



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

---

---

ANÁLISIS DE CHUMACERAS HÍBRIDAS CON PUERTAS  
HORIZONTALES DE PRESURIZACIÓN PUNTUAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :  
MAESTRO EN CIENCIA CON ESPECIALIDAD EN  
INGENIERÍA MECÁNICA

P R E S E N T A :

*Ing. Rivera Arreola Daniel Eduardo*

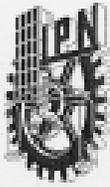
*DIRECTOR: Dr. Valery R. Nossov*



MÉXICO, D.F.

Diciembre 2009





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

SIP-14

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 19:00 horas del día 2 del mes de Diciembre del 2009 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E. S. I. M. E. para examinar la tesis de titulada:

**"ANÁLISIS DE CHUMACERAS HIBRIDAS CON PUERTAS HORIZONTALES DE PRESURIZACIÓN".**

Presentada por el alumno:

**RIVERA**

**ARREOLA**

**DANIEL EDUARDO**

Apellido paterno

Apellido materno

Nombre(s)

Con registro:

B	0	7	1	5	3	6
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA MECÁNICA**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

DR. VALERY ROMANOVICH NOSSOV

Segundo Vocal

Presidenta

DR. JOSÉ ÁNGEL LOCEGARRO ORTEGA HERRERA

Tercer Vocal

DR. IGNACIO RAMÍREZ VARGAS

Secretario

DR. JESÚS ALBERTO MEDA CAMPAÑA

Suplente

DR. JULIO CÉSAR GÓMEZ MANCILLA

DR. JOSÉ MARTÍNEZ TRINIDAD

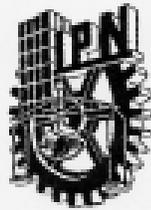
EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. JAIME ROBLES GARCÍA



SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN





**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México D.F. el día 8 del mes Diciembre del año 2009, el (la) que suscribe Daniel Eduardo Rivera Arreola alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en ingeniería Mecánica con número de registro B071536, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la E.S.I.M.E. Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Valery Romanovich Nossov y cede los derechos del trabajo intitulado Análisis de Chumaceras Híbridas con Puertas Horizontales de Presurización, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección esimedera@yahoo.com.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Ing. Daniel Eduardo Rivera Arreola





## AGRADECIMIENTOS

*Al INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL por haberme brindado la oportunidad de estudiar en sus aulas y bibliotecas, además de las becas otorgadas, pero sobre todo el haber tenido la oportunidad en esta etapa de mi vida de ser un orgulloso alumno de este Instituto.*

*Al Dr. Valery Romanovich Nossov, por haber dirigido la presente tesis y enseñarme nuevos conocimientos, así como su constante atención y disponibilidad en el desarrollo de este trabajo en todo momento.*

*Al Dr. Julio César Gómez Mancilla, por todo su apoyo y exigencia en clases así mismo el haber sido uno de mis mejores profesores.*

*Al Dr. Jesús Alberto Meda Campaña, por toda su disponibilidad y apoyo incondicional así como su importante enseñanza y el haber formado parte de mis mejores profesores.*

*A la Comisión revisora de la presente tesis al Dr. José Ángel Lodegario Ortega Herrera, Dr. Ignacio Ramírez Vargas, Dr. José Martínez Trinidad por todas sus atenciones brindadas.*





ÍNDICE

ÍNDICE-----I

ÍNDICE DE FIGURAS-----IV

ÍNDICE DE TABLAS-----VII

NOMENCLATURA-----IX

RESUMEN-----XIII

ABSTRACT-----XIV

OBJETIVO-----XV

JUSTIFICACIÓN-----XVI

INTRODUCCIÓN-----XVII

**CAPÍTULO I: Desarrollo e investigación en rotodinámica y revisión de literatura existente.**

1.1 Antecedentes-----1

1.2 Desarrollo e investigación en rotodinámica-----3

1.3 Desarrollo y clasificación de chumaceras-----5

**CAPÍTULO II: Modelo teórico para una chumacera corta con puertos horizontales de presurización puntual.**

2.1 Análisis y condiciones en términos de velocidad, gravedad y presión para una chumacera corta-----9

2.2 Deducción de ecuación de Reynolds-----12

2.3 Modelo matemático para chumaceras cortas-----25

2.4 Modelo matemático para chumaceras cortas presurizadas-----26





**CAPÍTULO III: Modelación numérica y desarrollo analítico del modelo presentado ubicando los puertos de inyección de lubricante en posición horizontal para una chumacera corta presurizada.**

3.1 Campos de presión para  $3\pi/2$  y  $\pi/2$  en una chumacera corta-----29

3.2 Ecuaciones de posición de equilibrio-----34

3.3 Análisis y desarrollo para el sistema de ecuaciones no lineales-----45

3.4 Ejemplo de cálculo del ángulo  $\phi$  por medio del método iterativo  $\beta = \pi/2$ -----47

3.5 Tablas posición puerto de inyección para  $\beta = \pi/2$ -----50

    3.5.1 Posición final del rotor para  $\beta = \pi/2$ -----54

3.6 Tablas posición puerto de inyección para  $\beta = 3\pi/2$ -----55

    3.6.1 Posición final del rotor para  $\beta = 3\pi/2$ -----58

3.6 Resultados-----59

**CAPÍTULO IV: Modelación numérica y desarrollo analítico del modelo presentado ubicando los puertos de inyección de lubricante en los cuatro vértices a  $45^0$  de la chumacera corta presurizada.**

4.1 Campos de presión para  $\pi/4$ ,  $3\pi/2$ ,  $5\pi/4$  y  $7\pi/4$  en una chumacera corta presurizada-----61

4.2 Ecuaciones de posición de equilibrio para una chumacera corta hibrida-----65

4.3 Ejemplo de cálculo del ángulo  $\phi$  por medio del método iterativo para  $\beta = \pi/4$ -----68

4.4 Tablas posición puerto de inyección para  $\beta = \pi/4$ -----70

    4.4.1 Posición final del rotor para  $\beta = \pi/4$ -----74

4.5 Tablas posición puerto de inyección para  $\beta = 3\pi/4$ -----75

    4.5.1 Posición final del rotor para  $\beta = 3\pi/4$ -----78

4.6 Tablas posición puerto de inyección para  $\beta = 5\pi/4$ -----79





4.6.1 Posición final del rotor para  $\beta = 5\pi/4$ -----82

4.7 Tablas posición puerto de inyección  $\beta = 7\pi/4$ -----83

4.7.1 Posición final del rotor para  $\beta = 7\pi/4$ -----86

4.8 Resultados-----87

**CAPÍTULO V: Conclusiones y trabajos futuros.**

5.1 Comparación de resultados numéricos y analíticos-----90

5.1.1 Tablas: Colocando el puerto de inyección de lubricante en 8 posiciones diferentes para una chumacera corta hibrida presurizada-----91

5.2 Conclusiones-----94

5.3 Recomendaciones y trabajos futuros-----94

**REFERENCIAS-----95**

**APÉNDICES**

Apéndice A: Programa en MATHEMATICA 6 para determinar los campos de presión----96

Apéndice B: Programas en MATHEMATICA 6 para calcular las tablas correspondientes a los puertos de inyección lateral y en los cuatro vértices por medio de iteraciones-----103

Apéndice C: Programa en MATHEMATICA 6 para determinar el cambio relativo, se obtienen las siguientes tablas para cada ángulo  $\beta$  sustituyendo los valores de las tablas de posición de rotor-----106

Apéndice D: Programa en MATHEMATICA 6 para determinar el cambio relativo, utilizando los valores de las tablas del apéndice C-----110

Apéndice E: Reconocimientos-----113



## ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. VI.1 Chumacera típica-----	XVII
Fig. VI.2 Configuración de una chumacera usada por BENTLY-NEVADA [1] -----	XIX
Fig. 1.1 Primeras máquinas rotativas-----	1
Fig. 1.2 Desarrollo de locomotoras-----	1
Fig. 1.3 Fractura de un eje de máquina rotatoria-----	2
Fig. 1.4 Ejemplo de maquinaria Rotativa-----	2
Fig. 1.5 Turbina de vapor-----	3
Fig. 1.6 Cojinete de bolas re-lubricable-----	6
Fig. 1.7 Chumacera hidrodinámica-----	7
Fig. 1.8 Cojinete de levitación magnética o electromagnético [2]-----	7
Fig. 2.1 Representación del espesor de la película de aceite-----	9
Fig. 2.2 Representación de la línea de centros-----	18
Fig. 2.3 Representación de la variación de la película de aceite-----	19
Fig.2.4 Representación de los vectores unitarios radial y tangencial cortesía [1]-----	19
Fig. 2.5 Representación del campo de presión en una chumacera corta-----	23
Fig. 2.6 Caracterización de los ángulos de una chumacera corta-----	27
Fig. 2.7 Delta de Dirac-----	28
Fig. 3.1: $\beta = \pi/2; S = 1; L/D = 1/4; \varepsilon = 0.6; \varphi_{\pi/2}^2 = 37.5975^0; q_{prt} = 5; f_{prt} = 5$ -----	32
Fig. 3.2: $\beta = \pi/2; S = 1; L/D = 1/4; \varepsilon = 0.6; \varphi_{\pi/2}^2 = 25.4852^0; q_{prt} = 20; f_{prt} = 20$ -----	32
Fig. 3.3: $\beta = \pi/2; S = 1; L/D = 1/4; \varepsilon = 0.6; \varphi_{\pi/2}^n = 4.352^0; q_{prt} = 100; f_{prt} = 100$ -----	32
Fig. 3.4: $\beta = \pi/2; S = 1; L/D = 1/4; \varepsilon = 0.6; \varphi_{\pi/2}^2 = 37.5975^0; q_{prt} = 5; f_{prt} = 5$ -----	33
Fig. 3.5: $\beta = 3\pi/2; S = 1; L/D = 1/4; \varepsilon = 0.6; \varphi_{3\pi/2}^2 = 47.0685^0; q_{prt} = 5; f_{prt} = 5$ -----	33
Fig. 3.6: $\beta = 3\pi/2; S = 1; L/D = 1/4; \varepsilon = 0.6; \varphi_{3\pi/2}^2 = 49.2285^0; q_{prt} = 20; f_{prt} = 20$ -----	33
Fig. 3.7: $\beta = 3\pi/2; S = 1; L/D = 1/4; \varepsilon = 0.6; \varphi_{3\pi/2}^n = 4.354^0; q_{prt} = 100; f_{prt} = 100$ -----	34



Fig. 3.8:  $\beta = 3\pi/2$ ;  $S = 1$ ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{3\pi/2}^2 = 47.0685^0$ ;  $q_{prt} = 5$ ;  $f_{prt} = 5$ -----34

Fig. 3.9 Componente radial y tangencial respecto del ángulo de actitud-----35

Fig. 3.10 Principales componentes de una chumacera corta con puertos horizontales-----45

Fig. 3.11 Ubicación del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = \pi/2$ -----54

Fig. 3.12 Ubicación del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = 3\pi/2$ -----58

Fig. 3.13 Cambio relativo del rotor para  $\beta = \pi/2$ -----59

Fig. 3.14 Cambio relativo del rotor para  $\beta = \pi/2$ -----60

Fig. 4.1:  $\beta = \pi/4$ ;  $S = 1$ ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{\pi/4}^n = 22.18^0$ ;  $q_{prt} = 5$ ;  $f_{prt} = 5$ -----61

Fig. 4.2:  $\beta = \pi/4$ ;  $S = 1$ ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{\pi/4}^n = ****^0$ ;  $q_{prt} = 20$ ;  $f_{prt} = 20$ -----62

Fig. 4.3:  $\beta = \pi/4$ ;  $S = 1$ ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{\pi/4}^n = ****^0$ ;  $q_{prt} = 100$ ;  $f_{prt} = 100$ -----62

Fig. 4.4:  $\beta = 3\pi/4$ ;  $S = 1$ ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{3\pi/4}^n = 44.748^0$ ;  $q_{prt} = 5$ ;  $f_{prt} = 5$ -----62

Fig. 4.5:  $\beta = 3\pi/4$ ;  $S = 1$ ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{\pi/2}^2 = 41.2014^0$ ;  $q_{prt} = 20$ ;  $f_{prt} = 20$ -----63

Fig. 4.6:  $\beta = 3\pi/4$ ;  $S = 1$ ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{3\pi/4}^n = 31.209^0$ ;  $q_{prt} = 100$ ;  $f_{prt} = 100$ -----63

Fig. 4.7:  $\beta = 5\pi/4$ ;  $S = 1$ ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{5\pi/4}^n = 46.6903^0$ ;  $q_{prt} = 5$ ;  $f_{prt} = 5$ -----63

Fig. 4.8:  $\beta = 5\pi/4$ ;  $S = 1$ ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{5\pi/4}^n = 47.3248^0$ ;  $q_{prt} = 20$ ;  $f_{prt} = 20$ -----64

Fig. 4.9:  $\beta = 5\pi/4$ ;  $S = 1$ ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{5\pi/4}^n = 53.1648^0$ ;  $q_{prt} = 100$ ;  $f_{prt} = 100$ -----64

Fig. 4.10:  $\beta = 7\pi/4$ ;  $S = 1$ ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{7\pi/4}^n = 47.8076^0$ ;  $q_{prt} = 5$ ;  $f_{prt} = 5$ -----64

Fig. 4.11:  $\beta = 7\pi/4$ ;  $S = 1$ ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{7\pi/4}^n = 51.9386^0$ ;  $q_{prt} = 20$ ;  $f_{prt} = 20$ -----65

Fig. 4.12:  $\beta = 7\pi/4$ ;  $S = 1$ ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{7\pi/4}^n = 68.5372^0$ ;  $q_{prt} = 100$ ;  $f_{prt} = 100$ -----65

Fig. 4.13 Configuración de una chumacera corta con cuatro diferentes posiciones del puerto de inyección de lubricante-----66

Fig. 4.14 Ubicación del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = \pi/4$ -----74

Fig. 4.15 Ubicación del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = 3\pi/4$ -----78

Fig. 4.16 Ubicación del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = 5\pi/4$ -----82

Fig. 4.17 Ubicación del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = 7\pi/4$ -----86





Fig. 4.18 Cambio relativo del rotor para  $\beta = \pi/4$ -----87  
Fig. 4.19 Cambio relativo del rotor para  $\beta = 3\pi/4$ -----88  
Fig. 4.20 Cambio relativo del rotor para  $\beta = 5\pi/4$ -----88  
Fig. 4.21 Cambio relativo del rotor para  $\beta = 7\pi/4$ -----89





## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral derecho:

$$(L/D) = (1/4); f_{prt} = 5; \beta = \pi/2 \text{-----} 51$$

Tabla 3.2 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral derecho:

$$(L/D) = (1/4) f_{prt} = 20; \beta = \pi/2 \text{-----} 52$$

Tabla 3.3 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral derecho:

$$(L/D) = (1/4) f_{prt} = 100; \beta = \pi/2 \text{-----} 53$$

Tabla 3.4 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral izquierdo:

$$(L/D) = (1/4) f_{prt} = 5; \beta = 3\pi/2 \text{-----} 55$$

Tabla 3.5 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral izquierdo:

$$(L/D) = (1/4); f_{prt} = 20; \beta = 3\pi/2 \text{-----} 56$$

Tabla 3.6 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral izquierdo:

$$(L/D) = (1/4); f_{prt} = 100; \beta = 3\pi/2 \text{-----} 57$$

Tabla 4.1 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral derecho inferior:

$$(L/D) = (1/4); f_{prt} = 5; \beta = \pi/4 \text{-----} 71$$

Tabla 4.2 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral derecho inferior:

$$(L/D) = (1/4); f_{prt} = 20; \beta = \pi/4 \text{-----} 72$$

Tabla 4.3 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral derecho inferior:

$$(L/D) = (1/4); f_{prt} = 100; \beta = \pi/4 \text{-----} 73$$

Tabla 4.4 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral derecho superior:

$$(L/D) = (1/4); f_{prt} = 5; \beta = 3\pi/4 \text{-----} 75$$

Tabla 4.5 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral derecho superior:

$$(L/D) = (1/4); f_{prt} = 20; \beta = 3\pi/4 \text{-----} 76$$

Tabla 4.6 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral derecho superior:

$$(L/D) = (1/4); f_{prt} = 100; \beta = 3\pi/4 \text{-----} 77$$





Tabla 4.7 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral izquierdo superior:  
 $(L/D) = (1/4); f_{prt} = 5; \beta = 5\pi/4$  -----79

Tabla 4.8 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral izquierdo superior:  
 $(L/D) = (1/4); f_{prt} = 20; \beta = 5\pi/4$ -----80

Tabla 4.9 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral izquierdo superior:  
 $(L/D) = (1/4); f_{prt} = 100; \beta = 5\pi/4$  -----81

Tabla 4.10 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral izquierdo inferior:  
 $(L/D) = (1/4); f_{prt} = 5; \beta = 7\pi/4$ -----83

Tabla 4.11 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral izquierdo inferior:  
 $(L/D) = (1/4); f_{prt} = 20; \beta = 7\pi/4$ -----84

Tabla 4.12 Cálculo del ángulo de actitud puerto lateral izquierdo inferior:  
 $(L/D) = (1/4); f_{prt} = 100; \beta = 7\pi/4$  -----85

Tabla 5.1 Posiciones del rotor de una chumacera corta híbrida presurizada:  
 $(L/D) = (1/4); f_{prt} = 5$ -----91

Tabla 5.2 Posiciones del rotor de una chumacera corta híbrida presurizada:  
 $(L/D) = (1/4); f_{prt} = 20$ -----92

Tabla 5.3 Posiciones del rotor de una chumacera corta híbrida presurizada:  
 $(L/D) = (1/4); f_{prt} = 100$ -----93

Tabla C.1 Cálculo del cambio relativo  $\beta = \pi/2$ -----105

Tabla C.2 Cálculo del cambio relativo  $\beta = 3\pi/2$ -----106

Tabla C.3 Cálculo del cambio relativo  $\beta = \pi/4$ -----106

Tabla C.4 Cálculo del cambio relativo  $\beta = 3\pi/4$ -----107

Tabla C.5 Cálculo del cambio relativo  $\beta = 5\pi/4$ -----107

Tabla C.6 Cálculo del cambio relativo  $\beta = 7\pi/4$ -----108





## NOMENCLATURA

- $\varphi$  = Ángulo de equilibrio (attitud).
- $\varphi_{pres.}$  = Ángulo de equilibrio (attitud) en una chumacera presurizada.
- $\varphi_{ocv}$  = Ángulo de equilibrio de la solución de Ocvirk.
- $\Delta_s$  = Área del puerto puntual de inyección.
- $C_r$  = Claro radial.
- $\bar{C}_{ij}$  = Coeficientes adimensionales de amortiguamiento, directos y acoplados  $i = x, y, j = x, y$ .
- $\tilde{C}_{ij}$  = Coeficientes adimensionales de amortiguamiento, directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales, debidos a la presurización clásica y externa  $i = x, y, j = x, y$ .
- $\tilde{C}_{ij,pres}$  = Coeficientes adimensionales de amortiguamiento, directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales, debidos a la presurización externa  $i = x, y, j = x, y$ .
- $\bar{K}_{ij}$  = Coeficientes amortiguados de rigidez directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales, debidos a las presurizaciones clásica y externa.  $i = x, y, j = x, y$ .
- $\tilde{K}_{ij,pres}$  = Coeficientes amortiguados de rigidez directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales, debidos a las presurizaciones externas.  $i = x, y, j = x, y$ .
- $\tilde{K}_{ij}$  = Coeficientes amortiguados de rigidez directos y acoplados en las direcciones horizontales y verticales, debidos a las presurizaciones clásica y externa.  $i = x, y, j = x, y$ .
- $C_{ij}$  = Coeficientes de amortiguamiento directos y acoplados en las direcciones radiales y tangenciales.  $i = R, T, j = R, T$ .
- $K_{ij}$  = Coeficientes de rigidez directos y acoplados en las direcciones radiales y tangenciales  $i = R, T, j = R, T$ .
- $\hat{f}_y$  = Componente horizontal de la fuerza adimensional debida a la presurización externa.





$f_{Y_{pres}}$  = Componente horizontal de la fuerza en la película de aceite debida a la presurización.

$f_{Y_{OCV}}$  = Componente horizontal de la fuerza en la película de aceite en la solución de Ocvirk.

$f_R$  = Componente radial de la fuerza de presión en la película de aceite.

$\hat{f}_R$  = Componente radial de la fuerza adimensional debida a la presurización externa.

$\bar{F}_R$  = Componente radial de la fuerza adimensional de presión en la película de aceite.

$F_R$  = Componente radial de la fuerza de presión en la película de aceite.

$f_T$  = Componente tangencial de la fuerza adimensional de presión en la película de aceite.

$F_T$  = Componente tangencial de la fuerza de presión en la película de aceite.

$\bar{F}_T$  = Componente tangencial de la fuerza adimensional de presión en la película de aceite.

$\hat{f}_T$  = Componente tangencial de la fuerza adimensional debida a presurización externa

$\hat{f}_X$  = Componente vertical de la fuerza adimensional debida a la presurización externa.

$F_{X_{pres}}$  = Componente vertical de la fuerza en la película de aceite debida a la presurización.

$F_{X_{OCV}}$  = Componente vertical de la fuerza en la película de aceite en la solución de Ocvirk.

$C_r$  = Claro radial.

$\theta$  = Coordenada angular.

$\beta$  = Coordenada angular del puerto de inyección.





- $Z$  = Coordenada axial de la chumacera.
- $\bar{z}$  = Coordenada axial adimensional de la chumacera.
- $P^2$  = Cuadrado de la velocidad de estabilidad.
- $D$  = Diámetro de la chumacera.
- $h$  = Espesor adimensional de la película de fluido lubricante.
- $\varepsilon$  = Excentricidad adimensional.
- $e$  = Excentricidad dimensional.
- $\varepsilon_{Ocv}$  = Excentricidad de la solución de Ocvirk.
- $\varepsilon_{pres}$  = Excentricidad en una chumacera presurizada.
- $f_{prt}$  = Fuerza de presión adimensional en un puerto puntual de inyección respecto del peso.
- $F_{dim}$  = Fuerza ficticia característica.
- $F_{Y_{res}}$  = Fuerza resultante horizontal en la película de aceite.
- $F_{X_{res}}$  = Fuerza resultante vertical en la película de aceite.
- $\Delta F_{prs}$  = Fuerza total de presurización.
- $\delta(x)$  = Función Delta de Dirac.
- $L$  = Longitud axial de la chumacera.
- $m$  = Masa del disco.
- $S$  = Número de Sommerfeld.
- $W$  = Peso total del sistema.
- $a$  = Posición adimensional arbitraria y axial del puerto de inyección en la chumacera.





- $p$  = Presión.
- $\bar{p}$  = Presión adimensional.
- $\bar{p}_{Ocv}$  = Presión adimensional de la solución de Ocvirk.
- $\bar{p}_{pres}$  = Presión adimensional en la película de aceite debida a la inyección del lubricante.
- $(\Delta\bar{p})_{prt}$  = Presión adimensional en un puerto puntual de inyección.
- $\bar{q}_{prt}$  = Presión adimensional en un puerto puntual respecto de la fuerza ficticia característica.
- $\bar{p}_{prom}$  = Presión adimensional promedio.
- $\Delta p$  = Presión de inyección.
- $P_{fict}$  = Presión ficticia.
- $R$  = Radio de la chumacera.
- $l$  = Valor propio.
- $w$  = Velocidad angular en radianes por segundo.
- $N$  = Velocidad angular en revoluciones por segundo.
- $P_{Umb}$  = Velocidad umbral de estabilidad.
- $\mu$  = Viscosidad absoluta del fluido lubricante.





## RESÚMEN

El presente trabajo trata de la modelación y determinación del ángulo de actitud dependiente de una excentricidad estacionaria, la cual determina la ubicación exacta del muñón para chumaceras cortas híbridas con puertos horizontales de presurización puntual, se analizarán en dos capítulos diferentes (II y III) seis casos particulares ubicando el puerto de inyección de lubricante. Inicialmente usamos la conocida función espacial **Delta de Dirac** la cual permite obtener el campo de presión en forma analítica aproximada, después usando las componentes del campo de presión de la película de aceite, el cual es la suma de las fuerzas clásicas de **Ocvirk** más las fuerzas de presión, obtenemos un sistema de dos ecuaciones no lineales con respecto a una excentricidad fija  $\epsilon_{pres}$  y a el ángulo de actitud  $\phi_{pres}$ . La solución del sistema de ecuaciones se obtiene proporcionando valores ya establecidos a la excentricidad, la cual tiene un rango que va de 0.1 a 0.9 de cinco en cinco con cantidades adimensionales, con ayuda del programa **MATHEMATICA 6** resolvemos este sistema usando el método gráfico. Por último, por medio de un proceso matemático iterativo llegamos a determinar la posición del muñón con exactitud. Los resultados se muestran en tablas, éstas describen todos los datos obtenidos, posteriormente con estos valores se representa gráficamente la ubicación del rotor, así como el cambio relativo del muñón.

En el capítulo I se elaborará una investigación que describe históricamente el desarrollo e investigación en rotodinámica, además de la importancia que ha tenido esta útil disciplina, y su relación con las chumaceras.

En el capítulo II se analizará, expondrá y se llevará acabo la deducción completa del modelo matemático que se usará para una chumacera híbrida corta presurizada con puertos puntuales de inyección de lubricante.

En el capítulo III, los puertos de inyección de lubricante se ubicarán horizontalmente, correspondientes a  $\pi/2$  y  $3\pi/2$  estos se analizarán independientemente, además se llevará a cabo un estudio completo, mostrando el comportamiento del campo de presión en forma analítica, el cambio relativo y la ubicación final del rotor con enorme precisión.

En el capítulo IV nuestro estudio corresponderá a los casos para el cual colocamos cuatro diferentes puertos de inyección en  $\pi/4$ ,  $3\pi/4$ ,  $5\pi/4$  y  $7\pi/4$  analizados independientemente, aquí de igual manera se llevará acabo una completa investigación similar al capitulo anterior.

En el capítulo V expondremos nuestras conclusiones, como parte de éstas se lleva acabo una comparación de resultados de todos los datos obtenidos de los seis puertos analizados independientemente, incluyendo los resultados logrados por el Dr. Ignacio Ramírez Vargas en su tesis doctoral quien estudio dos casos particulares, ubicando los puertos de inyección de lubricante en la parte superior e inferior de la chumacera, también se lleva a cabo algunas recomendaciones, así como sugerencias para trabajos futuros, por último se muestran los programas usados en MATHEMATICA 6 de todos los cálculos efectuados.





