*, en la Figura 3.15 se manifiesta la función de reconstrucción (3.24) y la función de error de reconstrucción (3.25). El tiempo en el cual las curvas siguen una misma trayectoria es menor al que se registra en el caso óptimo. De acuerdo a la metodología solo hay una curva de error con una magnitud levemente mayor a la obtenida en los procesos Gaussianos.

La Figura 3.16 proyecta la comparación entre los algoritmos respecto a su función de error de reconstrucción. La forma de las curvas es muy parecida a la que se tiene cuando  $\Delta T = 1.5$ . Pero es claro que la magnitud del error debe ser mayor. En la región de interpolación, el rango de muestras en el algoritmo óptimo que tienen un error menor al del algoritmo no óptimo se mantuvo igual al aumentar el rango de separación entre las muestras, es decir, en el ejemplo mostrado son muestras inferiores a 1.7 en un extremo y 0 en el otro. Esto se debe a que la magnitud del error no aumenta en demasía al extender la separación de las muestras. Aunque esos valores pueden cambiar de acuerdo a las propiedades del proceso.



**Figura 3.15** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos de Rayleigh con filtros RC de dos etapas en la región de interpolación con  $\Delta T = 2$ . Algoritmo no óptimo.



**Figura 3.16** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos de Rayleigh con filtros RC de dos etapas en la región de interpolación con  $\Delta T = 2$ .

Las gráficas del PMR para procesos de *Rayleigh no Markovianos con filtros RC de tres etapas*, son casi iguales a las generadas con los filtros RC de dos etapas. Por lo que no es necesario exhibirlas. Es importante señalar solamente que su tiempo de covarianza es  $\tau_c = 0.656$ .

### 3.8 RESUMEN

Dos algoritmos de reconstrucción para procesos aleatorios de Rayleigh se analizaron en este capítulo, comparando sus funciones de reconstrucción y funciones de error de reconstrucción teniendo procesos Markovianos y no Markovianos en la entrada. En la región de extrapolación la curva de error promedio óptima es un poco menor que la no óptima. Además existe un conjunto de muestras en el algoritmo óptimo en las cuáles el error es menor que en el algoritmo no óptimo, aproximadamente las curvas con un valor menor a 1.2. Mientras que en la región de interpolación el valor crece, sin embargo puede variar dependiendo del número de muestras, del valor de cada una, y de la separación entre ellas. En los ejemplos mostrados teniendo dos muestras, los valores límite para tener un error óptimo menor son 0 y 1.7. Los resultados concuerdan con investigaciones relacionadas al PMR antes realizadas, principalmente en [54,55], por lo que la reconstrucción y su metodología son confiables.

Aunque las funciones de reconstrucción de ambos algoritmos son funciones lineales de sus muestras, la diferencia radica en que el caso óptimo considera el valor de la muestra y la función de densidad de probabilidad del proceso para medir la calidad de la reconstrucción mediante la función de error de reconstrucción. Mientras que el caso no óptimo solo se basa en la función de covarianza. Por lo que las muestras con mayor probabilidad de ocurrencia tendrán un menor error utilizando la metodología óptima. Esto quiere decir que la regla de la esperanza matemática condicional provee un error menor de acuerdo al valor de la muestra.

# Capítulo 4

## PROCEDIMIENTO DE MUESTREO - RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS ALEATORIOS EN LA SALIDA DE UN CONVERTIDOR EXPONENCIAL

La densidad exponencial es aplicada en las comunicaciones debido a que es una función real con la propiedad de que al ser derivada se obtiene la misma función. En este capítulo se analiza la descripción del Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción de procesos estocásticos que se obtienen en la salida de un *convertidor exponencial*.

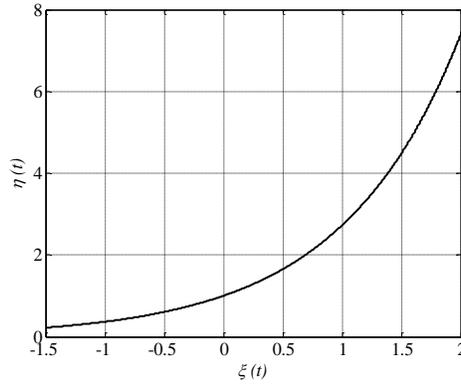
### 4.1 INTRODUCCIÓN

La distribución exponencial es el equivalente continuo de la distribución geométrica discreta. Esta ley de distribución describe procesos en los que es importante saber el tiempo hasta que ocurre un determinado evento, sabiendo que el tiempo que pueda ocurrir desde cualquier instante dado  $t$ , hasta que ello ocurra en un instante  $t_f$ , no depende del tiempo transcurrido anteriormente, en el que no ha pasado nada.

El convertidor exponencial es de gran utilidad en el proceso de reconstrucción de señales, debido a que sus características hacen que el trabajo se realice de una manera más sencilla. La no linealidad de este convertidor no lineal se expresa por [31,34]:

$$\eta(t) = g[\xi(t)] = a_0 \exp[\beta\xi(t)] \quad (4.1)$$

donde  $a_0$  y  $\beta$  son constantes. Su comportamiento se observa en la Figura 4.1.



**Figura 4.1** No linealidad del convertidor exponencial.

## 4.2 FUNCIONES DE MOMENTOS EN LA SALIDA

Las funciones de momentos del proceso de salida  $\eta(t)$  de un convertidor no lineal no inercial de tipo exponencial, pueden ser expresadas en términos de la función característica del proceso de entrada  $\xi(t)$ . Si  $\xi(t)$  es un proceso Gaussiano, se denota a la función característica de las variables aleatorias  $\xi(t_1), \dots, \xi(t_N)$  como [31,34]:

$$\Theta_N(u_1, \dots, u_N, t_1, \dots, t_N) = \exp \left\{ i \sum_{i=1}^N m_1(t_i) u_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \sigma^2(t_i, t_j) u_i u_j \right\} \quad (4.2)$$

donde  $m_1$  es la esperanza matemática y  $\sigma^2$  es la varianza, ambas no condicionales. Tomando promedios de la expresión (4.1) obtenemos:

$$\langle \eta \rangle = h \langle e^{a\xi} \rangle = h \Theta_1(-ia) \quad (4.3)$$

$$\langle \eta^2 \rangle = h^2 \langle [e^{a\xi}]^2 \rangle = h^2 \Theta_2(-ia, -ia) \quad (4.4)$$

donde  $h$  es la función inversa de  $g$ . Y:

$$\Theta_1(u) = \langle \exp \{iu \xi(t)\} \rangle \quad (4.5)$$

$$\Theta_2(u) = \langle \exp \{iu_1 \xi(t_1) + iu_2 \xi(t_2)\} \rangle \quad (4.6)$$

son las funciones características de una y dos dimensiones. Si  $\xi(t)$  es un proceso Gaussiano estacionario con funciones de correlación de primero y segundo orden  $K_1(t)$  y  $K_2(t_1, t_2)$ , entonces de (4.2) tenemos que:

$$\Theta_1(u) = \exp \left\{ iK_1(t)u - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 \right\} \quad (4.7)$$

$$\Theta_2(u_1, u_2) = \exp \left\{ iK_1(t_1)u_1 + iK_1(t_2)u_2 - \frac{1}{2} [\sigma^2 u_1^2 + 2K_2(t_1, t_2)u_1 u_2 + \sigma^2 u_2^2] \right\} \quad (4.8)$$

Estas expresiones son validas para cualquier proceso Gaussiano estacionario.

### 4.3 CARACTERÍSTICAS DEL PROCESO EN LA SALIDA [31,34]

Para conocer las características estadísticas en la salida del convertidor exponencial, se debe de tomar en cuenta que el proceso a la entrada  $\xi(t)$  es de tipo Gaussiano. Las principales propiedades del proceso en la salida son la función de densidad de probabilidad, la esperanza matemática, la varianza, la función de covarianza y el tiempo de covarianza. Dichas características se deducirán a continuación.

### 4.3.1 FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Sabiendo que el proceso en la entrada  $\xi(t)$  tiene una función de densidad de probabilidad de tipo Gaussiana, si  $\langle \xi \rangle = 0$  y  $\sigma_\xi^2 = 1$  tenemos:

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi - \langle \xi \rangle}{\sigma_\xi}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \quad (4.9)$$

La función de densidad de probabilidad en la salida resulta de:

$$\omega(\eta) = \omega(h(\eta)) \frac{1}{\left|\frac{d\eta}{d\xi}\right|} \quad (4.10)$$

donde  $\omega(h(\eta)) = \omega(\xi)$  y  $\eta = a_0 \exp(\beta\xi)$ . Sustituyendo se obtiene la función de densidad de probabilidad unidimensional en términos de  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \omega(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \frac{1}{a_0\beta \exp(\beta\xi)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta} \ln \frac{\eta}{a_0}\right)^2\right) \frac{1}{a_0\beta \exp\left(\beta\left(\frac{1}{\beta} \ln \frac{\eta}{a_0}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{a_0\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta} \ln \frac{\eta}{a_0}\right)^2 - \ln \frac{\eta}{a_0}\right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

La función varía de acuerdo a los valores de  $a_0$  y  $\beta$ .

### 4.3.2 ESPERANZA MATEMÁTICA

Tomando (1.7) obtenemos la esperanza matemática a la salida:

$$\langle \eta \rangle = \langle g(\xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \omega(\xi) d\xi \quad (4.12)$$

donde  $g(\xi) = \eta$ . Resolviendo se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \eta \rangle &= \langle g(\xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a_0 \exp(\beta\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\beta\xi - \frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\xi^2 - 2\beta\xi + \left(-\frac{2\beta}{2}\right)^2 - \left(-\frac{2\beta}{2}\right)^2\right]\right\} d\xi \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{\beta^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(\xi - \beta)^2\right) d\xi = a_0 \exp\left(\frac{\beta^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

### 4.3.3 VARIANZA

Mediante (1.8) se deduce la varianza a la salida:

$$\sigma_{\eta}^2 = \langle \eta^2 \rangle - \langle \eta \rangle^2 \quad (4.14)$$

Primeramente se debe calcular  $\langle \eta^2 \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \eta^2 \rangle &= \langle g^2(\xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a_0^2 \exp(2\beta\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi \\ &= \frac{a_0^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{4\beta^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(\xi - 2\beta)^2\right) d\xi = a_0^2 \exp(2\beta\xi) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Después, sustituir (4.13) y (4.15) en (4.14), resultando:

$$\sigma_{\eta}^2 = a_0^2 \exp(2\beta\xi) - \left[ a_0 \exp\left(\frac{\beta^2}{2}\right) \right]^2 = a_0^2 [\exp(2\beta^2) - \exp(\beta^2)] \quad (4.16)$$

Los valores de las integrales presentadas en la esperanza matemática y la varianza, ambas en la salida, se obtuvieron por medio de tablas ya establecidas.

#### 4.3.4 FUNCIÓN Y TIEMPO DE COVARIANZA

Reescribiendo (4.1) para dos instantes de tiempo  $t$  y  $t + \tau$ , multiplicando ambas expresiones y sacando el promedio, es posible encontrar la función de covarianza en la salida  $\eta(T)$  del proceso:

$$K_{\eta}(\tau) = a_0^2 \exp(\beta^2) \left[ \exp\left(\beta^2 \frac{K_{\xi}(\tau)}{\sigma_{\xi}^2}\right) - 1 \right] = a_0^2 \exp(\beta^2) [\exp(\beta^2 R_{\xi}(\tau)) - 1] \quad (4.17)$$

donde  $R_{\xi}(\tau)$  es la función de covarianza normalizada en la entrada. Se puede determinar el tiempo de covarianza  $\tau_c$  en la salida mediante (1.17):

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_{\eta}(\tau)| d\tau = \frac{a_0^2 \exp(\beta^2)}{\sigma_{\eta}^2} \int_0^{\infty} |\exp(\beta^2 R_{\xi}(\tau)) - 1| d\tau \quad (4.18)$$

El tiempo de covarianza  $\tau_c$  depende de los valores de la función de covarianza a la entrada y la varianza a la salida. Por lo que su valor se deducirá en secciones posteriores de acuerdo a cada caso.

## 4.4 ALGORITMO ÓPTIMO

Se fundamenta en la regla de la esperanza matemática condicional y utiliza funciones de momentos condicionales [50]. Ellas se obtienen de acuerdo a las expresiones (4.3) – (4.8) [31]. La *función de reconstrucción* es:

$$\tilde{m}_1^\eta(t) = a_0 \exp \left\{ \beta \tilde{m}_1^\xi(t) + \frac{1}{2} \beta^2 \right\} \quad (4.19)$$

donde  $\tilde{m}_1^\eta(t)$  es la esperanza matemática condicional del proceso a la salida. El segundo momento condicional  $\tilde{m}_2^\eta(t)$  es:

$$\tilde{m}_2^\eta(t) = a_0^2 \exp \left\{ 2\beta \tilde{m}_1^\xi(t) + \beta^2 + \beta^2 \tilde{\sigma}_\xi^2(t) \right\} \quad (4.20)$$

$\tilde{m}_1^\xi(t)$  y  $\tilde{\sigma}_\xi^2(t)$  están dadas por (2.18) y (2.19) respectivamente. Asimismo la *función de error de reconstrucción* se representa por:

$$\tilde{\sigma}_\eta^2(t) = \tilde{m}_2^\eta(t) - [\tilde{m}_1^\eta(t)]^2 \quad (4.21)$$

donde  $\tilde{\sigma}_\eta^2(t)$  es la varianza condicional a la salida.

También se puede obtener un promedio de las curvas de error de reconstrucción  $\tilde{\sigma}_\eta^2(t)$  para distintos valores de muestras:

$$\langle \tilde{\sigma}^2(t) \rangle = \int_0^\infty \tilde{\sigma}^2(t, \eta(T_N)) \omega(\eta(T_N)) d\eta(T_N) \quad (4.22)$$

## 4.5 ALGORITMO NO ÓPTIMO

Toma únicamente la función de covarianza en la salida para generar la reconstrucción. Esto quiere decir que la *función de reconstrucción* está basada en (2.18):

$$\tilde{m}_\eta(t) = m_\eta(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_0^2 \exp(\beta^2) [\exp(\beta^2 R_\xi(t - T_i)) - 1] a_{ij} [\eta(T_j) - m_\eta(t)] \quad (4.23)$$

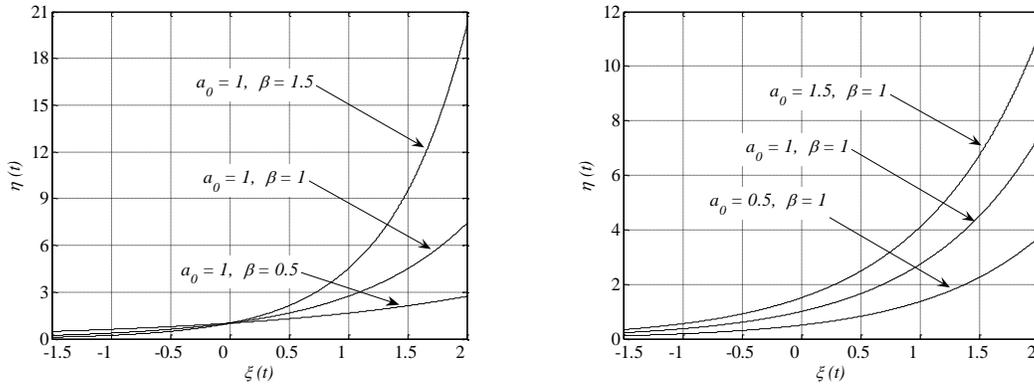
donde  $\tilde{m}_\eta(t)$  es la esperanza matemática condicional a la salida. La *función de error de reconstrucción* se relaciona a (2.19):

$$\tilde{\sigma}_\eta^2(t) = \sigma_\eta^2(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_0^2 \exp(\beta^2) [\exp(\beta^2 R_\xi(t - T_i)) - 1] a_{ij} a_0^2 \exp(\beta^2) [\exp(\beta^2 R_\xi(T_j - t)) - 1] \quad (4.24)$$

donde  $\tilde{\sigma}_\eta^2(t)$  es la varianza condicional a la salida. La esperanza matemática  $m_\eta(t)$  y la varianza  $\sigma_\eta^2(t)$ , ambas no condicionales en la salida, se obtienen mediante (4.13) y (4.16) respectivamente.

## 4.6 RECONSTRUCCIÓN EN LA REGIÓN DE EXTRAPOLACIÓN

Si  $t > t_N$ , la reconstrucción del proceso es en la *región de extrapolación*. Teniendo funciones no lineales de tipo exponencial, existe una gran cantidad de escenarios a estudiar haciendo variar  $a_0$  y  $\beta$ , como se muestra en la Figura 4.2. De acuerdo al capítulo anterior, utilizando solamente una función no lineal, las curvas en los procesos Markovianos y no Markovianos son muy parecidas, ya que convergen a los mismos valores y tienen el mismo comportamiento. Por tal motivo es preferible considerar más situaciones. Por lo que se investigan tres funciones de tipo exponencial, esto con la finalidad de ver su importancia en el proceso de reconstrucción. Ellas son las siguientes:



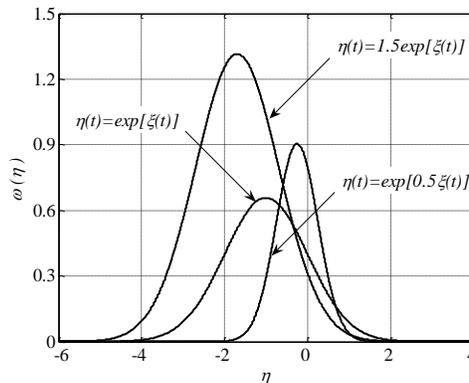
**Figura 4.2** No linealidad del convertidor exponencial con diferentes valores de  $a_0$  y  $\beta$ .

$$\eta(t) = \exp [\xi(t)] \tag{4.25}$$

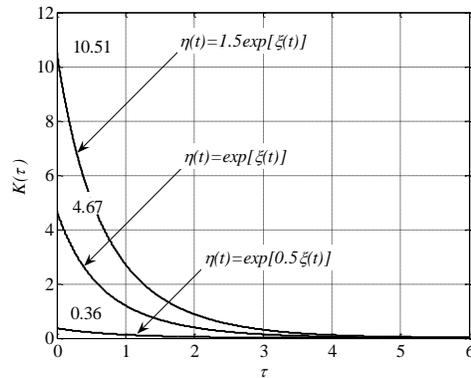
$$\eta(t) = \exp [0.5\xi(t)] \tag{4.26}$$

$$\eta(t) = 1.5\exp [\xi(t)] \tag{4.27}$$

Estas funciones no lineales presentan diferentes propiedades estadísticas y comportamientos en sus curvas, (ver Figura 4.2). Las funciones de densidad de probabilidad respectivas se expresan en la Figura 4.3, y las funciones de covarianza en la salida en la Figura 4.4.



**Figura 4.3** Función de Densidad de Probabilidad de no linealidades exponenciales.



**Figura 4.4** Función de covarianza en la salida de no linealidades exponenciales.

Los valores de muestreo se presentan en la Tabla 4.1. Para todo proceso Markoviano y no Markoviano, se considera que en la entrada  $m_{\xi}(t) = 0$  y  $\sigma_{\xi}^2(t) = 1$ .

	Valor de la muestra $x(T_j)$	Instante de muestreo $T_j$ [seg.]
A	$x(T_1) = -0.4$	$T_1 = 0$
B	$x(T_1) = 0$	$T_1 = 0$
C	$x(T_1) = 0.3$	$T_1 = 0$
D	$x(T_1) = 0.7$	$T_1 = 0$
E	$x(T_1) = 1.2$	$T_1 = 0$

**Tabla 4.1** Valores de muestreo de procesos Markovianos y no Markovianos en la salida de un convertidor exponencial en la región de extrapolación.

Cabe mencionar que solamente se proyectan las gráficas del PMR para algunos procesos Gaussianos Markovianos o no Markovianos. Pero las gráficas restantes para cada filtro RC se pueden predecir fácilmente observando los resultados obtenidos en esta sección. Por lo que no es necesario exhibirlas.

#### 4.6.1 ALGORITMOS ÓPTIMOS Y NO ÓPTIMOS DE PROCESOS MARKOVIANOS

La función de covarianza normalizada para un proceso *Gaussiano Markoviano* está dada por (2.24). Para estos procesos se utiliza el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$ .

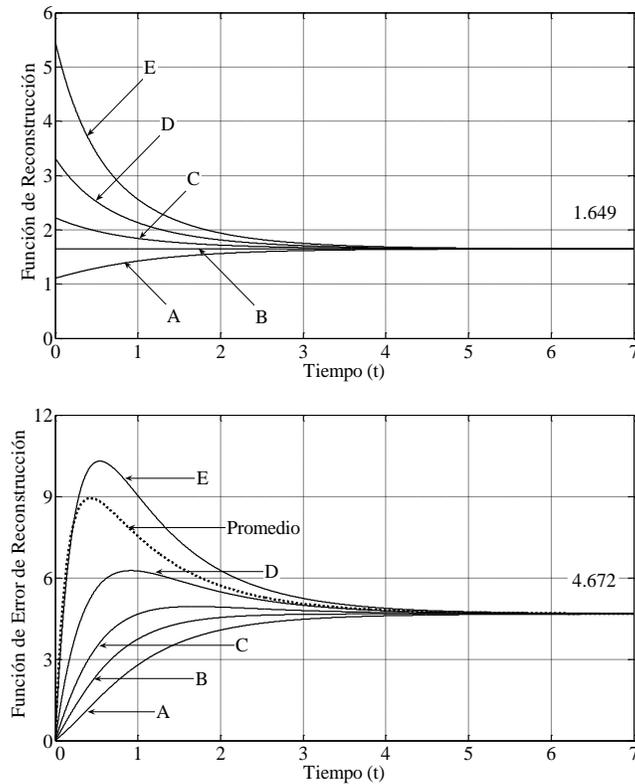
Analizando el *algoritmo óptimo*, la función de reconstrucción (4.19), el segundo momento condicional (4.20) y la función de error de reconstrucción (4.21) son:

$$\hat{m}_1^\eta(t) = \exp\{\hat{m}_1^\xi(t) + 0.5\} \tag{4.28}$$

$$\hat{m}_2^\eta(t) = \exp\{2\hat{m}_1^\xi(t) + 1 + \sigma_\xi^2(t)\} \tag{4.29}$$

$$\sigma_\eta^2(t) = \hat{m}_2^\eta(t) - [\hat{m}_1^\eta(t)]^2 \tag{4.30}$$

La función de reconstrucción (4.28) y la función de error de reconstrucción (4.30) se presentan en la Figura 4.5. En esta gráfica de error y en las siguientes se indica también la curva de error promedio, solo en extrapolación.



**Figura 4.5** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$  en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo.

Las curvas de reconstrucción son funciones no lineales de las muestras, y convergen a su media en la salida que es 1.649. Asimismo, las curvas de error tienden a su varianza en la salida, que es 4.672. La magnitud del error depende del valor específico de cada muestra, por lo que existen diversas curvas. Al inicio de la reconstrucción se tiene un error grande directamente proporcional al valor de la muestra, que manifiesta la diferencia entre el valor muestral y el valor incondicional esperado.

Examinando el *algoritmo no óptimo*, mediante (4.13) la media en la salida de 1.649. Con (4.16) la varianza en la salida es 4.672. La función de covarianza (4.17) es:

$$K_{\eta}(\tau) = a_0^2 \exp(\beta^2) [\exp(\beta^2 R_{\xi}(\tau)) - 1] = 2.71 [\exp(K_{\xi}(\tau)) - 1] \quad (4.31)$$

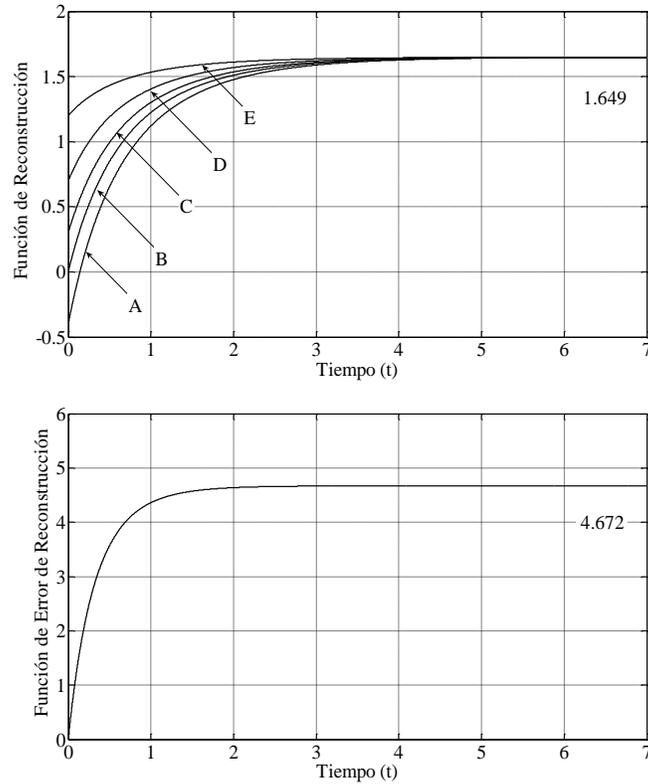
Si se utiliza la metodología Gaussiana, las funciones de reconstrucción (4.23) y de error de reconstrucción (4.24) son:

$$\tilde{m}_{\eta}(t) = 1.64 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [2.71 (\exp(K_{\xi}(t - T_i)) - 1)] a_{ij} [\eta(T_j) - 1.64] \quad (4.32)$$

$$\tilde{\sigma}_{\eta}^2(t) = 4.67 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [2.71 (\exp(K_{\xi}(t - T_i)) - 1)] a_{ij} [2.71 (\exp(K_{\xi}(T_j - t)) - 1)] \quad (4.33)$$

En la Figura 4.6 se ven las funciones de reconstrucción (4.32) y de error de reconstrucción (4.33). La reconstrucción tiene un comportamiento basado en funciones lineales, convergiendo a su media en la salida. El error se representa por una sola curva, debido a que no toma en cuenta el valor de la muestra. Ella tiende a su varianza en la salida.

La Figura 4.7 expone la comparación del error de reconstrucción entre los algoritmos. En la gráfica se nota que existe un pequeño conjunto de muestras en las cuales el error es menor en el algoritmo óptimo, aproximadamente muestras inferiores a 0.25. Esto a causa de que el caso óptimo toma en cuenta las características estadísticas del proceso. Aunque en muestras de mayor valor el error se incrementa más rápidamente. Por lo que la curva del error promedio óptimo es muy grande en comparación con la del caso no óptimo.



**Figura 4.6** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$  en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo.

## 4.6.2 ALGORITMOS ÓPTIMOS Y NO ÓPTIMOS DE PROCESOS NO MARKOVIANOS

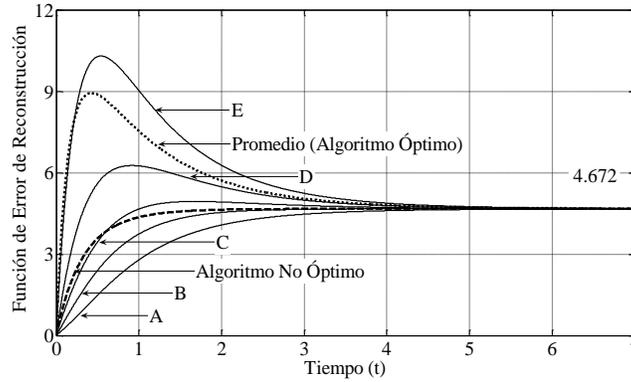
Para investigar el PMR en los procesos *Gaussianos no Markovianos*, primeramente se emplean los obtenidos *con filtros RC de dos etapas* en la entrada. Su función de covarianza normalizada es (2.29). En esta ocasión se utiliza el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = \exp[0.5\xi(t)]$ .

Por medio del *algoritmo óptimo*, la función de reconstrucción (4.19), el segundo momento condicional (4.20) así como la función de error de reconstrucción (4.21) son:

$$\tilde{m}_1^\eta(t) = \exp\{0.5 \tilde{m}_1^\xi(t) + 0.125\} \quad (4.34)$$

$$\tilde{m}_2^\eta(t) = \exp \left\{ \tilde{m}_1^\xi(t) + 0.25 + 0.25\sigma_\xi^2(t) \right\} \quad (4.35)$$

$$\sigma_\eta^2(t) = \tilde{m}_2^\eta(t) - [\tilde{m}_1^\eta(t)]^2 \quad (4.36)$$



**Figura 4.7** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$  en la región de extrapolación.

En la Figura 4.8 se manifiesta la función de reconstrucción (4.34) y la de error de reconstrucción (4.36). El valor de la media es 1.133 y el de la varianza 0.364, los dos en la salida, y a ellos convergen las curvas de reconstrucción y las de error respectivamente. Como se redujeron los valores de  $\alpha_0$  y  $\beta$ , las funciones también disminuyeron sus términos.