## ABSTRACT

The present work deals with the modeling and determination of attitude angle dependent of the stationary eccentricity, which determines exactly the precise position of wristpin for hybrid short journal bearing with horizontal port of punctual pressurizing, therefore we will analyze in two different chapters (II and III) in which will be six individual cases placing the injection port oil. Initially we use the known **Dirac's spatial delta function** which allows obtaining the pressure field in close analytical form, after using the pressure field components of film oil, which is the sum of **Ocvirk's** classic force and pressure force, we obtain a system equation non linear with respect to stationary eccentricity  $\varepsilon_{pres}$  and attitude angle  $\varphi_{pres}$ . The solution of the equation system is obtained providing established range from 0.1 to 0.9 and interval ranging from 5 on 5 with adimensional quantity, through of **MATHEMATICA 6** program we solve this equation system by graphic method, finally by an iterative mathematic process we could determine the position of rotor with precision. The results showed in tables, those describe all data obtained, which are depicted in a graphs.

Chapter I presents a research that describes the history and develop of rotodynamic, also the importance which have had this useful discipline and its relationship with journal bearing.

Chapter II it will be analyze to expose and to carry out all deduction of mathematic model that will be used for pressurized short hybrid journal bearing with point injection port oil.

In chapter III, the injection port oil will be located on horizontal plane which corresponding to  $\pi/2$  and  $3\pi/2$ , it will be analyzed in independent form and carried out a complete study showing the behavior of pressure field in close analytical form, relative change and the final position of rotor with high precision.

In the Chapter IV our analysis correspond to the cases in which we located four different injection ports oil on  $\pi/4$ ,  $3\pi/4$ ,  $5\pi/4$  and  $7\pi/4$  analyzing each one, independently in similar form to the last chapter.

Last chapter V we will expose our conclusions as a part of those one a comparison will be held of all final results of tables which corresponding to the six injection ports oil including the data obtained by Dr. Ignacio Ramirez Vargas in his thesis, which he studied two particular cases, which corresponds to an injection port located at the upper and lower axis of the journal bearing, also in order to carry out the calculus. Also we proposed some recommendation and suggestions as well as future works, finally we will show the programs development on MATHEMATICA 6 of all calculus realized.





### OBJETIVO

El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento de la chumacera híbrida corta con puertas horizontales de presurización puntual, así también extenderemos el análisis para los casos en donde ubicamos los puertos a  $45^{\circ}$ ,  $135^{\circ}$ ,  $225^{\circ}$  y  $315^{\circ}$  con el fin de obtener un mayor conocimiento sobre el comportamiento de la chumacera, además de obtener las fórmulas analíticas de posición de equilibrio y ángulos de actitud.

Se pretende investigar analíticamente la influencia de presión sobre las propiedades dinámicas y de estado estable de chumaceras cortas, utilizando el campo de presión que incluye presurización, con el cual podemos evaluar estas nuevas posiciones de equilibrio.

También pretendemos que cuando se lleve a cabo un diseño, se cuente con un mayor campo de conocimiento en chumaceras hidrodinámicas con puertos de presurización puntual, para poder predecir principalmente el comportamiento de la estabilidad debido a diferentes ubicaciones en las puertas de presurización y así determinar en que posición es más adecuado colocar estas.





## JUSTIFICACIÓN

La presurización es uno de los métodos modernos de control de vibraciones en un sistema rotor con chumacera híbrida, la cual tienen por objeto el reducir las amplitudes de vibración, al cambiar los valores de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento.

El estudio de esta importante disciplina, se ha llevado a cabo en los laboratorios de vibraciones y rotodinámica de algunas compañías. Sin embargo actualmente el Laboratorio de Vibraciones y Rotodinámica de la SEPI-ESIME-IPN (cuyo fundador es el Dr. Julio Cesar Gómez Mancilla, y sus actuales colaboradores el Dr. Valery R. Nossov y el Dr. Jesús Meda) es el líder nacional en estos tópicos aunado a ello el desarrollo de la tecnología asociada a la dinámica, la lubricación aplicada y las vibraciones de turbomaquinaria.

Por otro lado, cabe mencionar que los estudios teóricos del fenómeno de presurización no corresponde a la importancia de este trabajo, la tesis presentada va a considerar un punto de vista teórico exclusivamente enfocado a la obtención de formulas analíticas, ya que estas mismas no existen. Hasta ahora existen estudios numéricos que reportan algunos resultados, sin embargo por la naturaleza de estos métodos, los resultados no se obtienen con la rapidez que se espera.

Asimismo, no hay muchos trabajos analíticos en los cuales se hayan encontrado resultados relevantes y aplicables a casos prácticos. Este trabajo, continúa estudios previos presentados por el Dr. Ignacio Ramírez Vargas y el M. en C. Ordóñez A. Pantoja, que estudiaron el caso de chumaceras híbridas con presurización vertical.



## INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, el consumo de bienes y servicios, así como de energía que demanda la población mundial se ha incrementado enormemente, debido a ello las máquinas rotatorias de diversas industrias tales como la petrolera, termoeléctrica, eólica, etc. y todas aquellas donde se utilicen éstas, tuviesen que ser rediseñadas para que aumenten su capacidad productiva.



Fig. VII. 1 Chumacera típica.

Dichas máquinas, tuvieron la necesidad de ser montados sobre elementos mecánicos, los cuales dieran soporte y permitiesen el giro de los ejes, comúnmente estos dispositivos mecánicos rotatorios son denominados **Chumaceras**.- la Fig. VI.1 muestra una chumacera o “cojinete” típico usado normalmente para la maquinaria rotativa.

Por éstas razones los cojinetes han tenido que sufrir un enorme cambio en su diseño, pues ahora se requiere que éstos mecanismos tengan que sustentar una mayor carga así como una mas elevada velocidad de operación “velocidad umbral”, aunado a ello se ha tenido que evitar una diversa gama de problemas nuevos que se han presentado como **la vibración**, fricción, desbalance y todos aquellos factores productores de la inestabilidad; es importante mencionar que existe un gran número de circunstancias productoras de vibración, a continuación presentaremos los casos mas estudiados[8].

- Vibración debida a desbalanceo.
- Vibración debida al desalineamiento.
- Vibración debida a excentricidad.
- Vibración debida a rodamientos defectuosos en chumaceras.
- Vibración proveniente de la maquinaria ubicada en las cercanías.
- Vibración ocasionada por elementos de la máquina misma.
- Vibración debida al aflojamiento mecánico.
- Vibración debida a bandas de accionamiento.
- Vibración debida a problemas en los engranajes.
- Vibración debida a Fallas eléctricas.



Anteriormente, hasta hace unas décadas, las chumaceras más comunes eran dispositivos mecánicos como el que se muestra en la Fig. VI.1, éstos mecanismos estaban soportados sobre esferas macizas, los cuales funcionan como apoyo para un eje el cual facilita su giro y reduce fricción y esfuerzos. Según el tipo de contacto entre las piezas, los cojinetes pueden ser de deslizamiento o de rotación y según el elemento de rotación que llevan en su interior los hay de bolas, rodillos o de agujas. También hay cojinetes radiales o axiales en función del tipo o sentido del esfuerzo sobre el mismo, éstos dispositivos de acero los cuales se lubrican con grasa y aceite, son los encargadas de transmitir movimiento además de sostener todo el peso del sistema. Lógicamente al aumentar de tamaño la turbomaquinaria debido a los requerimientos de la época actual, se ha incrementado proporcionalmente el peso del sistema, aunado a ello el incremento proporcional de mayores velocidades, lo que produjo que el diseño y construcción de estos rodamientos ya no fuese adecuado, pues entre algunos problemas comunes que se produjeron estaba el calentamiento, lo que se veía reflejado en el debilitamiento de las propiedades físicas y mecánicas del metal, produciendo así inminentes fracturas o rupturas de costosos mecanismo, provocando terribles accidentes.

Debido a esta serie de problemas surgió la necesidad de que los investigadores desarrollaran nuevos métodos para atenuar desgaste rápido y calentamiento de los baleros o de diversos rodamientos y así mismo el poder desarrollar nuevas ideas que solucionaran estas enormes dificultades.

Gracias a la contribución experimental y teórica por parte de diversos investigadores a lo largo de los años, así como innovaciones surgida en E.U. por BENTLY-NEVADA, compañía dedicada a la investigación experimental en equipo rotatorio empeñada en proseguir, diseñar e investigar hipótesis y teorías desarrolladas por Beauchamp Tower junto con diversos colegas de finales del siglo XIX, tales teorías surgen a raíz de ciertos experimentos, en los cuales al trabajar con diversos lubricantes tales como los aceites, los cuales tenían la función de evitar calentamientos e inhibir en mayor posible la fricción en los cojinetes, se descubrió que en la película de aceite del lubricante se producían interesantes fenómenos tales como el aumento de presión y velocidad y que además **esta película de aceite era lo suficientemente fuerte como para evitar cualquier contacto con otra superficie en movimiento**. Es así como diversos experimentos realizados dedujeron que era muy factible y útil el usar una película de aceite, la cual sería el medio físico para evitar el contacto directo entre dos superficies en constante movimiento y así eliminar el uso de rodamientos mecánicos como esferas de acero u otros materiales, a estos nuevos dispositivos sustentados sobre una delgada película de aceite se les denominó Chumaceras hidrodinámicas.

En las últimas décadas, las actuales chumaceras hidrodinámicas han sufrido algunas modificaciones en su diseño y manufactura, prosiguiendo hasta nuestros días el desarrollo e investigación en nuevos modelos. En la Fig. VI.2 se muestra la chumacera usada por BENTLY-NEVADA colocando los puertos de inyección de lubricante en forma simétrica [1].



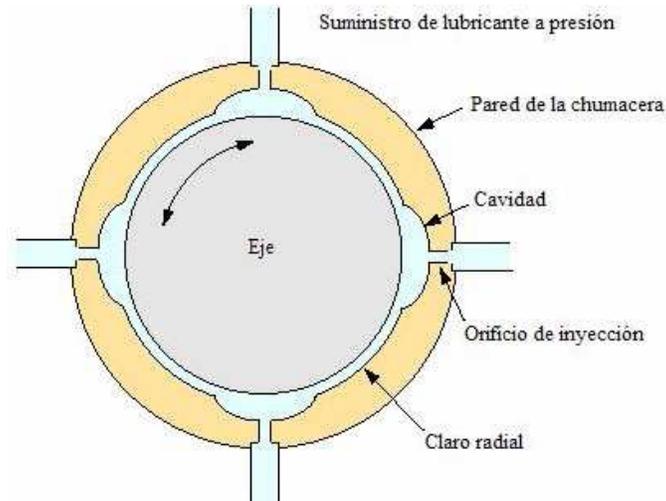


Fig. VII.2. Configuración de una chumacera presurizada usada por BENTLY-NEVADA [1].

Todo lo anterior tiene como propósito fundamental el lograr que su comportamiento mecánico-dinámico de una chumacera hidrodinámica se perfeccione y permita satisfacer las exigencias de nuestros tiempos.

En la presente tesis proporcionamos una aportación significativa en la línea de investigación de la rotodinámica, además del análisis y desarrollo en la ubicación de puertos en chumaceras híbridas cortas, colocando estos horizontalmente así como en los cuatro cuadrantes ubicados a 45 grados, obteniendo importantes y útiles resultados que sugieren la mejor ubicación para cada uno de estos puertos de inyección de lubricante además de proporcionar la ubicación exacta del rotor de cada puerto de inyección de lubricante variando la presurización.

# CAPÍTULO I

Estado del arte y revisión de literatura existente.

## 1.1 Antecedentes:

Hasta finales del siglo XVIII el hombre sólo había utilizado **herramientas**, instrumentos inertes cuya eficacia depende por completo de la fuerza y la habilidad del sujeto que los maneja. El motor aparece cuando se consigue transformar la energía de la naturaleza en movimiento. La unión de un instrumento hábil y un motor, señala la aparición de la **máquina**, el agente que ha causado el mayor cambio en las condiciones de vida de la humanidad. La aparición de las máquinas, instrumentos fundamentales para el desarrollo, que utilizan energía natural en vez de humana, constituye la línea divisoria entre dos formas de producción, la maquina creó las condiciones idóneas para el consumo en masa, característicos de la época actual, la Fig. 1.1 muestra el acoplamiento de mecanismos rotativos los cuales son base para un mayor progreso.

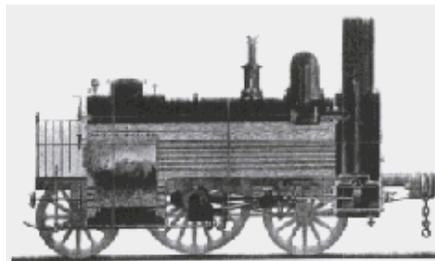


Fig. 1.1 Primeras máquinas rotativas.

Estas nuevas máquinas favorecieron enormes incrementos en la capacidad de operación, además de la aplicación de la ciencia y tecnología las cuales permitieron el diseño de nuevas máquinas que mejoraban los procesos productivos.



Fig.1.2 Desarrollo de locomotoras.

Consecuentemente esta necesidad humana de seguir construyendo máquinas más grandes y de mayor capacidad productiva produjo muchas ventajas, aunque también se presentaron enormes problemas, pues al aumentar las dimensiones y velocidades de operación de éstas, naturalmente aumentaron las fuerzas inerciales generalizadas y aceleraciones. El aumento de éstas fuerzas incremento enormemente el peso del sistema, resultando muy difícil el control de éstas gigantescas máquinas, lo que produjo muchas veces enormes accidentes y pérdidas económicas debido a la falta de conocimiento en el diseño y fabricación de éstos poderosos mecanismos. La Fig. 1.3 muestra un accidente en un rotor [1] producto de no llevar a cabo un adecuado control y diseño en construcción de maquinaria rotativa.

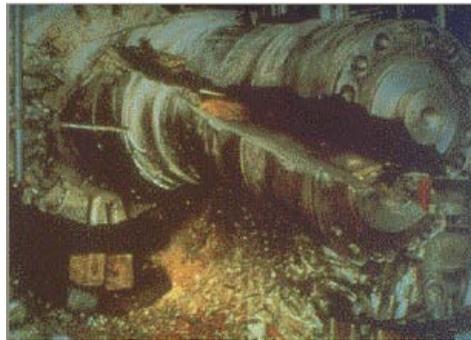


Fig.1.3 Fractura de un eje de maquina rotatoria.

Posteriormente, el adquirir mayor experiencia gracias a la investigación y ayuda de diversos avances tecnológicos se crearon nuevas disciplinas perfeccionando el conocimiento humano, tal como la **rotodinámica**, ciencia que ayudo a mejorar y construir turbomaquinaria satisfaciendo así en cierto grado las necesidades requeridas.

En la fig. 1.4 se observa el montaje de nuevos y modernos elementos mecánicos rotatorios, tal como un rotor de una turbina de vapor, todo ello gracias a los nuevos avances científicos y tecnológicos en turbomaquinaria.



Fig. 1.4 Ejemplo de maquinaria rotativa.

Con el desarrollo de la **rotodinámica**, ciencia de la mecánica la cual analiza y predice el comportamiento dinámico en turbomaquinaria, ofrece un enorme campo de estudio, además de crear múltiples beneficios en diferentes áreas del conocimiento humano, ya que su aplicación es muy extensa, en sitios donde se requiera maquinaria rotativa de alta eficacia y potencia. Así mismo el desarrollo de esta importante disciplina ha permitido la creación e innovación de nueva tecnología, impulsando el desarrollo de nuevos campos de estudio como la mareomotriz, eólica, eléctrica e hidráulica entre muchos otros. La Fig. 1.5 muestra el enorme desarrollo en diversas áreas específicas gracias a la rotodinámica.



Fig.1.5 Turbina de vapor.

## 1.2 Desarrollo e investigación en rotodinámica.

Gracias al progreso de la rotodinámica se han logrado grandes avances tecnológicos en el desarrollo de máquinas rotatorias; así mismo un mayor conocimiento de diversos fenómenos que se presentan cuando se trabaja en el diseño de turbomaquinaria.

Es a principios del siglo XX donde diversos investigadores han publicado análisis relacionados con la rotodinámica.

Jeffcott publica el primer artículo relacionado con teoría fundamental en rotodinámica en el año de 1919 [6], así mismo W.J. Harrison [7] muestra el comportamiento de la chumacera con lubricación completa, la cual funcionaría de base para demostraciones en estudios recientes, ya que él aseguraba que éstos fenómenos eran inestables y no se podían controlar, **sin embargo presurizando a una chumacera adecuadamente, forzando el lubricante a desplazarse axialmente a lo largo de la flecha con lubricación completa podría lograrse una estabilidad.**

Foopl demostró en 1825 algunas teorías experimentales hechas por Laval explicando analíticamente el porque es posible la operación por arriba de la velocidad crítica [2].

Años más tarde en 1883 Nikila Petrof mediante estudios hidrodinámicos concluyó que la fricción en chumaceras era ocasionada por estos mismos fenómenos [2].



El investigador ruso J.V. Fedor desarrolló en 1960 y 1961 una metodología para el cálculo del campo de presión de una chumacera presurizada en un puerto cuya ubicación es arbitraria, siendo éstos los primeros que empiezan a experimentar en chumaceras presurizadas con un puerto de inyección [1].

Debido a la dificultad en estos análisis se tuvo que recurrir a las computadoras, creando así diversos programas para modelar y simular dichos problemas. De esta forma en 1972 usando el método del elemento finito el investigador Ruhl y Booker iniciaron estos análisis [1].

Más tarde en el 2002 Donald Bently [1] con ayuda de las computadoras y junto con dos de sus colegas usando la colocación de diferentes puertos de inyección de lubricante, trató de que la presurización externa hiciese que el muñón se mantenga lo más cerca posible del centro geométrico de la chumacera, así mismo publicó algunos análisis efectuados en su libro denominado Externally Pressurized and Machinery Diagnostic.

De igual manera cabe destacar que en México se han efectuado algunos avances significativos en esta disciplina, los cuales coadyuvan para lograr una mayor aportación en el avance y desarrollo de turbomaquinaria mundial. Actualmente existen diversos centros de investigación donde se llevan a cabo análisis relacionados con rotodinámica, aunque es en el laboratorio de vibraciones y rotodinámica de ESIME en el I.P.N. encabezado por el Dr. Julio Cesar Gómez Mancilla (fundador) donde se han presentado diversos análisis significativos. A continuación mencionaremos los más destacados.

Kucherenko y Gómez Mancilla [3] desarrollan el modelo de un sistema rotor-chumacera donde fueron considerados los efectos no lineales relacionados con las fuerzas en las chumaceras.

Antonio García, Gómez Mancilla y Valery Nossov [3] reportan la obtención de expresiones explícitas de la velocidad umbral de estabilidad en función de la excentricidad cuando se utilizan ambas configuraciones típicas del modelo de Jeffcott, además utilizando coeficientes rotodinámicos para chumaceras infinitamente cortas (Solución de Ocvirk) y para chumaceras infinitamente largas, ellos presentan gráficas de la velocidad umbral como función de la excentricidad de equilibrio.

Ordoñez Pantoja [3] propuso un diseño nuevo de chumacera con presurización externa que presenta características rotodinámicas semejante a la de levitación magnética.

Santana Mora [3] reportó que mediante el uso de chumaceras híbridas controlables se logra reducir las amplitudes de vibración provocadas por el desbalance y el desalineamiento.

Ignacio Ramírez Vargas, Valery Nossov y Gómez Mancilla [2] presentan un estudio de chumaceras que incluye el cálculo del campo de presión y las fuerzas generalizadas por el mismo campo. Actualmente se sabe que es de primordial importancia el poder controlar y atenuar las amplitudes de vibración, las cuales son causa de prematuro envejecimiento y fallas en los mecanismos, más importante aún es mencionar que recientes investigaciones





han demostrado que **frecuentes exposiciones de vibración al ser humano pueden causar daños a la salud y afectar la vida.**

Avances significativos en rotodinámica han proporcionado nuevos conocimientos, así se ha demostrado que las velocidades de resonancia dependen del valor de las rigideces que tienen los soportes [1] “cojinetes” por ello es de enorme relevancia el proseguir con estudios posteriores y así conocer más de estos importantes fenómenos.

Por medio de diversas experimentaciones recientes sabemos que mediante la aplicación de la presurización externa en chumaceras hidrodinámicas [1] podemos cambiar los valores de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento. Sin embargo por el hecho de ser fenómenos muy complejos y en los cuales se requiere de un amplio conocimiento, resulta difícil lograr resultados rápidos y útiles, con todo esto podemos plantear una serie de objetivos y análisis rotodinámicos siendo el propósito de estos [8]:

- a) Determinar y comprobar de velocidades críticas.
- b) Evaluar del comportamiento operacional de la turbomaquinaria en función de la normatividad aplicable.
- c) Identificar las amplitudes de vibración síncrona causadas por desbalanceo del rotor.
- d) Modificar el diseño para cambiar velocidades críticas.
- e) Predecir velocidades de disparo y frecuencias de vibración en el análisis de inestabilidad dinámica.
- f) Modificar del diseño para eliminar o atenuar inestabilidad dinámica.
- g) Predecir frecuencias naturales en vibraciones torsionales.

### 1.3 Desarrollo y clasificación de chumaceras.

A partir de la invención de la rueda y posteriormente el acoplarla a distintos mecanismos para poder llevar a cabo un desplazamiento, o simplemente para realizar un movimiento, hubo que desarrollar un elemento mecánico el cual permitiera realizar estos trabajos proporcionando la mejor estabilidad, así mismo evitar el mayor desgaste, aunado a ello un dispositivo fácil y económico que pudiese sustentar todo el peso del sistema, tal dispositivo es denominado chumacera o cojinete.

Las chumaceras son dispositivos mecánicos fijos de forma cilíndrica en cuya parte interior se encuentra girando un eje el cual se usa para soportar cargas radiales o simplemente como una guía para transmitir un par con un mínimo de pérdida por desgaste, inhibiendo el contacto directo entre dos superficies específicas en movimiento.

En la actualidad existen diversos tipos de cojinetes utilizados en maquinaria rotatoria, así



mismo prosigue el desarrollo, investigación e innovación en estos dispositivos pues en la actualidad todavía no existe un diseño único que funcione perfectamente para evitar o reducir los diversos problemas dinámicos-vibratorios que se presentan en turbomaquinaria. [2].

Comúnmente los cojinetes más usados son los soportados por baleros Fig. 1.6, aunque en las últimas décadas se han investigado otras alternativas, como las chumaceras de levitación electromagnética, las hidrodinámicas y recientemente las híbridas, **las cuales corresponden al presente estudio.**

En la Fig. 1.6 se representa una chumacera típica soportada por baleros, pero con la innovación de poseer en la parte superior de la carcasa un puerto de suministro de grasa para lubricar periódicamente el mecanismo, de esta forma poder extender el buen funcionamiento así como la vida útil de este dispositivo, además de poder elaborar planes de mantenimiento, parte clave para alargar la utilidad de la chumacera.

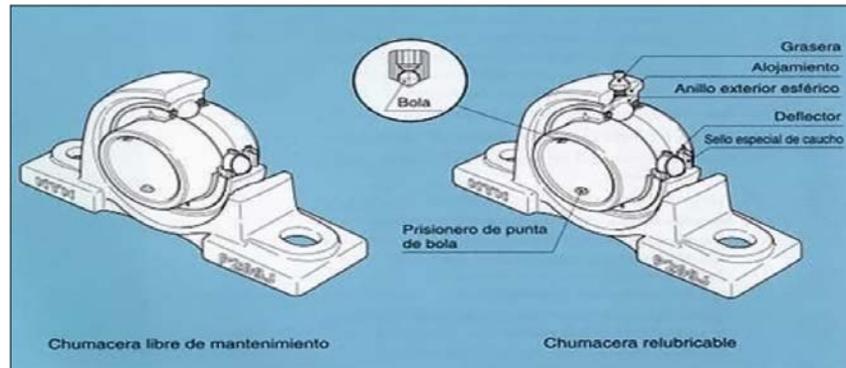


Fig. 1.6 Cojinete de bolas re-lubricable.

Debido a que las máquinas rotativas de alta eficiencia son cada vez más comunes en la industria actual, diversos investigadores a lo largo de los años han aportado significativos avances tanto teóricos como experimentales, con la finalidad de atenuar el excesivo desgaste que sufren las **chumaceras comunes** [10] soportadas por rodamientos de acero o simplemente para sustituir o innovar estos dispositivos.

Las primeras teorías del comportamiento de las chumaceras de película fluídica, fueron desarrolladas solamente para disminuir la fricción, es a finales del siglo XIX donde el investigador Beauchamp Tower desarrolló los primeros experimentos para medir la presión del fluido lubricante en diferentes partes de la chumacera considerando la distribución de presiones dentro de la película de aceite [1].

De esta forma se desarrollo toda una teoría y análisis sobre las chumaceras hidrodinámicas surgiendo así la rotodinámica [1], materia encargada de la elaboración de diversas investigaciones y teorías, la cual tiene como objetivo principal el estudio de las Turbomaquinarias.

La Fig. 1.7 representa la sección transversal de una chumacera hidrodinámica lubricada por aceite, en la cual podemos observar un puerto de inyección de lubricante, es importante mencionar que este tipo de cojinetes es usado para soportar maquinas de enorme peso, y que exigen altas velocidades y estabilidad, sustituyendo así a los cojinetes mecánicos comunes, montadas sobre baleros los cuales no podrían sostener tal demanda de esfuerzo.

Por sus características dinámicas de rigidez y amortiguamiento las chumaceras lubricadas controlables de película de fluido han probado ser la solución más apropiada para disminuir el desgaste, la fricción, las vibraciones mecánicas [9] así como las resonancias y las vibraciones excitadas por los desbalances y fisuras en el eje, así mismo el postergar la inestabilidad.



Fig. 1.7 Chumacera hidrodinámica.

Cabe mencionar que otro tipo de cojinetes que actualmente están en desarrollo son los electromagnéticos [2] pero por su excesivo costo además de otras problemáticas impiden un rápido desarrollo.



Fig. 1.8 Cojinete de levitación magnética o electromagnético [2]



A continuación presentaremos una clasificación de cojinetes más amplia debido al tipo de contacto [2].

## **Elemento antifriccionante:**

- Seco.
- Rodadura:

**I. AGUJAS  
II. RODILLOS  
III. BOLAS**

- Esférico:

## **Levitación magnética:**

## **Película flúidica:**

- Capa solida:
- Presurizado interiormente y exteriormente:

**I. HIDRODINÁMICA  
II. HÍBRIDA  
III. HIDROSTÁTICA**



# CAPÍTULO II

**Modelo teórico para una chumacera corta con puertos horizontales de presurización puntual.**

## 2.1 Análisis y condiciones en términos de velocidad, gravedad y presión para una chumacera corta:

Número de Reynolds: En este paso en el cual estamos deduciendo la ecuación de Reynolds, es de suma importancia el saber la relación que existe entre las fuerzas de inercia y las viscosas, ya que es parte importante para el diseño de una chumacera presurizada en la cual, el medio para evitar el contacto entre dos superficies es un líquido viscoso. Sabemos que “u” representa la velocidad del fluido y v es la velocidad que atraviesa el fluido Fig. (2.1) por lo tanto  $v \ll u$  de esta forma sabemos que:

$$u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) > v \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.31)$$

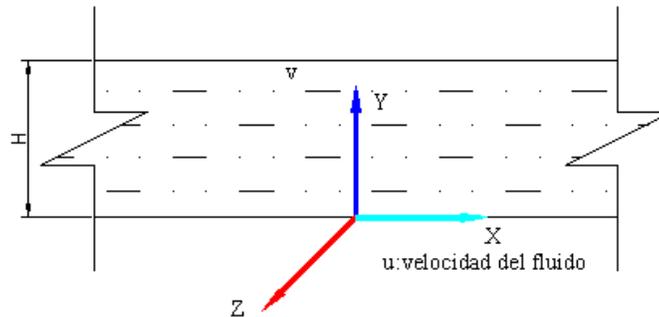


Fig. 2.1 Representación del espesor de la película de aceite.

Si consideramos que el ancho y la longitud son casi iguales:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{u_0}{R} \quad \text{y} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{u_0}{R}. \quad (2.32)$$

Ahora bien sabemos que “u y v” son casi iguales, si w representa la velocidad del fluido en dirección al eje “z” por lo tanto la u será casi igual en la dirección del movimiento:

$$u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) > w \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (2.33)$$

De esta expresión el término  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$  se denomina el término inercial preponderante. Sabemos que las fuerzas viscosas están compuestas de los siguientes variables,  $\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$  variando “x” en la dirección “y” y “z” a las cuales comparando y evaluándose tenemos:

$$\frac{\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}{\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)} \approx \frac{\left(\frac{1}{R}\right) \left(\frac{u}{R}\right)}{\left(\frac{1}{C_r}\right) \left(\frac{u}{C_r}\right)} = \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 \ll 1 \quad (2.34)$$

Si comparamos las fuerzas viscosas con las de inercia resulta:

$$\frac{\rho u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)} \approx \frac{\rho u_0 \left(\frac{u_0}{R}\right)}{\mu \left(\frac{u_0}{C_r^2}\right)} \approx \frac{\rho u_0}{\mu} \left(\frac{C_r^2}{R}\right) = \frac{\rho u_0 R}{\mu} \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 = Re \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 = Re_* \quad (2.35)$$

Siendo  $Re_*$  (número de Reynolds modificado), esta expresión nos demuestra que en chumaceras cortas los valores inerciales tienden a desprejarse, pues son de un valor muy pequeño en comparación con las viscosas. Si demostramos en un ejemplo clásico [1], y siendo:

- $\left(\frac{C_r}{R}\right)^2 = 10^{-6}$  (término inercial)
- $Re = \frac{(\rho u_0 R)}{\mu} = 440.102$  (chumacera corta típica término viscoso)

$$\therefore Re_* = Re \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 = 0.0004 \text{ Predominando el término viscoso.}$$

Número de Froude (fuerzas de gravedad): Muestra la relación existente entre las fuerzas de gravedad y las de inercia, a continuación tomaremos valores clásicos para una chumacera corta típica por lo tanto:

- $\rho g = 8593.53$  (fuerza de gravedad por unidad de volumen)
- $\rho u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 1.7273e6$  (fuerza de inercia)

Hacemos:

$$\text{Número de Froude} = \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas de gravedad}} = \frac{\rho u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\rho g} \approx \frac{u_0 \left(\frac{u_0}{R}\right)}{g} = \frac{u_0^2}{gR} \quad (2.36)$$

$$\therefore \text{Número de Froude} = \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas de gravedad}} = 201 \text{ (valor chumacera típica)}$$

Los valores mostrados indican que las fuerzas de gravedad son muy pequeñas, e incluso se pueden despreciar en comparación con las fuerzas de inercia. Otra manera de poder constatar estos valores es dividiendo el número de Reynolds entre el número de Froude, de esta forma constataremos como las fuerzas de gravedad son muy pequeñas en comparación con las viscosas resultando:

$$\frac{Re}{Fr} = \frac{\frac{(\rho u_0 R)}{\mu} \left(\frac{C_r}{R}\right)^2}{\frac{u_0^2}{gR}} = \frac{\rho g C_r^2}{\mu u} = 2.189 \times 10^{-6}$$

Número de Euler (fuerzas de presión): Es la relación que existe entre las fuerzas de presión relativas y las fuerzas de inercia resultando:

$$\text{Número de Euler} = \frac{\text{fuerzas de presión}}{\text{fuerzas de inercia}} = \frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\rho u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \approx \frac{P_{\text{referencia}}}{\rho u_0^2} = 144.72, \quad (2.37)$$

- $P_{\text{referencia}}$ : 5Mpa (valor promedio para una chumacera corta)

Por lo anterior podemos deducir que la presión es una cantidad muy considerable en comparación con la de inercia. Otra forma de poder constatar este valor es el producto del número de Reynolds por el número de Euler resultando:

$$(\text{Número de Euler})(\text{Número de Reynolds}) = \frac{P_{\text{referencia}}}{\rho u_0^2} \frac{(\rho u_0 R)}{\mu} \left(\frac{C_r}{R}\right)^2,$$

$$\therefore (\text{Número de Euler})(\text{Número de Reynolds}) = \frac{P_{\text{referencia}} R}{\mu u_0} \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 = 0.063.$$

Los análisis anteriores dan como resultado una serie de hipótesis las cuales resultan aplicables a chumaceras hidrodinámicas [1] estas serán nuestro argumento a la hora de desarrollar nuestras ecuaciones por lo tanto:

- Se asume que el fluido es newtoniano, donde los esfuerzos cortantes y las velocidades de deformación son directamente proporcionales.
- Los términos de inercia y las fuerzas de cuerpo se consideran despreciables cuando se comparan con los términos viscosos.
- La variación de la presión a través del espesor de la película se asume que es despreciable  $\partial p / \partial y = 0$
- Los efectos de la curvatura son despreciables, esto implica que el espesor de la película del lubricante es mucho mas pequeño que la longitud o el ancho de la chumacera, tal que el dominio físico del flujo se puede desenvolver, esto permite el uso de coordenadas cartesianas.

## 2.2 Deducción de la ecuación de Reynolds:

A finales del siglo XIX en el auge de la revolución industrial muchos científicos en el mundo desarrollaban teorías para poder explicar y entender los fenómenos relacionados con la hidrodinámica. Uno de los más destacados fue Osborne Reynolds conjuntamente otros teóricos trabajaban sobre una teoría de la lubricación hidrodinámica. Esta teoría se publicó en 1886 en el Proceedings of the Royal Society de Londres por Reynolds la cual se denomina **ecuación de Reynolds**, en ella se expone la primer prueba analítica de que un líquido viscoso podía separar físicamente dos superficies en movimiento por medio de presión hidrodinámica, evitando así el contacto, lo cual producía la fricción, calentamiento, etc.. A continuación presentaremos un resumen de las ecuaciones más usadas para el caso en el cual estaremos trabajando con una chumacera corta.

La ecuación que describe el campo de presión es una simplificación de las ecuaciones de Navier Stokes, a continuación se presenta la deducción completa [1].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\rho \partial x} + \gamma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\rho \partial y} + \gamma \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\rho \partial z} + \gamma \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.3)$$

Donde:

- $\rho$  = Densidad.
- $\mu$  = Viscosidad absoluta.
- $p$  = Presión.
- $u, v, w$  = Componentes de velocidad del fluido en  $x, y, z$ .

Añadiendo los siguientes factores adimensionales.

$$\bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \bar{y} = \frac{y}{c_r}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R}, \quad (2.4)$$

$$\bar{u} = \frac{u}{\omega R}, \quad \bar{v} = \frac{v}{\omega c_r}, \quad \bar{w} = \frac{w}{\omega R}, \quad \tau = \omega t. \quad (2.5)$$

Ahora bien, para la ecuación (2.1) y sustituyendo (2.4) y (2.5) en cada término del primer miembro y resolviendo tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial \left(\frac{\tau}{\omega}\right)} = \omega^2 R \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(R\bar{x})} = \omega \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}, \quad (2.7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = w^2 R \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(C_r \bar{y})} = \omega \left(\frac{R}{C_r}\right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}, \quad (2.9)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = \omega^2 R \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(R\bar{z})} = \omega \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}, \quad (2.11)$$

$$w \frac{\partial u}{\partial z} = \omega^2 R \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}. \quad (2.12)$$

De igual manera sustituyendo (2.4) y (2.5) en el miembro derecho de la misma ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(R\bar{x})^2} = \frac{\omega \partial^2 \bar{u}}{R \partial \bar{x}^2}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(C_r \bar{y})^2} = \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(\omega R \bar{u})}{\partial(R\bar{z})^2} = \frac{\omega}{R} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}. \quad (2.15)$$

Conociendo las siguientes igualdades tenemos:

$$\bar{p} = \frac{p}{p_{dim}} \quad \therefore p_{dim} = \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r}\right)^2,$$

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{1}{\rho}\right) \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial(R\bar{x})} = \gamma \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\bar{x}}. \quad (2.16)$$

Sustituyendo estos resultados en la primer ecuación (2.1) llegamos a:

$$\omega^2 R \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = -\gamma \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \gamma \frac{\omega}{R} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right]. \quad (2.17)$$

Desarrollando de igual manera para la segunda ecuación (2.2):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(\omega C_r \bar{v})}{\partial\left(\frac{r}{\omega}\right)} = \omega^2 C_r \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau}, \quad (2.18)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} = \omega^2 C_r \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}, \quad (2.19)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = \omega^2 C_r \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}, \quad (2.20)$$

$$w \frac{\partial v}{\partial z} = \omega^2 C_r \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}}, \quad (2.21)$$

Para el miembro derecho de la segunda ecuación:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\omega C_r \bar{v})}{\partial(R\bar{x})^2} = \frac{\omega C_r}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(\omega C_r \bar{v})}{\partial(C_r \bar{y})^2} = \frac{\omega}{C_r} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(\omega C_r \bar{u})}{\partial(R\bar{z})^2} = \frac{\omega C_r}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2}, \quad (2.24)$$

Sustituyendo las mismas igualdades.

$$\bar{p} = \frac{p}{p_{dim}} \quad \therefore p_{dim} = \rho \gamma \omega \left( \frac{R}{C_r} \right)^2,$$

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y} = \left( \frac{1}{\rho} \right) \rho \gamma \omega \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial(C_r \bar{y})} = \gamma \frac{\omega}{C_r} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\bar{y}}. \quad (2.25)$$

Por último sustituimos en la segunda ecuación:

$$\omega^2 C_r \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) = -\gamma \frac{\omega}{C_r} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \gamma \frac{C_r \omega}{R^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \gamma \frac{\omega}{C_r} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}. \quad (2.26)$$

Llevando cabo el mismo proceso para la ecuación (2.3)

$$\omega^2 R \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = -\gamma \frac{\omega}{R} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \gamma \frac{\omega}{R} \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (2.27)$$

Multiplicando los siguientes factores por:

$$\frac{1}{\frac{\gamma \omega}{R} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2}, \quad \text{siendo: } R_e = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{\omega}{\gamma} \quad \therefore R_{e*} = R_e \left( \frac{C_r}{R} \right)^2 R^2.$$

Por lo tanto sustituyendo estos factores, resulta así:

$$R_{e*} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left( \frac{C_r}{R} \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}. \quad (2.28)$$

$$R_{e_*} \left( \frac{c_r}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \left( \frac{c_r}{R} \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \left( \frac{c_r}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}, \quad (2.29)$$

$$R_{e_*} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \left( \frac{c_r}{R} \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right] + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2}, \quad (2.30)$$

$$\frac{c_r}{R} \cong 10^{-3}, \quad R_{e_*} < 1.$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2.28),( 2.29) y (2.30) y resolviendo tenemos:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}. \quad (2.33)$$

Debido a que en la ecuación (2.32) se sabe que:

$$\bar{p}(\bar{y}) = cte. \quad \therefore \bar{p} = \bar{p}(\bar{x}, \bar{z}).$$

Resultando así:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.34)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (2.35)$$

Tomando a la ecuación (2.34), e integrando dos veces:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x,y)}{\partial x} y(y - H) + c_1 y + c_2, \quad u(0) = u_1, \quad u(H) = u_2. \quad (2.36)$$

Reacomodando:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x,z)}{\partial x} y(y - H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1. \quad (2.37)$$

Realizando el mismo procedimiento para la ecuación (2.35):

$$w(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x,z)}{\partial z} y(y - H), \quad w(0) = w(H) = 0, \quad c_1 = c_2 = 0. \quad (2.38)$$

De la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.39)$$

Despejando:

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = +\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Si sabemos que:

$$u_1 = u_1(x, z),$$

$$u_2 = u_2(x, z),$$

$$H = H(x, z).$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad obtenemos:

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-H) \right]. \quad (2.40)$$

Integrando con respecto de “y” obtenemos:

$$-\int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{H(x,z)} \frac{\partial}{\partial x} [u(y)] dy + \int_0^{H(x,z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-H) \right] dy. \quad (2.41)$$

Si utilizamos la regla de Leibnitz para facilitar y resolver (2.41):

Ecuación de Leibnitz:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{(a)} f(x, \alpha) dx = \int_0^{(a)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f(r(\alpha), \alpha) \frac{\partial r}{\partial \alpha}. \quad (2.42)$$

Reacomodando:

$$\int_0^{(a)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{(a)} f(x, \alpha) dx - f(r(\alpha), \alpha) \frac{\partial r}{\partial \alpha}. \quad (2.43)$$

Si se identifican variables para aplicar Leibnitz:

$$x \rightarrow y,$$

$$r(a) \rightarrow H(x, z),$$

$$\alpha \rightarrow x, z.$$

Ya identificadas las variables ahora aplicamos la ecuación de Leibnitz (2.43) al primer término del segundo miembro de la ecuación (2.41):

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1 \right] dy = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^H y(y-H) dy + \frac{u_2 - u_1}{H} \int_0^H y dy + u_1 \int_0^H dy \right] - u_2 \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (2.44)$$

Simplificando y resolviendo las integrales internas de (2.44):

$$= \frac{\partial H}{\partial x} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{H^3}{6} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_1 + u_2}{2} H \right] - u_2 \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (2.55)$$

Similarmente aplicamos la ecuación de Leibnitz (2.43) al segundo término del segundo miembro restante de la ecuación (2.41) y resolviendo tenemos:

$$\int_0^{H(x,z)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-H) \right] dy = - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{H^3}{6} \frac{\partial p}{\partial x} \right]. \quad (2.56)$$

Finalmente sustituimos los resultados (2.55) y (2.56) en (2.41) obteniendo así:

$$v_1 - v_2 = - \frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[ H^3(x,z) \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left[ H^3(x,z) \frac{\partial p}{\partial z} \right] + H \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_1 + u_2}{2} \right] + \frac{u_1 + u_2}{2} \frac{\partial H}{\partial x} - u_2 \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (2.57)$$

Acomodando términos obtenemos la ecuación de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ H^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ H^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 12\mu(v_2 - v_1) + 6\mu(u_1 - u_2) \frac{\partial H}{\partial x} + 6\mu H \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + u_2). \quad (2.58)$$

Debido a que la ecuación (2.58) se encuentra en coordenadas cartesianas no es adecuada para el caso de una chumacera, pues ésta tiene la forma de un cilindro, es por ello que debemos adecuarla a esta modalidad.

Sea  $H$  (espesor de lubricante) en el sistema coordenado cartesiano y puesto que el eje “X” coincide con la superficie estacionaria de la chumacera, las velocidades en ese plano son cero, teniendo así:

Para “x” sabemos que:  $u_1 = v_1 = 0$ .

Sustituyendo esta condición en la ecuación (2.58) resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 12v_2 - 6u_2 \frac{\partial H}{\partial x} + 6H \frac{\partial u_2}{\partial x}. \quad (2.59)$$

Análisis recientes [1] han demostrado que el espesor del lubricante no es constante a lo largo de la circunferencia, por el contrario tiene diversos valores, componiéndose así de un máximo y un mínimo.

Por esta razón debemos encontrar un modelo matemático que represente el espesor del lubricante, conociendo las siguientes variables representadas en la Fig. 2.2:

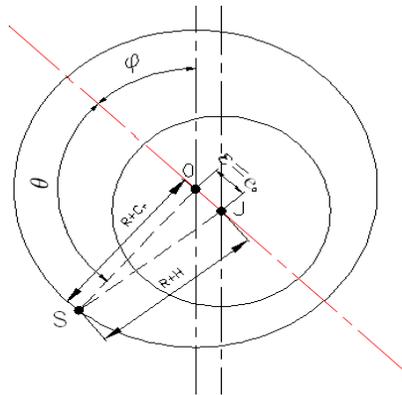


Fig. 2.2 Representación de la línea de centros.

$$(R + H)^2 = (R + C_r)^2 = e_0^2 - 2(R + C_r)e_0^2 \cos(\pi - \theta). \quad (2.60)$$

Desarrollando binomios tenemos:

$$2RH + H^2 = 2RC_r + C_r^2 + e_0^2 + 2e_0^2 R \cos\theta + 2C_r e_0^2 \cos\theta. \quad (2.61)$$

Sabiendo que unos términos son demasiado pequeños:

$$H \rightarrow 0,$$

$$C_r \rightarrow 0,$$

$$e_0 \rightarrow 0.$$

Por lo tanto la ecuación (2.61) queda como:

$$H = C_r + e_0 \cos\theta. \quad (2.62)$$

Siendo las siguientes condiciones:

$$\varepsilon = \frac{e_0}{C_r}, \quad h = \frac{H}{C_r}. \quad (2.63)$$

Transformando (2.63) en forma adimensional:

$$h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos\theta. \quad (2.64)$$



De esta forma caracterizamos las siguientes ecuaciones, correspondientes al centro del muñón “J”.

$$\vec{U}_{\beta} = \vec{U}_n \text{Cos} \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) + \vec{U}_T \text{Sen} \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right), \quad (2.65)$$

$$\vec{U}_{\varepsilon} = -\vec{U}_n \text{Sen} \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) + \vec{U}_T \text{Cos} \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right). \quad (2.66)$$

Desarrollando ambas ecuaciones:

$$\vec{U}_{\beta} = \vec{U}_n \text{Sen} - \vec{U}_T \text{Cos} \theta, \quad (2.67)$$

$$\vec{U}_{\varepsilon} = -\vec{U}_n \text{Cos} \theta + \vec{U}_T \text{Sen} \theta, \quad (2.68)$$

Saber que:  $\varphi + \beta = \frac{\pi}{2}$ .

Por consiguiente el vector de velocidad en el centro del muñón “J” es:

$$\vec{v}_J = C_r \dot{\varepsilon} \vec{U}_{\varepsilon} + C_r \varepsilon \dot{\beta} \vec{U}_{\beta}. \quad (2.69)$$

Sustituyendo (2.67) y (2.68) en el vector de velocidad  $\vec{v}_J$  ecuación (2.69):

$$\vec{v}_J = \vec{U}_n \left( -C_r \dot{\varepsilon} \text{Cos} \theta + C_r \varepsilon \dot{\beta} \text{Sen} \theta \right) + \vec{U}_T \left( C_r \dot{\varepsilon} \text{Sen} \theta - C_r \varepsilon \dot{\beta} \text{Cos} \theta \right). \quad (2.70)$$

De igual manera descomponemos el punto arbitrario “S” en sus velocidades relativas resultando:

$$\vec{v}_{s/J} = \vec{v}_s - \vec{v}_J, \quad (2.71)$$

Despejando:  $\vec{v}_s = \vec{v}_J + \vec{v}_{s/J}$ . (2.72)

Considerando el vector  $\vec{r}_{JS}$ :

$$\vec{r}_{JS} = -[r_{os} - e_o \text{Cos}(\pi - \theta)] \vec{U}_n - [e_o \text{Sen}(\pi - \theta)] \vec{U}_t. \quad (2.73)$$

Desarrollando:

$$\vec{r}_{JS} = -[r_{os} + e_o \text{Cos}(\theta)] \vec{U}_n - [e_o \text{Sen}(\theta)] \vec{U}_t. \quad (2.74)$$

A hora bien, determinando la distancia  $JS$  por medio de la ley Cosenos:

$$R^2 = r_{os}^2 + e_o^2 - 2r_{os}e_o \text{Cos}(\pi - \theta). \quad (2.75)$$

Resolviendo:

$$R^2 = r_{os}^2 + 2r_{os}C_r \text{Cos}\theta , \quad (2.76)$$

Si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Finalmente obtenemos la distancia:  $R \approx r_{os}$ . (2.77)

Sustituyendo (2.77) en (2.74):

$$\vec{r}_{js} = -R\vec{U}_n - C_r\varepsilon \text{Sen}\theta \vec{U}_t. \quad (2.78)$$

Desarrollando el producto vectorial de (2.72):

$$\vec{v}_{s/J} = \omega \hat{k} X \vec{r}_{js} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -C_r\varepsilon \text{Sen}\theta & -R & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.79)$$

Sabemos que estos vectores corresponden a las direcciones:

$$\vec{U}_n = \hat{j} \quad \text{y} \quad \vec{U}_T = \hat{i}.$$

Desarrollando el producto vectorial obtenemos:

$$\vec{v}_{s/J} = \omega \hat{k} X \vec{r}_{js} = R\omega \vec{U}_T - C_r\varepsilon \text{Sen}\theta \vec{U}_n. \quad (2.80)$$

Por último sustituimos (2.70) y (2.80) en (2.72):

$$\vec{v}_s = (C_r\dot{\varepsilon} \text{Cos}\theta + C_r\varepsilon\dot{\beta} \text{Sen}\theta - C_r\varepsilon\omega \text{Sen}\theta)\vec{U}_n + (C_r\dot{\varepsilon} \text{Sen}\theta + R\omega - C_r\varepsilon\dot{\beta} \text{Cos}\theta)\vec{U}_T. \quad (2.81)$$

Sabemos que de (2.81) dos términos corresponden a:

$$v_2 = C_r\dot{\varepsilon} \text{Cos}\theta + C_r\varepsilon\dot{\beta} \text{Sen}\theta - C_r\dot{\varepsilon}\omega \text{Sen}\theta \quad (2.82)$$

$$u_2 = C_r\dot{\varepsilon} \text{Sen}\theta + R\omega - C_r\dot{\beta} \text{Cos}\theta \quad (2.83)$$

Una vez determinadas estas variables debemos sustituirlas en la ecuación de Reynolds para proseguir con la transformación a coordenadas cilíndricas, recordar que esta ecuación es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 12v_2 - 6u_2 \frac{\partial H}{\partial x} + 6H \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (2.84)$$

Haciendo un cambio de variables:

$$x = R\theta,$$

$$dx = R d\theta.$$

El espesor de la película de lubricante esta definido por:

$$H = C_r(1 + \varepsilon \cos\theta),$$

Ahora bien debemos efectuar el cambio de variables, primero empezaremos con los términos izquierdos de la ecuación de Reynolds (2.84):

Primer término:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{H^3}{R\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] \frac{C_r^3}{C_r^3} = \frac{C_r^3}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{h^3(\theta)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]. \quad (2.85)$$

Segundo término:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = C_r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{h^3(\theta)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right]. \quad (2.86)$$

Así mismo sustituimos los valores ya calculados ecuaciones (2.82) y (2.83) en la parte izquierdo de la ecuación de Reynolds, de esta forma:

Primer término:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H(\theta)}{R \partial \theta} = -\frac{1}{R} C_r \varepsilon \sin\theta. \quad (2.87)$$

Segundo término:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial}{R \partial \theta} (C_r \dot{\varepsilon} \sin\theta + R\omega - C_r \dot{\beta} \cos\theta) = \frac{1}{R} (C_r \dot{\varepsilon} \cos\theta + C_r \dot{\beta} \sin\theta). \quad (2.88)$$

Desarrollando (2.87):

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = (C_r \dot{\varepsilon} \sin\theta + R\omega - C_r \dot{\beta} \cos\theta) \left( -\frac{1}{R} C_r \varepsilon \sin\theta \right). \quad (2.89)$$

Simplificando (2.89) y eliminando los términos muy pequeños que tienden a cero:

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{C_r \varepsilon \dot{\varepsilon}}{R} \sin^2\theta - \omega C_r \varepsilon \sin\theta + \frac{C_r^2 \varepsilon^2}{R} \dot{\beta} \sin\theta \cos\theta.$$

De esta forma tenemos:

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = -\omega C_r \varepsilon \sin\theta. \quad (2.90)$$

Desarrollando (2.88):

$$H \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{C_r}{R} (1 + \varepsilon \cos\theta) (C_r \dot{\varepsilon} \cos\theta + C_r \dot{\varepsilon} \beta \sin\theta) \approx 0. \quad (2.91)$$

Sustituyendo, factorizando y acomodando términos de las ecuaciones (2.87),(2.88),(2.90) y (2.91) en la ecuación de Reynolds (2.84) podemos obtenerla en coordenadas cilíndricas.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[ C_r \dot{\varepsilon} \cos\theta + C_r \varepsilon \left( \dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right) \sin\theta \right] \quad (2.92)$$

Cabe mencionar que la ecuación de Reynolds en coordenadas cilíndricas (2.92) se puede simplificar más aun [1], pero para nuestro caso no será necesario su uso. Por otra parte necesitamos adecuar la ecuación (2.92) para poder determinar el campo de presión  $p(z, \theta)$  dentro de una chumacera como función de su movimiento, resultando así:

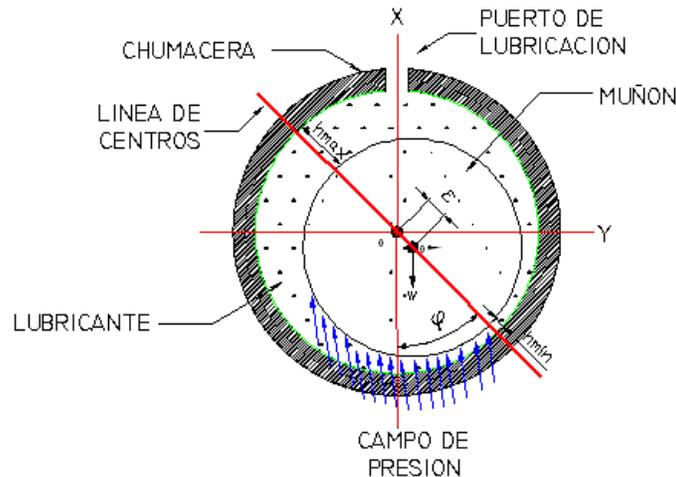


Fig. 2.5 Representación del campo de presión en una chumacera corta.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[ C_r \dot{\varepsilon} \cos\theta + C_r \varepsilon \left( \dot{\varphi} - \frac{w}{2} \right) \sin\theta \right], \quad (2.93)$$

$$-\frac{L}{2} \leq Z \leq \frac{L}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos\theta, \quad (2.94)$$

$$p\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad p\left(-\frac{L}{2}\right) = 0, \quad p(\theta + 2\pi) = p(\theta). \quad (2.95)$$

Donde:

- $p$  = Presión.
- $\theta$  = Coordenada circunferencial media.
- $z$  = Coordenada axial.
- $\varepsilon$  = Excentricidad adimensional.
- $R$  = Radio de la chumacera.
- $\mu$  = Viscosidad dinámica.
- $h$  = Espesor de la película de fluido.
- $\omega$  = Velocidad angular del muñón.