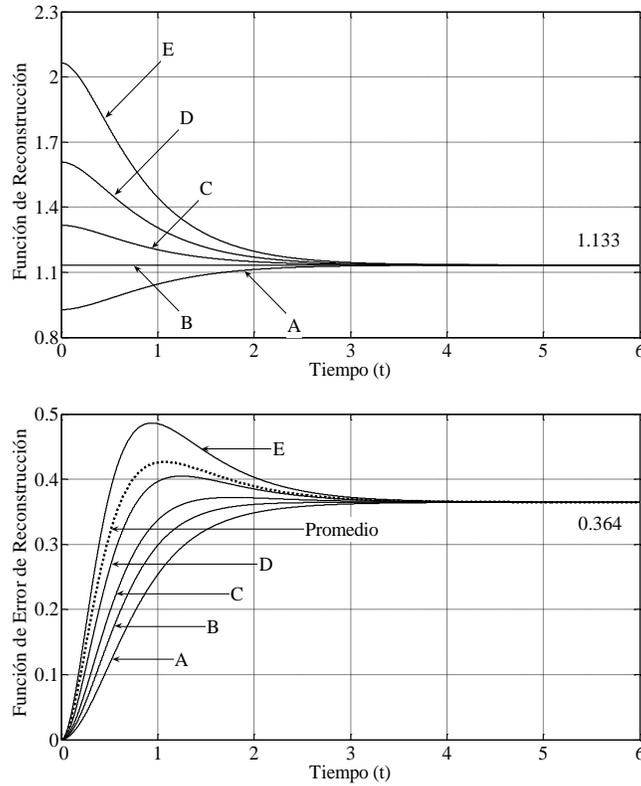
Si en el *algoritmo no óptimo*, se toma (4.13) el valor de la media a la salida es 1.133. Con (4.16) la varianza en la salida es 0.364. La función de covarianza (4.17) es:

$$K_\eta(\tau) = \alpha_0^2 \exp(\beta^2) [\exp(\beta^2 R_\xi(\tau)) - 1] = 1.28 [\exp(0.25 K_\xi(\tau)) - 1] \quad (4.37)$$

Entonces, las funciones de reconstrucción (4.23) y de error de reconstrucción (4.24) son:

$$\tilde{m}_\eta(t) = 1.13 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [1.28 (\exp 0.25 (K_\xi(t - T_i)) - 1)] a_{ij} [\eta(T_j) - 1.13] \quad (4.38)$$

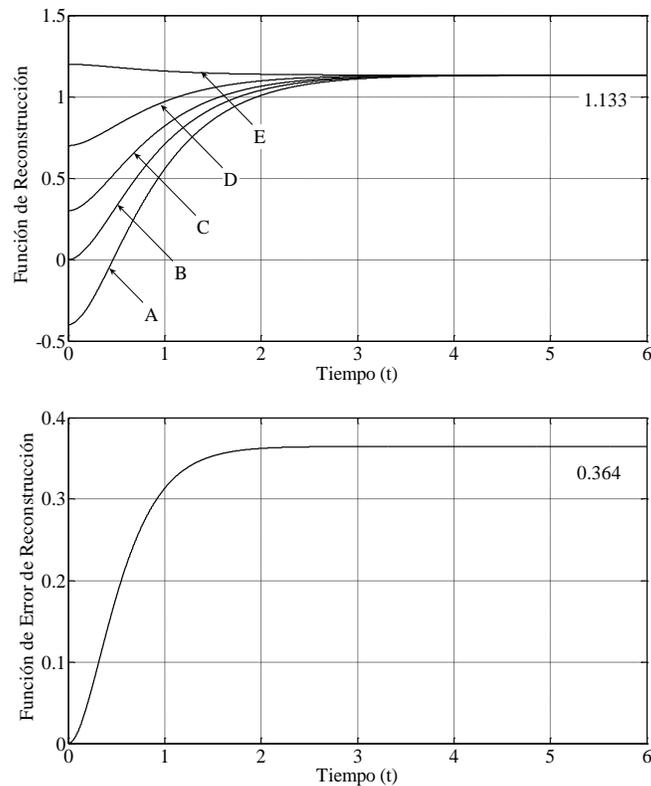
$$\sigma_{\eta}^2(t) = 0.36 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [1.28(\exp 0.25(K_{\xi}(t - T_i)) - 1)] a_{ij} [1.28(\exp 0.25(K_{\xi}(T_j - t)) - 1)] \quad (4.39)$$



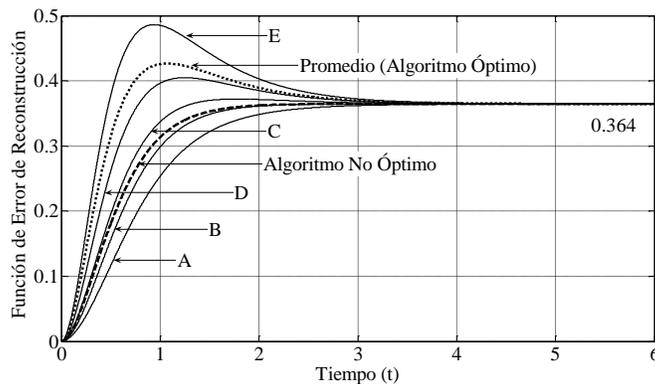
**Figura 4.8** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = \exp[0.5\xi(t)]$  en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo.

La Figura 4.9 exhibe la función de reconstrucción (4.38) y la función de error de reconstrucción (4.39). Ambas funciones tienen valores más pequeños igualmente. Las curvas de reconstrucción y de error convergen a su esperanza matemática y varianza a la salida respectivamente.

En la Figura 4.10 se proyecta la comparación de los algoritmos de error. La gráfica tiene una distribución entre curvas muy similar a la Figura 4.7, donde las muestras del caso óptimo menores a 0.25 aproximadamente tienen un error más pequeño en relación al del caso no óptimo. La diferencia con las gráficas de los procesos Markovianos, es que las funciones resultantes de los filtros RC de dos etapas tienen curvas más suaves para ambos algoritmos, lo que hace que tiendan más rápidamente a su media y varianza. También genera una disminución de la magnitud del error en algunos instantes de tiempo.



**Figura 4.9** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = \exp[0.5\xi(t)]$  en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo.



**Figura 4.10** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = \exp[0.5\xi(t)]$  en la región de extrapolación.

La investigación pasa a los *procesos Gaussianos no Markovianos con filtros RC de tres etapas*. La función de covarianza normalizada está escrita en (2.34). Se utiliza el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = 1.5\exp[\xi(t)]$ .

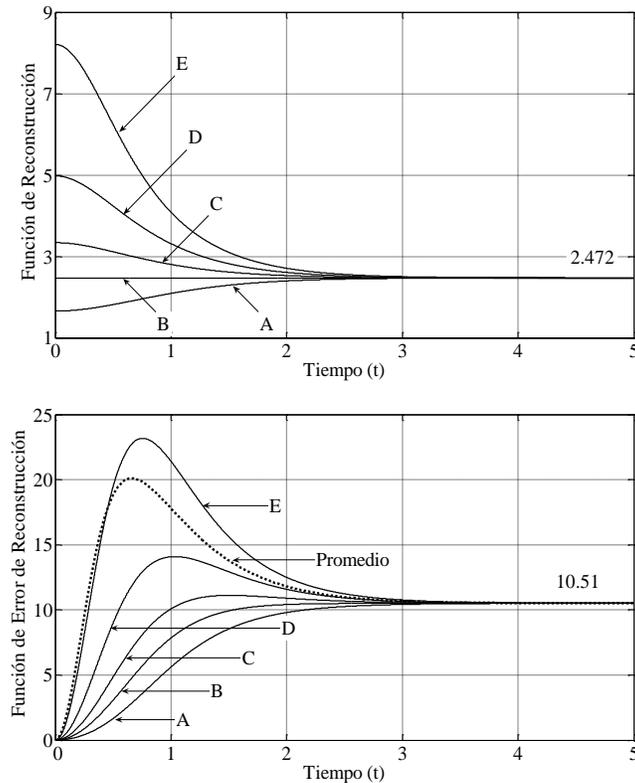
Aplicando el *algoritmo óptimo*, la función de reconstrucción (4.19), el segundo momento condicional (4.20) y la función de error de reconstrucción (4.21) son:

$$\tilde{m}_1^\eta(t) = 1.5 \exp\{\tilde{m}_1^\xi(t) + 0.5\} \quad (4.40)$$

$$\tilde{m}_2^\eta(t) = 2.25 \exp\{2\tilde{m}_1^\xi(t) + 1 + \sigma_\xi^2(t)\} \quad (4.41)$$

$$\sigma_\eta^2(t) = \tilde{m}_2^\eta(t) - [\tilde{m}_1^\eta(t)]^2 \quad (4.42)$$

La Figura 4.11 ilustra la función de reconstrucción (4.40) así como la de error de reconstrucción (4.42). Las curvas de reconstrucción convergen al valor de su media en la salida, que es 2.472. Mientras que las de error tienden a su varianza en la salida, con valor de 10.51. Al aumentar los valores de  $a_0$  y  $\beta$ , los términos de las funciones son más grandes.



**Figura 4.11** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = 1.5\exp[\xi(t)]$  en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo.

Para el *algoritmo no óptimo*, con (4.13) se tiene un valor de la media a la salida de 2.472. Tomando (4.16) la varianza a la salida es 10.51. La función de covarianza (4.17) es:

$$K_{\eta}(\tau) = a_0^2 \exp(\beta^2) [\exp(\beta^2 R_{\xi}(\tau)) - 1] = 6.11 [\exp(K_{\xi}(\tau)) - 1] \quad (4.43)$$

Las funciones de reconstrucción (4.23) y de error de reconstrucción (4.24) son:

$$\tilde{m}_{\eta}(t) = 2.47 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [6.11 (\exp(K_{\xi}(t - T_i)) - 1)] a_{ij} [\eta(T_j) - 2.47] \quad (4.44)$$

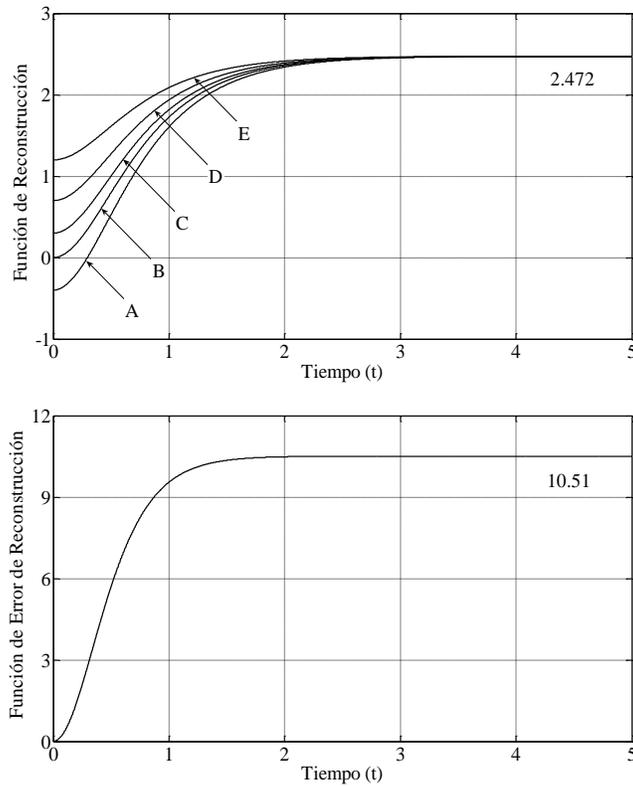
$$\sigma_{\eta}^2(t) = 10.51 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [6.11 (\exp(K_{\xi}(t - T_i)) - 1)] a_{ij} [6.11 (\exp(K_{\xi}(T_j - t)) - 1)] \quad (4.45)$$

En la Figura 4.12 se observan tanto la función de reconstrucción (4.44) como la función de error de reconstrucción (4.45). Las funciones aumentaron sus valores de igual forma. Además tienden a la media y a la varianza en la salida según sea el caso.

La Figura 4.13 muestra la comparación del error. El rango de valores de las muestras en las cuales el error óptimo es menor al no óptimo es similar al obtenido con filtros *RC* de dos etapas. Esto está ligado a la grafica de la fdp, que muestra el tamaño de la probabilidad de ocurrencia de las muestras. Con filtros *RC* de tres etapas, las curvas son todavía más suaves, por lo que convergen más velozmente a sus valores en la salida.

## 4.7 RECONSTRUCCIÓN EN LA REGIÓN DE INTERPOLACIÓN

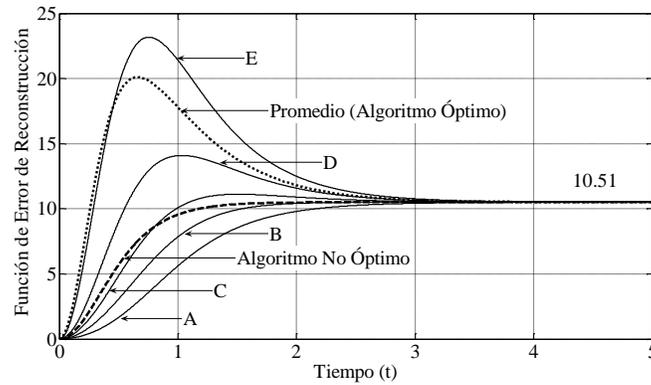
La reconstrucción en la *región de interpolación* ocurre en el intervalo  $T_i < t < T_N$ . En esta zona el numero de muestras es importante, debido a que dependiendo de si se trata de un proceso Markoviano o no Markoviano, existe influencia de las dos muestras vecinas o más. Asimismo, observando estos ejemplos se pueden derivar los resultados para las funciones no lineales exponenciales que no se grafican.



**Figura 4.12** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = 1.5exp[\xi(t)]$  en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo.

### 4.7.1 ALGORITMOS ÓPTIMOS Y NO ÓPTIMOS DE PROCESOS MARKOVIANOS

En los procesos *Gaussianos Markovianos* la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción dependen solo de las dos muestras vecinas. Por lo que el tamaño de la muestra es de  $N = 2$ . El tiempo de covarianza  $\tau_c$  en la salida se obtiene sustituyendo (2.24) en la ecuación (4.18), sabiendo que  $\alpha = 1$ . Las funciones no lineales exponenciales se caracterizan por tener un tiempo de covarianza elevado, como se muestra en la Tabla 4.2. Incluso puede ser mayor al obtenido en la entrada el cual es  $\tau_c = 1$ . Como consecuencia de ello, y para tener una mejor descripción del PMR en esta región, utilizaremos un intervalo de separación entre muestras con valor de  $\Delta T = 0.1$  para todos los procesos. Las muestras de entrada se establecen en la Tabla 4.3. Al igual que en la región de extrapolación, en estos procesos se emplea el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = exp[\xi(t)]$ .



**Figura 4.13** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = 1.5exp[\xi(t)]$  en la región de extrapolación.

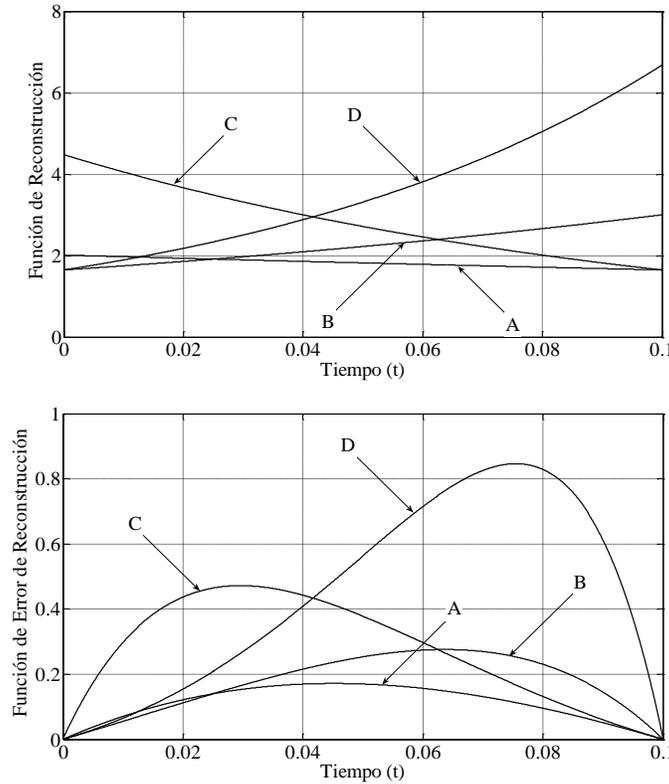
En el *algoritmo óptimo*, la función de reconstrucción (4.28) y la función de error de reconstrucción (4.30) se expresan en la Figura 4.14. La reconstrucción es una función no lineal respecto al valor de las muestras de entrada. Ya que el valor de la muestra obtenida a la salida es diferente al que se tiene en la entrada. La curvatura es más evidente al aumentar el valor de la muestra. Lo mismo sucede con la curva del error, donde además existe una inclinación hacia el extremo de la muestra mayor.

Función Característica	Tiempo de Covarianza
$\eta(t) = exp[\xi(t)]$	1.5816
$\eta(t) = exp[0.5\xi(t)]$	1.811
$\eta(t) = 1.5exp[\xi(t)]$	1.5803

**Tabla 4.2** Tiempo de covarianza de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial.

	Valor de la muestra $\xi(T_1)$	Valor de la muestra $\xi(T_2)$
A)	0.2	0
B)	0	0.6
C)	1	0
D)	0	1.4

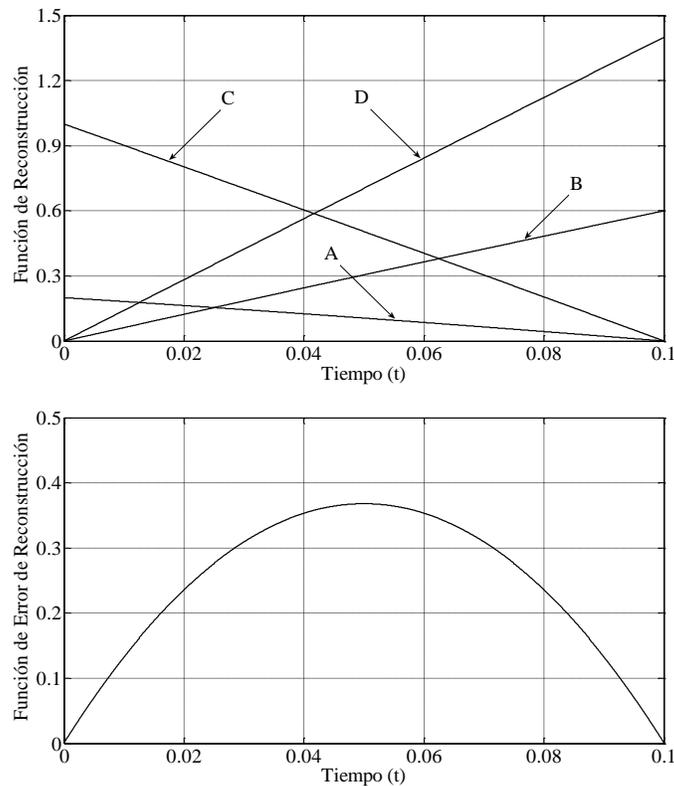
**Tabla 4.3** Valores de muestreo de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial en la región de interpolación.



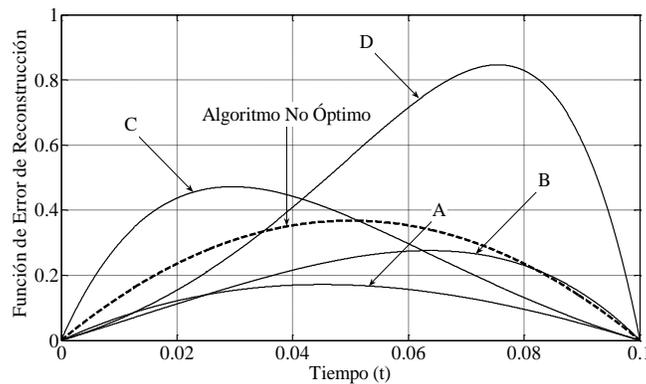
**Figura 4.14** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.1$ . Algoritmo óptimo.

Usando el *algoritmo no óptimo*, en la Figura 4.15 se presenta la función de reconstrucción (4.32) así como la función de error de reconstrucción (4.33). Las curvas de reconstrucción son una función lineal de las muestras. Esto significa que el valor de las muestras de entrada es el mismo que el de las muestras en la salida. Al igual que en extrapolación, existe solamente una curva de error la cual tiene forma Gaussiana que se destaca por su simetría.

En la Figura 4.16 se expone la comparación de los algoritmos de error de reconstrucción. Se distingue que el conjunto de valores para los cuales el error del caso óptimo es menor al del caso no óptimo crece un poco en relación a la zona de extrapolación. Aunque este valor puede variar entre procesos aleatorios y funciones de transferencia exponenciales dependiendo de la magnitud de las muestras en cada extremo y del tiempo de separación entre ellas. En el ejemplo mostrado el límite de dicho conjunto es la curva originada con una muestra que tiene un valor cercano a 0.8 en un lado y una muestra con un valor de 0 en el otro.



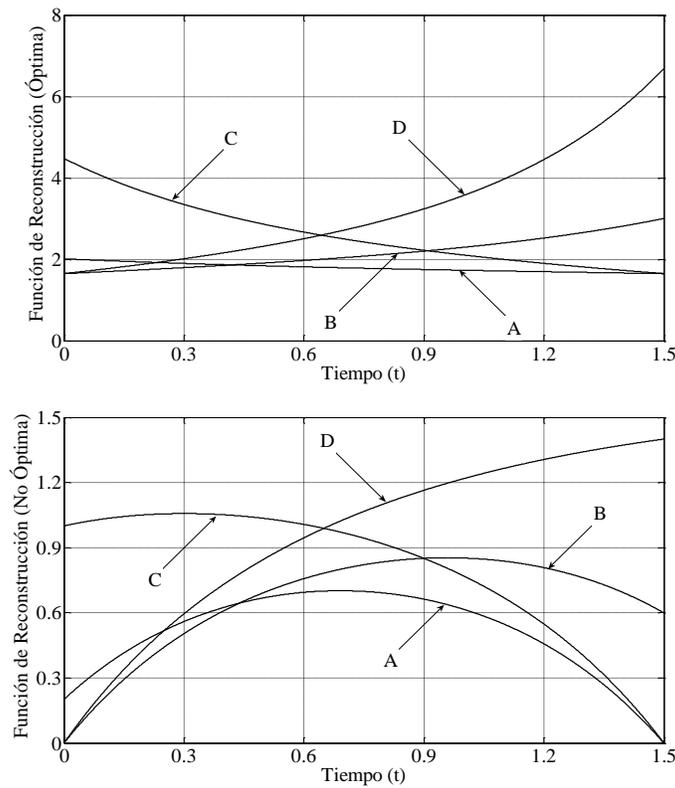
**Figura 4.15** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.1$ . Algoritmo no óptimo.



**Figura 4.16** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.1$ .

Se tienen cambios notorios en la estructura de las funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción agrandado el rango de separación entre muestras, por ejemplo a  $\Delta T = 1.5$ . Entonces para el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$ , la comparación de las funciones de reconstrucción está en la Figura 4.17. En la Figura 4.18 se manifiesta la

comparación de los algoritmos de la función de error de reconstrucción. Las curvas de reconstrucción tienen un comportamiento más exponencial. Como efecto de la linealidad de la función no óptima, las curvas de este caso tienen una orientación inversa a las del caso óptimo. En ambos algoritmos la magnitud del error se incremento notablemente. El cambio más evidente en relación a la Figura 4.16, es la reducción en el rango de muestras en las cuales se obtiene un menor error óptimo que no óptimo. Ahora son muestras con valor de 0.5 aproximadamente en un extremo, y 0 en el otro. Por lo que no resulta adecuado aumentar demasiado la separación entre las muestras.

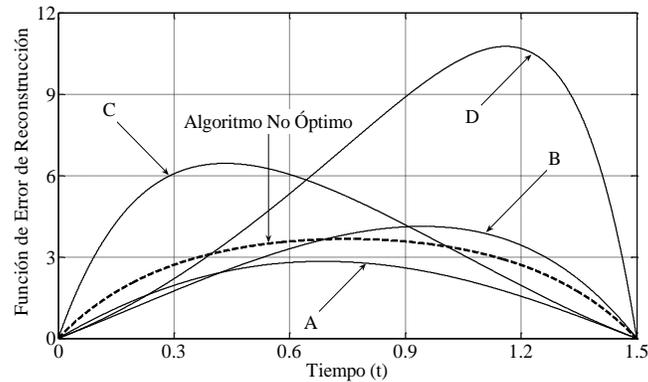


**Figura 4.17** Comparación de los algoritmos en la función de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 1.5$ .

## 4.7.2 ALGORITMOS ÓPTIMOS Y NO ÓPTIMOS DE PROCESOS NO MARKOVIANOS

La función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción teniendo procesos *Gaussianos no Markovianos*, dependen de la influencia de un mayor número de muestras. Con lo que el tamaño de la muestra puede ser de  $N = 3$ . Al igual que en los

procesos Markovianos, los tiempos de covarianza  $\tau_c$  obtenidos a la salida de procesos no Markovianos con filtros *RC* de dos y tres etapas resultan más grandes que el tiempo de covarianza obtenido a la entrada. Debido a eso no es conveniente relacionar el intervalo de separación entre las muestras con este parámetro. Por lo cual es mejor mantener el margen de  $\Delta T = 0.1$ , con ello se logra una buena comparación de las gráficas de reconstrucción y de error respecto a las generadas con los procesos Markovianos. Los valores de las tres muestras de entrada se señalan en la Tabla 4.4.



**Figura 4.18** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = \exp[\xi(t)]$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 1.5$ .

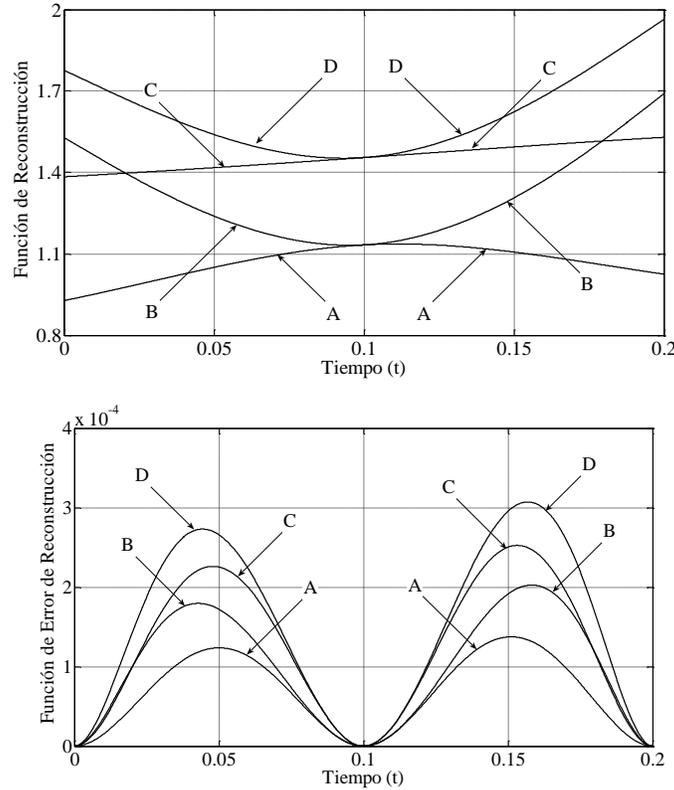
	Valor de la muestra $\xi(T_1)$	Valor de la muestra $\xi(T_2)$	Valor de la muestra $\xi(T_3)$
A)	-0.4	0	-0.2
B)	0.6	0	0.8
C)	0.4	0.5	0.6
D)	0.9	0.5	1.1

**Tabla 4.4** Valores de muestreo de procesos no Markovianos en la salida del convertidor exponencial en la región de interpolación.

Se analizan primeramente los procesos aleatorios *Gaussianos no Markovianos con filtros RC de dos etapas* en la entrada. Considerando el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = \exp[0.5\xi(t)]$ .

Examinando el *algoritmo óptimo*, la función de reconstrucción (4.34) y la de error de reconstrucción (4.36) se ven en la Figura 4.19. La no linealidad es muy clara en las

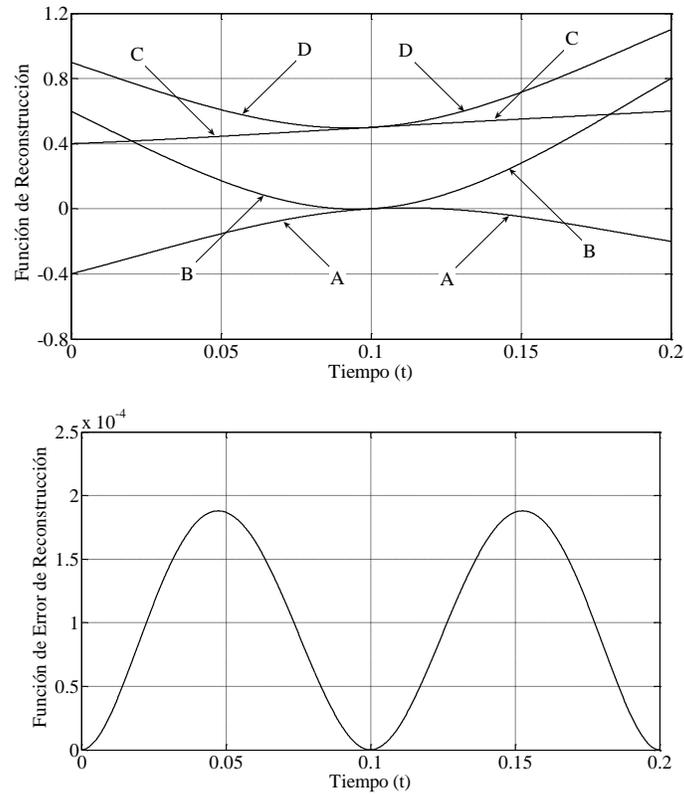
curvas de reconstrucción. Las curvas de error se inclinan hacia el lado de la muestra mayor, y el error es cero en cada instante de muestreo.