Dos términos muy importantes para determinar la posición del rotor, así mismo la estabilidad o la respuesta vibratoria son  $\dot{\varepsilon}$  y  $\dot{\varphi}$ . Estos son nuestra base para el desarrollo de todos los cálculos a realizar. Paso importante para trabajar con la ecuación de Reynolds en coordenadas cilíndricas (2.93) es transformarla a su forma adimensional para trabajar en una forma general, de esta forma hacemos [1]:

Conociendo algunas equivalencias:

$$V_s^2 = (C_r \dot{\varepsilon})^2 + \left[ C_r \varepsilon \left( \dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right) \right]^2, \quad \text{Cos} \alpha = \frac{C_r \dot{\varepsilon}}{V_s}, \quad \text{Sen} \theta = \frac{C_r \varepsilon \left( \dot{\varphi} - \frac{\omega}{2} \right)}{V_s}. \quad (2.96)$$

Sustituyendo (2.96) en (2.93):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} V_s \text{Cos}(\theta + \alpha). \quad (2.97)$$

Las condiciones en la posición de equilibrio son:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \text{Cos} \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) = -\text{Sen} \theta, \quad V_s = \frac{C_r \varepsilon \omega}{2}.$$

De igual manera sustituimos éstas en (2.97):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{6 \mu R^2 \omega}{C_r^2} (-\varepsilon \text{Sen} \theta). \quad (2.98)$$

Por último usamos estas equivalencias para transformar completamente en forma adimensional a (2.98):

$$z = \frac{L}{2} \bar{z}, \quad \bar{p} = \frac{p}{P_{dim}}, \quad P_{dim} = \mu N \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 = \mu \left( \frac{\omega}{2\pi} \right) \left( \frac{R}{C_r} \right)^2. \quad (2.99)$$

Sustituyendo (2.99) en (2.98) resulta:

$$\mu N \left(\frac{R}{c_r}\right)^2 \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{1}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) \right] = \frac{6\mu R^2 \omega}{c_r^2} (-\varepsilon \text{Sen}\theta). \quad (2.100)$$

Reduciendo términos obtenemos la ecuación adimensional de Reynolds en estado estable:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 12\pi(-\varepsilon \text{Sen}\theta). \quad (2.101)$$

### 2.3 Modelo matemático para chumaceras cortas:

Existen una clasificación ya establecida para las chumaceras, ésta se relaciona en función de su diámetro y de la longitud axial del dispositivo mecánico. De acuerdo a estas características podemos clasificarlas como corta, intermedia y larga. Cabe mencionar que de acuerdo a la elección de una u otra sus modelos matemáticos resultan más simples o por el contrario pueden complicarse enormemente, siendo ésta una razón por la cual se prefiere a las cortas. El desarrollo del presente análisis estará enfocado exclusivamente a chumaceras cortas.

Se considera chumacera corta cuando su longitud  $L$  es muy pequeña comparada con su diámetro  $D$  [1]. Siendo la relación:  $L \ll D$ .

Cumpliendo la condición numérica:  $L/D \leq 1/4$ .

Estudios previos [1, 2,3] han concluido que el **uso de chumaceras cortas es la mejor opción para el uso en maquinaria rotativa** pues son diversas ventajas las que coadyuvan para obtener una enorme estabilidad. Cabe destacar entre éstas, una rápida disipación de calor, pues debido a la corta longitud axial el lubricante, (líquido viscoso que evita el contacto entre dos superficies en movimiento el cual contiene específicas propiedades físicas y químicas) circula más rápido a lo largo del claro radial, las partículas generadas por el desgaste abrasivo y el polvo salen rápidamente del dispositivo, debido a la continua circulación tanto del lubricante como del muñón, evitando así el desgaste. El reducido tamaño del mecanismo proporciona mayor disponibilidad de espacio, circunstancia que es aprovechada por los diseñadores. Los investigadores Duvois y Ocvirk [1] concluyeron que es factible desprestigiar el gradiente de presión alrededor de la chumacera (primer término del lado izquierdo de la ecuación de Reynolds (2.101) debido a que es muy pequeño, resultando así:

$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 12\pi(-\varepsilon \text{Sen}\theta). \quad (2.102)$$

La ecuación (2.10) llamada solución de Ocvirk determina el campo de presión, el cual predice el comportamiento de una chumacera corta.

## 2.4 Modelo matemático para chumaceras cortas presurizadas:

Las siguientes ecuaciones desarrolladas en el IPN por el Dr. Julio César Gómez Mancilla, Dr. Valery R. Nossov y El Dr. Ignacio Ramírez Vargas con ayuda de la función espacial **Delta de Dirac** facilita los cálculos, además obtener el campo de presión y todas las características dinámicas de la película de aceite. Antes de proceder con nuestros análisis es conveniente recordar dicha función:

**Delta de Dirac:** Esta función desarrollada por el físico inglés Paul A. Dirac [1] permite especificar una fuente concentrada, en éste caso se considera al puerto de presurización. La función simbólica  $\delta(x)$  representa la presión, una fuente puntual ubicada en  $x=0$ , y la presente presión acumulada es conocida como la función Heaviside denotada por  $H(x)$ . La forma de representar fuentes puntuales es:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (2.103)$$

Los cuales corresponden a la siguiente ecuación:

$$2 \int \delta(x) dx = \bar{H}(x). \quad (2.104)$$

Actualmente se sabe que es imprescindible el tener la capacidad de controlar las amplitudes de vibración, circunstancia que recae en las chumaceras hidrodinámicas. Una forma de atenuar estos problemas es **modelar el comportamiento dinámico del dispositivo**, así como el poder caracterizar adecuadamente los coeficientes rotodinámicas de la película de lubricante. Investigaciones recientes comprueban que cuando se presuriza una chumacera hidrodinámica (chumacera híbrida) podemos controlar las propiedades dinámicas de la película de aceite produciendo así una mejor estabilidad.

En la siguiente figura representamos el sistema coordenado fijo de una chumacera híbrida (X, Y, Z) y móvil ( $x^*$ ,  $y^*$ ,  $z^*$ ) del rotor, la línea roja es llamada línea de centros y es nuestro eje de referencia entre el sistema móvil y el fijo, de esta referencia parten nuestras mediciones.

El ángulo de equilibrio “ $\varphi$ ” (attitud) representa la ubicación entre eje fijo y la línea de centros, éste ángulo es de suma importancia pues nos proporciona la posición exacta del muñón. El ángulo “ $\theta$ ” nos indica la posición del puerto de inyección (punto azul) a la línea de centros en el sistema móvil y es igual a  $\theta_\beta = \pi - \varphi + \beta$ .

La Posición angular del puerto de inyección de lubricante, está representada con en ángulo  $\beta$  el cual surge a partir del eje fijo al puerto de suministro de aceite.  $\bar{U}_R$  y  $\bar{U}_T$  son vectores unitarios en la dirección radial y transversal. La letra  $\varepsilon$  representa la excentricidad que es la distancia que abarca de radio de la chumacera menos el claro radial  $\varepsilon = R - C_r$ . El punto "O" representa el centro geométrico de la chumacera y el punto O\* el centro del muñón. El punto azul representa el puerto de inyección de lubricante.

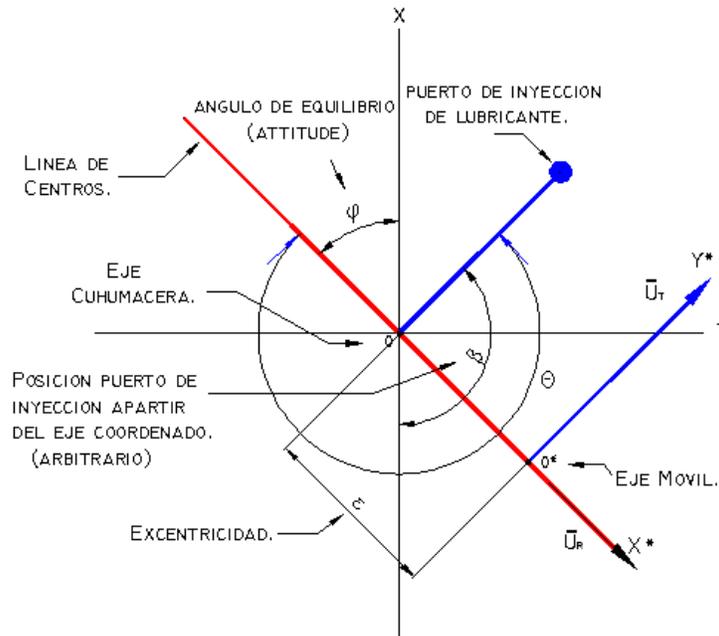


Fig. 2.6 Caracterización de los ángulos de una chumacera corta.

El puerto de inyección de lubricante que se muestra en la figura (2.6) está colocado arbitrariamente. Hasta el momento todavía no está determinado cuál es la mejor opción para colocar éste aunque ya se tiene algunos resultados. Es importante destacar que la ubicación del rotor varía enormemente pues es directamente influenciado según se coloque el puerto de inyección.

Las dos variables principales que determinan donde se encuentra el rotor son  $\varphi$  y  $\varepsilon$ , en la presente tesis estudiaremos el caso en el que posicionamos el puerto a  $3\pi/2$  y  $\pi/2$ , así como en cuatro puntos simétricos a  $45^\circ$ .

Ahora supongamos que en una chumacera corta  $\Delta s$  es el área del puerto de inyección, la cual es muy pequeña, y  $\Delta p$  representa la presión de inyección, por consiguiente  $\Delta F_{pres}$  debe ser la fuerza que multiplique estas dos variables Representando la ecuación como:

$$\Delta F_{pres} = \Delta p * \Delta s. \tag{2.105}$$

Sabemos que  $\Delta s \rightarrow 0, \therefore \Delta p \rightarrow \infty$  siendo esto descrito como una fuente puntual representado en la figura (2.7) por lo tanto (2.150) queda como:

$$\Delta F_{pres} = \Delta p * \Delta s = q = \text{cte.} \quad (2.106)$$

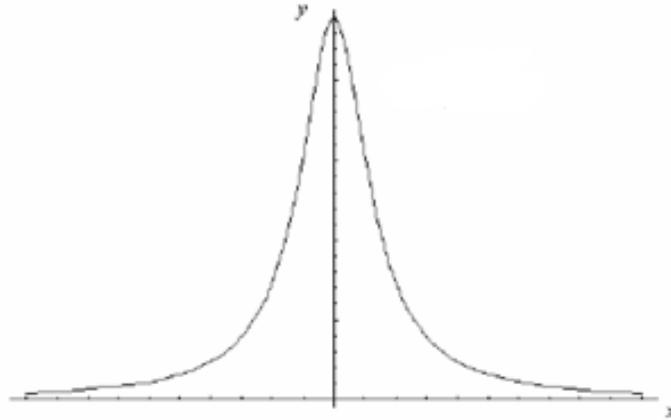


Fig.2.7 Delta de Dirac

Lo anterior puede considerarse como un modelo apto para poder introducir la función espacial delta de Dirac resultando así:

$$(\Delta \bar{p})_{prt} = \bar{q}_{prt} \delta(\bar{z} - a) \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)], \quad (2.107)$$

$$\bar{q}_{prt} = \frac{\Delta F_{pres}}{DLP_{dim}} = \frac{\Delta F_{pres}}{F_{dim}}, \quad (2.108)$$

$$P_{dim} = \mu N \left( \frac{R}{C_r} \right)^2. \quad (2.109)$$

En la ecuación (2.107)  $\bar{q}_{prt}$  es la intensidad de presión en forma adimensional, esta ecuación representa un impulso infinito. En la ecuación (1.108) encontramos la solución a este problema pues por deducción, la fuerza de presurización es finita e igual a cero. Estos planteamientos son válidos para una chumacera de “n” puertos. La ecuación que describe el campo de presión para una chumacera corta híbrida con puerto ubicado en  $(a, \beta)$  es:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \left( \frac{L}{D} \right)^2 q_{prt} \delta(\bar{z} - a) \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})]. \quad (2.110)$$

Siendo:

$$-1 < \bar{z} < 1; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \quad \bar{P}(\bar{z} = \mp 1) = 0; \quad h = 1 + \varepsilon \cos \theta; \quad \hat{p}(\theta) = \hat{p}(\theta + 2\pi).$$

## CAPÍTULO III

Modelación numérica y desarrollo analítico del modelo presentado.

### 3.1 Campos de presión para $3\pi/2$ y $\pi/2$ .

Un dato importante, el cual es fundamental para el diseño de un cojinete hidrodinámico se denomina “campo de presión” éste nos permite saber a detalle el lugar de la chumáceras en donde se ubica la mayor presión y de igual manera la menor presión, además de poder saber donde cavitara la película de aceite (romperse) así como calcular los coeficientes rotodinámicos. Como parte inicial debemos de conocer las ecuaciones ya descritas anteriormente en el capítulo II (2.93), (2.94) y (2.95) ecuación de Reynolds para chumaceras cortas no presurizadas, de éstas usaremos la solución de Ocvirk resultando[1]:

Ecuación de Reynolds para chumaceras cortas:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[ C_r \dot{\epsilon} \cos \theta + C_r \epsilon \left( \dot{\phi} - \frac{w}{2} \right) \text{Sen} \theta \right], \quad (3.1)$$

$$-\frac{L}{2} \leq Z \leq \frac{L}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad h(\theta) = 1 + \epsilon \cos \theta, \quad (3.2)$$

$$p\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad p\left(-\frac{L}{2}\right) = 0, \quad p(\theta + 2\pi) = p(\theta). \quad (3.3)$$

Posteriormente la ecuación (3.1) para chumaceras hidrodinámicas en estado estacionario tenemos:

$$R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[ -\epsilon \left( \frac{\omega}{2} \right) \text{Sen} \theta \right]. \quad (3.4)$$

Ahora debemos adimensionalizar (3.4) para trabajar con valores comunes, usaremos las siguientes variables:

$$z = \frac{L}{2} \bar{Z}, \quad \bar{P} = \frac{P}{P_{dim}}, \quad P_{dim} = \mu N \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 = \mu \left( \frac{\omega}{2\pi} \right) \left( \frac{R}{C_r} \right)^2. \quad (3.5)$$

De esta forma transformamos la ecuación (3.1) en su forma adimensional para chumaceras cortas hidrodinámicas, con sus correspondientes parámetros resultando:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 12\pi \left( \frac{L}{D} \right)^2 (\epsilon \text{Sen} \theta), \quad (3.6)$$

$$-1 < \bar{z} < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \bar{P}(\bar{z} = \mp 1) = 0.$$

Resolviendo la ecuación (3.6) por la descrita solución de Ocvirk podemos encontrar el campo de presión para una chumacera corta no presurizada por lo tanto:

$$\bar{P}_{Ocv} = -6\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\varepsilon_{Ocv} \text{Sen}\theta}{(1+\varepsilon_{Ocv} \text{Cos}\theta)} (1 - \bar{Z}^2). \quad (3.7)$$

Cabe mencionar que la ecuación (3.7) solamente muestra el campo de presión para una chumacera corta no presurizada, por ello debemos de sumarle la parte presurizada, correspondiente a la ya descrita anteriormente solución de la función Delta de Dirac el cual el modelo propuesto para un puerto de inyección de lubricante es:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \delta(\bar{z} - a) \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)], \quad (3.8)$$

$$-1 \leq \bar{z} < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \bar{p}(\bar{z} = \mp 1) = 0, \quad \bar{p}(\theta + 2\pi) = \bar{p}(\theta).$$

Para hallar la solución de (3.8) debemos de usar la función delta de Dirac [1]:

$$\frac{d^2}{d\bar{z}^2} \left( -\frac{1}{2} |\bar{z} - a| \right) = \delta(\bar{z} - a). \quad (3.9)$$

Separando términos de (3.8) obtenemos (3.9), posteriormente integramos resultando:

$$\bar{P}_{pres}(\bar{z}, \theta) = \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)]}{h^3} \left( -\frac{1}{2} |\bar{z} - a| + c_1 \bar{z} + c_2 \right). \quad (3.10)$$

Aquí  $\bar{P}_{pres}$  es la ecuación que representa el modelo presurizado, el cual involucra un eje **axial y uno circunferencial**  $(\bar{z}, \theta)$  por ello es que se encuentran descritas en la ecuación (3.9) dos funciones **Delta de Dirac**. En la ecuación (3.10) ha sido resuelta parcialmente la primer Delta de Dirac correspondiente al eje axial ahora sólo falta determinar el valor de las constantes  $c_1$  y  $c_2$  por medio del segundo término y sustituyendo las condiciones planteadas en (3.8) y sustituyendo en (3.10) de esta forma tenemos:

$$0 = -\frac{1}{2} |1 - a| + c_1 + c_2 \dots \dots \dots (a),$$

$$0 = -\frac{1}{2} |-1 - a| - c_1 + c_2 \dots \dots \dots (b).$$

Si  $-1 \leq a \leq 1$

Ahora sumando (a) y (b) obtenemos:

$$0 = -\frac{1}{2} (1 - a) - \frac{1}{2} (1 - a) + 2c_2.$$

Reduciendo:

$$0 = -1 + 2c_2,$$

$$\therefore c_2 = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones obtenemos:

$$\frac{1}{2}(1 - a) - \frac{1}{2} = c_1,$$

De esta forma: 
$$\therefore c_1 = -\frac{1}{2}a.$$

Sustituyendo  $c_1$  y  $c_2$  en (3.10) encontramos el valor completo de la primer Delta de Dirac.

$$\bar{P}_{pres}(\bar{z}, \theta) = \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)]}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} (1 - a\bar{z} - |(\bar{z} - a)|). \quad (3.11)$$

Como segundo paso queda por resolver la otra función "δ" la cual corresponde a la sección transversal o circunferencial. Ahora nuevamente usando una aproximación a (3.11) podremos resolverla, por lo tanto:

$$\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)] = \frac{\bar{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-\bar{n}^2[\theta - (\pi + \beta - \varphi)]^2}. \quad (3.12)$$

Usando la aproximación ecuación (3.12) y sustituyéndola en (3.11) encontramos la solución al modelo presurizado por medio de la función espacial Delta de Dirac así:

$$\bar{P}_{pres}(\bar{z}, \theta) = \left(\frac{L}{D}\right)^2 q_{prt} \frac{\frac{\bar{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-\bar{n}^2[\theta - (\pi + \beta - \varphi)]^2}}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} (1 - a\bar{z} - |(\bar{z} - a)|). \quad (3.13)$$

Por lo tanto para poder determinar el campo de presión de una chumacera corta presurizada (híbrida) sólo tenemos que sumar la ecuación solución de Ocvirk (sin presurizar) (3.7) más la parte presurizada (solución de Dirac) (3.13):

$$\bar{P}_{Ocv} + \bar{P}_{pres}$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación (3.14), la cual grafica el campo de presión total:

$$\bar{P}_{Ocv} + \bar{P}_{pres}(\bar{z}, \theta) = 6\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\varepsilon_{Ocv} \text{Sen} \theta}{(1 + \varepsilon_{Ocv} \cos \theta)} (\bar{z}^2 - 1) +$$

$$\left(\frac{L}{D}\right)^2 q_{prt} \frac{\frac{\bar{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-\bar{n}^2[\theta - (\pi + \beta - \varphi)]^2}}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} (1 - (1 + \varepsilon \cos \theta)^3 a\bar{z} - |(\bar{z} - a)|). \quad (3.14)$$

Una vez conocida la ecuación (3.14) se procede a graficar el campo de presión por medio del programa computacional MATHEMATICA 6, para puertos horizontales resulta:

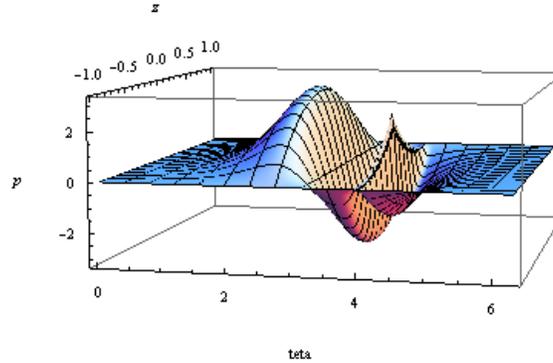


Fig. 3.1:  $\beta = \pi/2$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{\pi/2}^2 = 37.5975^0$ ;  $q_{prt} = 5$ ;  $f_{prt} = 5$

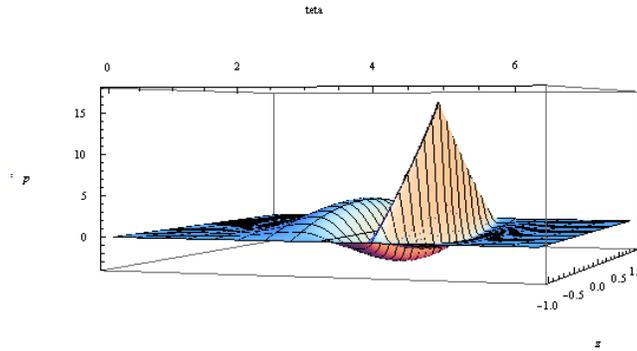


Fig. 3.2:  $\beta = \pi/2$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{\pi/2}^2 = 25.4852^0$ ;  $q_{prt} = 20$ ;  $f_{prt} = 2$

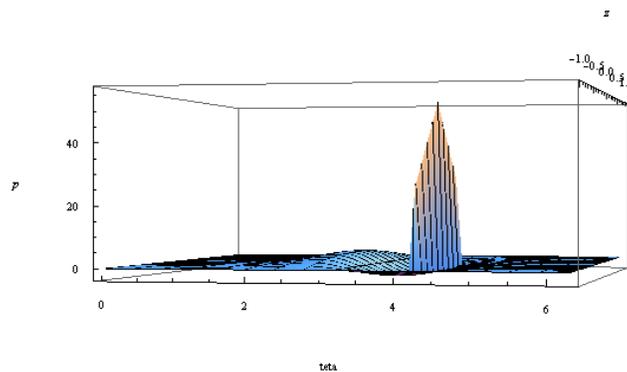


Fig. 3.3:  $\beta = \pi/2$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{\pi/2}^n = 4.352^0$ ;  $q_{prt} = 100$ ;  $f_{prt} = 100$

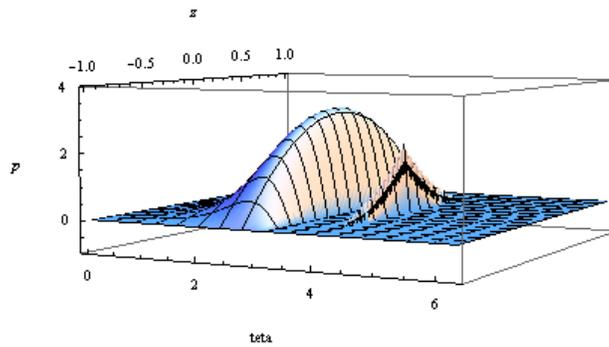


Fig. 3.4:  $\beta = \pi/2$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{\pi/2}^2 = 37.5975^0$ ;  $q_{prt} = 5$ ;  $f_{prt} = 5$

Puerto de Inyección de lubricante en  $\beta = 3\pi/2$ .

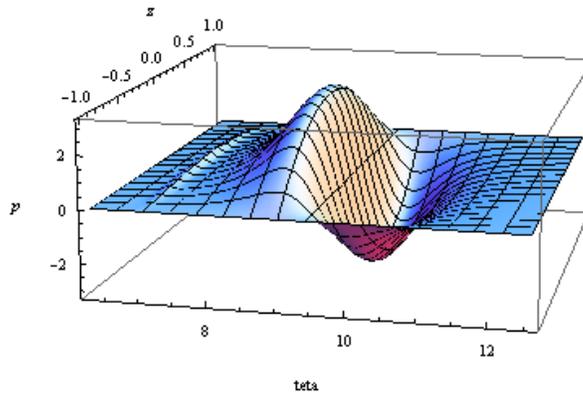


Fig. 3.5:  $\beta = 3\pi/2$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{3\pi/2}^2 = 47.0685^0$ ;  $q_{prt} = 5$ ;  $f_{prt} = 5$

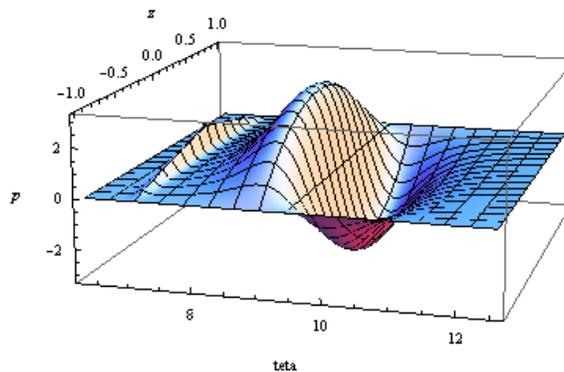


Fig. 3.6:  $\beta = 3\pi/2$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{3\pi/2}^2 = 49.2285^0$ ;  $q_{prt} = 20$ ;  $f_{prt} = 20$

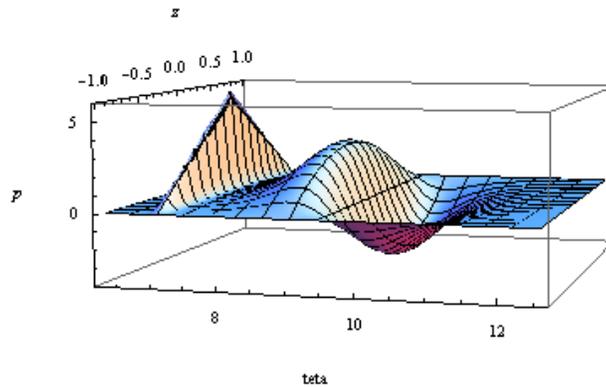


Fig. 3.7:  $\beta = 3\pi/2$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{3\pi/2}^n = 4.354^0$ ;  $q_{prt} = 100$ ;  $f_{prt} = 100$

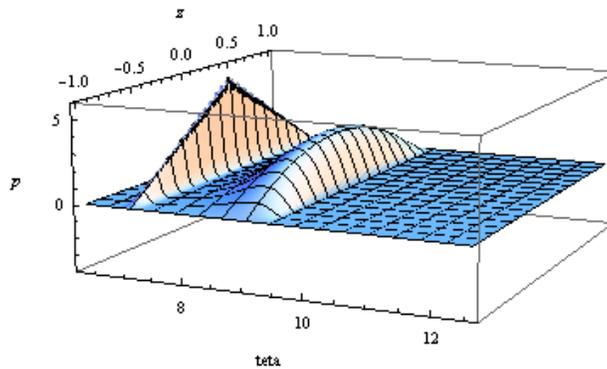


Fig. 3.8:  $\beta = 3\pi/2$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{3\pi/2}^2 = 47.0685^0$ ;  $q_{prt} = 5$ ;  $f_{prt} = 5$

### 3.2 Ecuaciones de posición de equilibrio.

Como ya sabemos es de gran relevancia el conocer el campo de presión[1], ahora podemos encontrar las fuerzas que se ejercen en la película de aceite, influenciado por el peso del sistema. Estos parámetros ya antes mencionados nos ayudarán a poder conocer la posición exacta del muñón y así determinar que tan adecuado es la ubicación de este puerto. Como primer paso es importante saber la capacidad de carga que podrá resistir la chumacera hidrodinámica, esto se logra debido a que el campo de presión genera dos componentes de fuerza que genera el campo de presión en el lubricante el radial y perpendicular a éste, el tangencial. Cabe mencionar que es a partir de la línea de carga la cual nos funciona de referencia, de esta parte al ángulo de actitud " $\varphi$ " el cual intercepta a la componente radial, como se muestra en la Fig. 3.9.