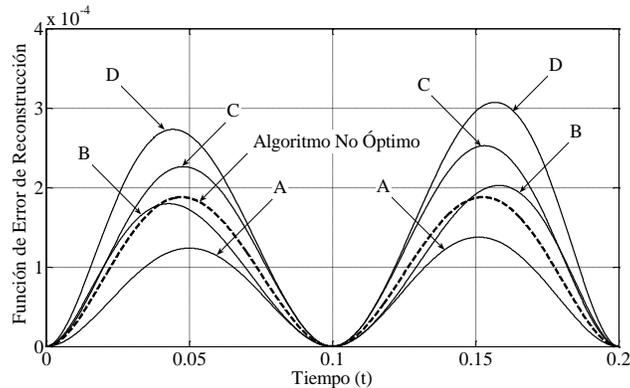
**Figura 4.19** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = \exp[0.5\xi(t)]$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.1$ . Algoritmo óptimo.

Tomando el *algoritmo no óptimo*, la Figura 4.20 exhibe la función de reconstrucción (4.38) y la de error de reconstrucción (4.39). Las curvas de reconstrucción tienen el mismo orden que en el caso óptimo, aunque la diferencia radica en su magnitud, ya que en este evento son funciones lineales. La curva de error tiene extremos simétricos. Para los dos algoritmos las curvas son más suaves que en los procesos Markovianos.

La Figura 4.21 proyecta la comparación de los algoritmos de error de reconstrucción. En ella se ve la influencia que ejercen las muestras vecinas, ya que el error varía en los dos intervalos en el caso óptimo. Para obtener un error óptimo menor, se deben escoger adecuadamente el valor de las muestras, debido a que existen muchas combinaciones y el error cambiaría en cada intervalo.



**Figura 4.20** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros *RC* de dos etapas en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = \exp[0.5\xi(t)]$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.1$ . Algoritmo no óptimo.

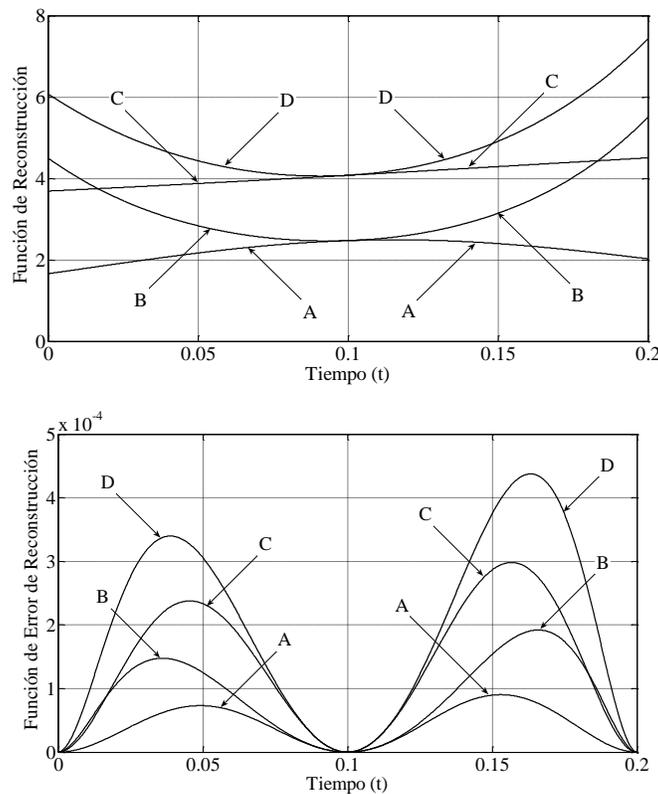


**Figura 4.21** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros *RC* de dos etapas en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = \exp[0.5\xi(t)]$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.1$ .

Ahora se examinan los procesos *Gaussianos no Markovianos con filtros RC de tres etapas* en la entrada, usando las mismas muestras en la entrada antes indicadas en la Tabla

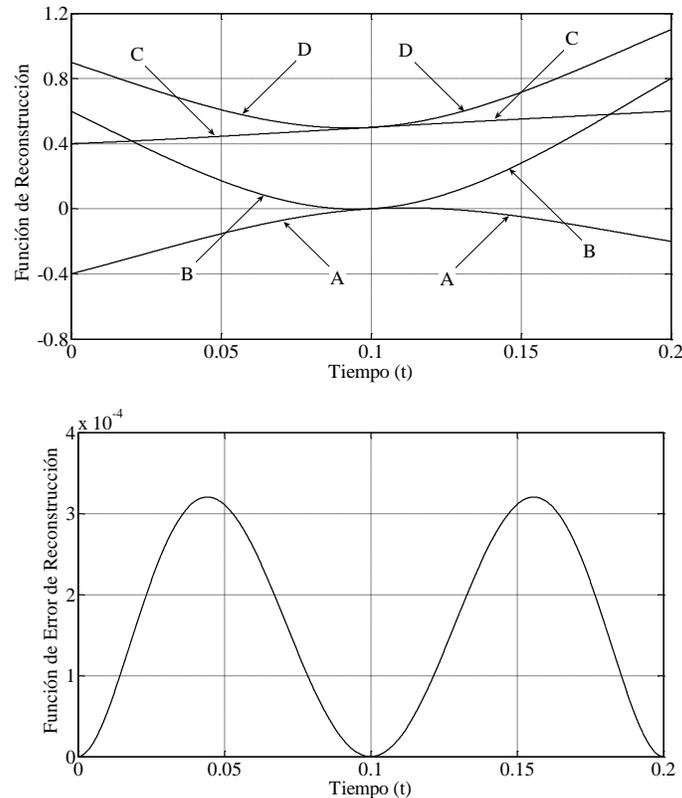
4.3. Se utiliza el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = 1.5\exp[\xi(t)]$ , manteniendo una separación de  $\Delta T = 0.1$ .

Teniendo el *algoritmo óptimo*, las funciones de reconstrucción (3.40) y de error de reconstrucción (3.42) se ilustran en la Figura 4.22. Las curvas de reconstrucción tienen el mismo comportamiento que las obtenidas con los filtros *RC* de dos etapas. Sin embargo, sus magnitudes son mayores que en la función (4.26) por el hecho de que  $a_0$  y  $\beta$  aumentaron. Similar efecto sucede en las curvas de error.



**Figura 4.22** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros *RC* de tres etapas en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = 1.5\exp[\xi(t)]$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.1$ . Algoritmo óptimo.

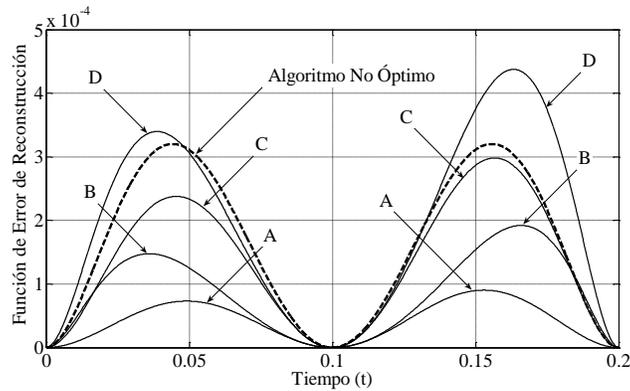
Mediante el *algoritmo no óptimo*, la función de reconstrucción (4.44) se observa en la Figura 4.23, al igual que la función de error de reconstrucción (4.45). Debido a la linealidad de las funciones, la gráfica de reconstrucción es prácticamente la misma que la obtenida con filtros *RC* de dos etapas. La magnitud del error también se agranda por la dependencia hacia  $a_0$  y  $\beta$ .



**Figura 4.23** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros *RC* de tres etapas en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = 1.5\exp[\xi(t)]$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.1$ . Algoritmo no óptimo.

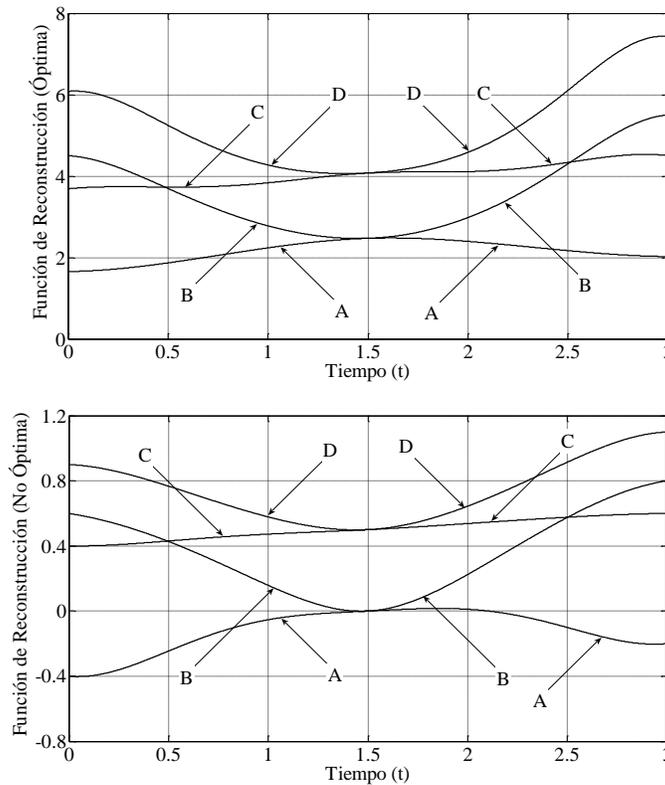
La Figura 4.24 muestra la comparación de los algoritmos de error de reconstrucción. En este ejemplo es muy evidente la importancia de la función de transferencia. Ya que a pesar de que se utilizaron las mismas muestras, las curvas no formaron una grafica similar a la de la Figura 4.21. Se señala esto porque el error del caso no óptimo es solo menor a la curva D del caso óptimo. Mientras que en la Figura 4.21 la curva no óptima se sitúa en la misma magnitud que la curva B óptima. Esto significa que para ésta función de transferencia se pueden utilizar muestras con valores más grandes en la metodología óptima. Por lo que se comprueba la importancia del valor de la muestra, ya que la probabilidad de ocurrencia de ellas está relacionada con la magnitud del error. Un error menor equivale a una probabilidad mayor.

Si para este último *convertidor no lineal*  $\eta(t) = 1.5\exp[\xi(t)]$  se aumenta el rango de separación entre las muestras a  $\Delta T = 1.5$ , la comparación de la función de reconstrucción se presenta en la Figura 4.25. Los valores de las curvas de reconstrucción no cambian al aumentar el tiempo de separación. Sin embargo ambos algoritmos tienen una estructura parecida.

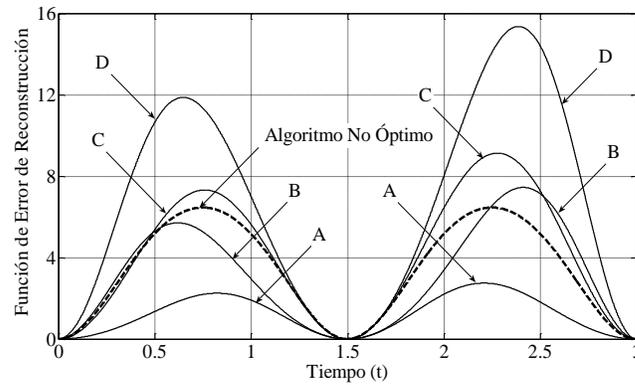


**Figura 4.24** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = 1.5exp[\xi(t)]$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.1$ .

La Figura 4.26 expresa la comparación de los algoritmos de error de reconstrucción. Como era de esperarse, las curvas del caso óptimo son más perjudicadas al aumentar la separación entre muestras. Aunque ellas reflejan el verdadero error del proceso aleatorio en la salida de un convertidor exponencial.



**Figura 4.25** Comparación de los algoritmos en la función de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = 1.5exp[\xi(t)]$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 1.5$ .



**Figura 4.26** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros *RC* de tres etapas en la salida del convertidor exponencial  $\eta(t) = 1.5exp[\xi(t)]$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 1.5$ .

## 4.8 RESUMEN

La descripción del Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción teniendo en la entrada procesos Gaussianos Markovianos y no Markovianos, y en la salida un convertidor exponencial, se analizó en este capítulo. Se dedujeron las funciones de reconstrucción y funciones de error de reconstrucción para los algoritmos óptimo y no óptimo. Se concluyó que el primer algoritmo arroja resultados adecuados y lógicos, ya que su metodología consta de propiedades estadísticas del proceso aleatorio. En [56,57] se dedujo lo mismo. Lo que demuestra la importancia de la función de transferencia no lineal y del valor de las muestras. Gracias a estos valores, existen conjuntos de muestras en los cuales el error del caso óptimo es menor al obtenido con el caso no óptimo. Dicho conjunto de muestras óptimas puede variar dependiendo de si se trata de una reconstrucción en la región de extrapolación o en la región de interpolación. Y principalmente por la composición de la función de transferencia, ya que en un convertidor exponencial es de vital importancia el valor que se le dé a variables como son  $a_0$  y  $\beta$ . Esas muestras con un error menor son las que tienen la mayor probabilidad de ocurrencia.

Tanto en la región de extrapolación como en la región de interpolación las curvas de los procesos no Markovianos son más suaves que en los procesos Markovianos. Se obtuvo un error promedio óptimo muy elevado en comparación con la curva no óptima de error. Esto debido a que en muestras con valores mayores el error aumenta en grandes proporciones de acuerdo a su función exponencial. Por lo que es mejor utilizar muestras pequeñas, para así obtener un error menor.

# Capítulo 5

## PROCEDIMIENTO DE MUESTREO - RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS ALEATORIOS EN LA SALIDA DE UN CONVERTIDOR POLINOMIAL

Los polinomios se usan a menudo en la teoría de los filtros y de las comunicaciones. En base a dichas teorías y en las propiedades de un polinomio, en este capítulo se muestra el Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción de procesos estocásticos en la salida de un *convertidor polinomial*. Se exponen ejemplos teniendo polinomios de tercer y quinto orden.

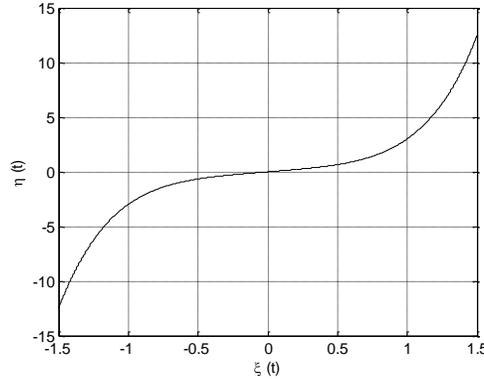
### 5.1 INTRODUCCIÓN

Una aplicación muy común es la interpolación polinómica, que es una técnica de interpolación de un conjunto de datos o de una función por un polinomio. Es decir, dado cierto número de puntos obtenidos por muestreo o a partir de un experimento se pretende encontrar un polinomio que pase por todos los puntos.

Para encontrar la metodología correcta que describa las propiedades de un convertidor no lineal polinomial, se asume la siguiente no linealidad [31,34,38]:

$$\eta(t) = a_0 + a_1\xi(t) + a_2\xi^2(t) + \dots + a_n\xi^n(t) \quad (5.1)$$

Las constantes  $a_0 \dots a_n$  son los coeficientes del polinomio.  $a_0$  es el coeficiente constante (o independiente), y  $a_n$  el coeficiente principal. Su comportamiento está en la Figura 5.1.



**Figura 5.1** No linealidad del convertidor polinomial.

## 5.2 FUNCIONES DE MOMENTOS EN LA SALIDA

Para determinar las funciones de momentos de  $\eta(t)$ , se multiplica la expresión (5.1) por otras expresiones similares correspondientes a diferentes instantes de tiempo, posteriormente se promedia estadísticamente el resultado, obteniendo [31,34]:

$$\tilde{m}_1^\eta(t) = a_0 + a_1\mu_1(t) + a_2\mu_2(t,t) + \dots + a_N\mu_N(t,t,\dots,t) \quad (5.2)$$

$$\tilde{m}_2^\eta(t_1, t_2) = a_0^2 + a_0a_1\mu_1(t_1) + a_0a_2\mu_2(t_1, t_1) + \dots + a_0a_N\mu_N(t_1, t_1, \dots, t_1) + \dots \quad (5.3)$$

donde las cantidades  $\mu(t_1, \dots, t_N) = \langle x(t_1), \dots, x(t_N) \rangle$ , son las funciones de momentos iniciales del proceso  $\xi(t)$ . Se podría decir que las funciones de momentos del proceso a la salida  $\eta(t)$  pueden ser expresadas como combinaciones lineales de las funciones de momentos del proceso de entrada  $\xi(t)$ . Sin embargo, las fórmulas de los momentos del proceso de salida, involucran funciones de momentos de alto orden del proceso de entrada. Esta es una de las principales características de las transformaciones no lineales.

### 5.3 CARACTERÍSTICAS DEL PROCESO EN LA SALIDA [31,34]

Las principales propiedades estadísticas del proceso en la salida de un convertidor polinomial, son la función de densidad de probabilidad, la esperanza matemática, la varianza, la función de covarianza y el tiempo de covarianza. Si el proceso en la entrada  $\xi(t)$  es de tipo Gaussiano, dichos parámetros son los siguientes.

#### 5.3.1 FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Si  $\langle \xi \rangle = 0$  y  $\sigma_\xi^2 = 1$ , la función de densidad de probabilidad en la entrada es:

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi - \langle \xi \rangle}{\sigma_\xi^2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \quad (5.4)$$

La función de densidad de probabilidad en la salida resulta de:

$$\omega(\eta) = \omega(h(\eta)) \frac{1}{\left|\frac{d\eta}{d\xi}\right|} \quad (5.5)$$

donde  $\omega(h(\eta)) = \omega(\xi)$  y  $\eta = a_0 + a_1\xi + a_1\xi^2 + \dots + a_n\xi^n$ . Sustituyendo se tiene la fdp unidimensional en términos de  $\eta$ :

$$\omega(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \frac{1}{\left|\frac{d}{d\xi} a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots + a_n\xi^n\right|} \quad (5.6)$$

### 5.3.2 ESPERANZA MATEMÁTICA

Considerando (1.7) para obtener la esperanza matemática a la salida:

$$\langle \eta \rangle = \langle g(\xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \omega(\xi) d\xi \quad (5.7)$$

donde  $g(\xi) = \eta$ . Reemplazando términos obtenemos:

$$\langle \eta \rangle = \langle g(\xi) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots + a_n\xi^n) \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi \quad (5.8)$$

### 5.3.3 VARIANZA

Se toma (1.8) para obtener la varianza en la salida:

$$\sigma_\eta^2 = \langle \eta^2 \rangle - \langle \eta \rangle^2 \quad (5.9)$$

Para llegar al valor de la varianza primero se debe encontrar a  $\langle \eta^2 \rangle$ :

$$\langle \eta^2 \rangle = \langle g^2(\xi) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots + a_n\xi^n)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi \quad (5.10)$$

Con ello, se puede sustituir (5.8) y (5.10) en (5.9). El resultado final de la integral se busca en tablas, según del orden del polinomio.

### 5.3.4 FUNCIÓN Y TIEMPO DE COVARIANZA

Reescribiendo (5.1) para dos momentos de tiempo  $t$  y  $t + \tau$ , multiplicando ambas expresiones y sacando el promedio, obtenemos la función de covarianza en la salida:

$$K_{\eta}(\tau) = v_1^2 K_{\xi}(\tau) + \frac{v_2^2}{2!} K_{\xi}^2(\tau) + \dots + \frac{v_n^2}{n!} K_{\xi}^n(\tau) \quad (5.11)$$

donde los coeficientes  $v_n$  son:

$$v_n(m_{\xi}, \sigma_{\xi}^2) = n! a_n \quad (5.12)$$

El tiempo de covarianza  $\tau_c$  se determina mediante (1.17):

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_{\eta}(\tau)| d\tau = \frac{1}{\sigma_{\eta}^2} \int_0^{\infty} \left| v_1^2 K_{\xi}(\tau) + \frac{v_2^2}{2!} K_{\xi}^2(\tau) + \dots + \frac{v_n^2}{n!} K_{\xi}^n(\tau) \right| d\tau \quad (5.13)$$

### 5.4 ALGORITMO ÓPTIMO

Este algoritmo usa la regla de la media condicional [50]. La evaluación de la reconstrucción del proceso es mediante la esperanza matemática condicional, la cual provee un mínimo error dado por la varianza condicional. Esto se resuelve usando funciones de momentos condicionales y cumulantes [38].

La reconstrucción se determina a partir del primer momento condicional del proceso de salida (1.25). Por tanto, aplicando la media condicional a la ecuación (5.1) tenemos:

$$\tilde{m}_1^n(t) = \langle g[\xi(t)] | \Xi(T) \rangle = a_0 + a_1 \langle \xi(t) | \Xi(T) \rangle + a_2 \langle \xi^2(t) | \Xi(T) \rangle + \dots + a_n \langle \xi^n(t) | \Xi(T) \rangle \quad (5.14)$$

donde  $\tilde{m}_n^\xi(t) = \langle \xi^n(t) | \Xi(T) \rangle$  es el  $n$ -ésimo momento condicional del proceso de entrada. Resultando la *función de reconstrucción*:

$$\tilde{m}_1^n(t) = a_0 + a_1 \tilde{m}_1^\xi(t) + a_2 \tilde{m}_2^\xi(t) + \dots + a_n \tilde{m}_n^\xi(t) \quad (5.15)$$

La calidad de la reconstrucción dada por la *función de error de reconstrucción*, se obtiene por medio de la función de la varianza condicional del proceso de salida (1.26).

$$\sigma_2^\eta(t) = \tilde{m}_2^\eta(t) - [\tilde{m}_1^\eta(t)]^2 \quad (5.16)$$

Para obtener esta función se necesita conocer la función del segundo momento condicional de salida  $\tilde{m}_2^\eta(t)$ , es decir, se promedia estadísticamente el cuadrado de la ecuación (5.1):

$$\tilde{m}_2^\eta(t) = \langle [a_0 + a_1 \xi(t) + a_2 \xi^2(t) + \dots + a_n \xi^n(t)]^2 | \Xi(T) \rangle \quad (5.17)$$

Sustituyendo los momentos condicionales obtenemos:

$$\tilde{m}_2^\eta(t) = a_0^2 + a_1^2 \tilde{m}_2^\xi(t) + \dots + a_n^2 \tilde{m}_{2n}^\xi(t) + 2a_0 a_1 \tilde{m}_1^\xi(t) + \dots + 2a_{n-1} a_n \tilde{m}_{2n-1}^\xi(t) \quad (5.18)$$

También podemos hallar el promedio de la varianza condicional a la salida  $\tilde{\sigma}_\eta^2(t)$  para diferentes muestras:

$$\langle \tilde{\sigma}^2(t) \rangle = \int_0^\infty \tilde{\sigma}^2(t, \eta(T_N)) \omega(\eta(T_N)) d\eta(T_N) \quad (5.19)$$

Para describir completamente un proceso aleatorio, es necesario conocer todas las funciones de momentos. La mayor parte de la información se concentra en los momentos de bajo orden. Mientras que los de alto grado solo describen detalles no muy importantes del comportamiento de la densidad de probabilidad. De modo que los momentos son una sucesión de constantes descriptivas de una distribución que son útiles para medir sus propiedades. Sin embargo, hay otro conjunto de constantes descriptivas para medir las propiedades de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, los cuales reciben el nombre de *cumulantes*, y se definen por:

$$\theta_{\xi}(u) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} k_n \right\} \quad (5.20)$$

Con esta ecuación se obtiene la relación entre momentos y cumulantes alrededor de un punto arbitrario. Las primeras diez de estas expresiones son [32, 34]:

$$\begin{aligned} m_1 &= k_1 \\ m_2 &= k_2 + k_1^2 \\ m_3 &= k_3 + 3k_2k_1 + k_1^3 \\ m_4 &= k_4 + 4k_3k_1 + 3k_2^2 + 6k_2k_1^2 + k_1^4 \\ m_5 &= k_5 + 5k_4k_1 + 10k_3k_2 + 10k_3k_1^2 + 15k_2^2k_1 + 10k_2k_1^3 + k_1^5 \\ m_6 &= k_6 + 6k_5k_1 + 15k_4k_2 + 15k_4k_1^2 + 10k_3^2 + 60k_3k_2k_1 + 20k_3k_1^3 + 15k_2^3 + 45k_2^2k_1^2 + 15k_2k_1^4 + k_1^6 \\ m_7 &= k_7 + 7k_6k_1 + 21k_5k_2 + 21k_5k_1^2 + 35k_4k_3 + 105k_4k_2k_1 + 35k_4k_1^3 + 70k_3^2k_1 + 105k_3k_2^2 \\ &\quad + 210k_3k_2k_1^2 + 35k_3k_1^4 + 105k_2^3k_1 + 105k_2^2k_1^3 + 21k_2k_1^5 + k_1^7 \\ m_8 &= k_8 + 8k_7k_1 + 28k_6k_2 + 28k_6k_1^2 + 56k_5k_3 + 168k_5k_2k_1 + 56k_5k_1^3 + 35k_4^2 + 208k_4k_3k_1 \\ &\quad + 210k_4k_2^2 + 420k_4k_2k_1^2 + 70k_4k_1^4 + 280k_3^2k_2 + 280k_3^2k_1^3 + 840k_3k_2^2k_1 + 560k_3k_2k_1^3 \\ &\quad + 56k_3k_1^5 + 105k_2^4 + 420k_2^3k_1^2 + 210k_2^2k_1^4 + 28k_2k_1^6 + k_1^8 \\ m_9 &= k_9 + 9k_8k_1 + 36k_7k_2 + 36k_7k_1^2 + 84k_6k_3 + 252k_6k_2k_1 + 84k_6k_1^3 + 126k_5k_4 + 504k_5k_3k_1 \\ &\quad + 378k_5k_2^2 + 756k_5k_2k_1^2 + 126k_5k_1^4 + 315k_4^2k_1 + 1260k_4k_3k_2 + 1260k_4k_3k_1^2 + 1890k_4k_2^2k_1 \\ &\quad + 1260k_4k_2k_1^3 + 126k_4k_1^5 + 280k_3^3 + 2520k_3^2k_2k_1 + 840k_3^2k_1^3 + 1260k_3k_2^3 + 3780k_3k_2^2k_1^2 \\ &\quad + 1260k_3k_2k_1^4 + 84k_3k_1^6 + 945k_2^4k_1 + 1260k_2^3k_1^3 + 378k_2^2k_1^5 + 36k_2k_1^7 + k_1^9 \\ m_{10} &= k_{10} + 10k_9k_1 + 45k_8k_2 + 45k_8k_1^2 + 120k_7k_3 + 360k_7k_2k_1 + 120k_7k_1^3 + 210k_6k_4 + 840k_6k_3k_1 \\ &\quad + 630k_6k_2^2 + 1260k_6k_2k_1^2 + 210k_6k_1^4 + 126k_5^2 + 1260k_5k_4k_1 + 2520k_5k_3k_2 + 2520k_5k_3k_1^2 \\ &\quad + 3780k_5k_2^2k_1 + 2520k_5k_2k_1^3 + 252k_5k_1^5 + 1575k_4^2k_2 + 1575k_4^2k_1^2 + 2100k_4k_2^3 + 12600k_4k_2^2k_1 \\ &\quad + 4200k_4k_2k_1^3 + 3150k_4k_1^4 + 9450k_4k_2^2k_1^2 + 3150k_4k_2k_1^4 + 210k_4k_1^6 + 2800k_3^3k_1 + 6300k_3^2k_2^2 \\ &\quad + 12600k_3^2k_2k_1^2 + 2100k_3^2k_1^4 + 12600k_3k_2^3k_1 + 12600k_3k_2^2k_1^3 + 2520k_3k_2k_1^5 + 120k_3k_1^7 + 945k_2^5 \\ &\quad + 4725k_2^4k_1^2 + 3150k_2^3k_1^4 + 630k_2^2k_1^6 + 45k_2k_1^8 + k_1^{10} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Cuando se tiene un proceso Gaussiano  $\xi(t)$  los cumulantes de alto orden son iguales a cero. De manera que en base a (5.21), la relación entre momentos condicionales y cumulantes condicionales sobre el proceso de entrada es:

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_1^\xi &= \tilde{k}_1 \\
\tilde{m}_2^\xi &= \tilde{k}_2 + \tilde{k}_1^2 \\
\tilde{m}_3^\xi &= 3\tilde{k}_2\tilde{k}_1 + \tilde{k}_1^3 \\
\tilde{m}_4^\xi &= 3\tilde{k}_2^2 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_1^4 \\
\tilde{m}_5^\xi &= 15\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1 + 10\tilde{k}_2\tilde{k}_1^3 + \tilde{k}_1^5 \\
\tilde{m}_6^\xi &= 15\tilde{k}_2^3 + 45\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1^2 + 15\tilde{k}_2\tilde{k}_1^4 + \tilde{k}_1^6 \\
\tilde{m}_7^\xi &= 105\tilde{k}_2^3\tilde{k}_1 + 105\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1^3 + 21\tilde{k}_2\tilde{k}_1^5 + \tilde{k}_1^7 \\
\tilde{m}_8^\xi &= 105\tilde{k}_2^4 + 420\tilde{k}_2^3\tilde{k}_1^2 + 210\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1^4 + 28\tilde{k}_2\tilde{k}_1^6 + \tilde{k}_1^8 \\
\tilde{m}_9^\xi &= 945\tilde{k}_2^4\tilde{k}_1 + 1260\tilde{k}_2^3\tilde{k}_1^3 + 378\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1^5 + 36\tilde{k}_2\tilde{k}_1^7 + \tilde{k}_1^9 \\
\tilde{m}_{10}^\xi &= 945\tilde{k}_2^5 + 4725\tilde{k}_2^4\tilde{k}_1^2 + 3150\tilde{k}_2^3\tilde{k}_1^4 + 630\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1^6 + 45\tilde{k}_2\tilde{k}_1^8 + \tilde{k}_1^{10}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

donde  $\tilde{k}_1 = \tilde{m}_1^\xi(t)$  y  $\tilde{k}_2 = \tilde{\sigma}_\xi^2(t)$  se definen por (2.18) y (2.19) respectivamente. La función de reconstrucción (5.15) y la función de error de reconstrucción (5.16) se expresan por la forma no lineal de los momentos condicionales de alto orden en la entrada.