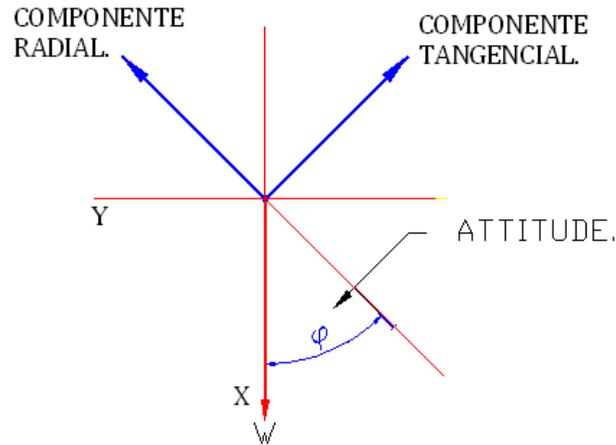


Fig. 3.9 Componente radial y tangencial de la presión Hidrodinámica respecto del ángulo de attitud.

Una vez que conocemos las componentes radial y transversal, así como la línea de carga, haciendo una sumatoria de fuerzas resulta:

$$\vec{W} + \vec{F}_{pres} = 0. \quad (3.15)$$

Si sustituimos en sus componentes radial y tangencial tenemos:

$$W \cos \varphi + F_R = 0, \quad (3.16)$$

$$-W \sin \varphi + F_T = 0. \quad (3.17)$$

Mediante el cociente de  $(F_T/F_R)$  y la tangente inversa del ángulo podemos calcular el valor de éste, a lo cual tenemos:

$$\tan \varphi = \left| \frac{F_T}{F_R} \right|. \quad (3.18)$$

Posteriormente integraremos cada una de nuestras componentes al cual le corresponderá una integración doble por el hecho de ser un área, la cual consta de un eje axial y otro circunferencial de esta manera obtendremos:

$$F_R = \int_{L/2}^{L/2} \int_0^{R\theta} p \cos \theta \, dx \, dz, \quad (3.19)$$

$$F_T = \int_{L/2}^{L/2} \int_0^{R\theta} p \sin \theta \, dx \, dz. \quad (3.20)$$

Conociendo las siguientes igualdades:

$$x = R\theta; \quad dx = R d\theta; \quad z = \frac{L}{2}\bar{z}; \quad p = \mu N \left(\frac{R}{C_r}\right)^2.$$

Ahora sustituyendo las igualdades anteriores en (3.19) tendremos:

$$F_R = \int_{-1}^1 \int_0^\pi \mu N \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 \bar{P} \cos\theta R d\theta \frac{L}{2} d\bar{z}. \quad (3.21)$$

Reacomodando:

$$F_R = \left[ \mu N \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 RL \right] \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \bar{P} \cos\theta d\theta d\bar{z}. \quad (3.22)$$

Sabemos que  $R = D/2$  y simplificando algunos términos tenemos:

$$F_R = \left[ \mu N \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 DL \right] \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \bar{P} \cos\theta d\theta d\bar{z}. \quad (3.23)$$

De igual manera procederemos con la ecuación (3.20), primero integraremos doble para posteriormente usar las mismas equivalencias de esta forma:

$$F_T = \left[ \mu N \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 DL \right] \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \bar{P} \sin\theta d\theta d\bar{z}. \quad (3.24)$$

Ahora despejando el segundo término de (3.23) obtenemos la equivalencia adimensional, esto con el propósito de tener cantidades adimensionales así:

$$f_R = \frac{F_R}{\mu N \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 DL}. \quad (3.25)$$

Similarmente con (3.24):

$$f_T = \frac{F_T}{\mu N \left(\frac{R}{C_r}\right)^2 DL}. \quad (3.26)$$

Es así como hemos transformado (3.25) y (3.26) en forma adimensional. Notar que aunque parecen iguales, el término  $p \approx \bar{p}$  es el que ha cambiado teniendo por lo tanto:

$$f_R = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \bar{P} \cos\theta d\theta d\bar{z}, \quad (3.27)$$

$$f_T = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \bar{P} \sin\theta d\theta d\bar{z}. \quad (3.28)$$

El conjunto de ecuaciones anteriores determina las componentes radiales y tangenciales de la película de aceite, así mismo podemos determinar la capacidad de carga de una chumacera hidrodinámica, la cual es la suma de las fuerzas al cuadrado de las fuerzas ya antes mencionadas, como resultado obtenemos:

$$f = \sqrt{f_R^2 + f_T^2} = \left[ \left( \frac{F_R}{\mu N \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 DL} \right)^2 + \left( \frac{F_T}{\mu N \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 DL} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.29)$$

Sustituyendo (3.16) y (3.17) en (3.29) y factorizando tenemos:

$$f = \sqrt{f_R^2 + f_T^2} = \left[ \left( \frac{-W \cos \varphi}{\mu N \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 DL} \right)^2 + \left( \frac{W \sin \varphi}{\mu N \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 DL} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.30)$$

$$f = \sqrt{f_R^2 + f_T^2} = \frac{W}{\mu N \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 DL} \quad (3.31)$$

Sabemos que la siguiente igualdad es:

$$S = \frac{1}{f} = \frac{\mu N L D}{W} \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32) es conocida como **número de Sommerfeld** o **carga adimensional** [1,2,3] el cual se usa para determinar la capacidad de carga de una chumacera hidrodinámica, la cual expresa que a medida que el número de Sommerfeld aumenta la capacidad para soportar carga disminuye y viceversa.

Sabemos que para el cálculo del campo de presión total debemos llevar acabo una suma de dos ecuaciones (3.14) conocidas como solución de Ocvirk (sin presurizar) más la solución de Dirac (presurizado). Así es como hasta el momento hemos deducido las ecuaciones que proporcionan las componentes tangenciales y radiales del campo de presión, además de la expresión algebraica que calcula la capacidad de carga de una chumacera. Ahora sólo falta determinar el sistema de ecuaciones que nos permitirá saber la posición del rotor con respecto a una excentricidad estacionaria. Para llevar acabo esta deducción, primero partiremos separando la ecuación (3.14) en sus dos términos principales  $\bar{P}_{Ocv} + \bar{P}_{pres}$  esto con el fin de facilitar la deducción de cada término, por lo tanto iniciaremos con la solución sin presurizar (Ocvirk), recordar que dicha expresión es:

$$\bar{P} = \bar{P}_{Ocv} = -6\pi \left( \frac{L}{D} \right)^2 \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} (\bar{Z}^2 - 1) \quad (3.33)$$

Sustituyendo (3.33) en (3.27) y (3.28), notar que el término  $\bar{P}$  es el término a sustituir así:

$$f_R = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi -6\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \varepsilon \frac{\text{Sen}\theta}{(1+\varepsilon\text{Cos}\theta)^3} \text{Cos}\theta (\bar{z}^2 - 1) d\theta d\bar{z}, \quad (3.34)$$

$$f_T = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi -6\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \varepsilon \frac{\text{Sen}\theta}{(1+\varepsilon\text{Cos}\theta)^3} \text{Sen}\theta (\bar{z}^2 - 1) d\theta d\bar{z}. \quad (3.35)$$

Reacomodando algunos términos:

$$f_R = \frac{1}{4} 6\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{4}{3} \int_0^\pi \frac{\varepsilon \text{Sen}\theta \text{Cos}\theta}{(1+\varepsilon\text{Cos}\theta)^3} d\theta, \quad (3.36)$$

$$f_T = \frac{1}{4} 6\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{4}{3} \int_0^\pi \frac{\varepsilon \text{Sen}^2\theta}{(1+\varepsilon\text{Cos}\theta)^3} d\theta. \quad (3.37)$$

Factorizando a (3.36) y (3.37) resulta:

$$f_R = 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \varepsilon \int_0^\pi \frac{\text{Sen}\theta \text{Cos}\theta}{(1+\varepsilon\text{Cos}\theta)^3} d\theta, \quad (3.38)$$

$$f_T = 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \varepsilon \int_0^\pi \frac{\text{Sen}^2\theta}{(1+\varepsilon\text{Cos}\theta)^3} d\theta. \quad (3.39)$$

Ambos segundos términos de las ecuaciones anteriores corresponden a unas integrales, las cuales para su solución debemos aplicar la sustitución de Sommerfeld [1], resolviendo por separado estas integrales tenemos:

$$\int_0^\pi \frac{\text{Sen}\theta \text{Cos}\theta}{(1+\varepsilon\text{Cos}\theta)^3} d\theta ; \int_0^\pi \frac{\text{Sen}^2\theta}{(1+\varepsilon\text{Cos}\theta)^3} d\theta.$$

Sabemos que estas integrales son del tipo:

$$\int \frac{\text{Sen}\theta \text{Cos}\theta}{(1+\varepsilon\text{Cos}\theta)^3} d\theta ; \int \frac{\text{Sen}^2\theta}{(1+\varepsilon\text{Cos}\theta)^3} d\theta ; \int \frac{\text{Cos}\theta}{(1+\varepsilon\text{Cos}\theta)^3} d\theta. \quad (3.40)$$

Utilizando la sustitución de Sommerfeld:

$$\text{Cos}\gamma = \frac{\varepsilon + \text{Cos}\theta}{1 + \varepsilon\text{Cos}\theta}. \quad (3.41)$$

Tomamos la siguiente equivalencia:

$$\text{Sen}^2\gamma + \text{Cos}^2\gamma = 1 ; \text{Obtenemos a Sen } \gamma.$$

$$\text{Sen}\gamma = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{Sen}\theta}{1+\varepsilon\text{Cos}\theta}. \quad (3.42)$$

Por lo tanto (3.41) queda como:

$$\cos\theta = \frac{\varepsilon - \cos\theta}{\varepsilon \cos\theta \gamma - 1}. \quad (3.43)$$

Ahora tomamos a (3.43) y aplicamos a los denominadores de (3.40) resultando:

$$1 + \varepsilon \cos\theta = 1 + \varepsilon \left( \frac{\varepsilon - \cos\theta}{\varepsilon \cos\theta \gamma - 1} \right) = \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon \cos\theta \gamma - 1}. \quad (3.44)$$

Despejando y reacomodando:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon \cos\theta} = \frac{1 - \varepsilon \cos\theta}{1 - \varepsilon^2}. \quad (3.45)$$

De igual manera con ayuda de la sustitución de Sommerfeld ecuación (3.41) buscaremos la igualdad para  $d\theta$  por lo tanto sabemos que:

$$\cos\theta = \frac{\varepsilon + \cos\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta}.$$

Realizando algunas equivalencias obtenemos:

$$-\text{Sen}\theta \frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{(1 + \varepsilon \cos\theta)(-\text{Sen}\theta) - (\varepsilon + \cos\theta)(-\varepsilon \text{Sen}\theta)}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2}. \quad (3.46)$$

Reduciendo términos:

$$-\text{Sen}\theta \frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{-\text{Sen}\theta(1 - \varepsilon^2)^2}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2}. \quad (3.47)$$

Sustituyendo (3.42) en (3.47):

$$-\frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \text{Sen}\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} \frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{-\text{Sen}\theta(1 - \varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2}. \quad (3.48)$$

Reacomodando y eliminando términos semejantes:

$$d\theta = \frac{1 + \varepsilon \cos\theta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} d\gamma. \quad (3.49)$$

Ahora, solo falta resolver las integrales de (3.40) usando las sustituciones que acabamos de describir, iniciaremos con la tercera integral, siendo:

$$\int \frac{\cos\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^3} d\theta. \quad (3.50)$$

Sustituiremos (3.43), (3.45) y (3.49) en (3.50) resultando:

$$\int \frac{\frac{\varepsilon - \cos\theta}{\varepsilon \cos\theta \gamma - 1}}{\left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon \cos\theta \gamma - 1}\right)^3} \frac{1 + \varepsilon \cos\theta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} d\gamma. \quad (3.51)$$

Reacomodando términos:

$$\int \frac{\frac{\varepsilon - \text{Cos}\gamma}{\varepsilon \text{Cos}\gamma - 1}}{\left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon \text{Cos}\gamma - 1}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} d\gamma. \quad (3.52)$$

Multiplicando términos extremos y eliminando términos semejantes:

$$\int \frac{(\varepsilon - \text{Cos}\gamma)}{(\varepsilon \text{Cos}\gamma - 1)} \frac{(\varepsilon \text{Cos}\gamma - 1)^2}{(\varepsilon^2 - 1)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} d\gamma = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \int (\varepsilon - \text{Cos}\gamma) (\varepsilon \text{Cos}\gamma - 1) d\gamma. \quad (3.53)$$

Ahora sólo falta resolver la integral ya simplificada resultando:

$$\int \frac{\text{Cos}\theta}{(1 + \varepsilon \text{Cos}\theta)^3} d\theta = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left[ \text{Sen}\gamma \left( 1 - \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \varepsilon \text{Cos}\gamma \right) - \frac{3}{2} \varepsilon \gamma \right] + c. \quad (3.54)$$

De igual manera aplicamos en las dos integrales restantes de (3.40) pero con las equivalencias que continuación se muestran:

$$\text{Sen}\gamma = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \text{Sen}\theta}{1 + \varepsilon \text{Cos}\theta}, \quad \text{Cos}\gamma = \frac{\varepsilon + \text{Cos}\theta}{1 + \varepsilon \text{Cos}\theta}, \quad \gamma = \text{tag}^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \text{Sen}\theta}{\varepsilon + \text{Cos}\theta} \right).$$

Aplicando estas igualdades y evaluando las dos integrales restantes resulto:

$$\int_0^\pi \frac{\text{Sen}\theta \text{Cos}\theta}{(1 + \varepsilon \text{Cos}\theta)^3} d\theta = \frac{-2\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2}, \quad (3.55)$$

$$\int_0^\pi \frac{\text{Sen}^2\theta}{(1 + \varepsilon \text{Cos}\theta)^3} d\theta = \frac{\pi}{2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}. \quad (3.56)$$

Finalmente obtenemos el valor de las fuerzas radial y tangencial en la solución de Ocvirk para una chumacera sin presurizar:

$$f_R = - \left( \frac{L}{D} \right)^2 \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}, \quad (3.57)$$

$$f_T = \left( \frac{L}{D} \right)^2 \frac{\varepsilon\pi^2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}. \quad (3.58)$$

Una vez conocidas las ecuaciones que calculan las componentes, podemos determinar el ángulo de actitud " $\varphi$ ", este ubica la posición angular del rotor, dependiente de una excentricidad fija. Sólo debemos sustituir (3.57) y (3.58) en (3.23) y (3.24) luego considerando (3.16), (3.17) y (3.18) obtenemos la ecuación (3.59) o también conocida como "locus de equilibrio" [1,2,3]:

$$\tan\varphi_{Ocv} = \frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon_{Ocv}^2}}{4\varepsilon_{Ocv}}. \quad (3.59)$$

Ahora que conocemos la ecuación que nos proporciona el ángulo de actitud así como las ecuaciones que nos proporcionan las fuerzas tangenciales y vectoriales, es necesario cambiar estas últimas al sistema coordenado "x, y", esto se logra multiplicando por la matriz de rotación  $|Q|$ , [1] la cual se muestra continuación:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos}\varphi_{ocv} & -\text{Sen}\varphi_{ocv} \\ \text{Sen}\varphi_{ocv} & \text{Cos}\varphi_{ocv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_R \\ f_T \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Sabemos que:

$$\text{Sen}\varphi_{ocv} = \frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon_{ocv}^2}}{\gamma}, \quad \text{Cos}\varphi_{ocv} = \frac{4\varepsilon^2}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{16\varepsilon_{ocv}^2 + \pi^2(1-\varepsilon_{ocv}^2)}. \quad (3.61)$$

Resolviendo el producto matricial de (3.60) y considerando las equivalencias de (3.61) resulta:

$$f_{x,ocv} = -\left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Cos}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Sen}\varphi \right], \quad (3.62)$$

$$f_{y,ocv} = -\left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ -\frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Sen}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Cos}\varphi \right]. \quad (3.63)$$

Una vez determinadas las ecuaciones que proporcionan las fuerzas de presión en una **chumacera corta no presurizada en la solución de Ocirk** ecuación (3.62) y (3.63) ahora debemos de deducir las otras dos ecuaciones correspondientes a la **solución de Dirac para una chumacera corta presurizada**, éstas de igual manera constan de dos componentes, deducidas de la sumatoria de fuerzas, por ello debemos de iniciar con nuestra ecuación (3.13), la cual es la base para la siguiente deducción:

$$\bar{P}_{pres}(\bar{z}, \theta) = \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta-(\pi+\beta-\varphi)]}{2(1+\varepsilon\text{Cos}\theta)^3} (1 - a\bar{z} - |\bar{z} - a|). \quad (3.64)$$

Se procederá de igual manera, como en la parte anterior, primero obteniendo las dos componentes luego transformado en forma adimensional e integrando dos veces, ya que es un área la cual corresponde al eje axial y circunferencial obtenemos:

$$\hat{f}_R = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta-(\pi+\beta-\varphi)]}{2(1+\varepsilon\text{Cos}\theta)^3} (1 - a\bar{z} - |(\bar{z} - a)|) \text{Cos}\theta d\theta d\bar{z}, \quad (3.65)$$

$$\hat{f}_T = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{\delta[\theta-(\pi+\beta-\varphi)]}{2(1+\varepsilon\text{Cos}\theta)^3} (1 - a\bar{z} - |(\bar{z} - a)|) \text{Sen}\theta d\theta d\bar{z}. \quad (3.66)$$

El hecho de que en estas ecuaciones se encuentra un término de la teoría de distribuciones, estas se resolverán mediante la función espacial Delta de Dirac y posteriormente solucionaremos la integral. Por el hecho de que las ecuaciones (3.65) y (3.66) son semejantes procederemos sólo a mostrar el procedimiento de una así:

$$\hat{f}_R = \frac{1}{8} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \int_{-1}^1 (1 - a\bar{z} - |(\bar{z} - a)|) d\bar{z} \int_0^{2\pi} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)] \cos\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^3} d\theta \quad (3.67)$$

Como podemos ver la ecuación (3.67) se compone de dos integrales las cuales clasificaremos como término “A” y término “B”. De este modo resolveremos separadamente, por lo tanto para la primera integral la cual se encuentra en el primer término y resolviendo obtenemos:

$$\int_{-1}^1 (1 - a\bar{z} - |(\bar{z} - a)|) dz = \bar{z} \Big|_{-1}^1 - \frac{a\bar{z}^2}{2} \Big|_{-1}^1 - \left\{ \begin{array}{l} \int_a^1 (\bar{z} - a) d\bar{z} \\ \int_{-1}^a -(\bar{z} - a) d\bar{z} \end{array} \right. = 2 - a(0) - \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{\bar{z}^2}{2} - a\bar{z} \right]_a^1 \\ - \left[ \frac{\bar{z}^2}{2} - a\bar{z} \right]_{-1}^a \end{array} \right. \cdot (AI)$$

Así:

$$= 2 - a(0) - \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{2} - a \right) - \left( \frac{a^2}{2} - a^2 \right) \\ - \left( \frac{a^2}{2} - a^2 \right) - \left( \frac{1}{2} + a \right) \end{array} \right. \cdot (AII)$$

Resolviendo:

$$= 2 - a(0) - \frac{1}{2} + a + \frac{a^2}{2} - a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} - a \cdot (AIII)$$

Por lo tanto la integral “A” resulta:

$$\therefore \int_{-1}^1 (1 - a\bar{z} - |(\bar{z} - a)|) dz = 1 - a^2 \cdot (AIV)$$

Ahora resolveremos la integral “B” en la cual esta involucrada la función Delta de Dirac la cual es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) \cdot (BI)$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)] \cos\theta}{2(1 + \varepsilon \cos\theta)^3} d\theta = \frac{\cos(\pi + \beta - \varphi)}{[1 + \varepsilon \cos(\pi + \beta - \varphi)]^3} \cdot (BII)$$

Resolviendo tenemos:

$$\therefore \int_0^{2\pi} \frac{\delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi)] \cos\theta}{2(1 + \varepsilon \cos\theta)^3} d\theta = \frac{-\cos(\beta - \varphi)}{[1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi)]} \cdot (BIII)$$

Ahora que ya tenemos el resultado de ambas integrales (AIV) y (BIII) de la ecuación (3.67) resulta:

$$\hat{f}_R = - \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{(1-a^2)\text{Cos}(\beta-\varphi)}{8[1-\varepsilon\text{Cos}(\beta-\varphi)]^3}. \quad (3.68)$$

Resolviendo de forma similar para (3.66) se obtiene:

$$\hat{f}_T = - \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{(1-a^2)\text{Sen}(\beta-\varphi)}{8[1-\varepsilon\text{Cos}(\beta-\varphi)]^3}. \quad (3.69)$$

Estas dos últimas ecuaciones (3.68) y (3.69) describen la fuerza en la película de lubricante cuando se presuriza externamente en un puerto puntual ubicado en posición arbitraria a lo largo del eje axial y circunferencial.

Como segundo paso debemos transformar estas dos ecuaciones en el sistema cartesiano "x,y" para trabajar con unidades semejantes, por lo tanto usaremos, como ya antes se utilizó, la matriz de rotación  $|Q|$  la cual permite este cambio, por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_x \\ \hat{f}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos}\varphi_{pres} & -\text{Sen}\varphi_{pres} \\ \text{Sen}\varphi_{pres} & \text{Cos}\varphi_{pres} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_R \\ \hat{f}_T \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Sustituyendo respectivamente, multiplicando y usando algunas identidades trigonométricas resulta:

$$\hat{f}_x = - \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{(1-a^2)\text{Cos}(\beta)}{8[1-\varepsilon\text{Cos}(\beta-\varphi)]^3}, \quad (3.71)$$

$$\hat{f}_y = - \left(\frac{L}{D}\right)^2 \bar{q}_{prt} \frac{(1-a^2)\text{Sen}(\beta)}{8[1-\varepsilon\text{Cos}(\beta-\varphi)]^3}. \quad (3.72)$$

Una vez calculadas estas dos importantes ecuaciones para el caso presurizado, llevamos a cabo una sumatoria de fuerzas total en el sistema coordenado "x,y" para el muñón correspondiente a la parte no presurizada solución de Ocvirk y la presurizada solución que involucra la función Delta de Dirac así:

$$W + F_{x,result} = 0, \quad (3.73)$$

$$F_{y,result} = 0. \quad (3.74)$$

Sabemos que  $F_{x,result}$  se compone de dos términos correspondientes a la parte no presurizada y la presurizada por lo tanto:

$$F_{x,result} = F_{x,ocv} + F_{x,pres}. \quad (3.75)$$

Bajo esta condición sustituyendo en (3.75) a (3.62) y (3.71) resulta:

$$F_{x,result} = F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Cos}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Sen}\varphi \right] + \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Cos}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3}.$$

De igual manera (3.74) se compone de (3.63) y (3.72) así:

$$F_{y,result} = F_{y,ocv} + F_{pres}. \quad (3.76)$$

Así:

$$F_{y,result} = F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ -\frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Sen}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Cos}\varphi \right] + \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Sen}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3} = 0.$$

Usando algunos términos adimensionales para homogenizar a (3.75) y (3.76):

$$P_{dim} = \mu N \left(\frac{R}{C_r}\right)^2, \quad \bar{q}_{prt} = \frac{\Delta F_{pres}}{F_{dim}} = \frac{\Delta F_{pres}}{DLP_{dim}}. \quad (3.77)$$

Finalmente obtenemos sustituyendo (3.77) en (3.75) y (3.76):

$$W - F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Cos}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Sen}\varphi \right] + \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Cos}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3} = 0, \quad (3.78)$$

$$F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ -\frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Sen}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Cos}\varphi \right] + \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Sen}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3} = 0. \quad (3.79)$$

Resultando un sistema de ecuaciones no lineales con respecto a una excentricidad estacionaria  $\varepsilon_{pres}$  y un ángulo  $\varphi_{pres}$  ecuaciones (3.78) y (3.79). Con estas ecuaciones podremos determinar la posición exacta del rotor en una chumacera corta presurizada. En el presente análisis colocaremos los puertos de inyección en la posición horizontal como se muestra en la Fig. 3.10.

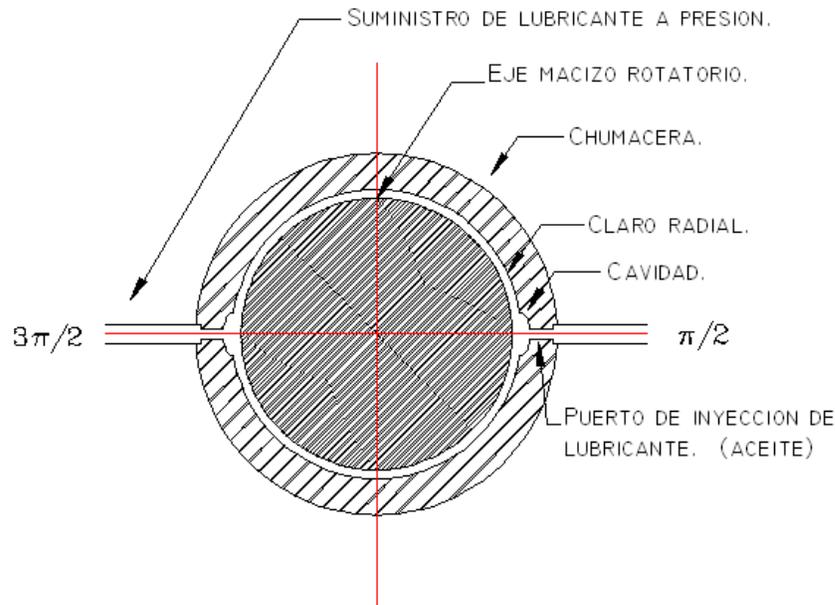


Fig. 3.10 Principales componentes de una chumacera corta con puertos horizontales.