## 5.5 ALGORITMO NO ÓPTIMO

Este algoritmo se fundamenta en el conocimiento de la función de covarianza en la salida para tener la descripción del PMR. La *función de reconstrucción* está sustentada en (2.18):

$$\tilde{m}_\eta(t) = m_\eta + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ v_1^2 K_\xi(t-T_i) + \frac{v_2^2}{2!} K_\xi^2(t-T_i) + \dots + \frac{v_n^2}{n!} K_\xi^n(t-T_i) \right] a_{ij} [\eta(T_j) - m_\eta] \tag{5.23}$$

donde  $\tilde{m}_\eta(t)$  es la esperanza matemática condicional en la salida. La *función de error de reconstrucción* se relaciona a (2.19):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_\eta^2(t) = & \sigma_\eta^2 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ v_1^2 K_\xi(t - T_i) + \frac{v_2^2}{2!} K_\xi^2(t - T_i) + \dots + \frac{v_n^2}{n!} K_\xi^n(t - T_i) \right] \\ & \cdot a_{ij} \left[ v_1^2 K_\xi(T_j - t) + \frac{v_2^2}{2!} K_\xi^2(T_j - t) + \dots + \frac{v_n^2}{n!} K_\xi^n(T_j - t) \right] \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde  $\tilde{\sigma}_\eta^2(t)$  es la varianza condicional a la salida. Los parámetros no condicionales en la salida se obtienen por medio de (5.8) y (5.9).

## 5.6 RECONSTRUCCIÓN EN LA REGIÓN DE EXTRAPOLACIÓN

Para obtener una reconstrucción *fuera del área de muestreo*, a continuación se presentan ejemplos utilizando convertidores polinomiales de tercer y quinto orden, teniendo en la entrada procesos Gaussianos Markovianos y no Markovianos. Con ello se puede ver la influencia que produce cada uno en la función de reconstrucción y en la función de error de reconstrucción, tanto en el algoritmo óptimo como en el no óptimo. Se comparan ambos casos para saber cuál de ellos es mejor en un convertidor no lineal no inercial de tipo polinomial. Al igual que en las no linealidades exponenciales, solo se presentan algunas gráficas de las funciones polinomiales aplicadas a procesos Markovianos o no Markovianos. Las restantes se desprenden de la visualización de las aquí mostradas.

Para los casos en extrapolación, se considera una sola muestra en  $T_1 = 0$ . Los valores de muestreo se presentan en la Tabla 5.1. Se tiene que  $m_\xi(t) = 0$  y  $\sigma_\xi^2(t) = 1$ .

	Valor de la muestra $x(T_j)$	Instante de muestreo $T_j$ [seg.]
A	$x(T_1) = 0.2$	$T_1 = 0$
B	$x(T_1) = 0.7$	$T_1 = 0$
C	$x(T_1) = 1$	$T_1 = 0$
D	$x(T_1) = 1.3$	$T_1 = 0$
E	$x(T_1) = 1.5$	$T_1 = 0$

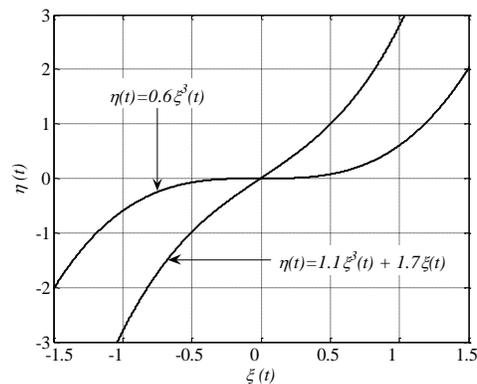
**Tabla 5.1** Valores de muestreo de procesos Markovianos y no Markovianos en la salida del convertidor polinomial en la región de extrapolación.

Primeramente, se describe el PMR a la salida de un convertidor polinomial de tercer orden. Se investigan dos funciones no lineales, ellas son:

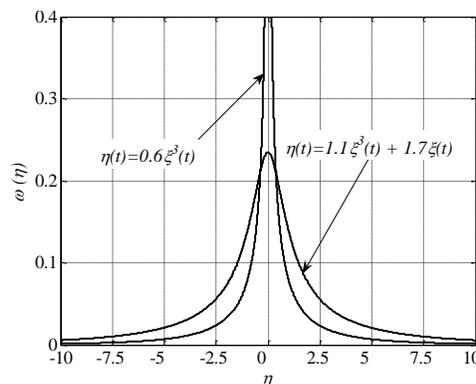
$$\eta(t) = 0.6\xi^3(t) \quad (5.25)$$

$$\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t) \quad (5.26)$$

Aunque estas funciones de transferencia y sus coeficientes son elegidos de manera aleatoria, tienen la finalidad de mostrar diferentes características estadísticas, como pueden ser la varianza, la función de covarianza, la fdp, el tiempo de covarianza, etc. Adicionalmente, representan distintas curvaturas, como se muestra en la Figura 5.2. Las funciones de densidad de probabilidad respectivas, se expresan en la Figura 5.3.

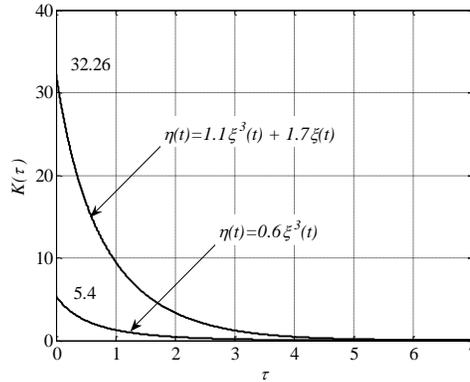


**Figura 5.2** No linealidades del convertidor polinomial de tercer orden.



**Figura 5.3** Función de Densidad de Probabilidad de no linealidades polinomiales de tercer orden.

Mediante la fdp se ve cómo se distribuyen las probabilidades del suceso, en relación al resultado del mismo. En la Figura 5.4 se presentan las funciones de covarianza producidas en la salida.



**Figura 5.4** Función de covarianza en la salida de no linealidades polinomiales de tercer orden.

Siguiendo con el estudio del PMR en la salida de un convertidor polinomial, se estudian los obtenidos con polinomios de quinto orden, empleando tres funciones no lineales:

$$\eta(t) = -0.24\xi^5(t) \tag{5.27}$$

$$\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t) \tag{5.28}$$

$$\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t) \tag{5.29}$$

Las funciones también tienen distintas características estadísticas y comportamientos, como se exhibe en la Figura 5.5. Debido a que se trata de polinomios de quinto orden, es imposible obtener la función de densidad de probabilidad. La función de covarianza en la salida se proyecta en la Figura 5.6. Tanto en los polinomios de tercer orden como en los de quinto orden las curvas son simétricas, por lo que tendrán una esperanza matemática en la salida con valor de cero.

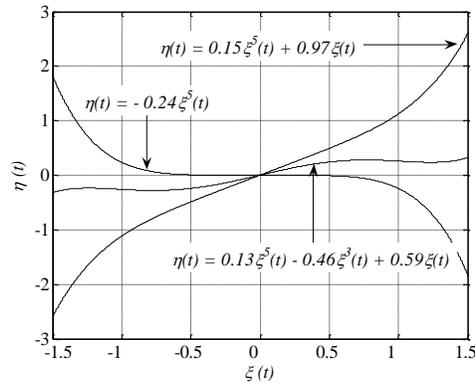


Figura 5.5 No linealidades del convertidor polinomial de quinto orden.

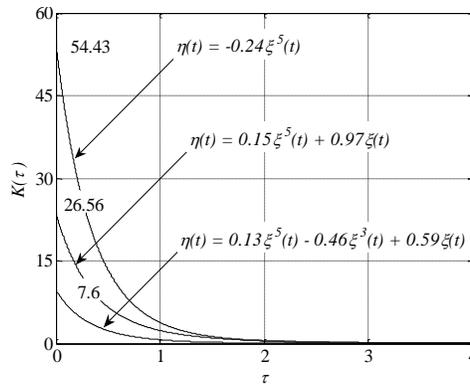


Figura 5.6 Función de covarianza en la salida de no linealidades polinomiales de quinto orden.

### 5.6.1 ALGORITMOS ÓPTIMOS Y NO ÓPTIMOS DE PROCESOS MARKOVIANOS

La función de covarianza normalizada de un proceso *Gaussiano Markoviano* obtenido a la salida de un circuito RC de una etapa alimentado por ruido blanco es indicada en (2.24).

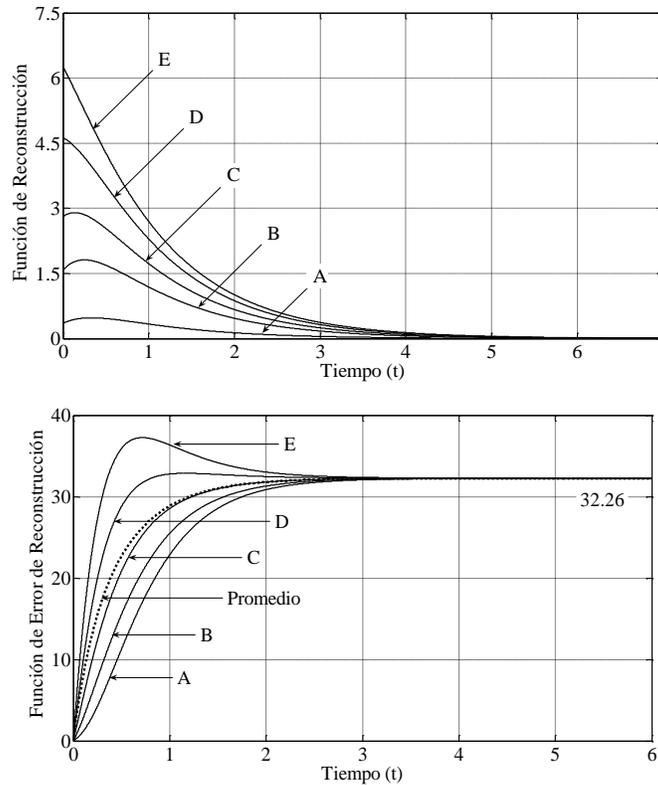
Considerando inicialmente el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$ , se tiene que en el *algoritmo óptimo* la función de reconstrucción (5.15), el segundo momento condicional (5.18) y la función de error de reconstrucción (5.16) son:

$$\tilde{m}_1^\eta(t) = 1.1\tilde{m}_3^\xi(t) + 1.7\tilde{m}_1^\xi(t) = 3.3\tilde{k}_2\tilde{k}_1 + 1.1\tilde{k}_1^3 + 1.7\tilde{k}_1 \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_2^\eta(t) = & 1.21\tilde{m}_6^\xi(t) + 3.74\tilde{m}_4^\xi(t) + 2.89\tilde{m}_2^\xi(t) = 18.15\tilde{k}_2^3 + 54.45\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1^2 + 18.15\tilde{k}_2\tilde{k}_1^4 \\ & + 1.21\tilde{k}_1^6 + 11.22\tilde{k}_2^2 + 22.44\tilde{k}_2\tilde{k}_1^2 + 3.74\tilde{k}_1^4 + 2.89\tilde{k}_2 + 2.89\tilde{k}_1^2 \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\sigma_2^\eta(t) = \tilde{m}_2^\eta(t) - [\tilde{m}_1^\eta(t)]^2 \quad (5.32)$$

La función de reconstrucción (5.30) y la función de error de reconstrucción (5.32) se exponen en la Figura 5.7. Las curvas de reconstrucción son funciones no lineales de las muestras, y convergen al valor de su esperanza matemática en la salida, el cual es cero. Las curvas de error tienden a la varianza en la salida, que es 32.26. El error depende de cada muestra, y aumenta su magnitud al incrementar el valor de la misma muestra. La curva del error promedio también se grafica.



**Figura 5.7** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$  en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo.

Si en el *algoritmo no óptimo* se usa (5.8), la esperanza matemática a la salida es 0. Con (5.9) la varianza a la salida vale 32.26. La función de covarianza a la salida (5.11) es:

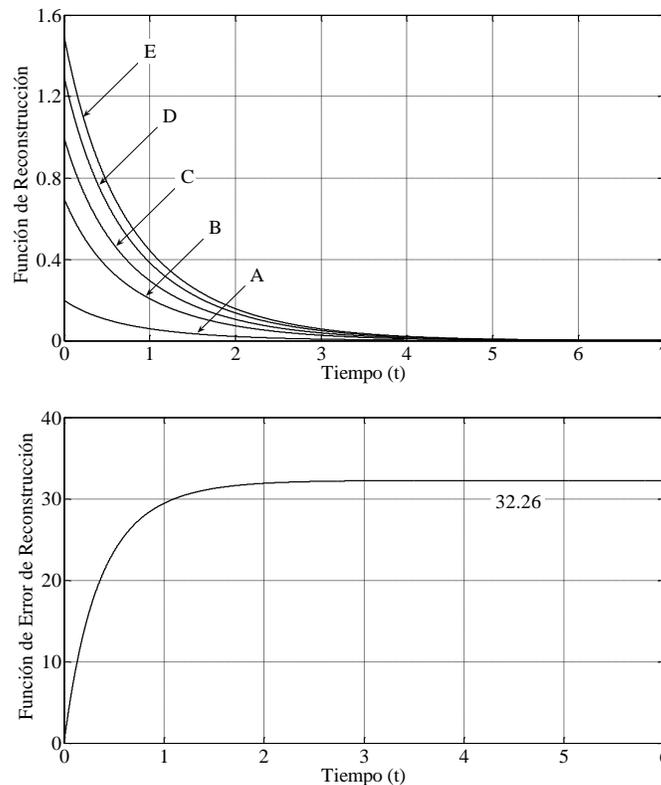
$$K_{\eta}(\tau) = v_1^2 K_{\xi}(\tau) + \frac{v_2^2}{2!} K_{\xi}^2(\tau) + \frac{v_3^2}{3!} K_{\xi}^3(\tau) = 25K_{\xi}(\tau) + 7.26K_{\xi}^3(\tau) \quad (5.33)$$

Como ya se mencionó, este algoritmo utiliza la metodología Gaussiana, por lo que la función de reconstrucción (5.23) y la función de error de reconstrucción (5.24) son:

$$\hat{m}_{\eta}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [25K_{\xi}(t-T_i) + 7.26K_{\xi}^3(t-T_i)] a_{ij} \eta(T_j) \quad (5.34)$$

$$\hat{\sigma}_{\eta}^2(t) = 32.26 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [25K_{\xi}(t-T_i) + 7.26K_{\xi}^3(t-T_i)] a_{ij} [25K_{\xi}(T_j-t) + 7.26K_{\xi}^3(T_j-t)] \quad (5.35)$$

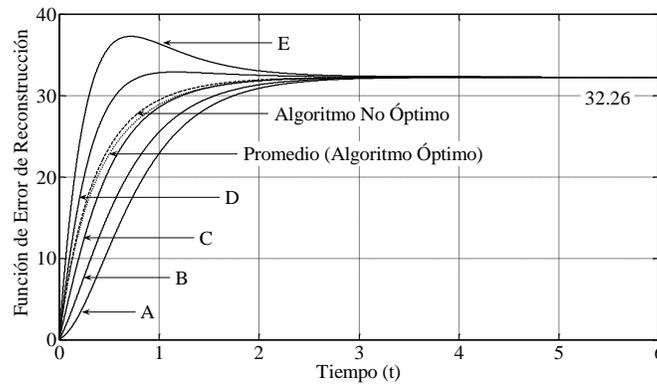
En la Figura 5.8 se ve la función de reconstrucción (5.34) así como la función de error de reconstrucción (5.35).



**Figura 5.8** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$  en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo.

Las curvas de reconstrucción son funciones lineales de las muestras, y convergen al valor de la media en la salida. Dicha gráfica de reconstrucción sería la misma que la obtenida en la función (5.25) y en cualquier otra función polinomial de tercer orden teniendo procesos Markovianos. La función de error de reconstrucción consta de una sola curva, ya que no considera el valor de cada muestra. Tiende a la varianza en la salida.

La Figura 5.9 manifiesta la comparación de los algoritmos. Es claro que para tener un mínimo error se deben contemplar las características estadísticas del proceso. Por ejemplo, si en el caso óptimo se tiene una muestra con un valor inferior a uno, la magnitud del error sería menor que en el caso no óptimo, debido a que esas muestras tienen una mayor probabilidad de ocurrencia. Aunque la curva del error promedio del caso óptimo es prácticamente igual a la obtenida con el caso no óptimo, debemos considerar que los resultados de éste último no son correctos, ya que su metodología es más general.



**Figura 5.9** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$  en la región de extrapolación.

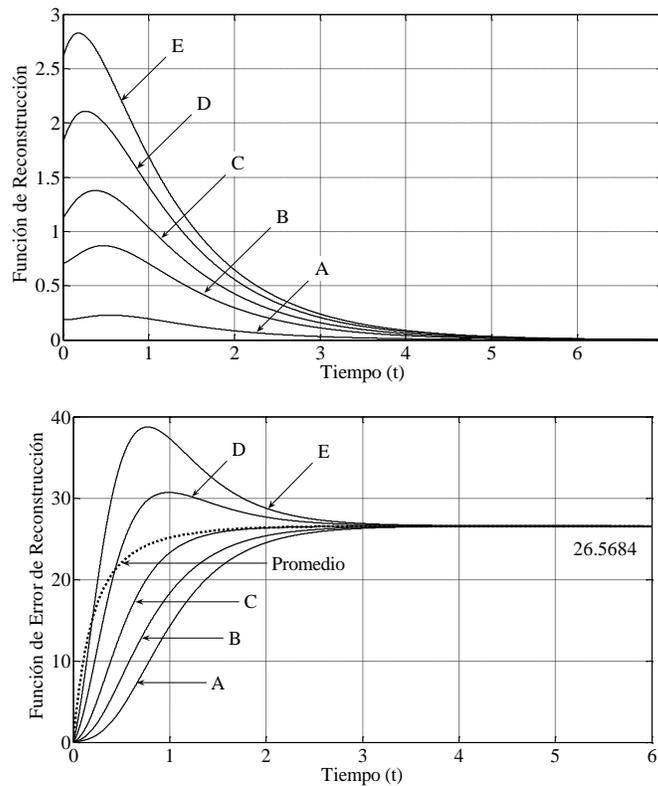
Ahora se examina el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$ . Analizando el *algoritmo óptimo*, la función de reconstrucción (5.15), el segundo momento condicional (5.18) y la función de error de reconstrucción (5.16) son:

$$\tilde{m}_1^n(t) = 0.15\tilde{m}_5^\xi(t) + 0.97\tilde{m}_1^\xi(t) = 2.25\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1 + 1.5\tilde{k}_2\tilde{k}_1^3 + 0.15\tilde{k}_1^5 + 0.97\tilde{k}_1 \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_2^n(t) = & 0.0225\tilde{m}_{10}^\xi(t) + 0.291\tilde{m}_6^\xi(t) + 0.9409\tilde{m}_2^\xi(t) = 21.262\tilde{k}_2^5 + 106.312\tilde{k}_2^4\tilde{k}_1^2 \\ & + 70.875\tilde{k}_2^3\tilde{k}_1^4 + 14.175\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1^6 + 1.012\tilde{k}_2\tilde{k}_1^8 + 0.022\tilde{k}_1^{10} + 4.365\tilde{k}_2^3 \\ & + 13.095\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1^2 + 4.365\tilde{k}_2\tilde{k}_1^4 + 0.291\tilde{k}_1^6 + 0.94\tilde{k}_2 + 0.94\tilde{k}_1^2 \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\sigma_2^\eta(t) = m_2^\eta(t) - [m_1^\eta(t)]^2 \tag{5.38}$$

La Figura 5.10 ilustra las funciones de reconstrucción (5.36) y de error de reconstrucción (5.38). Las curvas de reconstrucción tienen una especie de pico al inicio, algo que en las gráficas de reconstrucción de los convertidores polinomiales de tercer orden no se observa. Las curvas de error convergen a la varianza en la salida, con valor de 26.56. Aunque se trata de un polinomio de mayor orden el error no es tan grande como habría de suponerse



**Figura 5.10** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$  en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo.

Para el *algoritmo no óptimo*, empleando (5.8) la media en la salida es 0. Usando (5.9) la varianza a la salida es de 26.5684. La función de covarianza a la salida (5.11) es:

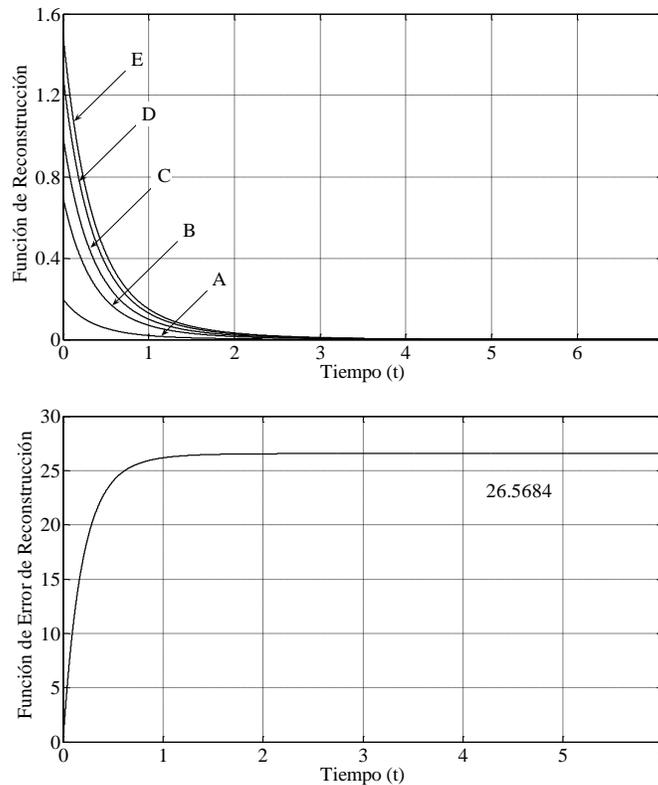
$$\begin{aligned} K_\eta(\tau) &= v_1^2 K_\xi(\tau) + \frac{v_2^2}{2!} K_\xi^2(\tau) + \dots + \frac{v_5^2}{5!} K_\xi^5(\tau) \\ &= 2.95K_\xi(\tau) + 4.5K_\xi^2(\tau) + 13.5K_\xi^3(\tau) + 2.7K_\xi^5(\tau) \end{aligned} \tag{5.39}$$

Las funciones de reconstrucción (5.23) y de error de reconstrucción (5.24) son:

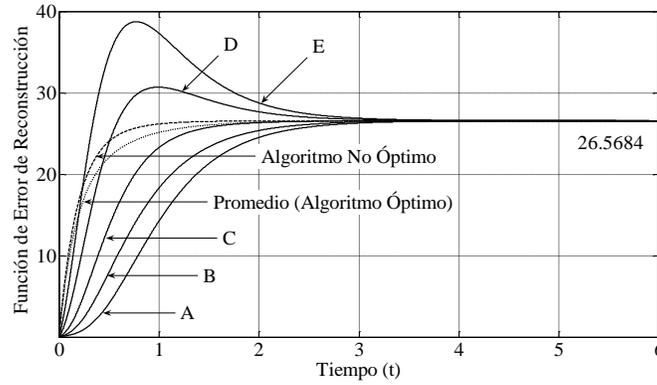
$$\hat{m}_\eta(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ 2.95K_\xi(t-T_i) + 4.5K_\xi^2(t-T_i) + 13.5K_\xi^3(t-T_i) + 2.7K_\xi^5(t-T_i) \right] a_{ij} \eta(T_j) \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2(t) = & 26.56 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ 2.95K_\xi(t-T_i) + 4.5K_\xi^2(t-T_i) + 13.5K_\xi^3(t-T_i) + 2.7K_\xi^5(t-T_i) \right] \cdot \\ & \cdot a_{ij} \left[ 2.9K_\xi(T_j-t) + 4.5K_\xi^2(T_j-t) + 13.5K_\xi^3(T_j-t) + 2.7K_\xi^5(T_j-t) \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

La función de reconstrucción (5.40) y la función de error de reconstrucción (5.41) se observan en la Figura 5.11. Las curvas de reconstrucción convergen más rápido a cero en relación a las producidas con funciones polinomiales de tercer orden, como efecto de un mayor orden en el polinomio. La gráfica de reconstrucción es la misma para todas las no linealidades polinomiales de quinto orden. La curva de error tiende a su varianza en la salida. En la Figura 5.12 se muestra la comparación entre los algoritmos de error.



**Figura 5.11** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$  en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo.



**Figura 5.12** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$  en la región de extrapolación.

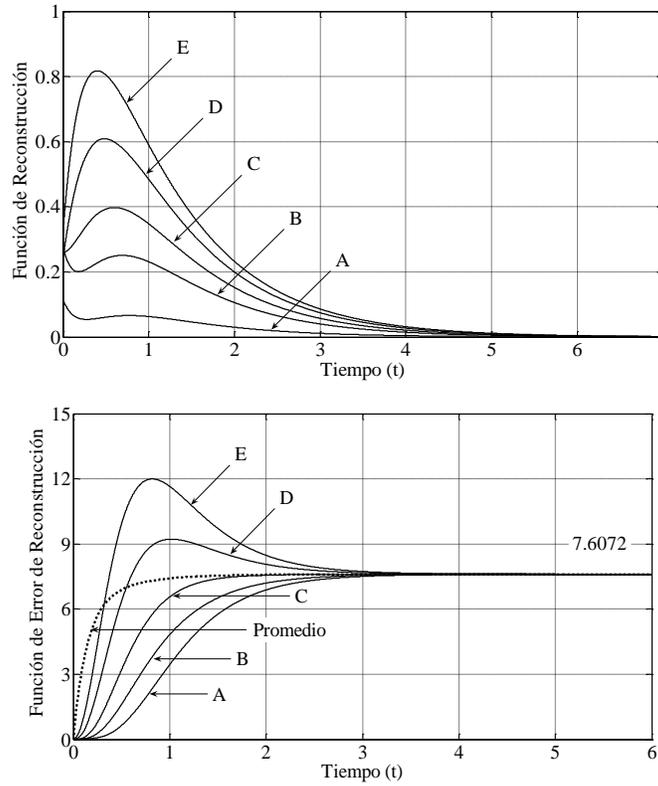
Finalmente se toma al *convertidor no lineal*  $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$ . Considerando el *algoritmo óptimo*, la función de reconstrucción (5.15), el segundo momento condicional (5.18) y la función de error de reconstrucción (5.16) son:

$$\begin{aligned}\tilde{m}_1^\eta(t) &= 0.13\tilde{m}_5^\xi(t) - 0.46\tilde{m}_3^\xi(t) + 0.59\tilde{m}_1^\xi(t) \\ &= 1.95\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1 + 1.3\tilde{k}_2\tilde{k}_1^3 + 0.13\tilde{k}_1^5 - 1.38\tilde{k}_2\tilde{k}_1 - 0.46\tilde{k}_1^3 + 0.59\tilde{k}_1\end{aligned}\quad (5.42)$$

$$\begin{aligned}\tilde{m}_2^\eta(t) &= 0.0169\tilde{m}_{10}^\xi(t) - 0.1196\tilde{m}_8^\xi(t) + 0.365\tilde{m}_6^\xi(t) - 0.5428\tilde{m}_4^\xi(t) + 0.3481\tilde{m}_2^\xi(t) = 15.97\tilde{k}_2^5 \\ &+ 79.852\tilde{k}_2^4\tilde{k}_1^2 + 53.235\tilde{k}_2^3\tilde{k}_1^4 + 10.647\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1^6 + 0.76\tilde{k}_2\tilde{k}_1^8 + 0.016\tilde{k}_1^{10} - 12.558\tilde{k}_2^4 \\ &- 50.232\tilde{k}_2^3\tilde{k}_1^2 - 25.116\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1^4 - 3.348\tilde{k}_2\tilde{k}_1^6 - 0.119\tilde{k}_1^8 + 5.475\tilde{k}_2^3 + 16.425\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1^2 \\ &+ 5.475\tilde{k}_2\tilde{k}_1^4 + 0.365\tilde{k}_1^6 - 1.628\tilde{k}_2^2 - 3.256\tilde{k}_2\tilde{k}_1^8 - 0.542\tilde{k}_1^4 + 0.348\tilde{k}_2 + 0.348\tilde{k}_1^2\end{aligned}\quad (5.43)$$

$$\sigma_2^\eta(t) = \tilde{m}_2^\eta(t) - [\tilde{m}_1^\eta(t)]^2 \quad (5.44)$$

La función de reconstrucción (5.42) y la función de error de reconstrucción (5.44) se expresan en la Figura 5.13. Las curvas de reconstrucción muestran diversos comportamientos no lineales, debido a la existencia de un signo negativo en la función no lineal. Como los coeficientes del polinomio son pequeños, los valores de reconstrucción y del error disminuyeron en comparación con la función (5.28). Las curvas de error se establecen en su varianza en la salida que tiene un valor de 7.6072.



**Figura 5.13** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$  en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo.

Usando el *algoritmo no óptimo*, mediante (5.8) se obtiene una esperanza matemática a la salida de 0. Con (5.9) la varianza a la salida tiene un valor de 7.607. La función de covarianza a la salida (5.11) es:

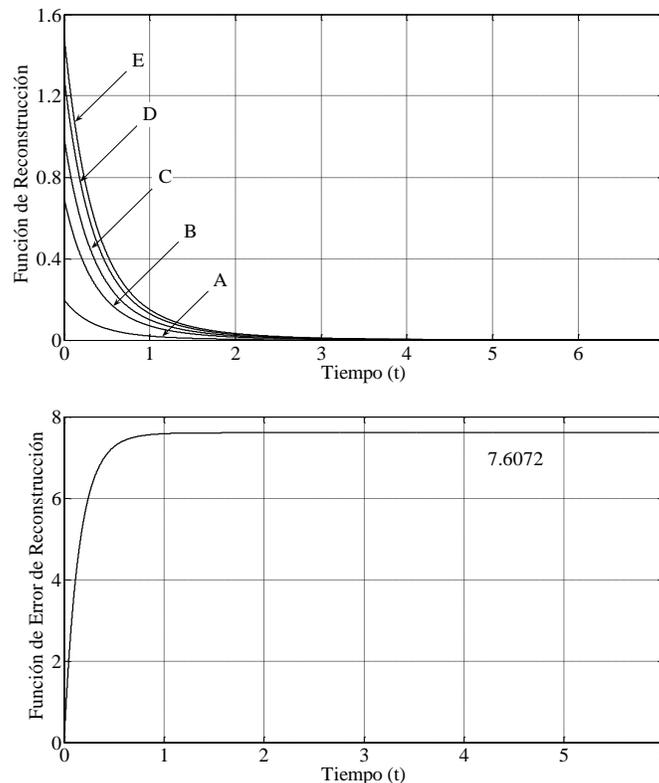
$$\begin{aligned}
 K_{\eta}(\tau) &= v_1^2 K_{\xi}(\tau) + \frac{v_2^2}{2!} K_{\xi}^2(\tau) + \dots + \frac{v_5^2}{5!} K_{\xi}^5(\tau) \\
 &= 0.01 K_{\xi}(\tau) + 3.38 K_{\xi}^2(\tau) + 4.23 K_{\xi}^3(\tau) + 2.02 K_{\xi}^5(\tau)
 \end{aligned}
 \tag{5.45}$$

Las funciones de reconstrucción (5.23) y de error de reconstrucción (5.24) son:

$$\tilde{m}_{\eta}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [0.01 K_{\xi}(t - T_i) + 3.38 K_{\xi}^2(t - T_i) + 4.23 K_{\xi}^3(t - T_i) + 2.02 K_{\xi}^5(t - T_i)] a_{ij} \eta(T_j) \tag{5.46}$$

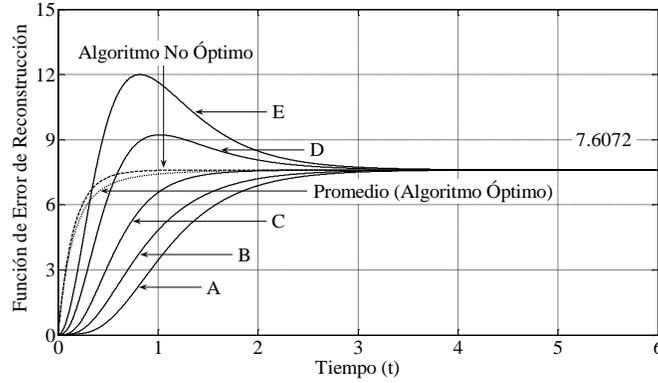
$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_\eta^2(t) = & 7.6 - \sum_{i=1}^N \left[ 0.01K_\xi(t - T_i) + 3.38K_\xi^2(t - T_i) + 4.23K_\xi^3(t - T_i) + 2.02K_\xi^5(t - T_i) \right] \cdot \\ & \cdot a_{ij} \left[ 0.01K_\xi(T_j - t) + 3.38K_\xi^2(T_j - t) + 4.23K_\xi^3(T_j - t) + 2.02K_\xi^5(T_j - t) \right] \end{aligned} \quad (5.47)$$

En la Figura 5.14 se presentan las funciones de reconstrucción (5.46) y de error de reconstrucción (5.47). Como ya se mencionó, a pesar de ser un polinomio de tres términos el error disminuye, esto a causa de sus coeficientes. Las curvas de error tienden a su varianza en la salida. La comparación de los algoritmos respecto a su función de error de reconstrucción se expone en la Figura 5.15.



**Figura 5.14** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$  en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo.

Mediante las Figuras 5.12 y 5.15, se aprecia que el rango de muestras para el cual el error óptimo es menor al no óptimo aumento, ahora son todas las muestras menores a 1.2 aproximadamente. Asimismo, las curvas convergen más rápido al valor de la varianza en la salida. Todo esto en consecuencia de la mayor complejidad del polinomio.



**Figura 5.15** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46.\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$  en la región de extrapolación.

### 5.6.2 ALGORITMOS ÓPTIMOS Y NO ÓPTIMOS DE PROCESOS NO MARKOVIANOS

Ahora se investigan los algoritmos del PMR que se obtienen cuando en la entrada hay un proceso *Gaussiano no Markoviano*. Se toma solo una función de transferencia por cada grupo de funciones polinomiales, ya sea de tercer o quinto orden. Ya que con observar solo un ejemplo, y teniendo las gráficas obtenidas de los procesos Gaussianos, se pueden deducir los resultados para las funciones polinomiales restantes.

Primeramente se examinan los procesos *Gaussianos no Markovianos con filtros RC de dos etapas*. Su función de covarianza normalizada se expresa en (2.29). Se utiliza el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$ .

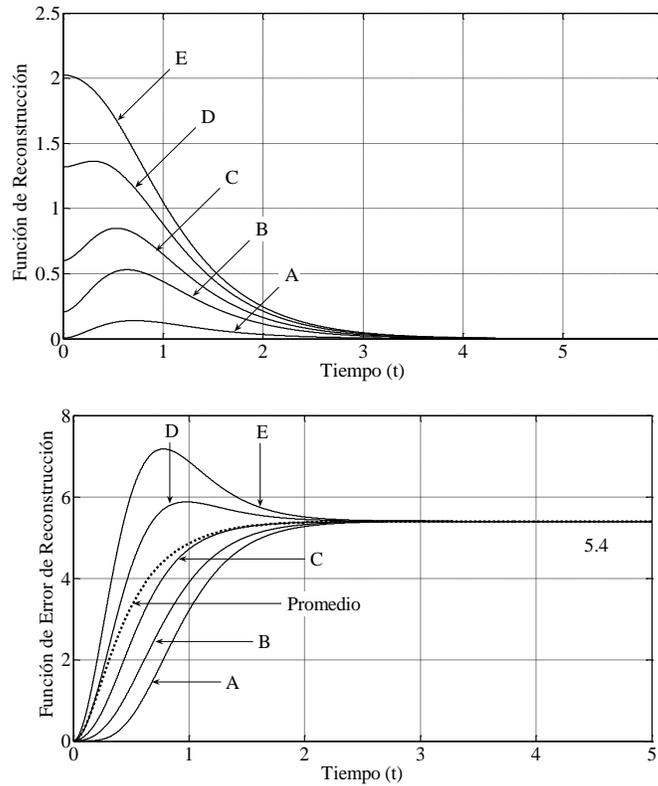
Analizando el *algoritmo óptimo*, la función de reconstrucción (5.15), el segundo momento condicional (5.18) y la función de error de reconstrucción (5.16) son:

$$\bar{m}_1^\eta(t) = 0.6\bar{m}_3^\xi(t) = 1.8\tilde{k}_2\tilde{k}_1 + 0.6\tilde{k}_1^3 \tag{5.48}$$

$$\bar{m}_2^\eta(t) = 0.36\bar{m}_6^\xi(t) = 5.4\tilde{k}_2^3 + 16.2\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1^2 + 5.4\tilde{k}_2\tilde{k}_1^4 + 0.36\tilde{k}_1^6 \tag{5.49}$$

$$\sigma_2^\eta(t) = \hat{m}_2^\eta(t) - [\hat{m}_1^\eta(t)]^2 \tag{5.50}$$

Las funciones de reconstrucción (5.48) y de error de reconstrucción (5.50) se ven en la Figura 5.16. Las curvas de error tienden a la varianza en la salida, que es 5.4. Los valores de reconstrucción y de error son menores que los tenidos en la función (5.26), ya que en este caso el polinomio tiene un solo termino con un coeficiente no muy grande.



**Figura 5.16** Función de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$  en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo.

Utilizando el *algoritmo no óptimo*, mediante (5.8) se tiene que la media en la salida es 0. Con (5.9) la varianza a la salida de 5.4. La función de covarianza a la salida (5.11) es:

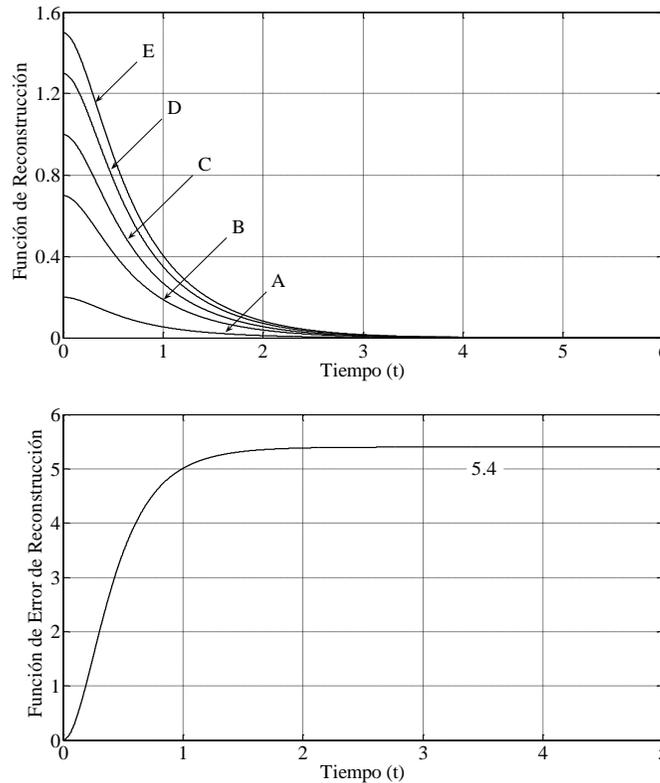
$$K_\eta(\tau) = v_1^2 K_\xi(\tau) + \frac{v_2^2}{2!} K_\xi^2(\tau) + \frac{v_3^2}{3!} K_\xi^3(\tau) = 3.24K_\xi(\tau) + 2.16K_\xi^3(\tau) \tag{5.51}$$

Por lo que las funciones de reconstrucción (5.23) y de error de reconstrucción (5.24) son:

$$\tilde{m}_\eta(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [3.24K_\xi(t - T_i) + 2.16K_\xi^3(t - T_i)] a_{ij} \eta(T_j) \quad (5.52)$$

$$\sigma_\eta^2(t) = 5.4 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [3.24K_\xi(t - T_i) + 2.16K_\xi^3(t - T_i)] a_{ij} [3.24K_\xi(T_j - t) + 2.16K_\xi^3(T_j - t)] \quad (5.53)$$

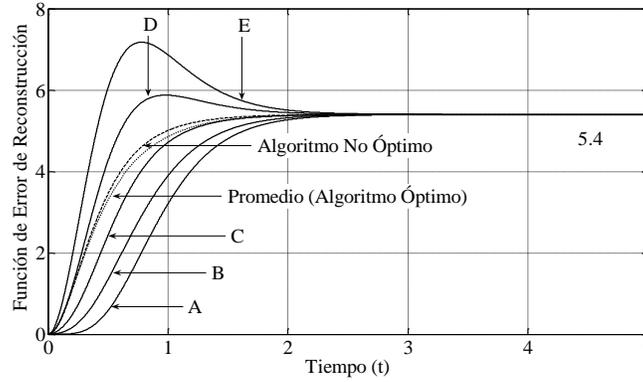
La Figura 5.17 manifiesta la función de reconstrucción (5.52) así como la función de error de reconstrucción (5.53). La única curva de error tiende a la varianza en la salida. Sus valores también son menores que en la función (5.26).



**Figura 5.17** Función de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$  en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo.

La comparación de los algoritmos dentro de la función de error de reconstrucción se exhibe en la Figura 5.18. Se nota que las curvas de ambos casos son más suaves que las obtenidas con los procesos Markovianos. A efecto de esto las curvas tienden más rápido a sus valores de la media y la varianza. Se mantiene el rango de muestras inferiores a uno

para tener un menor error en el caso óptimo. El valor de la varianza en este ejemplo es el menor dentro de todas las funciones polinomiales aquí investigadas.



**Figura 5.18** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$  en la región de extrapolación.

El análisis continúa con los *procesos Gaussianos no Markovianos con filtros RC de tres etapas*. La función de covarianza normalizada se da en (2.34). Se considera al *convertidor no lineal*  $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$ , que es la función con el mayor error.

Tomando el *caso óptimo*, la función de reconstrucción (5.15), el segundo momento condicional (5.18) y la función de error de reconstrucción (5.16) se representan por:

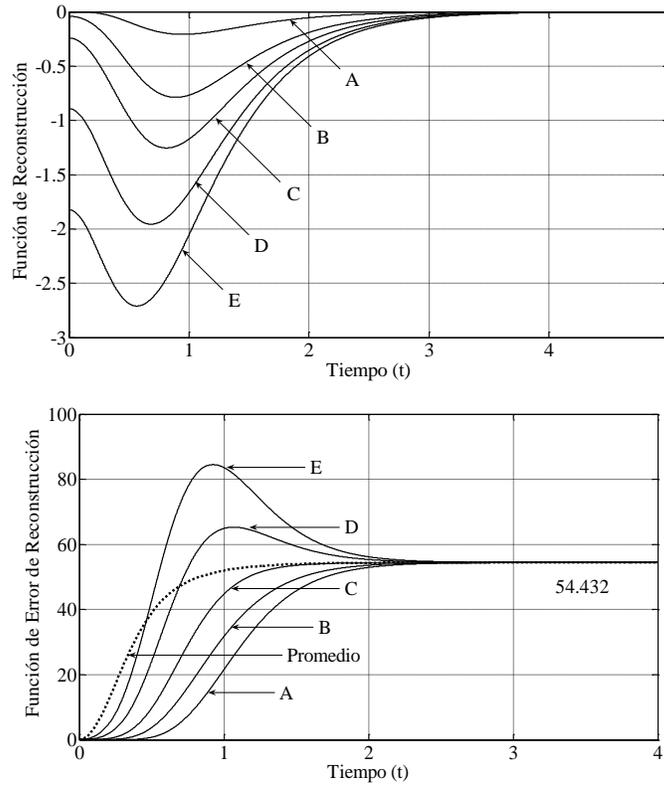
$$\tilde{m}_1^\eta(t) = -0.24\tilde{m}_3^\xi(t) = -3.6\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1 - 0.24\tilde{k}_2\tilde{k}_1^3 - 0.24\tilde{k}_1^5 \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_2^\eta(t) = 0.0576\tilde{m}_{10}^\xi(t) = & 54.43\tilde{k}_2^5 + 272.16\tilde{k}_2^4\tilde{k}_1^2 \\ & + 181.44\tilde{k}_2^3\tilde{k}_1^4 + 36.28\tilde{k}_2^2\tilde{k}_1^6 + 2.59\tilde{k}_2\tilde{k}_1^8 + 0.057\tilde{k}_1^{10} \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\sigma_2^\eta(t) = \tilde{m}_2^\eta(t) - [\tilde{m}_1^\eta(t)]^2 \quad (5.56)$$

La Figura 5.19 proyecta tanto la función de reconstrucción (5.54) como la de error de reconstrucción (5.56). Las curvas de reconstrucción tienen valores negativos debido a que

el coeficiente de la función característica es negativo, lo que significa que son no lineales. Las curvas de error convergen a la varianza en la salida, cuyo valor es 54.432. Aunque se trata solo de un monomio con un coeficiente pequeño, la magnitud del error es alta debido a que el orden del monomio es más grande.



**Figura 5.19** Función de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$  en la región de extrapolación. Algoritmo óptimo.

Teniendo el *algoritmo no óptimo*, con (5.8) la media en la salida es 0. Utilizando (5.9) la varianza a la salida de 54.432. La función de covarianza en la salida (5.11) es:

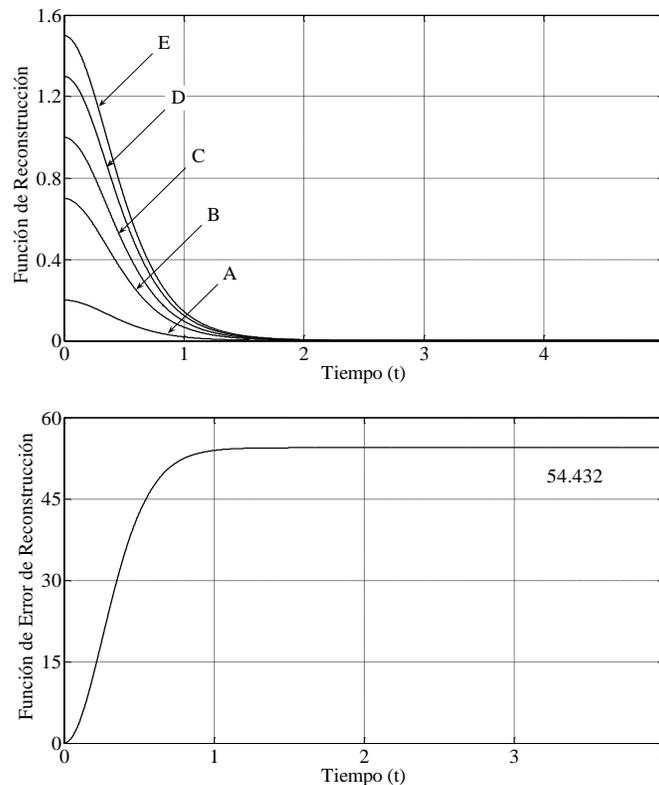
$$\begin{aligned}
 K_{\eta}(\tau) &= v_1^2 K_{\xi}(\tau) + \frac{v_2^2}{2!} K_{\xi}^2(\tau) + \dots + \frac{v_5^2}{5!} K_{\xi}^5(\tau) \\
 &= 1.44 K_{\xi}(\tau) + 11.52 K_{\xi}^2(\tau) + 34.56 K_{\xi}^3(\tau) + 6.912 K_{\xi}^5(\tau)
 \end{aligned}
 \tag{5.57}$$

Las funciones de reconstrucción (5.23) y de error de reconstrucción (5.24) son:

$$\hat{m}_\eta(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ 1.44K_\xi(t-T_i) + 11.52K_\xi^2(t-T_i) + 34.56K_\xi^3(t-T_i) + 6.912K_\xi^5(t-T_i) \right] a_{ij} \eta(T_j) \quad (5.58)$$

$$\sigma_\eta^2(t) = 54.43 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ 1.44K_\xi(t-T_i) + 11.52K_\xi^2(t-T_i) + 34.56K_\xi^3(t-T_i) + 6.91K_\xi^5(t-T_i) \right] \cdot a_{ij} \left[ 1.44K_\xi(T_j-t) + 11.52K_\xi^2(T_j-t) + 34.56K_\xi^3(T_j-t) + 6.91K_\xi^5(T_j-t) \right] \quad (5.59)$$

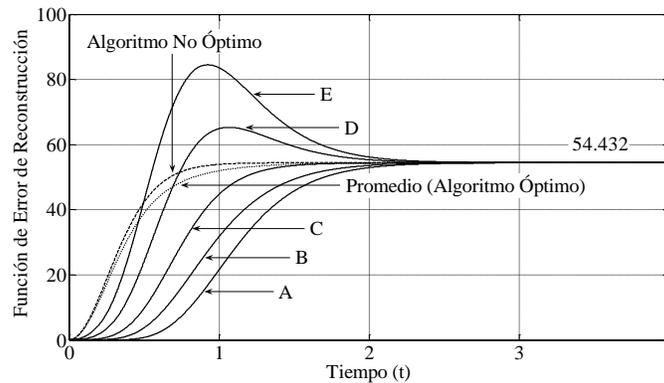
La función de reconstrucción (5.58) y la función de error de reconstrucción (5.59) se ilustran en la Figura 5.20. No hay curvas de reconstrucción con valores negativos como las obtenidas con el caso óptimo para esta misma función polinomial, por lo que sus propiedades son claramente lineales. La curva de error tiende a la varianza en la salida.



**Figura 5.20** Función de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$  en la región de extrapolación. Algoritmo no óptimo.

En la Figura 5.21 se observa la comparación de los algoritmos de error de reconstrucción. Los resultados en ambas funciones teniendo procesos no Markovianos con

filtros *RC* de tres etapas son semejantes a los obtenidos con filtros *RC* de dos etapas. La diferencia es que las curvas son aun más suaves en los primeros. También, al inicio de las curvas de error, existe un instante de tiempo en el cual la magnitud del error es mínima para después elevarse, esto en consecuencia del tipo de proceso y del orden del polinomio. Las muestras en el caso óptimo menores a 1.2 tendrán un error menor que en el caso no óptimo.



**Figura 5.21** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros *RC* de tres en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$  en la región de extrapolación.

## 5.7 RECONSTRUCCIÓN EN LA REGIÓN DE INTERPOLACIÓN

Para describir la reconstrucción del proceso que ocurre en la *región de interpolación*, los ejemplos que se presentan varían en algunas características como pueden ser el número de muestras, la distancia de separación entre muestras o el tiempo de covarianza, Esto está relacionado a si el proceso es Markoviano o no Markoviano. El propósito de estos cambios, es observar la influencia de las propiedades estadísticas del proceso en el PMR.

### 5.7.1 ALGORITMOS ÓPTIMOS Y NO ÓPTIMOS DE PROCESOS MARKOVIANOS

Se considera un tamaño de la muestra de  $N = 2$ . En esta ocasión sí se toma en cuenta el tiempo de covarianza en la salida, ya que de él depende la distancia de separación entre las

muestras y una buena reconstrucción. Dicho tiempo, teniendo procesos Markovianos, se obtiene sustituyendo (2.24) en la ecuación (5.13). Los valores resultantes están en la Tabla 5.2, sabiendo que  $\alpha = 1$ . Se obtiene el intervalo de separación  $\Delta T$ , dividiendo  $\tau_c/10$ .

Función Característica	Tiempo de Covarianza
$\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$	0.73
$\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$	0.8897
$\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$	0.3691
$\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$	0.3858
$\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$	0.4636.

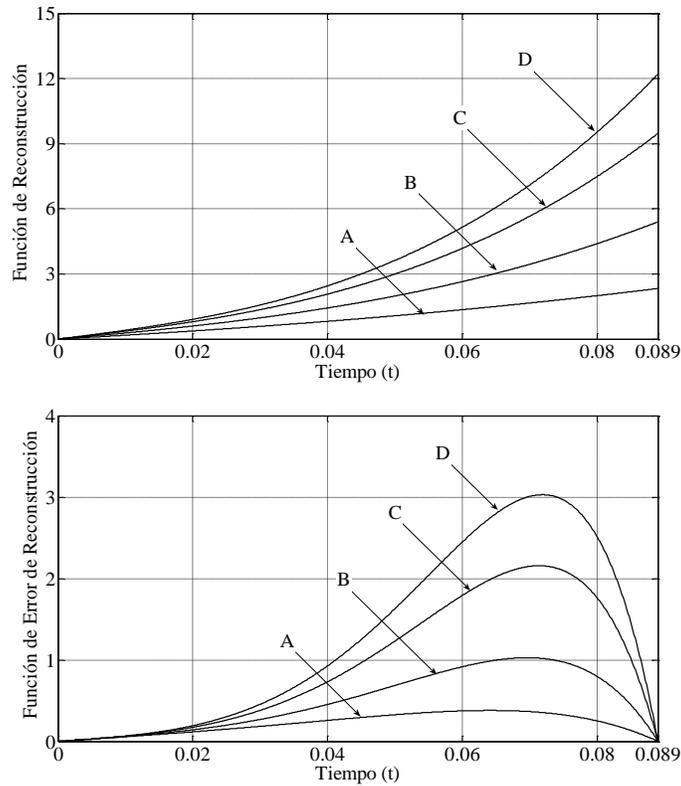
**Tabla 5.2** Tiempo de covarianza de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial.

Para describir el PMR, se inicia utilizando convertidores no lineales polinomiales de tercer orden. Las muestras en la entrada se indican en la Tabla 5.3.

	Valor de la muestra $\xi(T_1)$	Valor de la muestra $\xi(T_2)$
A)	0	0.9
B)	0	1.4
C)	0	1.8
D)	0	2

**Tabla 5.3** Valores de muestreo de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial de tercer orden en la región de interpolación.

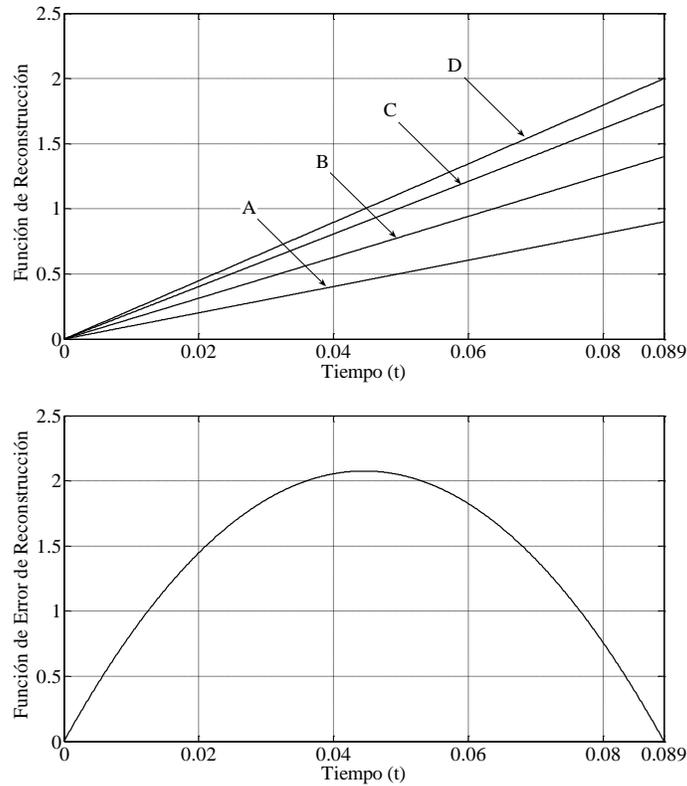
El análisis empieza con el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$ . Por lo tanto el rango de separación es de  $\Delta T = 0.089$ . Para el *algoritmo óptimo*, la función de reconstrucción (5.30) y la de error de reconstrucción (5.32) se muestran en la Figura 5.22. Las curvas de reconstrucción tienen un comportamiento no lineal. La curvatura es más evidente al aumentar la muestra. La magnitud del error depende de la muestra también. Esto se demuestra en la inclinación de la curva de error hacia el lado derecho, como efecto de muestras más grandes en ese extremo.



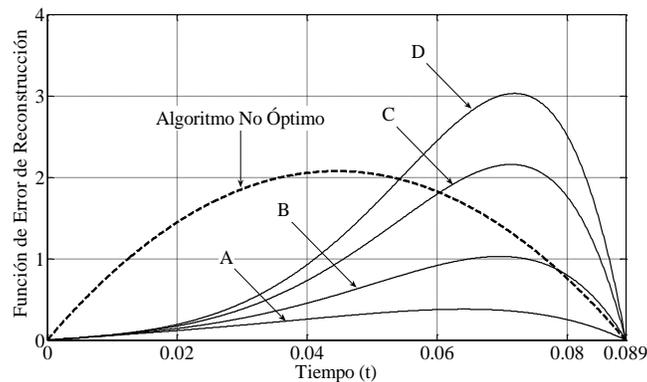
**Figura 5.22** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.089$ . Algoritmo óptimo.

En el *algoritmo no óptimo*, la Figura 5.23 exhibe la función de reconstrucción (5.34) y la función de error de reconstrucción (5.35). Debido a su linealidad, las gráficas de reconstrucción no óptimas son similares, la diferencia es el intervalo de separación  $\Delta T$ . Siguiendo la lógica, solo hay una curva de error, la cual es simétrica y tiene forma de campana Gaussiana.

La Figura 5.24 expresa la comparación de los algoritmos de la función de error de reconstrucción. Es notable que en el algoritmo óptimo teniendo muestras con un valor de 0 en un extremo y menor a 1.8 aproximadamente en el otro, se obtiene un error inferior que en el algoritmo no óptimo para el ejemplo mostrado, debido a la mayor probabilidad de ocurrencia de las muestras utilizadas. Aunque existe una diferencia muy significativa en el comportamiento de las curvas entre los algoritmos. Por lo que es importante emplear la metodología que considere la mayor información sobre el proceso aleatorio a reconstruir, en este caso es el algoritmo óptimo.