### 3.3 Análisis y desarrollo para el sistema de ecuaciones no lineales:

Ahora que hemos deducido el sistema de ecuaciones que proporciona la localización del muñón (3.78) y (3.79) así como proponer la ubicación del puerto de inyección de lubricante el cual en el siguiente caso corresponde a  $\beta = 3\pi/2$ , es importante reacomodar nuestro sistema de ecuaciones en el modo que nos sea útil. A continuación se presenta el siguiente análisis:

Como primer paso es importante elegir una ecuación, por conveniencia para facilitar el desarrollo iniciaremos con la ecuación (3.79), ya que contiene menos términos. Sabemos que:

$$F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ -\frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Sen}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Cos}\varphi \right] + \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Sen}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3} = 0. \quad (3.80)$$

Segundo término pasa restando:

$$F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ -\frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Sen}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Cos}\varphi \right] = -\Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Sen}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3}. \quad (3.81)$$

Si  $a = 0$  correspondiente a la posición axial del puerto de inyección, o sea, el puerto se ubica a la mitad de la chumacera resulta:

$$F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ -\frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Sen}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Cos}\varphi \right] = -\Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\text{Sen}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3}. \quad (3.82)$$

Simplificando algunos términos del primer miembro:

$$a = \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}, \quad b = \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}. \quad (3.83)$$

Sustituyendo (3.83) en (3.82) resulta:

$$F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 [-a\text{Sen}\varphi + b\text{Cos}\varphi] = -\Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\text{Sen}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3}. \quad (3.84)$$

Dividiendo términos semejantes:

$$F_{dim} [-a\text{Sen}\varphi + b\text{Cos}\varphi] = -\Delta F_{pres} \frac{\text{Sen}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3}. \quad (3.85)$$

Sabemos que la presión adimensional es [1]:

$$-\frac{\Delta F_{pres}}{F_{dim}} = -q_{prt}.$$

Simplificando

$$C = \frac{q_{prt}}{8}. \quad (3.86)$$

Sustituyendo (3.86) en (3.85):

$$[-a\text{Sen}\varphi + b\text{Cos}\varphi] = -C \frac{\text{Sen}(\pi+\beta)}{[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3}. \quad (3.87)$$

Ahora procederemos a simplificar la ecuación (3.78) así:

$$W - F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Cos}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Sen}\varphi \right] + \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Cos}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3} = 0. \quad (3.88)$$

El segundo término es igual a cero ya que  $\beta = 3\pi/2$ . Sustituyendo en (3.88) y sabiendo que  $\text{Cos}(90^\circ) = 0$  y según nuestros ejes de referencia tenemos:

$$W - F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Cos}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Sen}\varphi \right] = 0. \quad (3.89)$$

De igual manera simplificando algunos términos, usando (3.83) despejando y sabiendo que para una chumacera corta  $(L/D) = 1/4$  resulta:

$$W = \frac{F_{dim}}{16} [a\text{Cos}\varphi + b\text{Sen}\varphi]. \quad (3.90)$$

Recordar que [1,2,3] el número de Sommerfeld es:

$$\frac{W}{F_{dim}} = S. \quad (3.91)$$

Por último teniendo en cuenta (3.91) y sustituyendo en (3.90) queda como:

$$S = \frac{[a \cos \varphi + b \sin \varphi]}{16}. \quad (3.92)$$

Otra ecuación de la cual requeriremos utilizar para nuestros cálculos es el número de Sommerfeld en la solución de Ocvirk [1,2,3] siendo esta:

$$S_{Ocv} = \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{\pi \varepsilon \sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)^2}} \left(\frac{D}{L}\right)^2. \quad (3.93)$$

### 3.4 Cálculo del ángulo $\varphi$ por medio del método iterativo para $\beta = \pi/2$ .

Por medio del método iterativo, utilizando las expresiones (3.83), (3.86), (3.87), (3.92) y (3.93) podemos determinar la posición del rotor. A continuación mostraremos el procedimiento para calcular una columna de las siguientes tablas, cabe decir que para determinar la posición del rotor ubicando el puerto de inyección, en  $\beta = \pi/2$  se efectúa un procedimiento similar, pues únicamente se sustituye en las mismas ecuaciones el nuevo valor  $\beta$ , no así para los otros casos en los que  $\beta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$  y  $7\pi/4$ , puesto que nuestro sistema de ecuaciones sufre algunas sustituciones importantes. Por otro lado, para efectuar nuestros cálculos, tuvimos la necesidad de usar un programa poderoso y que fuese fácil de usar, en nuestro caso se eligió el programa **Mathematica 6** ya que obtiene las raíces de nuestro sistema de ecuaciones muy rápidamente, por lo anterior procederemos como se muestra enseguida, calculando solamente para el puerto de inyección de lubricante ubicado en  $\beta = \pi/2$ :

I. Como primer paso se otorga diversos valores adimensionales a la excentricidad  $\varepsilon$  en nuestro caso dividimos en 17 veces el valor de “ $\varepsilon$ ” el cual va de 0.1 hasta 0.9 de cinco en cinco, además  $f_{prt} = 5$  valor que aumentará a 20 y 100 siendo estas las fuerzas de presión que manejaremos para diversas tablas,  $S = 1$  valor inicial que corresponde al número de Sommerfeld y del cual partiremos. Ahora, si  $\varepsilon = 0.1$ , sustituyéndolo en las expresiones (3.83) obtenemos:

$$a = \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}, \quad b = \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}, \quad (3.83)$$

$$a = 0.1282, \quad b = 1.0019.$$

II. Posteriormente calculamos  $C$  :

Aquí 
$$C = \frac{q_{prt}}{8} . \quad (3.86)$$

Luego 
$$q_{prt} = \frac{f_{prt}}{S} .$$

- $f_{prt} = 5,$
- $S = 1.$

Para el siguiente análisis  $S = 1$  aunque  $S = 16.2271$  valor de tablas Khonsari para un valor inicial mas aproximado, por análisis propuesto propio tomaremos el valor inicial. Recordar que manejamos cantidades adimensionales, Por otra parte se eligió la menor fuerza de presurización que se usa para una chumacera corta [1]. Esta corresponde a 5, de igual manera para el número de Sommerfeld partiendo de 1, resultando:

$$C^0 = 0.625.$$

En este valor el superíndice indica que es la primera iteración.

III. Ingresando estos valores a la ecuación (3.87) y con  $\beta = \pi/2$ :

$$[-aSen\varphi + bCos\varphi] = -C \frac{Sen(\pi+\beta)}{[1+\varepsilon Cos(\pi+\beta-\varphi)]^3} . \quad (3.87)$$

Ahora por medio del programa Mathematica 6 e ingresando la ecuación anterior podemos determinar el valor del ángulo  $\varphi$  el cual corresponde a:

$$\varphi_{\pi/2}^0 = 35.065^0 .$$

IV. Aquí el subíndice del ángulo de actitud  $\varphi$  indica la ubicación del puerto de inyección el cual corresponde a  $\pi/2 \approx 90^0$  y el superíndice señala que se trata de la primer iteración. Con los valores antes calculados correspondientes "a, b y  $\varphi$ " se sustituyen en la ecuación (3.92) recordar que:

$$S = \frac{[aCos\varphi + bSen\varphi]}{16} . \quad (3.92)$$

Resultando: 
$$S_{\pi/2}^0 = 23.5111 .$$

V. Ahora debemos de calcular el valor de  $S_{Ocv}$  ecuación (3.93), aquí  $(L/D) = 1/4$  valor para una chumacera corta, y el valor de  $\varepsilon$  será el mismo, de este modo resulta:

$$S_{Ocv} = \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{\pi\varepsilon\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)^2}} \left(\frac{D}{L}\right)^2 . \quad (3.93)$$

$$S_{Ocv} = 15.8396 .$$

VI. Ahora que hemos determinado los valores de  $S_{Ocv}$  y  $S_{\pi/2}^0$  debemos comparar la diferencia y obtener el porcentaje, así sabremos que tan exacto es nuestro cálculo. Es importante partir de un valor para llevar a cabo el método iterativo por ello usando la ecuación (3.93) nos da una idea del dato numérico que requeriremos. El proceso iterativo consistirá en ir resolviendo y recalculando nuestro sistema de ecuaciones hasta que obtengamos un valor menor a 1% :

$$S_{Ocv} - S_{\pi/2}^0 = 15.8396 - 23.5111 = 0.0422 \approx 4.2\% .$$

Ahora debemos de iterar nuevamente y de esta forma encontrar un resultado más exacto, esto se llevará a cabo volviendo a resolver nuestro sistema de ecuaciones sustituyendo nuestros valores obtenidos, así:

VII. Para iterar sabemos que:

$$C^1 = \frac{5}{8S_{Ocv}} = \frac{0.625}{S_{Ocv}} = 0.0394 .$$

Con el nuevo valor ya determinado de  $C^1$  se sustituye en la ecuación (3.87) e indicando la siguiente iteración se obtiene:

$$\varphi_{\pi/2}^1 = 79.6526^\circ .$$

VIII. Posteriormente se procede como en IV y se obtiene:

$$S_{\pi/2}^1 = 15.8630 .$$

IX. Nuevamente se compara con el valor ya antes calculado correspondiente a  $S_{Ocv}$  así tenemos:

$$S_{Ocv} - S_{\pi/2}^1 = 15.8396 - 15.8630 \approx 2.3\% .$$

Por el hecho de no cumplir con un valor menor o igual al 1% es necesario volver a iterar por lo tanto:

X. Para la segunda iteración tenemos que:

$$C^2 = \frac{5}{8S_{\pi/2}^1} = \frac{0.625}{15.8630} = 0.0394 .$$

XII. De igual manera obtenemos el nuevo ángulo  $\varphi_{\pi/2}^2$  en la ecuación ya conocida (3.87) resultando:

$$\varphi_{\pi/2}^2 = 79.6526^\circ .$$



XIII. Obtener  $S_{\pi/2}^2$  en (3.92) con  $\varphi_{\pi/2}^2$  así:

$$S_{\pi/2}^2 = 15.8630.$$

Comparando a  $S_{\pi/2}^2$  con  $S_{\pi/2}^1$  tendremos:

$$S_{\pi/2}^2 - S_{\pi/2}^1 = 15.8630 - 15.8630 = 0 \approx 0\%.$$

Valor que satisface la condición, finalmente comparamos nuestro valor final de  $\varphi_{\pi/2}^2$  con  $\varphi_{\pi/2}^1$  ecuación (3.59) para saber la exactitud del cálculo así:

$$\varphi_{\pi/2}^2 - \varphi_{\pi/2}^1 * 100 = 0.0 .$$

De esta forma se procede a calcular las demás columnas y las posteriores tablas, con su correspondiente aumento de excentricidad e incremento de presión para así ubicar la posición exacta del rotor correspondiente a  $\varphi_{\pi/2}^2$ . En las siguientes tablas se muestra los cálculos obtenidos.

### 3.5 Tablas posición puerto de inyección para $\beta = \pi/2$ .

A continuación se muestran los resultados obtenidos de las iteraciones en forma de tablas, ordenadas como ya se explicó en los subtemas 3.3 y 3.4.





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.8396	10.2553	7.37916	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{\pi/2}^0$	23.5111	12.3861	8.3396	6.1848	4.6650	3.6290	2.8455	2.2313	1.7389	1.3390	1.0124	0.7456	0.5295	0.3568	0.2223	0.1220	0.0530
$S_{\pi/2}^1$	15.8630	10.2757	7.3992	5.6572	4.3763	3.4601	2.7491	2.1800	1.7151	1.3310	1.0123	0.7488	0.5330	0.3594	0.2238	0.1227	0.0532
$S_{\pi/2}^2$	15.8630	10.2756	7.3991	5.6567	4.3760	3.4598	2.7488	2.1796	1.7148	1.3307	1.0121	0.7487	0.5329	0.3594	0.2238	0.1227	0.0532
-a	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.0010	5.5850	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
b	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.2361	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.3884	107.254
$C^0$	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625
$C^1$	0.0394	0.0609	0.0846	0.1117	0.1435	0.1817	0.2291	0.2894	0.3683	0.4750	0.6247	0.8443	1.1850	1.7551	2.8140	5.1229	11.7925
$C^2$	0.0394	0.0608	0.0844	0.1104	0.1428	0.1806	0.2273	0.2866	0.3644	0.4695	0.6174	0.8346	1.1726	1.7390	2.7926	5.0937	11.7481
$\varphi_{\pi/2}^0$	35.065	44.96	47.6644	48.9019	47.1659	45.8939	44.3699	42.7369	41.041	39.312	37.5173	35.6322	33.5696	31.2147	28.4072	24.9179	20.4546
$\varphi_{\pi/2}^1$	79.6526	75.4815	71.2301	68.2393	62.504	58.0979	53.7205	49.4348	45.2961	41.3231	37.523	33.8847	30.3725	26.9118	23.4225	19.7556	15.6532
$\varphi_{\pi/2}^2$	79.6526	75.4872	71.2358	68.2966	62.5338	58.138	53.7721	49.5036	45.3683	41.4005	37.5975	33.9592	30.4355	26.9634	23.4626	19.7785	15.6704
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR S %	0.0	0.0009	0.001	0.0	0.0	0.008	0.0109	0.0183	0.0174	0.0225	0.0197	0.0133	0.0187	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR $\varphi$ %	0.0	0.0075	0.0080	0.0	0.0	0.0689	0.0959	0.1389	0.1591	0.1869	0.1981	0.2198	0.2069	0.1913	0.1709	0.1157	0.1097

**TABLA 3.1 CÁLCULO ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL DERECHO:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 5$ ;  $\beta = \pi/2$ .**





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\epsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{\pi/2}^0$	23.1430	14.1110	15.3984	15.6354	7.7780	5.1128	3.6249	2.6566	1.9721	1.4644	1.0770	1.2793	0.5428	0.3615	0.2235	0.1222	0.0530
$S_{\pi/2}^1$	16.2030	10.5704	7.6748	5.9341	4.6229	3.6819	2.9398	2.3361	1.8372	1.4220	1.0769	0.7922	0.5604	0.3754	0.2322	0.1264	0.0544
$S_{\pi/2}^2$	16.1864	10.5522	7.6548	5.9034	4.5967	3.6565	2.9171	2.3177	1.8232	1.4121	1.0704	0.7883	0.5582	0.3743	0.2317	0.1262	0.0544
-a	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.0010	5.5850	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
B	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.2361	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.3884	107.254
$C^0$	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
$C^1$	0.1578	0.2437	0.3379	0.4470	0.5740	0.7271	0.9166	1.1577	1.4734	1.9001	2.4990	3.3774	4.7402	7.0205	11.2562	20.4918	47.1698
$C^2$	0.1542	0.2365	0.3257	0.4212	0.5407	0.6789	0.8503	1.0701	1.3607	1.7580	2.3214	3.1557	4.4611	6.6595	10.7666	19.7785	45.9559
$\varphi_{\pi/2}^0$	35.9015	35.6838	14.0661	4.3544	12.2269	16.8163	19.7384	21.6922	23.0386	23.9726	24.5913	24.9466	25.0268	24.769	24.0012	22.4141	19.4405
$\varphi_{\pi/2}^1$	70.5655	65.0479	59.4787	54.9810	48.5696	43.5906	39.0242	34.8874	31.1345	27.7254	24.5971	21.6865	18.9248	16.2434	13.5562	10.7487	7.6013
$\varphi_{\pi/2}^2$	70.8405	65.4490	60.0116	55.9092	49.5093	44.6563	40.1586	36.0161	32.2174	28.7224	25.4852	22.4542	19.5665	16.7647	13.9630	11.0466	7.8036
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR S %	0.1020	0.1724	0.3924	0.5200	0.5699	0.6946	0.7781	0.7938	0.7678	0.7010	0.6072	0.4947	0.3941	0.2938	0.2157	0.1584	0.0
ERROR $\varphi$ %	0.3881	0.6128	0.8879	1.6601	1.8980	2.3864	2.8247	3.1338	3.3612	3.4711	3.4847	3.4189	3.2795	3.1095	2.9134	2.6967	2.5923

TABLA 3.2 CÁLCULO ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL DERECHO:  $(L/D) = (1/4) f_{prt} = 20$ ;  $\beta = \pi/2$  .





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{\pi/2}^0$	16.24	13.36	10.30	7.9133	5.96	4.78	3.776	3.133	2.292	1.748	1.223	0.942	0.655	0.4314	0.2622	0.1401	0.0592
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$S_{\pi/2}^n$	21.85	15.28	10.84	8.3769	6.46	5.09	3.984	3.103	2.393	1.813	1.345	0.970	0.6726	0.4419	0.2681	0.1432	0.0605
<b>-a</b>	0.1282	0.29	0.54	0.81	1.36	1.99	2.849	4.001	5.585	7.813	11.044	15.919	23.673	36.9297	62.0562	117.902	281.960
<b>b</b>	1.0019	1.53	2.09	2.71	3.41	4.20	5.127	6.236	7.597	9.318	11.565	14.617	18.968	25.5796	36.5541	57.388	107.254
$C^0$	0.572	0.81	1.16	1.5796	1.91	2.43	3.134	4.028	5.227	6.879	9.286	12.873	18.5846	28.2869	46.6242	87.2905	206.612
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C^n$	0.572	0.82	1.15	1.4922	1.93	2.45	3.137	4.023	5.223	6.894	9.293	12.886	18.5846	28.2869	46.6242	87.2905	206.612
$\varphi_{\pi/2}^0$	-69.958	39.17	31.51	28.64	25.21	20.62	17.18	14.152	11.041	8.823	6.531	4.354	2.291	0.3437	-1.5870	-3.5466	-5.6207
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\varphi_{\pi/2}^n$	<b>39.173</b> n = 27	<b>31.51</b> n = 7	<b>28.64</b> n = 6	<b>25.5081</b> n = 8	<b>20.62</b> n = 7	<b>17.18</b> n = 5	<b>14.152</b> n = 10	<b>11.401</b> n = 7	<b>8.823</b> n = 6	<b>6.531</b> n = 5	<b>4.354</b> n = 5	<b>2.291</b> n = 5	<b>0.3437</b> n = 6	<b>-1.5870</b> n = 5	<b>-3.5466</b> n = 5	<b>-5.6207</b> n = 5	<b>-7.9583</b> n = 4
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
<b>ERROR S %</b>	0.0	0.98	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.128	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<b>ERROR <math>\varphi</math> %</b>	0.0	1.25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.499	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

**TABLA 3.3 CÁLCULO ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL DERECHO:  $(L/D) = (1/4)$   $f_{prt} = 100$ ;  $\beta = \pi/2$ .**



## 3.5.1 Posición final del rotor para $\beta = \pi/2$ .

Una vez efectuados las iteraciones correspondientes se procede a graficar los ángulos encontrados  $\varphi$ , para la tabla 3.1 y 3.2, sólo se requirió iterar dos veces, siendo así un cálculo rápido, caso contrario sucedió con la tabla 3.3 en la cual se usó una presión  $f_{prt} = 100$ . Para el desarrollo numérico de esta tabla se requirió de un mayor número de iteraciones. Para encontrar la aproximación establecida que corresponde a un valor menor o igual al 1%, siendo estas denotadas por el superíndice “n” el cual indica dicho proceso numérico.

La Fig. 3.11 es el resultado obtenido en las tres tablas anteriores, aquí podemos representar por medio de un punto el desplazamiento final del rotor para tres diferentes presurizaciones, así como la presión inicial de Ocvirk dependiente de una excentricidad estacionaria con respecto al ángulo obtenido  $\varphi$  correspondiente al puerto de inyección de lubricante, ubicado en el extremo lateral derecho  $\beta = \pi/2$ . En esta imagen se observa que efectivamente la hipótesis predicha es correcta, ya que al inyectar lubricante en el extremo derecho del rotor por medio de un puerto de inyección, éste se desplazará en sentido opuesto, hecho que certifica el correcto resultado de nuestras ecuaciones 3.80 y 3.81. Dato importante de mencionar es que a medida que se aumenta la presión el rotor se va desplazando proporcionalmente, circunstancia que no sucede así con los otros puertos, cosa que se explicará posteriormente.

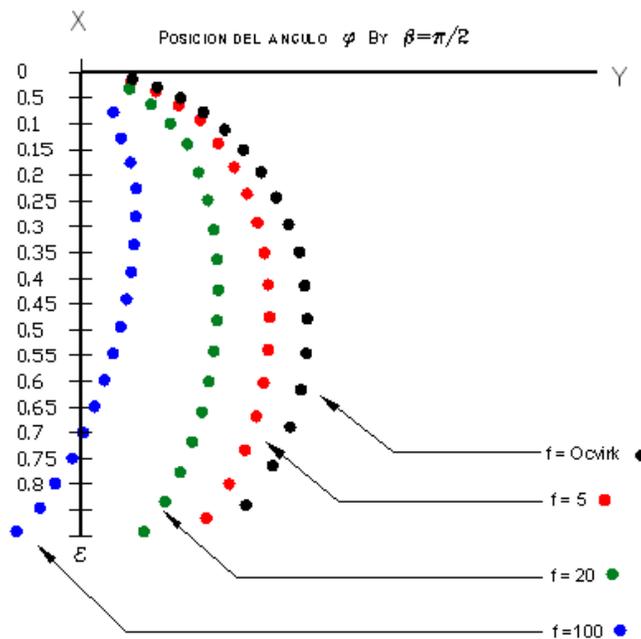


Fig. 3.11 Ubicación del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = \pi/2$ .



## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

### 3.6 Tablas de posición del puerto de inyección para $\beta = 3\pi/2$ .

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{3\pi/2}^0$	17.9825	10.6318	7.4855	5.6725	4.3688	3.4439	2.7298	2.1605	1.6972	1.3159	1.0005	0.7403	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{3\pi/2}^1$	15.8472	10.2590	7.3812	5.6369	4.3556	3.4386	2.7277	2.1596	1.6969	1.3158	1.0005	0.7403	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{3\pi/2}^2$	15.8472	10.2590	7.3812	5.6369	4.3556	3.4386	2.7277	2.1596	1.6969	1.3158	1.0005	0.7403	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
<b>-a</b>	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.0010	5.5850	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
<b>b</b>	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.2361	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.3884	107.254
$C^0$	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625
$C^1$	0.0394	0.0609	0.0846	0.1117	0.1430	0.1817	0.2291	0.2894	0.3683	0.4750	0.6247	0.8443	1.1850	1.7551	2.8140	5.1229	11.7925
$C^2$	0.0394	0.0609	0.0846	0.1108	0.1434	0.1817	0.2291	0.2894	0.3683	0.4749	0.62478	0.8443	1.1850	1.7551	2.8140	2.8140	11.7925
$\varphi_{3\pi/2}^0$	110.959	94.3547	85.0949	79.7557	72.7599	67.8726	63.3749	59.1292	55.0326	51.0276	47.0685	43.1036	39.0929	34.9791	30.6762	26.0581	20.8729
$\varphi_{3\pi/2}^1$	84.3852	80.5407	76.742	74.4043	69.2362	65.5349	61.8393	58.1609	54.4826	50.7870	47.0685	43.2984	39.4424	34.9791	31.2892	26.7972	21.7667
$\varphi_{3\pi/2}^2$	84.3852	80.5407	76.742	74.3928	69.2419	65.5349	61.8393	58.1609	54.4826	50.7870	47.0685	43.2984	39.4424	34.9791	31.2892	26.7972	21.7667
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR $S\%$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR $\varphi\%$	0.0	0.0	0.0	0.0154	0.0082	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

TABLA 3.4 CÁLCULO ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL IZQUIERDO:  $(L/D) = (1/4)$   $f_{prt} = 5$ ;  $\beta = 3\pi/2$ .





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{3\pi/2}^0$	33.0751	24.4910	10.6089	6.3298	4.5807	3.5265	2.7644	2.1755	1.7038	1.3187	1.0017	0.7408	0.5276	0.3562	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{3\pi/2}^1$	15.9506	10.3103	7.4100	5.6546	4.3666	3.4472	2.7326	2.1630	1.6992	1.3175	1.0017	0.7412	0.5280	0.3566	0.2224	0.1222	0.0531
$S_{3\pi/2}^2$	15.9491	10.3096	7.4097	5.6542	4.3665	2.4458	2.7325	2.1630	1.6992	1.3157	1.0017	0.7412	0.5280	0.3566	0.2224	0.1222	0.0531
<b>-a</b>	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.0010	5.5850	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
<b>b</b>	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.2361	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.3884	107.254
$C^0$	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
$C^1$	0.1578	0.2437	0.3387	0.4470	0.5740	0.7271	0.9148	1.1577	1.4734	1.9001	2.4990	3.3774	4.7402	7.0205	11.2562	20.4918	47.1698
$C^2$	0.1567	0.2424	0.3373	0.4421	0.5725	0.7252	0.9064	1.1558	1.4712	1.9001	2.4990	3.3729	4.7348	7.0106	11.241	20.4583	47.0810
$\varphi_{3\pi/2}^0$	144.093	144.311	121.3580	100.308	86.2473	77.4123	70.3363	64.2916	58.9001	53.9268	49.2285	44.6964	40.2446	35.7755	31.1976	26.3675	21.0276
$\varphi_{3\pi/2}^1$	89.4444	84.9696	80.6495	77.9108	72.3875	68.4054	64.4921	60.6361	56.8145	53.0215	49.2285	45.4184	41.5509	37.5975	33.4894	29.1234	24.3049
$\varphi_{3\pi/2}^2$	89.3986	84.9353	80.6266	77.8592	72.3760	68.3940	64.4807	60.6304	56.8088	53.0215	49.2285	45.4126	41.5509	37.5918	33.4837	29.1177	24.2991
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR S %	0.0094	0.0067	0.0040	0.0070	0.0022	0.0406	0.0036	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR $\varphi$ %	0.0512	0.0403	0.0284	0.0662	0.0158	0.0166	0.0176	0.5681	0.0100	0.0	0.0	0.0127	0.0	0.0151	0.0170	0.0195	0.0238

**TABLA 3.5 CÁLCULO ÁNGULO DE ATITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL IZQUIERDO:  $(L/D) = (1/4); f_{prt} = 20; \beta = 3\pi/2$ .**





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.83	10.25	7.37	5.59	4.35	3.43	2.72	2.15	1.69	1.31	1.00	0.74	0.52	0.35	0.22	0.12	0.05
$S_{3\pi/2}^0$	17.8306	12.4630	8.6278	6.3080	4.8824	3.7406	2.9283	2.2957	1.7906	1.3809	1.0459	0.7718	0.5490	0.3705	0.2312	0.1273	0.0556
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$S_{3\pi/2}^n$	18.4769	11.5696	8.1086	6.0717	4.6221	3.6095	2.8404	2.2335	1.7488	1.3516	1.0254	0.7576	0.5392	0.3640	0.2271	0.1249	0.0544
<b>-a</b>	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.001	5.585	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
<b>b</b>	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.236	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.388	107.254
$C^0$	0.7010	1.0029	1.4488	1.9816	2.5599	3.3417	4.2686	5.4449	6.9809	9.0520	11.9514	16.1959	22.7687	3.7382	54.0657	98.1932	224.82
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C^2$	0.6765	1.0804	1.5415	2.0587	2.7044	3.4630	4.4007	5.5915	7.1477	9.2476	12.1914	16.4995	23.1825	34.3407	55.0418	100.08	229.779
$\Phi_{3\pi/2}^0$	110.037	113.698	106.639	99.9181	95.0709	87.7599	82.288	77.1545	72.313	67.7007	63.2717	58.9975	54.8321	50.7297	46.656	42.5536	38.3251
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\Phi_{3\pi/2}^n$	113.698 n = 9	106.639 n = 7	99.9181 n = 7	95.0709 n = 6	87.7599 n = 9	82.288 n = 5	77.1545 n = 8	72.313 n = 6	67.7007 n = 5	63.2717 n = 5	58.9975 n = 4	54.8321 n = 4	50.7297 n = 4	46.656 n = 4	42.5536 n = 3	38.3251 n = 4	33.8332 n = 4
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.06	75.43	71.80	68.17	64.55	60.93	57.31	53.68	50.02	46.32	42.55	38.70	34.70	30.50	25.95	20.82
ERROR	0.0059	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0035	0.0044	0.0	0.0073	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
S %																	
ERROR	0.0052	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0242	0.0128	0.0	0.0091	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\varphi$ %																	

**TABLA 3.6 CÁLCULO ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL IZQUIERDO:  $(L/D) = (1/4); f_{prt} = 100; \beta = 3\pi/2$ .**



## 3.6.1 Posición final del rotor para $\beta = 3\pi/2$ .

Para el cálculo de las tablas resultantes 3.5 y 3.4 de igual manera que en caso anterior sólo se requirió iterar dos veces para encontrar la posición del rotor resultando siendo así un cálculo fácil, pero al aumentar la presión a  $f_{prt} = 100$  los cálculos iterativos resultaron ser más largos, aunque para encontrar el primer punto se necesitó de menos iteraciones, en este caso sólo fueron nueve. Podemos deducir que al ir aumentando la presión resulta más difícil calcular la ubicación del rotor.

En la Fig. 3.12 la cual es la representación de las tablas 3.4, 3.5 y 3.6, nos percatamos que aunque se han aplicado las mismas presiones para ambos puertos de inyección de lubricante, en el presente caso, no hay un movimiento tan notorio, tal vez debido a la velocidad angular, la cual como ya antes se menciona, es en sentido anti-horario, por ello se nota una mayor estabilidad.

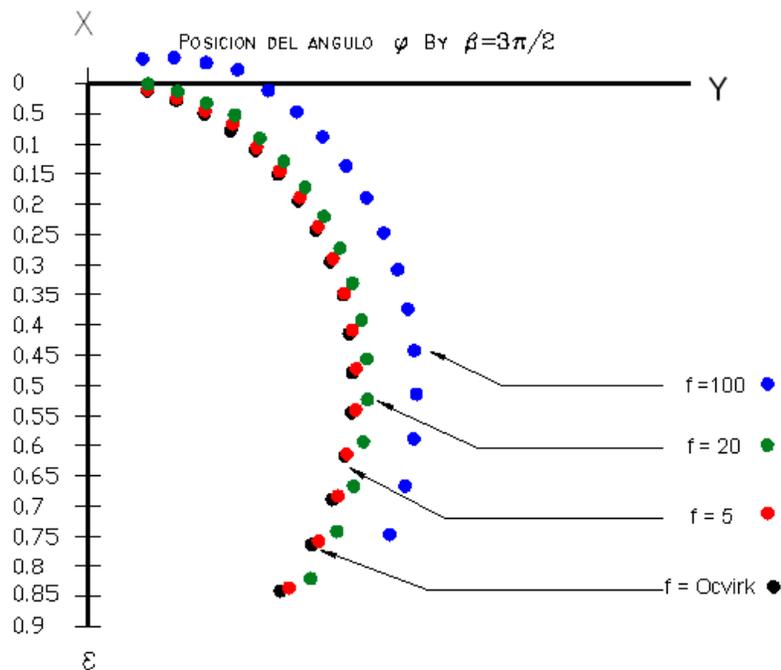


Fig. 3.12 Ubicación del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = 3\pi/2$ .

3.6 Resultados.

Ahora que hemos encontrado la ubicación exacta del rotor podemos representar el cambio relativo del ángulo de actitud  $\varphi$  tanto para  $\beta = \pi/2$  como  $\beta = 3\pi/2$  usando la expresión 3.94, estas dos gráficas son el resultado de los cálculos obtenidos en las tablas 4.13 y 4.14, graficando los resultados para  $\beta = \pi/2$  tenemos:

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_{ocv} - \varphi_{\pi/2}^2}{\varphi_{ocv}} * 100 \tag{3.94}$$

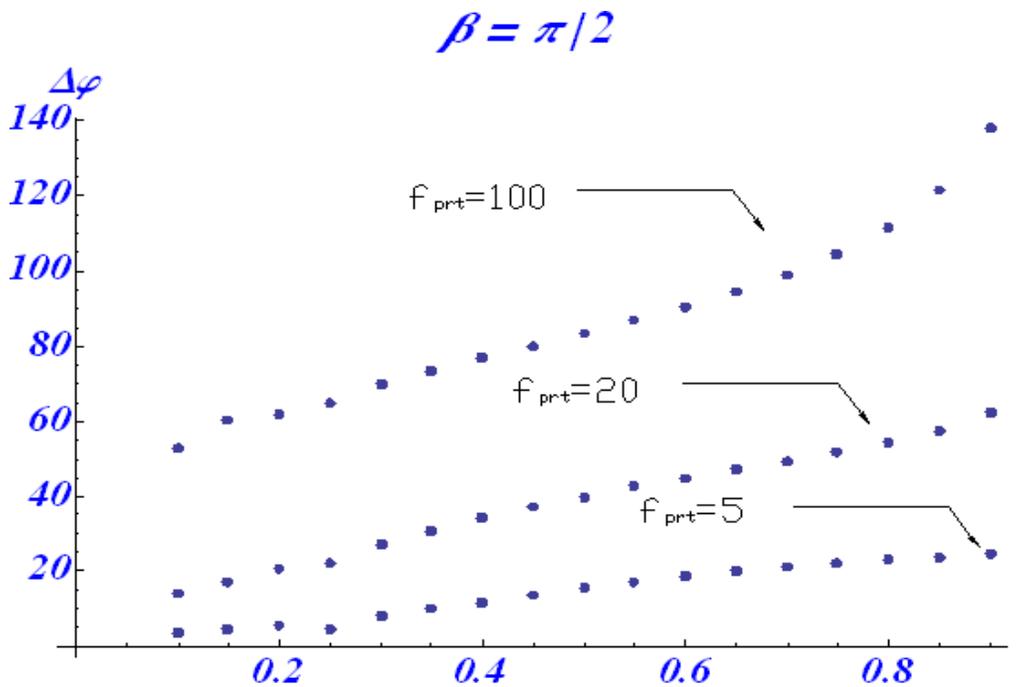


Fig. 3.13 Cambio relativo del rotor para  $\beta = \pi/2$ .

La gráfica anterior muestra el cambio relativo del ángulo  $\varphi$  para diferentes presurizaciones, dependiente del ángulo  $\varphi_{ocv}$ , cada punto representa la ubicación relativa del rotor, dependiente de la fuerza de presión, aquí podemos observar un movimiento expresado en porcentaje, correspondiente al eje vertical  $\Delta\varphi$ , en la Fig. 3.13 se nota un desplazamiento significativo, a medida que aumenta la presurización y la excentricidad  $\varepsilon$ .

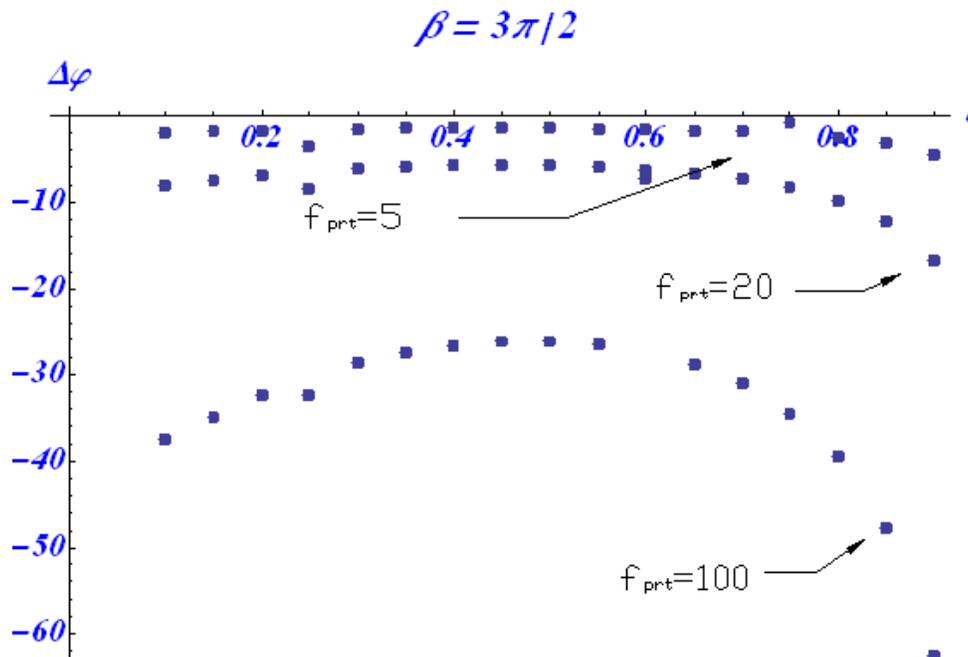


Fig. 3.14 Cambio relativo del rotor para  $\beta = 3\pi/2$ .

En la Fig. 3.14 se nota que este cambio, mas brusco produce unas curvas menos amplias lo cual nos indica que en este puerto el rotor sufre un movimiento menos brusco, pues como ya se explico la Fig. 3.14 representa un cambio relativo expresado en porcentaje, nótese en la figura 3.12 las curvas representan que el muñón se desplazo menos que en el caso para  $\beta = \pi/2$  además de que están desplazadas en sentido opuesto debido a la ubicación del puerto de inyección de lubricante, es importante saber que estos datos son de gran importancia, ya que nos dan una medida relativa expresada en porcentaje, con la cual podemos saber como se ha ido desplazando el rotor a medida que se va aumentando la fuerza de presión.

## CAPÍTULO IV

**Modelación numérica y desarrollo analítico del modelo presentado ubicando los puertos de inyección de lubricante en los cuatro vértices a  $45^0$  de la chumacera corta presurizada.**

### **4.1 Campos de Presión para $\pi/4$ , $3\pi/2$ , $5\pi/4$ y $7\pi/4$ en una chumacera corta presurizada.**

Como hemos visto en el capítulo anterior, es de suma importancia conocer el campo de presión, ya que permite conocer la distribución de la presión dentro de la chumacera, o sea la presión máxima, así como la mínima, dato importante que ayuda a los diseñadores a mejorar la construcción de una chumacera corta presurizada.

Para ello la ecuación que nos proporciona el campo es la misma usada anteriormente ecuación (3.14) pero ahora sustituiremos en el ángulo " $\beta$ "

Puerto de Inyección de lubricante en  $\beta = \pi/4$ .

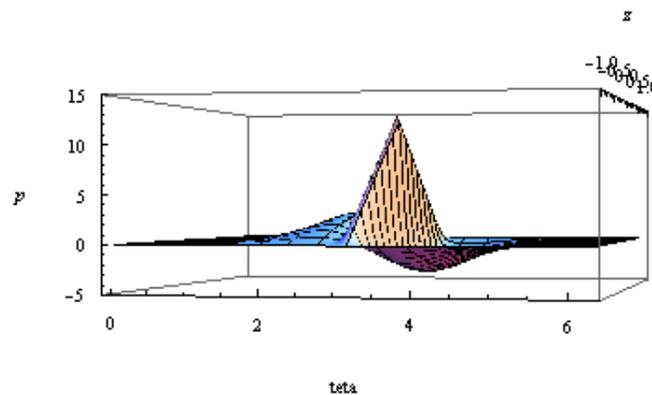


Fig. 4.1:  $\beta = \pi/4$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$  ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{\pi/4}^n = 22.18^0$ ;  $q_{prt} = 5$ ;  $f_{prt} = 5$

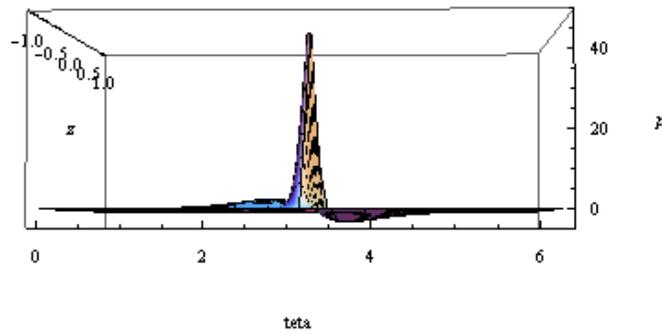


Fig. 4.2:  $\beta = \pi/4$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{\pi/4}^n = ****^0$ ;  $q_{prt} = 20$ ;  $f_{prt} = 20$

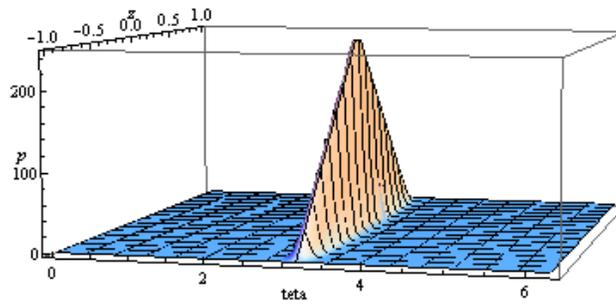


Fig. 4.3:  $\beta = \pi/4$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{\pi/4}^n = ****^0$ ;  $q_{prt} = 100$ ;  $f_{prt} = 100$

Puerto de Inyección de lubricante en  $\beta = 3\pi/4$ .

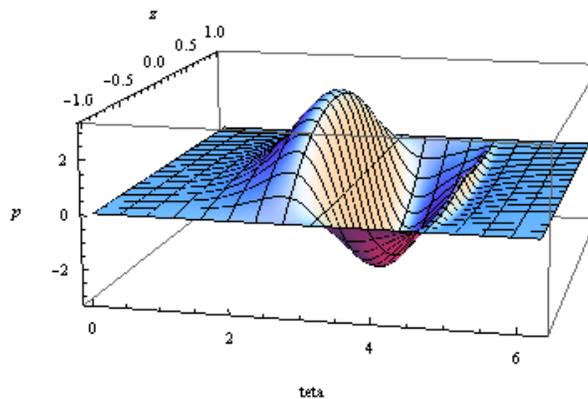


Fig. 4.4:  $\beta = 3\pi/4$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{3\pi/4}^n = 44.748^0$ ;  $q_{prt} = 5$ ;  $f_{prt} = 5$

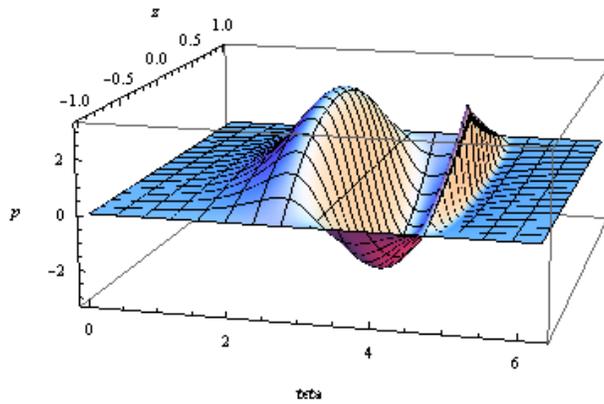


Fig. 4.5  $\beta = 3\pi/4$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{\pi/2}^2 = 41.2014^0$ ;  $q_{prt} = 20$ ;  $f_{prt} = 20$

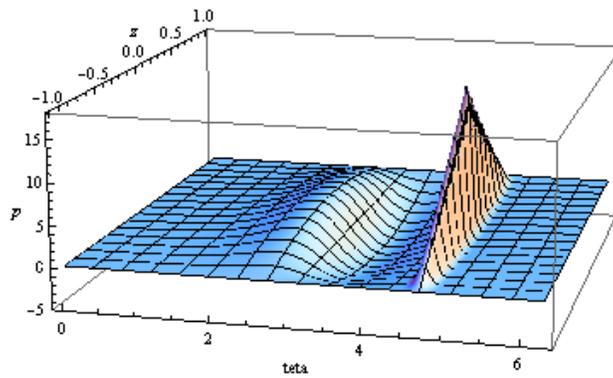


Fig. 4.6  $\beta = 3\pi/4$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{3\pi/4}^n = 31.209^0$ ;  $q_{prt} = 100$ ;  $f_{prt} = 100$

Puerto de Inyección de lubricante en  $\beta = 5\pi/4$ .

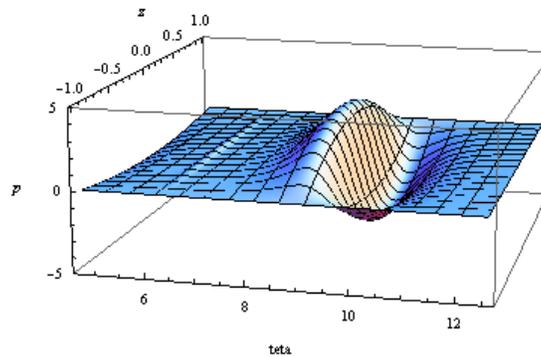


Fig. 4.7:  $\beta = 5\pi/4$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{5\pi/4}^n = 46.6903^0$ ;  $q_{prt} = 5$ ;  $f_{prt} = 5$

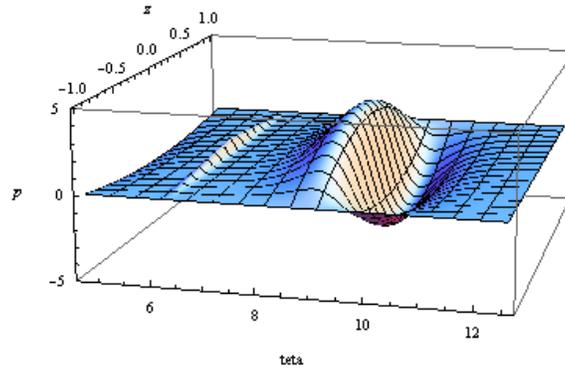


Fig. 4.8:  $\beta = 5\pi/4$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{5\pi/4}^n = 47.3248^0$ ;  $q_{prt} = 20$ ;  $f_{prt} = 20$

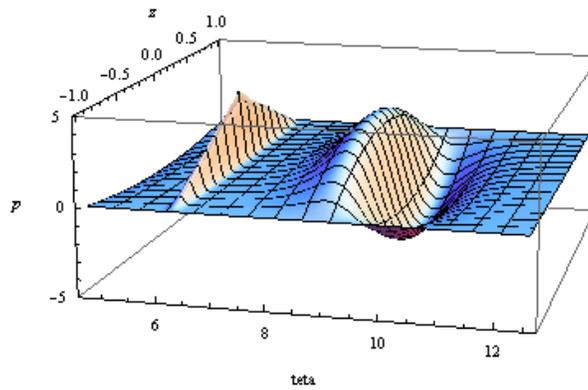


Fig. 4.9:  $\beta = 5\pi/4$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{5\pi/4}^n = 53.1648^0$ ;  $q_{prt} = 100$ ;  $f_{prt} = 100$

Puerto de Inyección de lubricante en  $\beta = 7\pi/4$ .

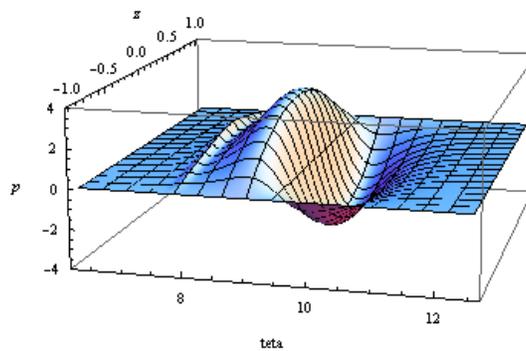


Fig. 4.10:  $\beta = 7\pi/4$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{7\pi/4}^n = 47.8076^0$ ;  $q_{prt} = 5$ ;  $f_{prt} = 5$

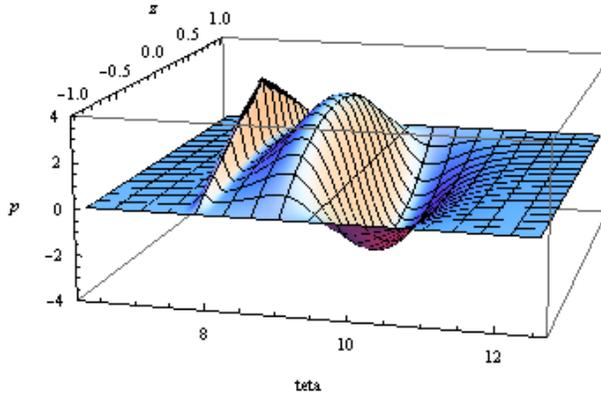


Fig. 4.11:  $\beta = 7\pi/4$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{7\pi/4}^n = 51.9386^0$ ;  $q_{prt} = 20$ ;  $f_{prt} = 20$

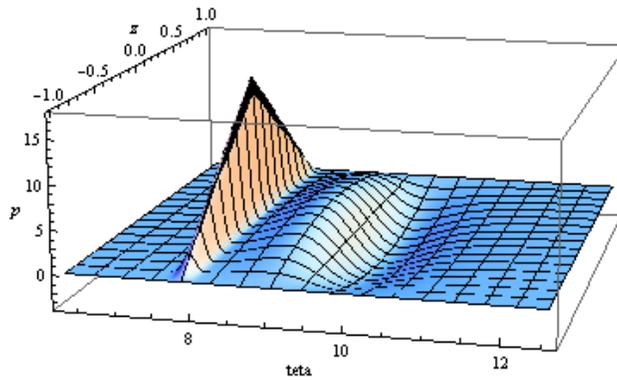


Fig. 4.12:  $\beta = 7\pi/4$ ;  $S = 1$  ;  $L/D = 1/4$ ;  $\varepsilon = 0.6$ ;  $\varphi_{7\pi/4}^n = 68.5372^0$ ;  $q_{prt} = 100$ ;  $f_{prt} = 100$

#### 4.2 Ecuaciones de posición de equilibrio para una chumacera corta híbrida presurizada.

Una vez conocido los campos de presión, es necesario deducir el sistema de ecuaciones que nos indicará la posición del rotor, para ello utilizaremos el mismo sistema de ecuaciones usado en el capítulo anterior recordando:

$$W - F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Cos}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Sen}\varphi \right] + \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Cos}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3} = 0, \quad (5.1)$$

$$F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ -\frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Sen}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Cos}\varphi \right] + \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Sen}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3} = 0. \quad (5.2)$$

Ahora ubicando las nuevas posiciones de los puertos de inyección como se muestra en la Fig. (4.13) partiremos de las ecuaciones (5.1) y (5.2) para adecuarlas y así poder encontrar las posiciones del rotor para cada caso correspondiente.

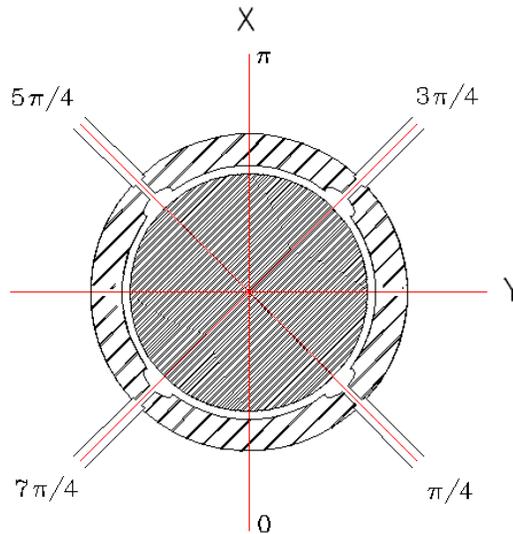


Fig. 4.13 Configuración de una chumacera corta con cuatro diferentes posiciones para el puerto de inyección de lubricante.