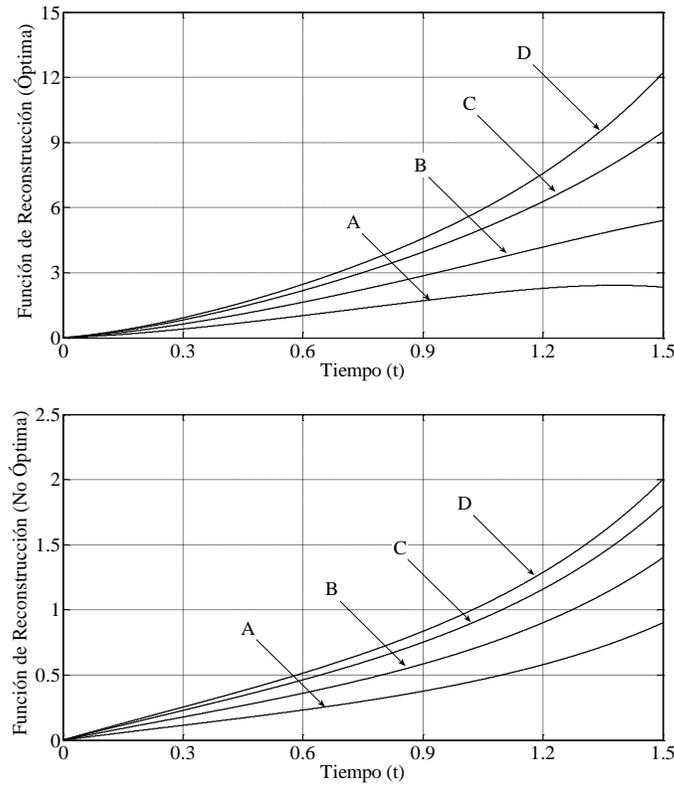
**Figura 5.23** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.089$ . Algoritmo no óptimo.



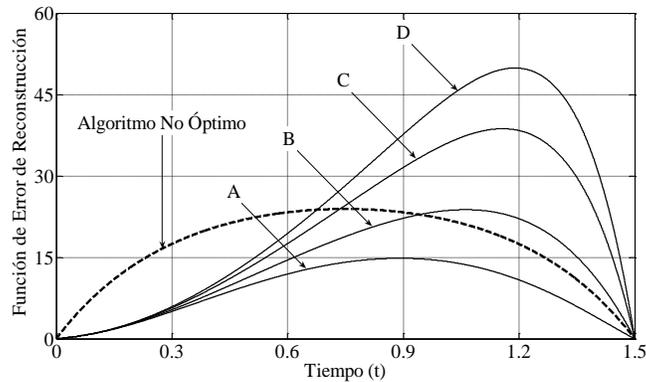
**Figura 5.24** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.089$ .

Adicionalmente, para el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$  se amplía la separación a  $\Delta T = 1.5$ . Las funciones de reconstrucción de ambos algoritmos se presentan en la Figura 5.25. En la gráfica óptima, la curva A tiene un comportamiento diferente al final, expresado por un cambio en la dirección de la curva. Ampliando más la

separación se observaría mejor este cambio, además de que sucedería en todas las curvas. La reconstrucción no óptima continúa siendo lineal. En la Figura 5.26 se expone la comparación entre los algoritmos de error. En ese ejemplo, el error en el caso óptimo es menor que en el caso no óptimo solo para muestras menores a 1.4 en un lado y 0 en el otro.



**Figura 5.25** Comparación de los algoritmos en la función de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 1.5$ .



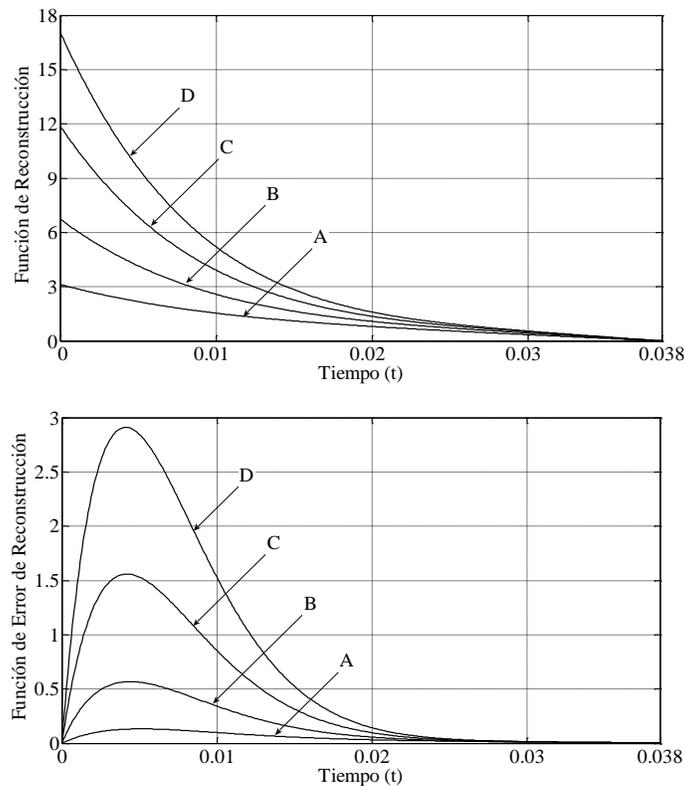
**Figura 5.26** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 1.5$ .

También se consideran funciones polinomiales de quinto orden, aumentando el valor de las muestras de acuerdo a la Tabla 5.4, debido al mayor orden del polinomio.

	Valor de la muestra $\xi(T_1)$	Valor de la muestra $\xi(T_2)$
A)	1.6	0
B)	2	0
C)	2.3	0
D)	2.5	0

**Tabla 5.4** Valores de muestreo de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial de quinto orden en la región de interpolación.

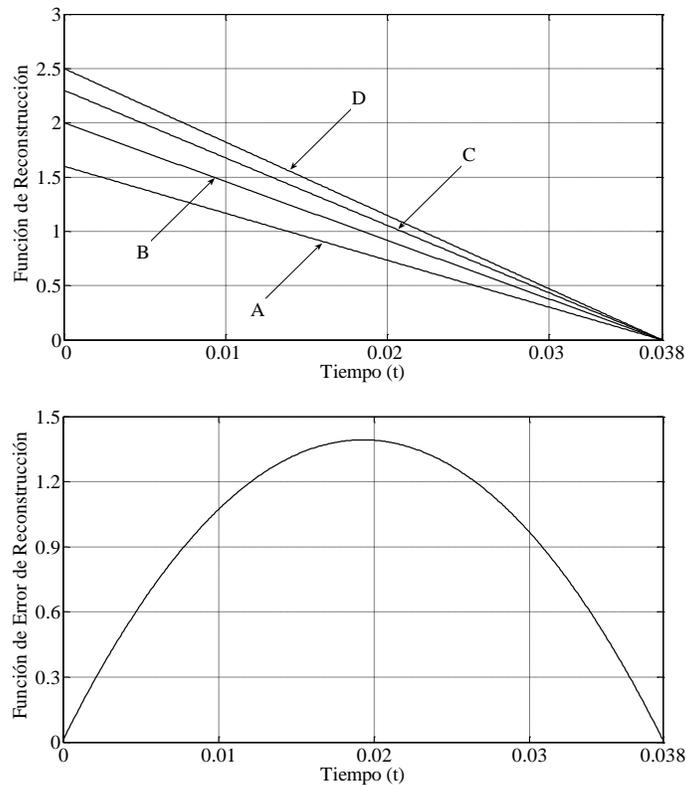
Tomando inicialmente el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$ . Si se tiene que  $\Delta T = 0.038$ , en el *algoritmo óptimo* la función de reconstrucción (5.36) y la de error de reconstrucción (5.38) se ven en la Figura 5.27.



**Figura 5.27** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.038$ . Algoritmo óptimo.

Las curvas de reconstrucción no tienden a cero antes del instante de muestreo, esto como efecto de la complejidad del polinomio. Como existe una gran inclinación en la curvas de error, pareciera que este solo existe en la primera mitad del tiempo.

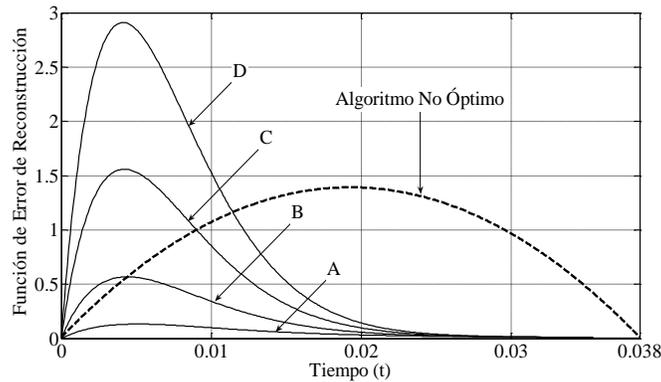
Usando el *algoritmo no óptimo*, en la Figura 5.28 se manifiestan la función de reconstrucción (5.40) y la función de error de reconstrucción (5.41). Aunque los valores de las muestras y el orden del polinomio aumentaron, la forma de la gráfica de error es la misma que en las funciones polinomiales de tercer orden. Las curvas de reconstrucción solo invirtieron su dirección. La Figura 5.29 exhibe la comparación de los algoritmos de error.



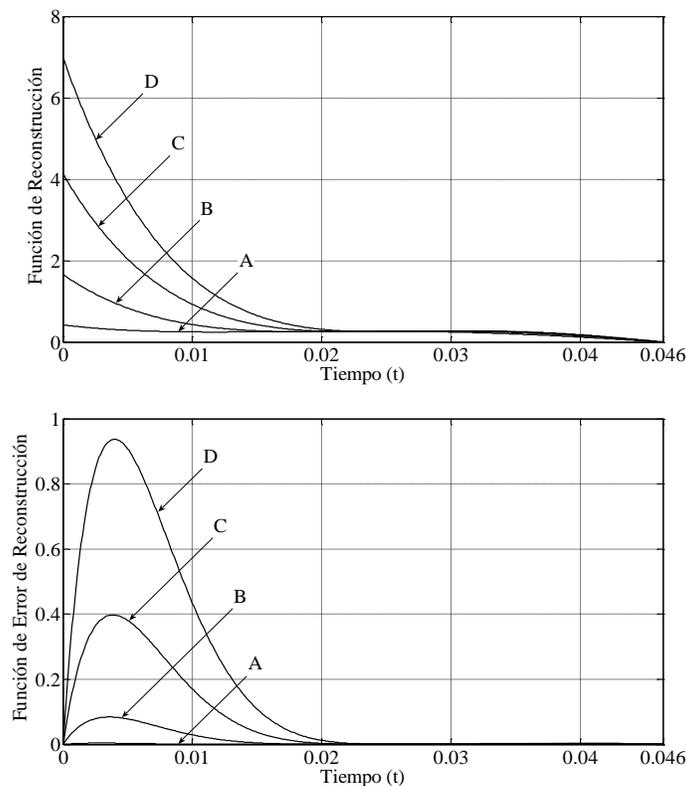
**Figura 5.28** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.038$ . Algoritmo no óptimo.

Finalmente se utiliza la *función característica*  $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$  con  $\Delta T = 0.046$ . Con el *algoritmo óptimo*, la función de reconstrucción (5.42) y la de error de reconstrucción (5.44) se proyectan en la Figura 5.30. Las curvas de reconstrucción tienen un comportamiento diferente a las anteriores debido a que existe un instante de estabilidad antes de tender a cero. Esto como consecuencia del intercambio de

signos entre los términos del polinomio. La función presenta el menor de los errores de las tres funciones polinomiales de quinto orden. Incluso, la curva A tiene un error de prácticamente cero. La inclinación de las curvas es muy marcada al lado izquierdo, casi está en los límites de la gráfica. Todas las curvas convergen en un menor tiempo a cero.

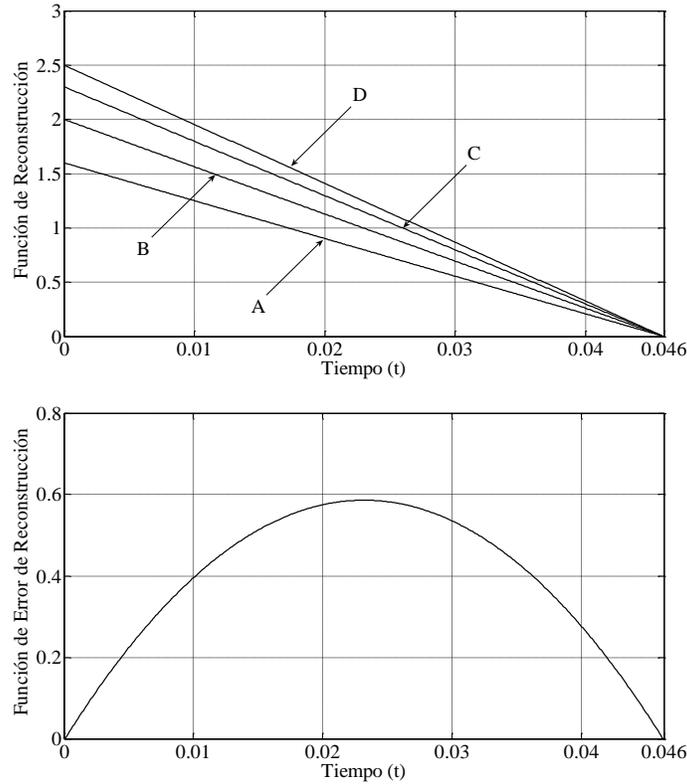


**Figura 5.29** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.038$ .

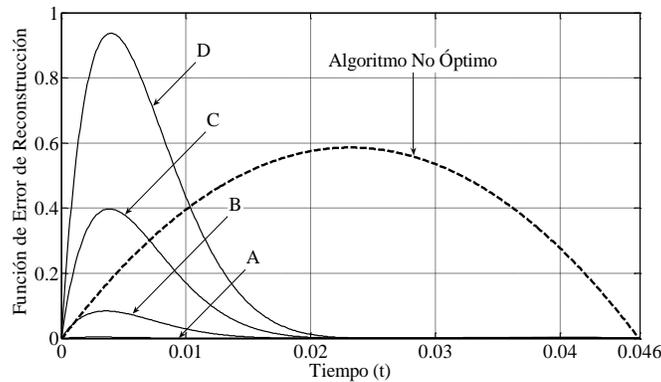


**Figura 5.30** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.046$ . Algoritmo óptimo.

Mediante el *algoritmo no óptimo*, la figura 5.31 ilustra la función de reconstrucción (5.46), y la de error de reconstrucción (5.47). En la gráfica de reconstrucción solo cambia la ubicación de la muestra dos. La estructura de ambas funciones es similar a las tenidas con la función polinomial anterior. Se comparan los dos algoritmos de error en la Figura 5.32.



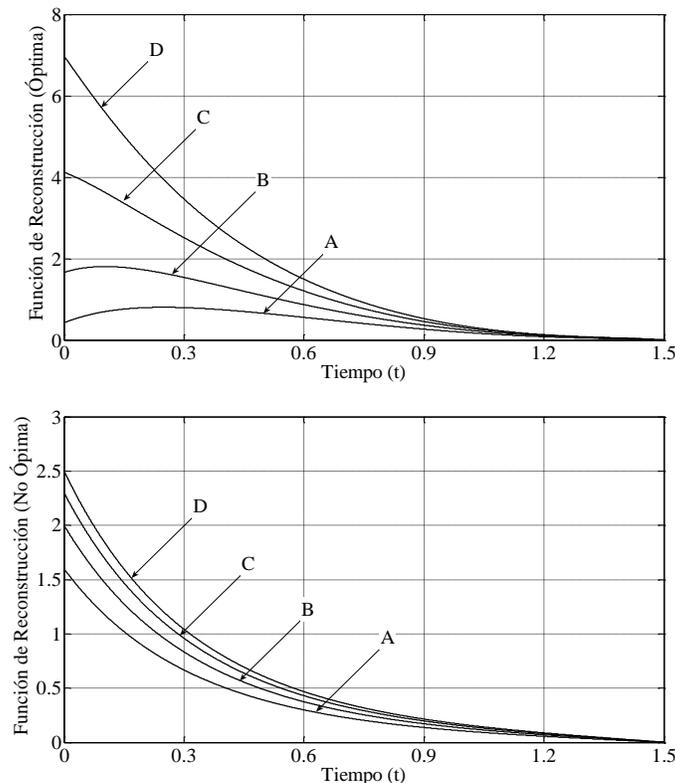
**Figura 5.31** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.046$ . Algoritmo no óptimo.



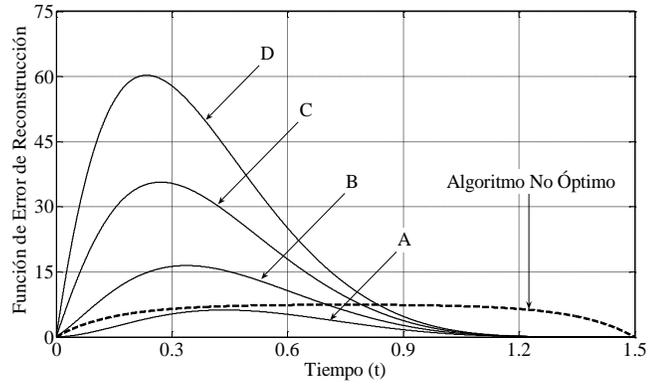
**Figura 5.32** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.046$ .

Viendo las Figuras 5.29 y 5.32, se puede decir que el rango en el cual el error del algoritmo óptimo es menor que en el algoritmo no óptimo aumenta, ya que ahora son todas las muestras menores que 2.3 aproximadamente, teniendo en el extremo opuesto una muestra con valor a 0. Aunque el valor puede variar dependiendo de la composición de la función no lineal y del tiempo de influencia entre muestras.

Ampliando la separación entre las muestras de esta última *función de transferencia*  $\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$  a  $\Delta T = 1.5$ , la comparación de los algoritmos respecto a su función de reconstrucción se muestra en la Figura 5.33. Se obtienen resultados muy parecidos a los de la función polinomial de tercer orden. Es decir, cambios en la estructura de las curvas de reconstrucción. Esto se presenta en las curvas A y B del algoritmo óptimo, ya que tienen variaciones de dirección muy notorias al final del tiempo. Las curvas no óptimas son semejantes entre sí, y tienen una curvatura de tipo exponencial sin cambio de dirección al final de la gráfica. La comparación entre los algoritmos de error de reconstrucción se expresa en la Figura 5.34. Al ampliar el intervalo de separación se redujo el rango de valores de muestras en el cual el error del algoritmo óptimo es menor.



**Figura 5.33** Comparación de los algoritmos en la función de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 1.5$ .



**Figura 5.34** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos Markovianos en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 1.5$ .

### 5.7.2 ALGORITMOS ÓPTIMOS Y NO ÓPTIMOS DE PROCESOS NO MARKOVIANOS

Para analizar los algoritmos de reconstrucción obtenidos teniendo en la entrada un proceso *Gaussiano no Markoviano*, se utiliza solo una función de transferencia por cada grupo de funciones polinomiales de tercer o quinto orden. Se considera un tamaño de la muestra de  $N = 3$ .

Se usan procesos *Gaussianos no Markovianos con filtros RC de dos etapas* en la entrada. Por lo que sustituyendo (2.29) en (5.13) se obtienen los tiempos de covarianza para estos procesos y se indican en la Tabla 5.5, sabiendo que  $\alpha = 2$ .

Función Característica	Tiempo de Covarianza
$\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$	0.7926
$\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$	0.8833
$\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$	0.509
$\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$	0.4991
$\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$	0.64

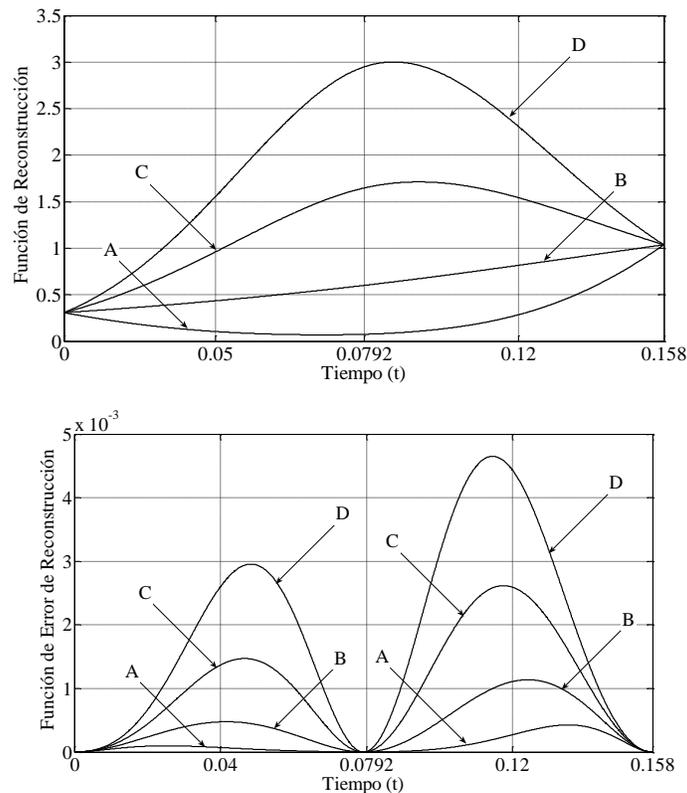
**Tabla 5.5** Tiempo de covarianza de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial.

Los valores de las muestras de entrada se señalan en la Tabla 5.6, y se utilizaran solo con funciones polinomiales de tercer orden teniendo procesos no Markovianos.

	Valor de la muestra $\xi(T_1)$	Valor de la muestra $\xi(T_2)$	Valor de la muestra $\xi(T_3)$
A)	0.8	0.5	1.2
B)	0.8	1	1.2
C)	0.8	1.4	1.2
D)	0.8	1.7	1.2

**Tabla 5.6** Valores de muestreo de procesos no Markovianos en la salida del convertidor polinomial de tercer orden en la región de interpolación.

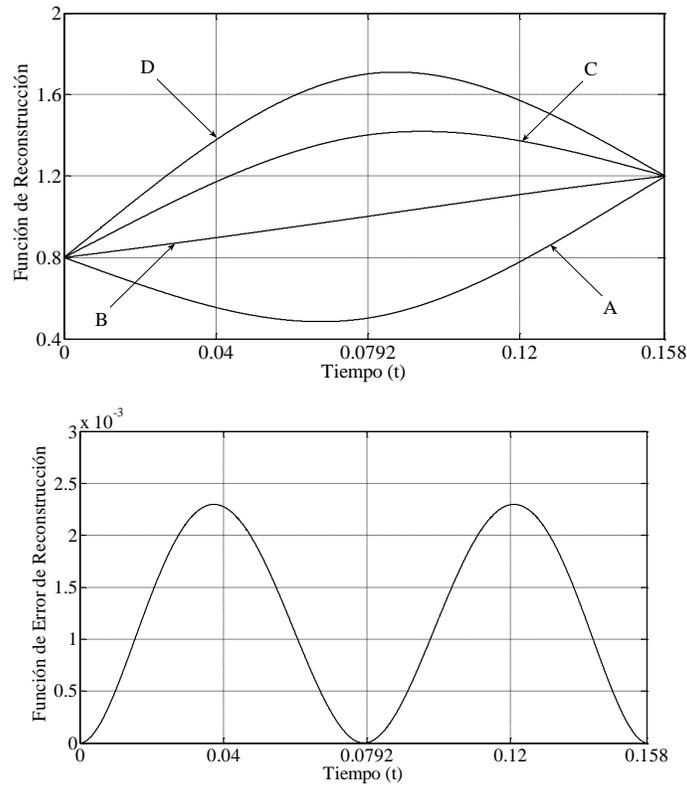
Usando el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$ , en el *algoritmo óptimo* la función de reconstrucción (5.48) y la de error de reconstrucción (5.50) se ven en la Figura 5.35.



**Figura 5.35** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.0792$ . Algoritmo óptimo.

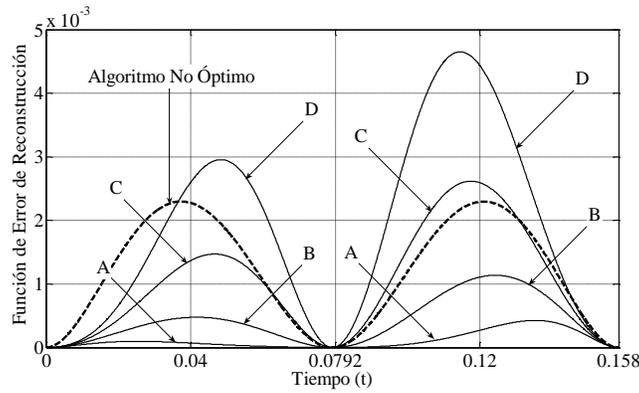
Las curvas de error presentan diversas magnitudes de acuerdo al extremo en el que se encuentra la muestra con el valor más grande. Las curvas de reconstrucción tienen un mayor comportamiento exponencial al elevar el valor de la muestra dos.

Considerando el *algoritmo no óptimo*, en la Figura 5.36 se expone la función de reconstrucción (5.52) junto con la función de error de reconstrucción (5.53). Como no se toma en cuenta el valor de la muestra, el error es el mismo en los dos intervalos de tiempo. La función de reconstrucción es similar en todas las funciones polinomiales teniendo procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas, solo varía la ubicación de las muestras. La estructura de esta función varía a la obtenida con el caso óptimo.



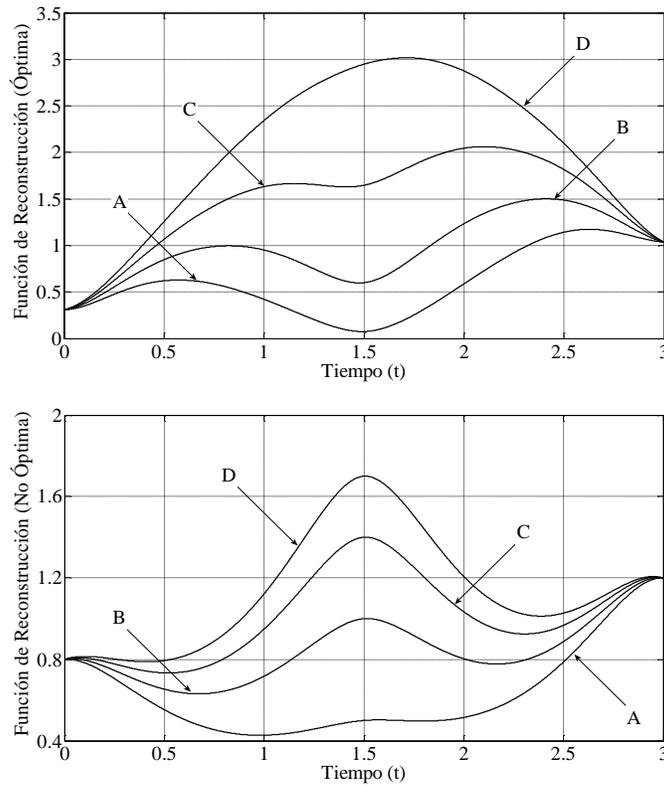
**Figura 5.36** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.0792$ . Algoritmo no óptimo.

La Figura 5.37 manifiesta la comparación entre los algoritmos de error de construcción. En ella es muy claro el significado del algoritmo óptimo, ya que el error depende del tamaño de las muestras, por lo que no es el mismo en los dos intervalos de tiempo.



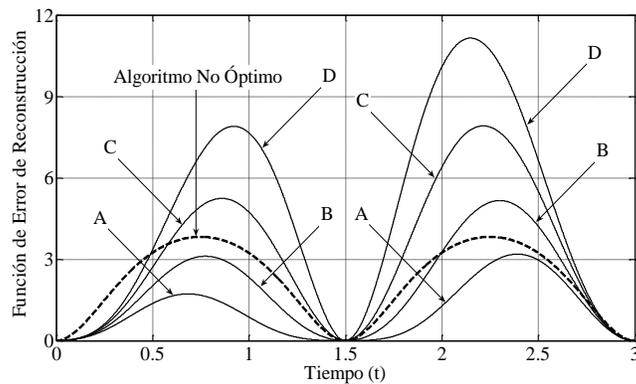
**Figura 5.37** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción para procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.0792$ .

Agrandando la separación entre muestras a  $\Delta T = 1.5$  para el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$ , las funciones de reconstrucción de ambos algoritmos están en la Figura 5.38. La comparación de los algoritmos de error se proyecta en la Figura 5.39.



**Figura 5.38** Comparación de los algoritmos en la función de reconstrucción para procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 1.5$ .

Las curvas de reconstrucción óptimas no están definidas completamente ya que existe cierta flexión en ellas, lo que podría hacer pensar que la ubicación de la segunda muestra no es  $T_2 = 1.5$ . Lo mismo pasa con las curvas de reconstrucción no óptimas, las cuales por otra parte tienen una curvatura inversa. Confrontando las figuras 5.37 y 5.39, se nota que en ésta última gráfica las curvas de error del caso óptimo se vieron más afectadas. Esto se refleja en la curva de error no óptima, ya que en el extremo derecho solo es mayor que la curva A óptima. Mientras que en la Figura 5.37 en el mismo extremo era mayor que las curvas A, B y casi iguala a la C. Para ambas funciones y algoritmos, las curvas son más suaves que en los procesos Markovianos.



**Figura 5.39** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción para procesos no Markovianos con filtros RC de dos etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 1.5$ .

Prolongando la investigación a los *procesos Gaussianos no Markovianos con filtros RC de tres etapas*, el tiempo de covarianza  $\tau_c$  lo obtenemos sustituyendo (2.34) en (5.13). Ellos se denotan para todas las funciones polinomiales en la Tabla 5.7, con  $\alpha = 8/3$ .

Función Característica	Tiempo de Covarianza
$\eta(t) = 0.6\xi^3(t)$	0.6704
$\eta(t) = 1.1\xi^3(t) + 1.7\xi(t)$	0.8145
$\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$	0.216
$\eta(t) = 0.15\xi^5(t) + 0.97\xi(t)$	0.2627
$\eta(t) = 0.13\xi^5(t) - 0.46\xi^3(t) + 0.59\xi(t)$	0.2624

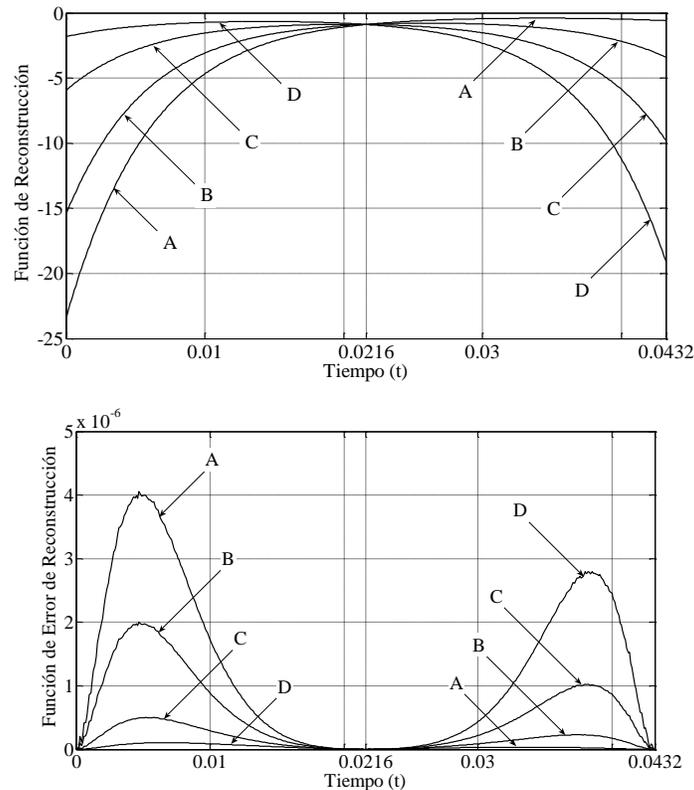
**Tabla 5.7** Tiempo de covarianza de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor polinomial.

También se modifican las muestras como se indica en la Tabla 5.8. Los valores se aplican solo a no linealidades polinomiales de quinto orden teniendo procesos no Markovianos.

	Valor de la muestra $\xi(T_1)$	Valor de la muestra $\xi(T_2)$	Valor de la muestra $\xi(T_3)$
A)	2.5	1.3	1.2
B)	2.3	1.3	1.7
C)	1.9	1.3	2.1
D)	1.5	1.3	2.4

**Tabla 5.8** Valores de muestreo de procesos no Markovianos en la salida del convertidor polinomial de quinto orden en la región de interpolación.

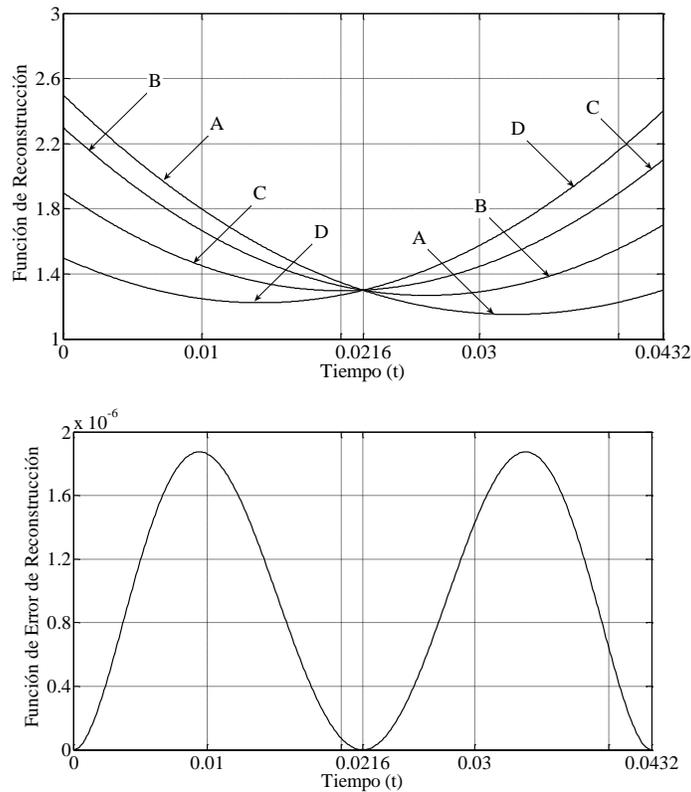
Usando el *convertidor no lineal*  $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$ , en el *algoritmo óptimo* las funciones de reconstrucción (5.54) y de error de reconstrucción (5.56) están en la Figura 5.40.



**Figura 5.40** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros *RC* de tres etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.0216$ . Algoritmo óptimo.

En dichas funciones es de vital importancia el valor de las muestras, ya que de ella depende la curvatura de reconstrucción y la magnitud del error. Ésta puede cambiar de un valor alto a uno bajo en instantes de muestreo consecutivos. Por lo que se deben de escoger las que tengan la mayor probabilidad de que ocurran, para así tener un menor error. Además de que las curvas de reconstrucción son negativas. Lo que expresa su no linealidad respecto a las mismas muestras.

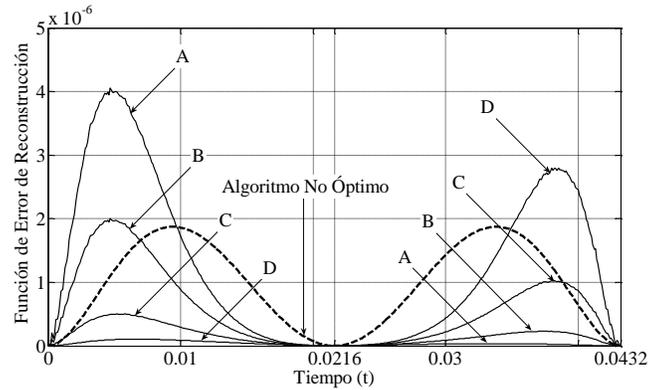
Mediante el *algoritmo no óptimo*, en la Figura 5.41 se observa la función de reconstrucción (5.58) y la función de error de reconstrucción (5.59). Las gráficas son muy diferentes debido a la metodología con características lineales que emplea el algoritmo. En la Figura 5.42 se muestra la comparación entre los algoritmos de error.



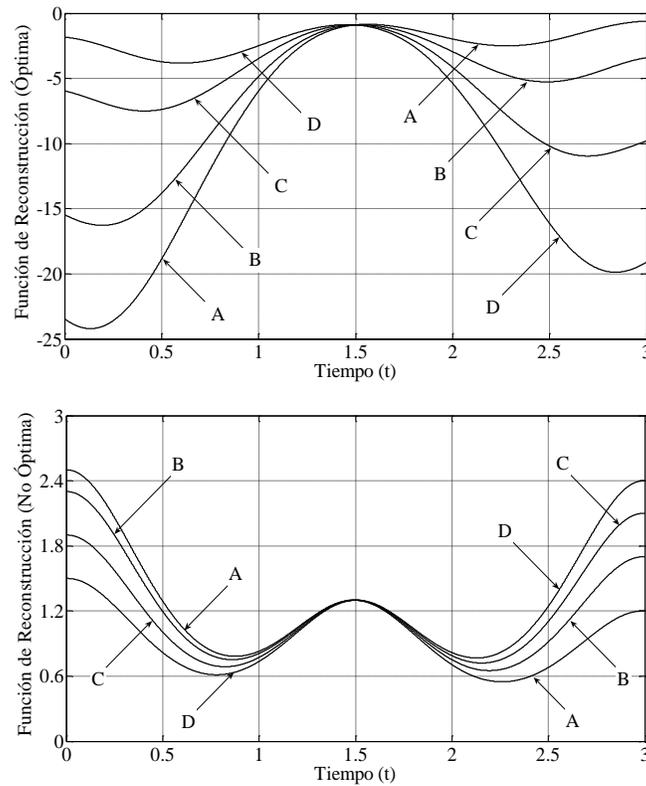
**Figura 5.41** Funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.0216$ . Algoritmo no óptimo.

Al extender la separación entre las muestras a  $\Delta T = 1.5$ , la comparación de la función de reconstrucción para ambos algoritmos está en la Figura 5.43. En ellas podría

haber cierta confusión en la ubicación y en el número de las muestras a causa de los diversos cambios de dirección de las curvas. La comparación de los algoritmos de la función de error de reconstrucción se expresa en la Figura 5.44.

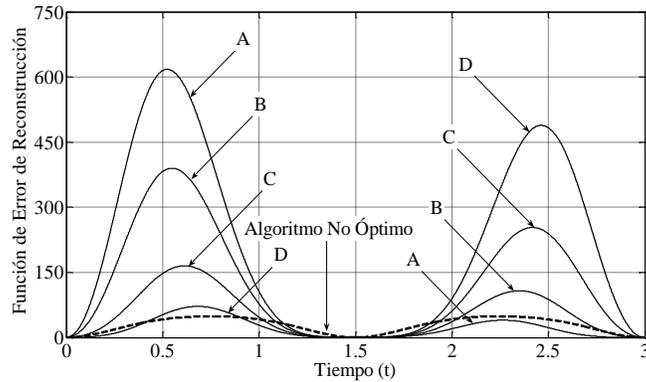


**Figura 5.42** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción para procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 0.0216$ .



**Figura 5.43** Comparación de los algoritmos en la función de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 1.5$ .

En las figuras 5.42 y 5.44 es interesante ver que no hubo proporción en el incremento de los valores de error. Ya que los niveles del caso óptimo sufrieron mayor aumento. Aunque esto se podría compensar en las curvas de reconstrucción óptimas que sufren menos deformaciones en su comportamiento, además de orientarlo más a una reconstrucción real.



**Figura 5.44** Comparación de los algoritmos en la función de error de reconstrucción de procesos no Markovianos con filtros RC de tres etapas en la salida del convertidor polinomial  $\eta(t) = -0.24\xi^5(t)$  en la región de interpolación con  $\Delta T = 1.5$ .

## 5.8 RESUMEN

En este capítulo se investigaron dos algoritmos de reconstrucción de procesos no Gaussianos. En la entrada se tienen tanto procesos Gaussianos Markovianos como Gaussianos no Markovianos. La salida se compone de un convertidor polinomial de tercer o quinto orden. Se obtuvieron las dos principales características que son la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción. Comparando ambos algoritmos se puede decir que existen ciertos rangos de valores de muestras para los cuales el error del algoritmo óptimo es menor al obtenido con el algoritmo no óptimo. Esto debido a que el primer algoritmo toma en cuenta el valor de las muestras, la función de transferencia, funciones de momentos y de cumulantes, y demás características estadísticas del proceso aleatorio, lo que se considera correcto. De lo contrario se obtendrían resultados no lógicos producidos por una metodología general, algo que en la actualidad no existe para los sistemas no lineales.

En la región de extrapolación la composición de las gráficas de reconstrucción y de error de reconstrucción era la muy similar, la diferencia radica en que en los procesos no Markovianos las curvas son más suaves, principalmente con filtros *RC* de tres etapas. Lo mismo ocurre en la región de interpolación. Donde también se amplió el margen de separación entre muestras, obteniendo errores muy grandes, por lo que no resulta factible hacerlo. Asimismo, en extrapolación la curva del error promedio del caso óptimo es ligeramente menor a la curva de error de caso no óptimo, lo que deja lugar a un gran conjunto de valores de muestras para utilizar y tener un menor error. Aproximadamente muestras inferiores a uno para polinomios de tercer orden, y menores a 1.2 para polinomios de quinto orden. En interpolación ese valor varía dependiendo del número de muestras, así como sus valores y ubicación.

# Capítulo 6

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo se discute la formulación y aplicación de dos algoritmos para la descripción del Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción. El primero de ellos es el algoritmo óptimo, basado en la regla de la esperanza matemática condicional. El segundo es el algoritmo no óptimo, sustentado en el teorema de Balakrishnan. Se compararon ambos algoritmos con la finalidad de especificar y definir de manera apropiada cuál de ellos es mejor aplicándolo a la reconstrucción de procesos estocásticos. Para lograr esta meta se realizó la descripción del PMR a procesos Gaussianos y principalmente a procesos no Gaussianos, los cuales se obtienen en la salida de sistemas no lineales no inerciales.

El teorema más común para describir procesos estocásticos fue formulado por A. Balakrishnan. Está caracterizado por el espectro de potencia solamente, el cual está conectado con la función de covarianza. Pero el teorema es muy cuestionable ya que en algunos casos se puede tener el mismo espectro de potencia y no la misma función de densidad de probabilidad, que es la principal propiedad de un proceso aleatorio.

La metodología propuesta es un método matemático simple y directo, el cual permite un estudio sobre un número mayor de escenarios de reconstrucción de procesos aleatorios. La metodología está basada en la regla de la esperanza matemática condicional y en los principios de estadística. De manera general, con esta aproximación es posible investigar algunos nuevos aspectos sobre el problema de análisis de reconstrucción, como pueden ser: diferentes modelos que caractericen a los procesos Gaussianos y no Gaussianos, un número arbitrario y limitado de muestras, la distribución uniforme o no uniforme de muestras, diferentes funciones de covarianza, espectros limitados o no limitados en banda, la función de reconstrucción en todo el dominio del tiempo, entre muchos otros aspectos. La principal ventaja que provee es el cálculo de las curvas exactas de la función que describe el mínimo error de reconstrucción como función del tiempo. El estudio demuestra como la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción dependen de características importantes como: la función de densidad de probabilidad, el número de muestras, los intervalos de muestreo, etc.

En la reconstrucción de los procesos Gaussianos, se consideran únicamente las funciones de momentos iniciales y centrales de segundo orden, ellas son la esperanza matemática y la varianza. Todos los demás momentos de orden alto son iguales a cero. En variables aleatorias multidimensionales se agrega un tercer valor que es el momento de covarianza. Balakrishnan determina la reconstrucción por medio de la frecuencia de corte y la función básica  $\sin x/x$ . Pero con los resultados obtenidos se puede decir que esta función es solo un caso particular de la regla de la esperanza matemática condicional. Además de que no es suficiente utilizar solo estos valores para realizar la reconstrucción.

Con base en esto se realizó el Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción a algunos procesos aleatorios no Gaussianos, específicamente a procesos de Rayleigh, y a procesos logrados en la salida de convertidores exponenciales y polinomiales. Tanto para la regla de la esperanza matemática condicional (algoritmo óptimo) como para el teorema de Balakrishnan (algoritmo no óptimo), se obtuvieron las expresiones analíticas de la función de reconstrucción y de la función de error de reconstrucción.

En el caso óptimo se consiguieron a partir de:

- Función de densidad de probabilidad para procesos de Rayleigh.
- Función de transferencia para convertidores de tipo exponencial.
- Relaciones entre las funciones de momentos y funciones de cumulantes para convertidores de tipo polinomial.

Se notó que la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción dependen del valor de la media condicional y de la varianza condicional del proceso de entrada, así como de la función de transferencia de la función no línea no inercial. Los valores mencionados en la entrada se derivan de la media, la varianza y la función de covarianza no condicionales del proceso de entrada, y del tamaño  $N$  del conjunto de muestras. El comportamiento de las funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción está sujeto claramente al valor de las muestras. La primera de ellas es una función no lineal de sus muestras normalmente.

Para el caso no óptimo, la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción se obtienen simplemente mediante la función de covarianza a la salida del proceso. La reconstrucción depende del valor de la muestra, aunque la realiza como si se tratase de un proceso Gaussiano, es decir, es una función lineal de las muestras. El error de la reconstrucción no considera el valor de la muestra, por lo que será el mismo sin importar si se tiene un valor grande o pequeño.

Se compararon estos algoritmos en la región de extrapolación teniendo funciones polinomiales, exponenciales y de Rayleigh. Se notó que existe un conjunto de valores de las muestras, en el cual el error del caso óptimo es menor al obtenido en el caso no óptimo. Esto como consecuencia de que el primero toma en cuenta las propiedades estadísticas del proceso estocástico. Además de que dichas muestras son las que tienen la mayor probabilidad de ocurrencia, por lo que serán las más utilizadas en una reconstrucción. Lo mismo sucede en la región de interpolación, aunque ahí el rango puede variar debido a que se consideran dos o más muestras, y a que el intervalo de separación entre ellas cambia. Adicionalmente, las curvas de error óptimas tienen una inclinación hacia el extremo de la muestra mayor. Cosa contraria sucede en la curva no óptima, la cual tiene forma simétrica, similar a una campana Gaussiana. Lo que resulta extraño e incongruente siendo que se trabaja con procesos no Gaussianos. Asimismo en el algoritmo óptimo, la función de covarianza de cada proceso no Gaussiano no presenta efectos notorios en las funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción. Lo que más influencia produce es el valor de las muestras y la función no lineal. También, al aumentar el rango de separación entre muestras, la magnitud del error se incrementa notablemente, presentando torceduras en las curvas de reconstrucción, por lo que no es factible tener una separación muy grande. La distancia debe de ser menor al tiempo de covarianza.

El comportamiento de las funciones de reconstrucción y de error de reconstrucción teniendo procesos no Markovianos en la entrada, depende de los valores pasados que toman las muestras, es decir tienen memoria. Teniendo procesos Markovianos en la entrada esto no sucede. Por lo que la influencia es de solo las dos muestras vecinas en los procesos Markovianos. Mientras que en los procesos no Markovianos más de dos muestras podrán ejercer su influencia hacia las demás muestras dependiendo de qué tan cerca esté una de la otra.

Con este trabajo se ha demostrado que la aplicación de la regla de la esperanza matemática condicional es más amplia y adecuada, ya que considerando las propiedades estadísticas puede ser aplicada a procesos Gaussianos y no Gaussianos, arrojando resultados correctos acorde a sus características. Esto no significa que el teorema de Balakrishnan sea incorrecto, simplemente se debe de especificar para qué tipo de procesos arroja resultados verdaderamente correctos, y mediante las pruebas aquí realizadas se concluye que es exclusivo de los procesos Gaussianos.

De manera general, los resultados de esta investigación se presentan en [58-60].

Físicamente, la finalidad de los métodos de reconstrucción aquí presentados es recuperar de la manera más eficiente la señal de origen. Por ejemplo, si se quiere comprimir un archivo o señal de cualquier tipo, el Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción tiene la tarea de perder la menor cantidad posible de información en dicho procesamiento. Esto se puede aplicar principalmente en señales de audio y video, en la comunicación móvil con multitrayectoria, en el reconocimiento de la voz, en la meteorología, en sismología y hasta en radares con la más alta tecnología, entre muchas otras.

## 6.1 Trabajos a futuro

- Realizar el promedio de la función de error de reconstrucción en la región de interpolación para los procesos No Gaussianos, principalmente para los obtenidos con procesos de Rayleigh y convertidores no lineales de tipo exponencial y polinomial.
- Investigar y comparar los algoritmos de reconstrucción teniendo *Spline*, que en el campo matemático del análisis numérico, es una curva definida en porciones mediante polinomios.
- Estudiar el Procedimiento de Muestreo – Reconstrucción con otros tipos de funciones ortogonales (funciones atómicas).

# Apéndice A

## PROGRAMAS DE CÓMPUTO

### %%Proceso Gaussiano

```
fprintf('PROGRAMA PARA CALCULAR LA FUNCIÓN
DE RECONSTRUCCIÓN Y LA FUNCIÓN DE ERROR
DE RECONSTRUCCIÓN \nDE UN PROCESO
GAUSSIANO')
fprintf('\n\nCONTESTE LO SIGUIENTE:')
```

```
N=input('\n\n Número de muestras: ');
```

```
delta=input('\n\n Rango de separación entre muestras:');
```

```
for i=1:N
    fprintf('\n\n Valor de la muestra %d:', i)
    x(i)=input(' ');
end
```

```
for i=1:N
    T(i)=(delta.*i)-delta;
end
```

```
t=-4:0.01:(delta.*(N+3));
[m,n]=size(t); % Magnitud de t
```

```
%FILTRO RC DE UNA ETAPA
```

```
alfa=1; % Alfa
```

```
%Matriz de covarianza a la entrada
```

```
for i=1:N
    for j=1:N
        mce(i,j)=exp(-alfa.*abs(T(i)-T(j)));
    end
end
```

```
%Matriz inversa
```

```
mi=inv(mce);
```

```
%Función básica
```

```
for j=1:N
    fun=0;
    for i=1:N
        fun=fun+exp(-alfa.*abs(t-T(i))).*mi(i,j);
    end
    for i=1:n
        funbas(j,i)=fun(i);
    end
end
```

```
%Primer momento condicional a la entrada (Individual)
```

```
for j=1:N
    unoentind=0;
    for i=1:N
        entind=exp(-alfa.*abs(t-T(i))).*mi(i,j).*x(j);
        unoentind=unoentind+entind;
```

```
end
    for i=1:n
        uei(j,i)=unoentind(i);
    end
end
%Primer momento condicional a la entrada (Función de
reconstrucción)
unoent=0;
for i=1:N
    for j=1:N
        ent=exp(-alfa.*abs(t-T(i))).*mi(i,j).*x(j);
        unoent=unoent+ent;
    end
end
% Varianza condicional a la entrada (Función de error de
reconstrucción)
error=0;
for i=1:N
    for j=1:N
        error=error+exp(-alfa.*abs(t-T(i))).*mi(i,j).*exp(-
alfa.*abs(T(j)-t));
        varent=1-error;
    end
end
```

### %% Convertidor Polinomial

```
fprintf('PROGRAMA PARA CALCULAR LA FUNCIÓN
DE RECONSTRUCCIÓN Y LA FUNCIÓN DE ERROR
DE RECONSTRUCCIÓN \nDEL PROCESO A LA
SALIDA DE UN CONVERTIDOR POLINOMIAL')
fprintf('\n\nCONTESTE LO SIGUIENTE:')
```

```
algoritmo=input('\n\nTIPO DE ALGORITMO: \n 1.
ÓPTIMO \n 2. NO ÓPTIMO')
```

```
conv=input('\n\n TIPO DE CONVERTIDOR
POLINOMIAL: \n 1. CONVERTIDOR DE TERCER
GRADO 0.6*X^3(t) \n 2. CONVERTIDOR DE TERCER
GRADO 1.1X^3(t)+1.5*X(t) \n 3. CONVERTIDOR DE
QUINTO GRADO -0.24*X^5(t) \n 4. CONVERTIDOR DE
QUINTO GRADO 0.15*X^5(t)+0.97*X(t) \n 5.
CONVERTIDOR DE QUINTO GRADO 0.13*X^5(t)-
0.46*X^3(t)+0.59*X(t)')
```

```
region=input('\n\nTIPO DE REGIÓN:\n 1. REGIÓN DE
INTERPOLACIÓN \n 2. REGIÓN DE
EXTRAPOLACIÓN')
```

```

%REGIÓN DE INTERPOLACIÓN
if region==1
    N=input('\n\n Número de muestras: ');
    delta=input('\n\n Rango de separación entre muestras:');
    for i=1:N
        fprintf('\n\n Valor de la muestra %d:', i)
        x(i)=input(' ');
    end
    for i=1:N
        T(i)=(delta.*i)-delta;
    end
    t=0:0.0001:(delta.*(N-.8));
end

%REGIÓN DE EXTRAPOLACIÓN
if region==2
    N=1;
    for i=1:N
        fprintf('\n\n Valor de la muestra %d:', i)
        x(i)=input(' ');
        T(i)=0;
    end
    t=0:0.0001:10;
end

%ALGORITMO ÓPTIMO
if algoritmo==1
    alfa=1; %Alfa
    %Matriz de covarianza a la entrada
    for i=1:N
        for j=1:N
            mce(i,j)=exp(-alfa.*abs(T(i)-T(j)));
        end
    end
    mi=inv(mce); %Matriz inversa
    unoent=0;
    error=0;
    for i=1:N
        for j=1:N
            %Primer momento condicional a la entrada
            ent=exp(-alfa.*abs(t-T(i))).*mi(i,j).*x(j);
            unoent=unoent+ent;
            %Varianza condicional a la entrada
            error=error+exp(-alfa.*abs(t-T(i))).*mi(i,j).*exp(-
            alfa.*abs(T(j)-t));
            varent=1-error;
        end
    end

    % CONVERTIDOR DE TERCER GRADO 0.6*X^3(t)
    if conv==1
        %Primer momento condicional a la salida (Función de
        reconstrucción)
        unosal=(1.8.*varent.*unoent)+(0.6.*unoent.^3);
        %Segundo momento condicional a la salida
        dossal=(5.4.*varent.^3)+(16.2.*varent.^2.*unoent.^2)+(
        5.4.*varent.*unoent.^4)+(0.36.*unoent.^6);
        %Varianza condicional a la salida (Función de error de
        reconstrucción)
        varsal=dossal-(unosal.^2);
    end

    % CONVERTIDOR DE TERCER GRADO
    1.1X^3(t)+1.5*X(t)
    if conv==2

```

```

        %Primer momento condicional a la salida (Función de
        reconstrucción)
        unosal=(3.3.*varent.*unoent)+(1.1.*unoent.^3)+(1.7.*u
        noent);
        %Segundo momento condicional a la salida
        dossal=(18.15.*varent.^3)+(54.45.*varent.^2.*unoent.^
        2)+(18.15.*varent.*unoent.^4)+(1.21.*unoent.^6)+(11.22.*
        varent.^2)+(22.44.*varent.*unoent.^2)+(3.74.*unoent.^4)+(
        2.89.*varent)+(2.89.*unoent.^2);
        %Varianza condicional a la salida (Función de error de
        reconstrucción)
        varsal=dossal-(unosal.^2);
    end

    % CONVERTIDOR DE QUINTO GRADO -0.24*X^5(t)
    if conv==3
        %Primer momento condicional a la salida (Función de
        reconstrucción)
        unosal=-((3.6.*varent.^2.*unoent)-
        (2.4.*varent.*unoent.^3)-(0.24.*unoent.^5));
        %Segundo momento condicional a la salida
        dossal=(54.432.*varent.^5)+(272.16.*varent.^4.*unoent
        t.^2)+(181.44.*varent.^3.*unoent.^4)+(36.288.*varent.^2.*
        unoent.^6)+(2.592.*varent.*unoent.^8)+(0.0576.*unoent.^1
        0);
        %Varianza condicional a la salida (Función de error de
        reconstrucción)
        varsal=dossal-(unosal.^2);
    end

    % CONVERTIDOR DE QUINTO GRADO
    0.15*X^5(t)+0.97*X(t)
    if conv==4
        %Primer momento condicional a la salida (Función de
        reconstrucción)
        unosal=(2.25.*varent.^2.*unoent)+(1.5.*varent.*unoent
        .^3)+(0.15.*unoent.^5)+(0.97.*unoent);
        %Segundo momento condicional a la salida
        dossal=(21.2625.*varent.^5)+(106.3125.*varent.^4.*un
        oent.^2)+(70.875.*varent.^3.*unoent.^4)+(14.175.*varent.^
        2.*unoent.^6)+(1.0125.*varent.*unoent.^8)+(0.0225.*unoent.^10)+(4.365.*varent.^3)+(13.095.*varent.^2.*unoent.^2)+(4.365.*varent.*unoent.^4)+(0.291.*unoent.^6)+(0.9409.*varent)+(0.9409.*unoent.^2);
        %Varianza condicional a la salida (Función de error de
        reconstrucción)
        varsal=dossal-(unosal.^2);
    end

    % CONVERTIDOR DE QUINTO GRADO 0.13*X^5(t)-
    0.46*X^3(t)+0.59*X(t)
    if conv==5
        %Primer momento condicional a la salida (Función de
        reconstrucción)
        unosal=(1.95.*varent.^2.*unoent)+(1.3.*varent.*unoent.^
        3)+(0.13.*unoent.^5)-(1.38.*varent.*unoent)-
        (0.46.*unoent.^3)+(0.59.*unoent);
        %Segundo momento condicional a la salida
        dossal=(15.9705.*varent.^5)+(79.8525.*varent.^4.*unoent
        .^2)+(53.235.*varent.^3.*unoent.^4)+(10.647.*varent.^2
        .*unoent.^6)+(0.7605.*varent.*unoent.^8)+(0.0169.*unoent
        .^10)-(12.558.*varent.^4)-(50.232.*varent.^3.*unoent.^2)-
        (25.116.*varent.^2.*unoent.^4)-
        (3.3488.*varent.*unoent.^6)-
        (0.1196.*unoent.^8)+(5.475.*varent.^3)+(16.425.*varent.^2
        .*unoent.^2)+(5.475.*varent.*unoent.^4)+(0.365.*unoent.^

```

```
6)-(1.6284.*varent.^2)-(3.2568.*varent.*unoent.^2)-
(0.5428.*unoent.^4)+(0.3481.*varent)+(0.3481.*unoent.^2)
;
```

```
% Varianza condicional a la salida (Función de error de
reconstrucción)
```

```
varsal=dossal-(unosal.^2);
end
end
```

```
% ALGORITMO NO ÓPTIMO
```

```
if algoritmo==2
```

```
alfa=1; % Alfa
```

```
% CONVERTIDOR DE TERCER GRADO 0.6*X^3(t)
```

```
if conv==1
```

```
em=0; % Esperanza matemática a la salida
```

```
var=5.4; % Varianza a la salida
```

```
% Matriz de covarianza a la salida
```

```
for i=1:N
```

```
for j=1:N
```

```
mcs(i,j)=3.24.*exp(-alfa.*abs(T(i)-
T(j)))+2.16.*exp(-3.*alfa.*abs(T(i)-T(j)));
```

```
end
```

```
end
```

```
mi=inv(mcs); % Matriz inversa
```

```
recon=0;
```

```
error=0;
```

```
for i=1:N
```

```
for j=1:N
```

```
% Función de covarianza a la salida(t-Ti)
```

```
covsa1=3.24.*exp(-alfa.*abs(t-T(i)))+2.16.*exp(-
3.*alfa.*abs(t-T(i)));
```

```
% Función de reconstrucción
```

```
funr=covsa1.*mi(i,j).*(x(j)-em);
```

```
recon=recon+funr;
```

```
fr=em+recon;
```

```
% Función de covarianza a la salida(Tj-t)
```

```
covsa2=3.24.*exp(-alfa.*abs(T(j)-t))+2.16.*exp(-
3.*alfa.*abs(T(j)-t));
```

```
% Función de error de reconstrucción
```

```
fune=covsa1.*mi(i,j).*covsa2;
```

```
error=error+fune;
```

```
fer=var-error;
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
% CONVERTIDOR DE TERCER GRADO
```

```
1.1X^3(t)+1.5*X(t)
```

```
if conv==2
```

```
em=0; % Esperanza matemática a la salida
```

```
var=32.26; % Varianza a la salida
```

```
% Matriz de covarianza a la salida
```

```
for i=1:N
```

```
for j=1:N
```

```
mcs(i,j)=25.*exp(-alfa.*abs(T(i)-
T(j)))+7.26.*exp(-3.*alfa.*abs(T(i)-T(j)));
```

```
end
```

```
end
```

```
mi=inv(mcs); % Matriz inversa
```

```
recon=0;
```

```
error=0;
```

```
for i=1:N
```

```
for j=1:N
```

```
% Función de covarianza a la salida(t-Ti)
```

```
covsa1=25.*exp(-alfa.*abs(t-T(i)))+7.26.*exp(-
3.*alfa.*abs(t-T(i)));
```

```
% Función de reconstrucción
```

```
funr=covsa1.*mi(i,j).*(x(j)-em);
```

```
recon=recon+funr;
```

```
fr=em+recon;
```

```
% Función de covarianza a la salida(Tj-t)
```

```
covsa2=25.*exp(-alfa.*abs(T(j)-t))+7.26.*exp(-
3.*alfa.*abs(T(j)-t));
```

```
% Función de error de reconstrucción
```

```
fune=covsa1.*mi(i,j).*covsa2;
```

```
error=error+fune;
```

```
fer=var-error;
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
% CONVERTIDOR DE QUINTO GRADO -0.24*X^5(t)
```

```
if conv==3
```

```
em=0; % Esperanza matemática a la salida
```

```
var=54.432; % Varianza a la salida
```

```
% Matriz de covarianza a la salida
```

```
for i=1:N
```

```
for j=1:N
```

```
mcs(i,j)=1.44.*exp(-alfa.*abs(T(i)-
T(j)))+11.52.*exp(-2.*alfa.*abs(T(i)-T(j)))+34.56.*exp(-
3.*alfa.*abs(T(i)-T(j)))+6.912.*exp(-5.*alfa.*abs(T(i)-
T(j)));
```

```
end
```

```
end
```

```
mi=inv(mcs); % Matriz inversa
```

```
recon=0;
```

```
error=0;
```

```
for i=1:N
```

```
for j=1:N
```

```
% Función de covarianza a la salida(t-Ti)
```

```
covsa1=1.44.*exp(-alfa.*abs(t-
T(i)))+11.52.*exp(-2.*alfa.*abs(t-T(i)))+34.56.*exp(-
3.*alfa.*abs(t-T(i)))+6.912.*exp(-5.*alfa.*abs(t-T(i)));
```

```
% Función de reconstrucción
```

```
funr=covsa1.*mi(i,j).*(x(j)-em);
```

```
recon=recon+funr;
```

```
fr=em+recon;
```

```
% Función de covarianza a la salida(Tj-t)
```

```
covsa2=1.44.*exp(-alfa.*abs(T(j)-
t))+11.52.*exp(-2.*alfa.*abs(T(j)-t))+34.56.*exp(-
3.*alfa.*abs(T(j)-t))+6.912.*exp(-5.*alfa.*abs(T(j)-t));
```

```
% Función de error de reconstrucción
```

```
fune=covsa1.*mi(i,j).*covsa2;
```

```
error=error+fune;
```

```
fer=var-error;
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
% CONVERTIDOR DE QUINTO GRADO
```

```
0.15*X^5(t)+0.97*X(t)
```

```
if conv==4
```

```
em=0; % Esperanza matemática a la salida
```

```
var=26.5684; % Varianza a la salida
```

```
% Matriz de covarianza a la salida
```

```
for i=1:N
```

```
for j=1:N
```

```
mcs(i,j)=2.9584.*exp(-alfa.*abs(T(i)-
T(j)))+4.5.*exp(-2.*alfa.*abs(T(i)-T(j)))+13.5.*exp(-
3.*alfa.*abs(T(i)-T(j)))+2.7.*exp(-5.*alfa.*abs(T(i)-T(j)));
```

```

end
end
mi=inv(mcs); % Matriz inversa
recon=0;
error=0;
for i=1:N
    for j=1:N
        % Función de covarianza a la salida(t-Ti)
        covsa1=2.9584.*exp(-alfa.*abs(t-
T(i)))+4.5.*exp(-2.*alfa.*abs(t-T(i)))+13.5.*exp(-
3.*alfa.*abs(t-T(i)))+2.7.*exp(-5.*alfa.*abs(t-T(i)));
        % Función de reconstrucción
        funr=covsa1.*mi(i,j).*(x(j)-em);
        recon=recon+funr;
        fr=em+recon;
        % Función de covarianza a la salida(Tj-t)
        covsa2=2.9584.*exp(-alfa.*abs(T(j)-
t))+4.5.*exp(-2.*alfa.*abs(T(j)-t))+13.5.*exp(-
3.*alfa.*abs(T(j)-t))+2.7.*exp(-5.*alfa.*abs(T(j)-t));
        % Función de error de reconstrucción
        fune=covsa1.*mi(i,j).*covsa2;
        error=error+fune;
        fer=var-error;
    end
end
end

% CONVERTIDOR DE QUINTO GRADO 0.13*X^5(t)-
0.46*X^3(t)+0.59*X(t)
if conv==5
    em=0; % Esperanza matemática a la salida
    var=7.6072; % Varianza a la salida
    % Matriz de covarianza a la salida
    for i=1:N
        for j=1:N
            mcs(i,j)=0.0196.*exp(-alfa.*abs(T(i)-
T(j)))+3.38.*exp(-2.*alfa.*abs(T(i)-T(j)))+4.2336.*exp(-
3.*alfa.*abs(T(i)-T(j)))+2.028.*exp(-5.*alfa.*abs(T(i)-
T(j)));
        end
    end
    mi=inv(mcs); % Matriz inversa
    recon=0;
    error=0;
    for i=1:N
        for j=1:N
            % Función de covarianza a la salida(t-Ti)
            covsa1=0.0196.*exp(-alfa.*abs(t-
T(i)))+3.38.*exp(-2.*alfa.*abs(t-T(i)))+4.2336.*exp(-
3.*alfa.*abs(t-T(i)))+2.028.*exp(-5.*alfa.*abs(t-T(i)));
            % Función de reconstrucción
            funr=covsa1.*mi(i,j).*(x(j)-em);
            recon=recon+funr;
            fr=em+recon;
            % Función de covarianza a la salida(Tj-t)
            covsa2=0.0196.*exp(-alfa.*abs(T(j)-
t))+3.38.*exp(-2.*alfa.*abs(T(j)-t))+4.2336.*exp(-
3.*alfa.*abs(T(j)-t))+2.028.*exp(-5.*alfa.*abs(T(j)-t));
            % Función de error de reconstrucción
            fune=covsa1.*mi(i,j).*covsa2;
            error=error+fune;
            fer=var-error;
        end
    end
end
end
end
end

```

## %%% Convertidor Exponencial

```

fprintf('PROGRAMA PARA CALCULAR LA FUNCIÓN
DE RECONSTRUCCIÓN Y LA FUNCIÓN DE ERROR
DE RECONSTRUCCIÓN \nDEL PROCESO A LA
SALIDA DE UN CONVERTIDOR EXPONENCIAL')
fprintf('\n\nCONTESTE LO SIGUIENTE:')

algoritmo=input('\n\nTIPO DE ALGORITMO: \n 1.
ÓPTIMO \n 2. NO ÓPTIMO')

region=input('\n\nTIPO DE REGIÓN:\n 1. REGIÓN DE
INTERPOLACIÓN \n 2. REGIÓN DE
EXTRAPOLACIÓN')

a0=1;
beta=1;

% REGIÓN DE INTERPOLACIÓN
if region==1
    N=input('\n\n Número de muestras: ');
    delta=input('\n\n Rango de separación entre muestras:');
    for i=1:N
        fprintf('\n\n Valor de la muestra %d:', i)
        x(i)=input(' ');
    end
    for i=1:N
        T(i)=(delta.*i)-delta;
    end
    t=0:0.0001:(delta.*(N-8));
end

% REGIÓN DE EXTRAPOLACIÓN
if region==2
    N=1;
    for i=1:N
        fprintf('\n Valor de la muestra %d:', i)
        x(i)=input(' ');
        T(i)=0;
    end
    t=0:0.0001:10;
end

% ALGORITMO ÓPTIMO
if algoritmo==1

    % FILTRO RC DE UNA ETAPA
    alfa=1; % Alfa
    % Matriz de covarianza a la entrada
    for i=1:N
        for j=1:N
            mce(i,j)=exp(-alfa.*abs(T(i)-T(j)));
        end
    end
    mi=inv(mce); % Matriz inversa
    unoent=0;
    error=0;
    for i=1:N
        for j=1:N
            % Primer momento condicional a la entrada
            unoent=unoent+exp(-alfa.*abs(t-T(i))).*mi(i,j).*x(j);
            % Varianza condicional a la entrada
            error=error+exp(-alfa.*abs(t-T(i))).*mi(i,j).*exp(-
alfa.*abs(T(j)-t));
            varent=1-error;
        end
    end
end
end
end
end

```

```

end
end
%Primer momento condicional a la salida (Función de
reconstrucción)
unosal=(a0).*(exp((beta.*unoent)+(0.5.*beta.^2)));
%Segundo momento condicional a la salida
dossal=(a0.^2).*(exp((2.*beta.*unoent)+(beta.^2)+(varent.
*beta.^2)));
%Varianza condicional a la salida (Función de error de
reconstrucción)
varsal=dossal-(unosal.^2);
end

%ALGORITMO NO ÓPTIMO
if algoritmo==2
%Esperanza matemática a la salida
em=a0.*exp((beta.^2)/2);
%Varianza a la salida
var=(a0.^2).*(exp(2.*beta.^2)-(exp(beta.^2)));

%Filtro RC de una etapa
alfa=1; %Alfa
%Matriz de covarianza a la salida
for i=1:N
for j=1:N
mcen=exp(-alfa.*abs(T(i)-T(j)));

mcs(i,j)=(a0.^2).*(exp(beta.^2)).*(exp((beta.^2).*mcen)-1);
end
end
mi=inv(mcs); %Matriz inversa
recon=0;
error=0;
for i=1:N
for j=1:N
%Función de covarianza a la salida(t-Ti)
coven1=exp(-alfa.*abs(t-T(i)));
covsa1=(a0.^2).*(exp(beta.^2)).*(exp((beta.^2).*cove
n1)-1);
%Función de Reconstrucción
funr=covsa1.*mi(i,j).*(x(j)-em);
recon=recon+funr;
fr=em+recon;
%Función de covarianza a la salida(Tj-t)
coven2=exp(-alfa.*abs(T(j)-t));
covsa2=(a0.^2).*(exp(beta.^2)).*(exp((beta.^2).*cove
n2)-1);
%Función de Error de reconstrucción
fune=covsa1.*mi(i,j).*covsa2;
error=error+fune;
fer=var-error;
end
end
end
end

```

### %% Proceso de Rayleigh

```

fprintf('PROGRAMA PARA CALCULAR LA FUNCIÓN
DE RECONSTRUCCIÓN Y LA FUNCIÓN DE ERROR
DE RECONSTRUCCIÓN \nDEL PROCESO A LA
SALIDA DE UN PROCESO DE RAYLEIGH')
fprintf('\n\nCONTESTE LO SIGUIENTE:')

```

```

algoritmo=input('\n\nTIPO DE ALGORITMO: \n 1.
ÓPTIMO \n 2. NO ÓPTIMO')

region=input('\n\nTIPO DE REGIÓN:\n 1. REGIÓN DE
INTERPOLACIÓN \n 2. REGIÓN DE
EXTRAPOLACIÓN')

%ALGORITMO ÓPTIMO
if algoritmo==1

%REGIÓN DE INTERPOLACIÓN
if region==1
x1=input('Introduce el valor de la muestra 1:');
x2=input('Introduce el valor de la muestra 2:');
t2=input('introduce el tiempo de la muestra 2:');
t1=0;
x=sym('x');
t=0:.09:t2;
sigma=1;

%FILTRO RC DE UNA ETAPA
Eo=1; %Alfa
Q=exp(-abs(t-t1));
Q2=exp(-abs(t2-t));
Q3=exp(-abs(t2-t1));

for i=2:length(Q)
fun(i)=(x/(sigma^2*(1-Q(i)^2)))*exp(-
(x^2+Q(i)^2*x^2)/(2*sigma^2*(1-
Q(i)^2)))*besseli(0,((Q(i)/(1-Q(i)^2))*((x*x1)/sigma^2)));
end
for i=2:length(Q)
if i==length(Q)
fun2(i)=0;
else
fun2(i)=(x2/(sigma^2*(1-Q2(i)^2)))*exp(-
(x2^2+Q2(i)^2*x^2)/(2*sigma^2*(1-
Q2(i)^2)))*besseli(0,((Q2(i)/(1-
Q2(i)^2))*((x*x2)/sigma^2)));
end
end
fun3=(x2/(sigma^2*(1-Q3^2)))*exp(-
(x2^2+Q3^2*x^2)/(2*sigma^2*(1-
Q3^2)))*besseli(0,((Q3/(1-Q3^2))*((x2*x1)/sigma^2)));
fun4=(fun2.*(fun.*x))./fun3;
Area=int(fun4,0,99);
A=double(Area);
for i=1:length(A+1)
if i==1
Af(i)=x1;
else
Af(i)=A(i);
end
end
if i==length(A+1)
Af(i)=x2;
end
end
fun5=(fun2.*(fun.*x.*x))./fun3;
Area2=int(fun5,0,10);
A2=double(Area2);
Bf=A2-(A.^2);
end

%REGIÓN DE EXTRAPOLACIÓN
if region==2

```

```

x1=input('valor de la muestra:');
sigma=1;
t=0:0.07:5;

%FILTRO RC DE UNA ETAPA
Eo=1; %Alfa
Q=exp(-Eo*abs(t-0));

x=sym('x');
for i=2:length(Q)
    fun(i)=(x^2/(sigma^2*(1-Q(i)^2))).*(exp(-(
(x^2+Q(i)^2*x1^2)/(2*sigma^2*(1-
Q(i)^2))).*besseli(0,((Q(i)/(1-
Q(i)^2)).*(x*x1)/sigma^2)));
    fun2(i)=(x^3/(sigma^2*(1-Q(i)^2))).*(exp(-(
(x^2+Q(i)^2*x1^2)/(2*sigma^2*(1-
Q(i)^2))).*besseli(0,((Q(i)/(1-
Q(i)^2)).*(x*x1)/sigma^2)));
end
area1=int(fun2,0,10);
area2=int(fun,0,10);
A=double(area2);
for i=1:length(A+1)
    if i==1
        Af(i)=x1;
    else
        Af(i)=A(i);
    end
end
area3=power(area2,2);
varianza=area1-area3;
B=double(varianza);
for i=1:length(B+1)
    if i==1
        Bf(i)=0;
    else
        Bf(i)=B(i);
    end
end
end
end
end

%ALGORITMO ÓPTIMO
if algoritmo==2

em=1.253; %Esperanza matemática a la salida
var=0.4292; %Varianza a la salida

%REGIÓN DE INTERPOLACIÓN
if region==1
    N=input('\n\n Número de muestras: ');
    delta=input('\n\n Rango de separación entre
muestras:');

```

```

for i=1:N
    fprintf('\n\n Valor de la muestra %d:', i)
    x(i)=input(' ');
end
for i=1:N
    T(i)=(delta.*i)-delta;
end
t=0:0.0001:(delta.*(N-.8));
end

%REGIÓN DE EXTRAPOLACIÓN
if region==2
    N=1;
    for i=1:N
        fprintf('\n\n Valor de la muestra %d:', i)
        x(i)=input(' ');
        T(i)=0;
    end
    t=0:0.0001:10;
end

%Matriz de covarianza a la salida
for i=1:N
    for j=1:N
        %FILTRO RC DE UNA ETAPA
        Q=exp(-abs(T(i)-T(j)));
        mcs(i,j)=(Q.^2).*var;
    end
end
mi=inv(mcs); %Matriz inversa
recon=0;
error=0;
for i=1:N
    for j=1:N
        %Función de covarianza a la salida(t-Ti)
        Q1=exp(-abs(t-T(i)));
        covsa1=(Q1.^2).*var;
        %Función de Reconstrucción
        funr=covsa1.*mi(i,j).*(x(j)-em);
        recon=recon+funr;
        fr=em+recon;
        %Función de covarianza a la salida(Tj-t)
        Q2=exp(-abs(T(j)-t));
        covsa2=(Q2.^2).*var;
        %Función de Error de reconstrucción
        fune=covsa1.*mi(i,j).*covsa2;
        error=error+fune;
        fer=var-error;
    end
end
end
end

```

# Apéndice B

## ARTÍCULOS ESCRITOS

### • PONENCIAS EN CONGRESOS

- ❖ V. Kazakov, Y. Olvera. “Two Reconstructions Algorithms of Non Gaussian Processes on the Output of a Polynomial Converter”, *10° Conference on Computing CORE*, Mexico City, May 2009.
- ❖ V. Kazakov, Y. Olvera. “Algoritmos de Reconstrucción de Procesos No Gaussianos a la Salida de un Convertidor Polinomial de Quinto Orden”, *VII Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico CIINDET*, Cuernavaca, Morelos, México, Octubre 2009.
- ❖ V. Kazakov, Y. Olvera, “Algoritmos de Reconstrucción de Procesos No Gaussianos a la Salida de un Convertidor Polinomial en la Región de Interpolación”, *XI Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas CNIES*, México, D. F., Noviembre 2009.
- ❖ V. Kazakov, Y. Olvera. “Algoritmos de Reconstrucción de Procesos No Gaussianos en la Salida de un Convertidor Polinomial de Quinto Orden en la Región de Interpolación”, *20° Reunión de Otoño de Comunicaciones, Computación, Electrónica Y Exposición Industrial ROC&C*, Acapulco, Guerrero, México, Diciembre 2009.

## • PUBLICACIONES EN REVISTAS

- ❖ V. Kazakov, Y. Olvera. “Two Reconstructions Algorithms of Non Gaussian Processes on the Output of a Polynomial Converter”, *Research in Computing Science: Advances in Computer Science and Engineering*, Vol. 42, pp. 287-295, Mayo, 2009.

# Referencias

- [1] A. Zayed, P. L. Búster. “Lagrange Interpolation and Sampling Theorems” En F. Marvasti, Editor. “Nonuniform Sampling: Theory and Practice”, Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, p. 924, 2001.
- [2] E. T. Whittaker. “On the functions which are Represented by the Expansion of the Interpolation Theory”, *Proc. Royal Society of Edinburgh*, Vol. 35, pp. 181-194, 1915.
- [3] V. A. Kotel’nikov. “On the Transmission Capacity of the “Ether” and Wire in Electrocommunications”, *Izd. Red. Upr. Suyazi RKKA*, Moscow, 1933.
- [4] C. E. Shannon. “A Mathematical Theory of Communication”, *Bell System Technical Journal*, Vol. 27, pp. 379-423, 623-656, 1948.
- [5] C. E. Shannon. “Communications in the Presence of Noise”, *Proc. IRE*, Vol. 37, pp. 10-21, 1949.
- [6] H. Nyquist. “Certain Topics in Telegraph Transmission Theory”, *AIEE Trans.*, Vol. 47, pp. 617-644, 1928.
- [7] A. V. Balakrishnan. “A Note on the Sampling Principle for Continuous Signals”, *IRE Trans. On Inf. Theory*, Vol. IT-3, pp. 143-146, 1957.
- [8] D. A. Linden, N. M. Abramson, “A Generalization of the Sampling Theorem”, *Information and Control*, Vol. 3, pp. 26-31, 1960.
- [9] D. P. Petersen, D. Middleton. “Sampling and Reconstruction of Wave Number Limited Functions in N Dimensional Euclidean Spaces”, *Information and Control*, Vol. 5, pp. 279-323, 1962.
- [10] A. J. Jerri. “The Shannon Sampling Theorem – Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Review”, *Proc. IEEE*, Vol 65, No. 11, pp. 1565-1596, 1977.
- [11] R. J. Marks II, Editor, “*Advanced Topics on Shannon Sampling and Interpolation Theory*” Springer – Verlag, New York, 360 p., 1993.
- [12] F. Marvasti, Editor. “*Nonuniform Sampling: Theory and Practice*”, Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, p. 924, 2001.
- [13] A. I. Zayed. “*Advances in Shannon’s Sampling Theory*”, Boca Raton: CRC Press, 334 p., 1993.
- [14] F. J. Beutler. “Sampling Theorem and Bases in a Hilbert Space”, *Information and Control*, Vol. 4, pp. 97-117, 1961.
- [15] S. P. Lloyd. “A Sampling Theorem for Stationary (Wide Sense) Stochastic Processes”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 92, pp.1-12, 1959.
- [16] M. Zakai. “Band – Limited Functions and the Sampling Theorem”, *Information and Control*, Vol. 8, pp. 143-158, 1965.

- [17] W. A. Gardner. “A Sampling Theorem for Nonstationary Random Processes”, *IEEE Trans. On Information Theory*, Vol. IT-18, pp. 808-809, 1972.
- [18] Z. A. Piranashvili. “On the Problem of Interpolation of Stochastic Processes”, *Theory of Probability and its Applications*, Vol. 12, pp. 647-657, 1967.
- [19] B. D. Sharma, F. C. Metha. “A Generalized Sampling Theorem for Nonstationary Processes”, *J. Cybernetics*, pp. 87-95, 1974.
- [20] J. J. Clark, M. R. Palmer, P. D. Lawrence. “A Transformation Method for the Reconstruction of Functions form Nonuniformly Spaced Samples”, *IEEE Trans. On Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-33, No. 4, pp. 1151-1165, 1985.
- [21] Y. Y. Zeevi, E. Shlomot. “Nonuniform Sampling and Antialiasing in Image Representation”, *IEEE Trans. On Signal Processing*, Vol. 41, No. 3, pp. 1223-1236, 1993.
- [22] J. G. Proakis. “*Digital Communications*”, 4<sup>th</sup> Edition, McGraw-Hill, 2000.
- [23] R. G. Brown, P. Y. C. Hwang. “*Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*”, 3<sup>rd</sup> Edition, N. Y.: J. Wiley & Sons, 1997.
- [24] M. Pawlak. “Signal Sampling and Recovery under Dependent Noise”, *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, Vol. 1, No. 1, pp. 77-86, 2002.
- [25] B. Lacaze, C. Mailhes. “Random Process Reconstruction from Multiple Noisy Source Observations”, *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, Vol. 3, No. 3, pp. 257-278, 2004.
- [26] B. Lacaze. “A Theoretical Exposition of Stationary Processes Sampling”, *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, Vol. 4, No. 3, pp. 201-230, 2005.
- [27] B. Lacaze. “The Ghost Sampling Sequence Method”, *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, Vol. 8, No. 1, pp. 13-21, 2009.
- [28] H. Ogawa, A. Hirabayashi. “Sampling Theorem with Optimum Noise Suppression”, *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, Vol. 6, No. 2, pp. 167-184, 2007.
- [29] R. Deutch. “*Nonlinear Transformation of Random Processes*”, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1962.
- [30] H. Cramer. “*Mathematical Methods of Statistic*”, Princeton, N. J.:Princeton University Press, 1946.
- [31] R. L. Stratonovich. “*Topics in the Theory of Random Noise*”, New York: Gordon and Breach, 1963.
- [32] A. Stuart, K. Ord. “*Kendall’s Advanced Theory of Statistic*”, 6<sup>th</sup> Edition, Vol. 1, “Distribution Theory.” London: Arnold, 2000.
- [33] C. L. Nikias, A. P. Petropulu. “*Higher – Order Spectra Analysis*”, PTR Prentice-Hall, N. J., 1993.
- [34] A. N. Malakhov. “*Cumulant Analysis of Random non Gaussian Processes and their Transformations*”, Moscow: Sov. Radio, 1978. (In Russian)

- [35] B. R. Levin. “*Fundamentos de Radiotecnica Estadística*”, Marcombo Boixareo Editores, Barcelona, 1992.
- [36] K. Ogata. “*Ingeniería de Control Moderna*”, 4<sup>ta</sup> Edición, Pearson Education, Madrid, 2003.
- [37] R. E. Ziemer, W. H. Tranter. “*Principles of Communication*”, 5<sup>th</sup> Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [38] V. A. Kazakov, “Regeneration of samples of random processes following non linear inertialess conversions”, *Telecommunication and Radio engineering*, Vol. 43, pp. 94-96, NIO, 1988.
- [39] V. A. Kazakov. “The Sampling – Reconstruction Procedure with a Limited Number of Samples of Stochastic Processes and Fields on the Basis of the Conditional Mean Rule”, *Electromagnetic Waves and Electronic Systems*, Vol. 10, No. 1-2, pp. 98-115, 2005.
- [40] V. A. Kazakov, S. A. Africanov, M. A. Belyaev. “Comparison of Two Algorithms of the Realization Restoration Using Random Numbers of Counts”, *Radioelectronics and Communications Systems*, Vol. 37, No. 4, pp. 43-45, 1994.
- [41] V. A. Kazakov, M. A. Belyaev. “Reconstruction of Realizations of Gaussian Processes from Readings of Process and Linear Transformation of It”, *Telecommunications and Radioengineering*, Vol. 49, pp. 97-102, 1995.
- [42] V. A. Kazakov, M. A. Belyaev. “Sampling Reconstruction Procedure of Some Nonstationary Processes”, *Radioelectronics and Communications Systems*, Vol. 40, No. 9, pp. 43-49, 1997.
- [43] V. A. Kazakov, M. A. Belyaev. “Sampling Reconstruction Procedure of Random Processes Based on Conditional Expectation Rule” *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, Vol. 1, pp. 135-153, 2002.
- [44] V. A. Kazakov, D. Rodríguez. “Estudio del Procedimiento de Discretización y Reconstrucción de los Procesos Gaussianos con una Cantidad de Muestras Limitada”, *Memorias de la Reunión de Otoño de Comunicaciones, Computación y Electrónica ROC&C 2002*, Acapulco Gro., 2002.
- [45] P. Z. Peebles, Jr. “*Principios de Probabilidad, variables aleatorias y señales aleatorias*”, 4<sup>ta</sup> Edición, McGraw-Hill, España, 2006.
- [46] J. B. Kennedy y A. M. Neville. “*Basic Statistical Methods for Engineers and Scientist*”, 3<sup>ra</sup> Edition, Harper & Row, New York, 1986.
- [47] W. B. Davenport, Jr. and W. L. Root. “*An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*”, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1958.
- [48] D. Middleton. “*An Introduction to Statistical Communication Systems*”, N. Y.: IEEE Press. 1996.
- [49] L. W. Couch, II. “*Sistemas de Comunicación Digitales y Analógicos*”, 7<sup>ma</sup> Edición, Pearson Prentice-Hall, México, 2008.
- [50] P. E. Pfeiffer, “*Probability for applications*”, Springer Verlag, 1990.

- [51] J. G. Proakis y D. G. Manolakis. “*Tratamiento Digital de Señales*”, 3<sup>ra</sup> Edición, Pearson Prentice-Hall, Madrid, 1998.
- [52] A. M. Yaglom. “*Theory of Stationary Random Functions*”, Prentice – Hall, 1962.
- [53] F. E. Beichelt, L. P. Fatti. “*Stochastic Processes and their Applications*”, Taylor & Francis Inc., New York, 2002.
- [54] V. A. Kazakov, C. Hernández. “Procedimiento de Muestreo y Reconstrucción de Algunos Procesos Estocásticos Markovianos No Gaussianos”, *Memorias del 7mo. Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica y Eléctrica*. México D. F., 2003.
- [55] V. A. Kazakov, J. Osorio. “Procedimiento de Muestreo y Reconstrucción del Proceso Estocástico Markovianos de Rayleigh”, *Memorias de la Reunión de Otoño de Comunicaciones, Computación y Electrónica ROC&C 2002*, Acapulco Gro., 2005.
- [56] V. Kazakov, M. Sedeño. “Two Reconstructions Algorithms of the Process on the Output of the Exponential Converter”, *Research in Computing Science: Industrial Informatics*, Vol. 31, 2007.
- [57] V. A. Kazakov, S. Sanchez. “Sampling – Reconstruction Procedure of Random Processes at the Output of Exponential Non – Linear Converters”, *Electromagnetic Waves and Electronic Systems*. Vol. 8, No. 7-8, pp. 77-80, 2003.
- [58] V. Kazakov, Y. Olvera. “Two Reconstructions Algorithms of Non Gaussian Processes on the Output of a Polynomial Converter”, *Research in Computing Science: Advances in Computer Science and Engineering*, Vol. 42, pp. 287-295, 2009.
- [59] V. Kazakov, Y. Olvera. “Algoritmos de Reconstrucción de procesos No Gaussianos a la Salida de un Convertidor Polinomial de Quinto Orden”, *Memorias del VII Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico CIINDET*, Cuernavaca, Morelos, México, 2009.
- [60] V. Kazakov, Y. Olvera. “Algoritmos de Reconstrucción de Procesos No Gaussianos en la Salida de un Convertidor Polinomial de Quinto Orden en la Región de Interpolación”, *Memorias de la 20° Reunión de Otoño de Comunicaciones, Computación, Electrónica Y Exposición Industrial ROC&C*, Acapulco, Gro., México, 2009.