Como primer paso, y como ya se explicó en el capítulo anterior, es importante elegir una ecuación, de igual manera tomaremos la ecuación (5.2) para facilitar el desarrollo sabemos que:

$$F_{\text{dim}} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ -\frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Sen}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Cos}\varphi \right] + \Delta F_{\text{pres}} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Sen}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3} = 0. \quad (5.2)$$

Segundo término pasa restando:

$$F_{\text{dim}} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ -\frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Sen}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Cos}\varphi \right] = -\Delta F_{\text{pres}} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Sen}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3}. \quad (5.3)$$

Si  $a = 0$  correspondiente a la posición axial del puerto de inyección o sea el puerto se ubica a la mitad de la chumacera resulta:

$$F_{\text{dim}} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ -\frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Sen}\varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Cos}\varphi \right] = -\Delta F_{\text{pres}} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\text{Sen}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon\text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3}. \quad (5.4)$$

Usaremos similarmente las mismas variables que en capítulo anterior así:

$$a = \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}, \quad b = \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}. \quad (5.5)$$



Sustituyendo (5.5) en (5.4) resulta:

$$F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 [-a \text{Sen} \varphi + b \text{Cos} \varphi] = -\Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\text{Sen}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon \text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3} \quad (5.6)$$

Dividiendo términos semejantes:

$$F_{dim} [-a \text{Sen} \varphi + b \text{Cos} \varphi] = -\Delta F_{pres} \frac{\text{Sen}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon \text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3} \quad (5.7)$$

Sabemos que la presión adimensional es [1]:

$$-\frac{\Delta F_{pres}}{F_{dim}} = -q_{prt} \cdot$$

Simplificando 
$$C = \frac{q_{prt}}{8} \quad (5.8)$$

Sustituyendo (5.8) en (5.7) resulta:

$$[-a \text{Sen} \varphi + b \text{Cos} \varphi] = -C \frac{\text{Sen}(\pi+\beta)}{[1+\varepsilon \text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3} \quad (5.9)$$

Ahora usando la ecuación (5.1):

$$W - F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Cos} \varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Sen} \varphi \right] + \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Cos}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon \text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3} = 0 \quad (5.10)$$

Segundo término pasa restando el cual corresponde a la parte presurizada, este no se elimina como en el capítulo anterior, caso correspondiente a  $3\pi/2$  y  $\pi/2$  pues al sustituir el término coseno por cualquier ángulo " $\beta$ " en los presentes casos nos da una valor diferente de cero, por ello resulta:

$$W - F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[ \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{Cos} \varphi + \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \text{Sen} \varphi \right] = -\Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{(1-a^2)\text{Cos}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon \text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3} \quad (5.11)$$

Hacemos que:

$$a = \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}, \quad b = \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}, \quad d = \frac{(1-a^2)\text{Cos}(\pi+\beta)}{8[1+\varepsilon \text{Cos}(\pi+\beta-\varphi)]^3} \quad (5.12)$$

Sustituimos (5.12) en (5.11) resulta:

$$W - F_{dim} \left(\frac{L}{D}\right)^2 [a \text{Cos} \varphi + b \text{Sen} \varphi] = -d \Delta F_{pres} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \quad (5.13)$$

Para una chumacera corta sabemos que:

$$(L/D) = (1/4).$$

$$W - \frac{F_{dim}[a \text{Cos} \varphi + b \text{Sen} \varphi]}{16} = -\frac{d \Delta F_{pres}}{16} \quad (5.14)$$





Del primer término el segundo miembro pasa sumando así:

$$W = \frac{F_{dim}[a\cos\varphi + b\operatorname{Sen}\varphi] - d\Delta F_{pres}}{16} \quad (5.15)$$

Reacomodando:

$$16W = F_{dim}[a\cos\varphi + b\operatorname{Sen}\varphi] - d\Delta F_{pres} \quad (5.16)$$

Sabemos que [1]:

$$f_{prt} = \frac{\Delta F_{pres}}{W}, \quad (5.17)$$

$$S = \frac{F_{dim}}{W}. \quad (5.18)$$

Sustituyendo (5.17) y (5.18) en (5.16) y reacomodando resulta:

$$16 = S[a\cos\varphi + b\operatorname{Sen}\varphi] - df_{prt} \quad (5.19)$$

Finalmente despejando "S" Número de Sommerfeld resulta:

$$S = \frac{16 + df_{prt}}{[a\cos\varphi + b\operatorname{Sen}\varphi]}. \quad (5.20)$$

Resolviendo (5.9) y (5.20) en Mathematica 6 sustituyendo el correspondiente ángulo " $\beta$ " y mediante el método iterativo podemos obtener el ángulo de actitud el cual corresponde a la posición del rotor con respecto a una excentricidad.

### 4.3 Ejemplo de cálculo del ángulo $\varphi$ por medio del método iterativo para $\beta = \pi/4$ .

Utilizando las siguientes ecuaciones antes descritas:

$$[-a\operatorname{Sen}\varphi + b\cos\varphi] = -C \frac{\operatorname{Sen}(\pi + \beta)}{[1 + \varepsilon \cos(\pi + \beta - \varphi)]^3}. \quad (5.9)$$

$$S = \frac{16 + df_{prt}}{[a\cos\varphi + b\operatorname{Sen}\varphi]}. \quad (5.20)$$

$$a = \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}, \quad b = \frac{\pi^2\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}, \quad C = \frac{q_{prt}}{8}, \quad d = \frac{\cos(\pi + \beta)}{8[1 + \varepsilon \cos(\pi + \beta - \varphi)]^3}. \quad (5.21)$$

I. Como primer paso y de manera semejante como ya es explicó en el capítulo anterior, se otorgarán diversos valores para las variables  $a, b, C$  y  $\varepsilon$ , aquí  $\varepsilon = 0.1$  y  $f_{prt} = 5$  por lo tanto:





$$a = \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}, \quad b = \frac{\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}. \quad (5.22)$$

$$a = 0.1282, \quad b = 1.0019.$$

II. Usando la expresión (3.83) igualmente obtenemos:

$$C^0 = 0.625.$$

III. Ahora sustituyendo los valores ya calculados en (5.9), con  $\beta = \pi/4$  y en el programa Mathematica 6 obtenemos:

$$\varphi_{\pi/4}^0 = 46.656^\circ.$$

IV. Como ya se explicó en el ejemplo del capítulo anterior el superíndice cero indica el valor inicial. Ahora con el ángulo de actitud ya calculado procedemos a calcular “d” con los mismos parámetros, posteriormente los sustituimos en (5.20) y con ayuda de Mathematica 6 resulta:

$$S_{\pi/4}^0 = 18.8507.$$

V. Ahora con ayuda de (3.86) y sustituyendo el valor  $S_{\pi/4}^0$  Obtenemos:

$$C^1 = \frac{5}{8S_{\pi/4}^0} = 0.0331.$$

Sustituyendo en (5.9) obtenemos:

$$\varphi_{\pi/4}^1 = 80.9933^\circ.$$

VI. Con el nuevo ángulo de actitud recalculamos “S” así:

$$S_{\pi/4}^1 = 15.2838.$$

VII. Vemos que  $S_{\pi/4}^0 - S_{\pi/4}^1$  se obtiene un valor mayor a 1% por ello recalculamos  $C^2$  así resulta:

$$C^2 = \frac{5}{8S_{\pi/4}^1} = 0.0408.$$

VIII. Nuevamente para el ángulo de actitud en (5.9) tenemos:

$$\varphi_{\pi/4}^2 = 80.5922^\circ.$$





IX. Resolviendo en (5.20) tenemos:

$$S_{\pi/4}^2 = 15.2865 .$$

X. Si vemos la diferencia  $S_{\pi/4}^2 - S_{\pi/4}^1$  es mucho menor, pero nosotros queremos el valor más exacto posible, así que nuevamente volvemos a iterar resultando:

$$C^3 = \frac{5}{8S_{\pi/4}^2} = 0.0408 .$$

XI. Calculando de actitud:

$$\varphi_{\pi/4}^3 = 80.5922^0 .$$

XII. Vemos que  $\varphi_{\pi/4}^2 = \varphi_{\pi/4}^3$  teniendo así un valor exacto, lo mismo sucede al recalculer  $S_{\pi/4}^3$  por lo tanto al constatar observamos que:

$$S_{\pi/4}^3 - S_{\pi/4}^2 = 0.0 .$$

El resultado anterior muestra que obtenemos un valor igual a cero lo que significa que hemos encontrado la solución a nuestras ecuaciones, así mismo hemos determinado el ángulo de actitud, el cual corresponde a la tercera iteración. Resolviendo por el mismo método encontramos para diferentes excentricidades la posición del rotor, de igual manera aumentando la fuerza de presión podremos encontrar las diferentes posiciones para diversas fuerzas. Posteriormente si cambiamos la posición del puerto de inyección de lubricante representado por  $\beta$  podremos determinar donde se ubicará el rotor bajo diferentes condiciones de presión y de excentricidad, estos resultados se exponen en tablas a continuación.

#### 4.4 Tablas posición puerto de inyección para $\beta = \pi/4$ .

A continuación se presenta los resultados obtenidos del proceso iterativo ya antes descrito, en el capítulo 4.3 variando la fuerza de presión, pero ahora ubicando el puerto de inyección de lubricante en la posición lateral derecha inferior  $\beta = \pi/4$ .





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.83	10.25	7.37	5.59	4.35	3.43	2.72	2.15	1.69	1.31	1.00	0.74	0.52	0.35	0.22	0.12	0.05
$S_{\pi/4}^0$	18.8507	11.0702	7.6048	5.6634	4.2754	3.2956	2.5381	1.9317	1.4369	1.0308	0.6998	0.49	0.2307	0.0815	0.292	-0.0656	-0.0685
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$S_{\pi/4}^n$	15.2854	9.8380	7.0225	5.3090	4.0398	3.1248	2.4094	1.8364	1.3793	1.0257	0.7570	0.5791	0.3883	0.2612	0.1630	0.0899	0.0394
<b>-a</b>	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.001	5.585	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
<b>b</b>	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.236	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.388	107.254
$C^0$	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C^n$	0.0488	0.0635	0.0889	0.1177	0.1547	0.2	0.2593	0.3404	0.4531	0.6093	0.8255	1.0791	1.6089	2.3920	3.8336	6.9499	15.843
$\Phi_{\pi/4}^0$	46.656	51.7037	52.1105	51.7266	47.6758	44.3297	40.6456	36.8412	33.0826	29.5188	26.2472	23.3251	20.764	18.5753	16.7304	15.2006	13.8713
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\Phi_{\pi/4}^n$	<b>80.7527</b> n=3	<b>76.5758</b> n=3	<b>72.448</b> n=3	<b>69.58</b> n=3	<b>63.5124</b> n=3	<b>58.4818</b> n=3	<b>52.7694</b> n=3	<b>46.0601</b> n=4	<b>38.2392</b> n=5	<b>29.91</b> n=4	<b>22.18</b> n=7	<b>16.2319</b> n=8	<b>9.9236</b> n=10	<b>5.1508</b> n=10	<b>1.0084</b> n=10	<b>-2.6699</b> n=10	<b>-6.0733</b> n=10
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.06	75.43	71.80	68.17	64.55	60.93	57.31	53.68	50.02	46.32	42.55	38.70	34.70	30.50	25.95	20.82
ERROR S %	0.0	0.0	0.0013	0.0035	0.0022	0.0028	0.0145	0.0365	0.0921	0.2266	0.3209	0.1374	0.0346	0.0254	0.0406	0.2223	0.1727
ERROR $\varphi$ %	0.0	0.0075	0.0079	0.0491	0.0178	0.0387	0.1064	0.2869	0.5785	1.1734	1.9243	0.9647	0.3118	0.3599	0.5724	1.9121	0.3856

TABLA 4.1 CÁLCULO DEL ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL DERECHO INFERIOR:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 5$ ;  $\beta = \pi/4$ .





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.83	10.25	7.37	5.59	4.35	3.43	2.72	2.15	1.69	1.31	1.00	0.74	0.52	0.35	0.22	0.12	0.05
$S_{\pi/4}^0$	-25.9397	9.4776	6.3117	38.4456	-4.2399	-3.3160	-2.6281	2.3060									
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$S_{\pi/4}^n$	13.7268	8.6651	6.0323	4.4248	3.2690	2.4926	1.9414	1.5282									
<b>-a</b>	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.001	5.585	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
<b>b</b>	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.236	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.388	107.254
$C^0$	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$C^n$	0.1821	0.2885	0.4144	0.5649	0.7647	1.0029	1.2876	1.6359									
$\varphi_{\pi/4}^0$	-40.072	74.4501	69.3279	63.7186	58.9803	50.4088	42.6452	34.5379	26.8431	19.7728	13.8026	8.1417	3.4033	-0.7792	-4.5378	-7.9583	-11.155
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$\varphi_{\pi/4}^n$	73.0235 n=4	67.2481 n=4	60.5445 n=4	53.9898 n=5	42.7942 n=7	32.3091 n=11	22.6146 n=15	14.4729 n=62									
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.06	75.43	71.80	68.17	64.55	60.93	57.31	53.68	50.02	46.32	42.55	38.70	34.70	30.50	25.95	20.82
ERROR S %	0.0249	0.0365	0.0729	0.1324	0.0481	0.1295	0.3152	0.1237	0.0831	0.0306	0.0235	0.0104	0.0146	0.0217	0.0	0.0	0.0
ERROR $\varphi$ %	0.2231	0.1735	0.3146	0.5052	0.1706	0.4300	1.0617	0.4481	0.3479	0.1659	0.2112	0.3379	0.7315	0.1256	0.0	0.1541	0.0

TABLA 4.2 CÁLCULO DEL ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL DERECHO INFERIOR:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 20$ ;  $\beta = \pi/4$ .





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.83	10.25	7.37	5.59	4.35	3.43	2.72	2.15	1.69	1.31	1.00	0.74	0.52	0.35	0.22	0.12	0.05
$S_{\pi/4}^0$	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$S_{\pi/4}^n$	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
<b>-a</b>	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.001	5.585	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
<b>b</b>	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.236	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.388	107.254
$C^0$	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$C^n$	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
$\varphi_{\pi/4}^0$	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$\varphi_{\pi/4}^n$	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.06	75.43	71.80	68.17	64.55	60.93	57.31	53.68	50.02	46.32	42.55	38.70	34.70	30.50	25.95	20.82
ERROR S %	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
ERROR $\varphi$ %	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****

**TABLA 4.3 CÁLCULO DEL ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL DERECHO INFERIOR:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 100$ ;  $\beta = \pi/4$**



## 4.4.1 Posición final del rotor para $\beta = \pi/4$ .

Los resultados obtenidos en la tabla 4.1 muestran una posición del rotor que varía considerablemente. Se observa que efectivamente al posicionar el rotor en la **parte lateral derecha inferior** empuja al rotor en sentido opuesto en un vector cercano a  $135^\circ$ , es importante mencionar que para el cálculo del ángulo de actitud  $\varphi$  se requirió iterar inicialmente tres veces. A partir de una excentricidad  $\varepsilon = 0.45$  aumentaron el número de iteraciones a cuatro y fue aumentando gradualmente hasta llegar a diez iteraciones para una excentricidad correspondiente a  $\varepsilon = 0.9$ . Para el cálculo de la tabla 4.2 el número de iteración aumentó enormemente, para  $\varepsilon = 0.1$  necesitamos de cuatro iteraciones, número que fue aumentando enormemente hasta llegar a  $\varepsilon = 0.45$  donde se requirió iterar 62 veces resultando un cálculo muy difícil. A partir de  $\varepsilon = 0.5$ , por este método no se pudo calcular la ubicación del rotor, pues al momento de resolver las ecuaciones las raíces de estas daban ángulos muy grandes  $560^\circ$ ,  $600^\circ$  etc., dato que al ser substituido en la otra ecuación nos resultaba erróneo o no eran números coherentes. Para la tabla 4.3 no se pudo determinar ningún punto pues de igual manera este método no funciona o no existe la ubicación del rotor para una fuerza de presión  $f_{prt} = 100$ .

En la Fig. 4.14 se representan las diversas ubicaciones del rotor con dos diferentes fuerzas de presión así como la de Ocvirk, notándose claramente hacia donde se va posicionando el rotor debido a la posición  $\beta = \pi/4$  de este puerto de inyección.

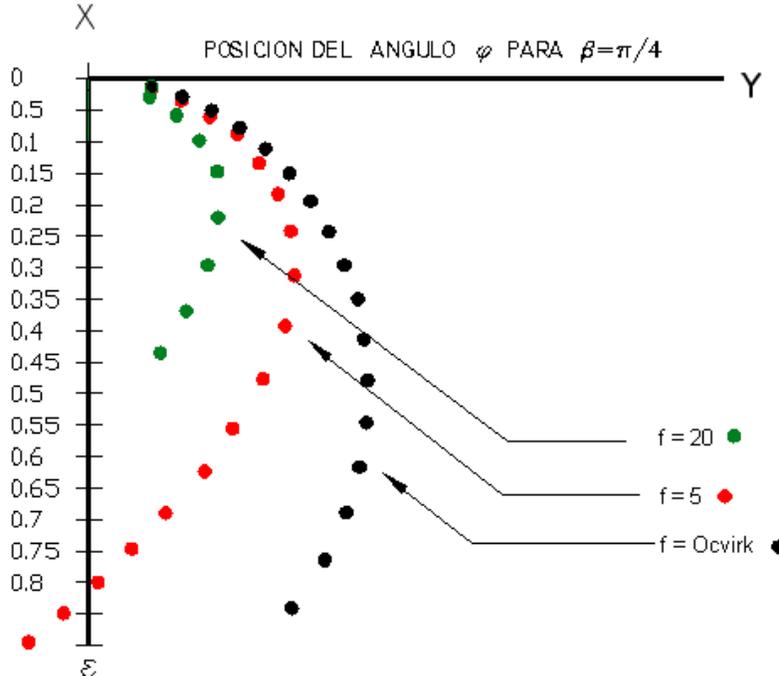


Fig. 4.14 Ubicación del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = \pi/4$ .



## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

### 4.5 Tablas de posición de puerto de inyección para $\beta = 3\pi/4$ .

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{3\pi/4}^0$	18.3784	11.1628	7.8568	5.9457	4.5596	3.5849	2.8388	2.2380	1.7538	1.3561	1.0282	0.7586	0.8388	0.3628	0.2256	0.1236	0.0536
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$S_{3\pi/4}^n$	16.3721	10.6253	7.6593	5.8606	4.5273	3.573	2.8311	2.2375	1.7540	1.3563	1.0282	0.7585	0.5387	0.3627	0.2256	0.1236	0.0536
-a	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.0010	5.5850	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
b	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.2361	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.3884	107.254
$C^0$	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$C^n$	0.0381	0.0588	0.0816	0.1066	0.1380	0.1749	0.2207	0.2793	0.3563	0.4608	0.6247	0.8239	1.1602	1.7231	2.8140	5.0566	11.7925
$\varphi_{3\pi/4}^0$	55.2102	60.4012	61.3867	61.9597	59.4386	57.6281	55.5082	53.1476	50.5578	47.7618	44.7480	41.5108	38.0444	34.3259	30.2980	25.8576	20.7926
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$\varphi_{3\pi/4}^n$	80.873 n=3	77.1029 n=3	73.373 n=3	71.064 n=3	66.0334 n=3	62.4352 n=3	58.8714 n=3	55.3477 n=3	51.8355 n=3	48.3233 n=3	44.748 n=1	41.1957 n=3	37.5058 n=3	33.6785 n=3	29.6105 n=1	25.216 n=2	20.2197 n=2
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR S %	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR $\varphi$ %	0.0	0.0	0.0	0.0240	0.0	0.0	0.0098	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

TABLA 4.4 CÁLCULO DEL ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL DERECHO SUPERIOR:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 5$ ;  $\beta = 3\pi/4$





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{3\pi/4}^0$	-98.9787	26.4467	11.3978	7.5656	5.3955	4.0896	3.1613	2.4591	1.9073	1.4635	1.1027	0.8086	0.5709	0.3819	0.2359	0.1284	0.0553
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$S_{3\pi/4}^n$	18.0105	11.742	8.4885	6.5128	5.0175	3.9492	3.1162	2.4491	1.9084	1.4656	1.1032	0.8078	0.5696	0.3808	0.2353	0.1280	0.0552
<b>-a</b>	<b>0.1282</b>	<b>0.2959</b>	<b>0.5454</b>	<b>0.8193</b>	<b>1.3657</b>	<b>1.9991</b>	<b>2.8495</b>	<b>4.0010</b>	<b>5.5850</b>	<b>7.8135</b>	<b>11.0447</b>	<b>15.9196</b>	<b>23.6737</b>	<b>36.9297</b>	<b>62.0562</b>	<b>117.902</b>	<b>281.960</b>
<b>b</b>	<b>1.0019</b>	<b>1.5318</b>	<b>2.0985</b>	<b>2.7182</b>	<b>3.4108</b>	<b>4.2024</b>	<b>5.1279</b>	<b>6.2361</b>	<b>7.5976</b>	<b>9.3185</b>	<b>11.5659</b>	<b>14.6179</b>	<b>18.9689</b>	<b>25.5796</b>	<b>36.5541</b>	<b>57.3884</b>	<b>107.254</b>
$C^0$	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$C^n$	0.1388	0.2129	0.2945	0.3838	0.4982	0.6330	0.8022	1.0205	1.3099	1.7057	2.2661	3.0945	4.3885	6.5640	10.6242	19.5168	45.2777
$\varphi_{3\pi/4}^0$	-17.2976	14.0317	30.6074	38.3595	41.2014	43.0463	43.8313	43.8771	43.328	42.2843	40.7488	38.7377	36.2339	33.2316	29.7079	25.5826	20.6952
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$\varphi_{3\pi/4}^n$	<b>76.1633</b> n=4	<b>72.2041</b> n=4	<b>68.3596</b> n=4	<b>65.9532</b> n=4	<b>61.0372</b> n=3	<b>57.536</b> n=3	<b>54.1674</b> n=3	<b>50.8729</b> n=3	<b>47.63</b> n=2	<b>44.4214</b> n=3	<b>41.2014</b> n=2	<b>37.9413</b> n=3	<b>34.5952</b> n=3	<b>31.1001</b> n=3	<b>27.3759</b> n=3	<b>23.2965</b> n=3	<b>18.6097</b> n=3
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR S%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR $\varphi$ %	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

TABLA 4.5 CÁLCULO DEL ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL DERECHO SUPERIOR:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 20$ ;  $\beta = 3\pi/4$ .





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{3\pi/4}^0$	-53.2695	-40.1918	-34.1161	-30.0806	-31.1612	12.3014	5.7850	3.7534	2.6536	1.9322	1.4117	1.0164	0.7087	0.47	0.2894	0.1578	0.0687
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$S_{3\pi/4}^n$	26.7604	17.7039	12.7229	9.7033	7.3272	5.6643	4.3806	3.3709	2.5683	1.9287	1.4196	1.0168	0.7087	0.47	0.2894	0.1578	0.0687
<b>-a</b>	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.001	5.585	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
<b>b</b>	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.2361	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.388	107.254
$C^0$	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C^n$	0.4671	0.7060	0.9824	1.2882	1.7059	2.2068	2.8534	3.7081	4.8668	6.4808	0.8050	12.2928	17.6359	26.5908	43.1835	79.1663	181.932
$\varphi_{3\pi/4}^0$	-31.7648	-31.3523	-31.2147	-30.7392	-31.9309	-4.6180	8.4282	16.0084	21.0791	24.5913	26.9577	28.3671	28.8599	28.3958	26.8832	24.2017	20.1796
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\varphi_{3\pi/4}^n$	61.7878 n=5	58.2469 n=5	54.643 n=5	52.4715 n=5	48.0253 n=4	44.9715 n=4	42.0551 n=4	39.253 n=4	36.5261 n=4	33.8561 n=3	31.209 n=4	28.539 n=3	25.9034 n=2	23.1647 n=2	20.2369 n=2	16.9882 n=2	13.178 n=2
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR $S\%$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR $\varphi\%$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

TABLA 4.6 CÁLCULO DEL ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL DERECHO SUPERIOR:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 100$ ;  $\beta = 3\pi/4$ .



## 4.5.1 Posición final del rotor para $\beta = 3\pi/4$ .

El cálculo de la tabla 4.4 resultó ser algo fácil, pues sólo se requirió de tres iteraciones por punto para poder encontrar la ubicación del rotor, caso especial resultó  $\varepsilon = 0.8$  donde solo se requirió de una iteración, este cálculo permitió encontrar la ubicación del rotor. Un poco más difícil fue el cálculo de la tabla 4.5 pues aquí se requirió un promedio de cuatro iteraciones por punto, pudiendo así calcular todos los puntos con su correspondiente excentricidad. El cálculo de la tabla 4.6 resultó ser un caso particular pues aquí al iniciar con  $\varepsilon = 0.1$  se requirió de cinco iteraciones, proceso que fue disminuyendo a partir que aumentaban las iteraciones.

La Fig. 4.15 representa los datos obtenidos en las tres tablas anteriores, ubicando el puerto en la **parte lateral derecha superior**. Se muestra una curva suave, y vemos que, a medida que se aumenta la presurización en el puerto de inyección, el rotor se desplaza mas levemente, o sea, a medida que se aumenta la presurización no se observa un desplazamiento significativo en comparación con los puertos ya antes calculados, véase figuras 4.14, 3.11 y 3.13.

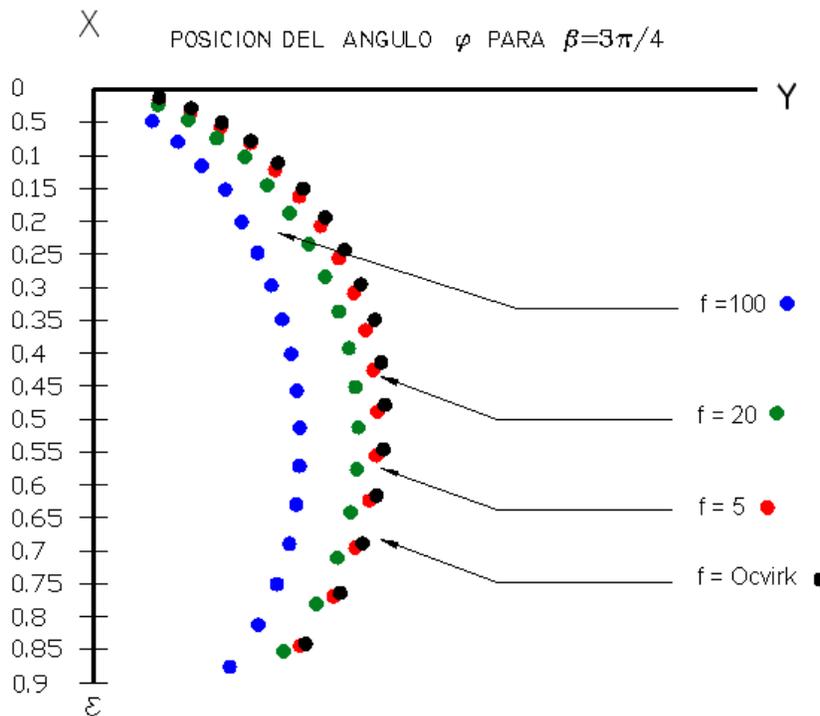


Fig. 4.15 Ubicación del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = 3\pi/4$ .



## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

### 4.6 Tablas de posición del puerto de inyección $\beta = 5\pi/4$ .

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{5\pi/4}^0$	17.5161	10.706	7.5763	5.7462	4.4214	3.4819	2.757	2.1799	1.7110	1.3255	1.0072	0.7448	0.5304	0.3580	0.2232	0.1225	0.0604
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$S_{5\pi/4}^n$	16.1937	10.4578	7.5074	0.1092	4.4138	3.4789	2.7559	2.1795	1.7109	1.3255	1.0072	0.7448	0.5304	0.3580	0.2232	0.1225	0.0604
<b>-a</b>	<b>0.1282</b>	<b>0.2959</b>	<b>0.5454</b>	<b>0.8193</b>	<b>1.3657</b>	<b>1.9991</b>	<b>2.8495</b>	<b>4.0010</b>	<b>5.5850</b>	<b>7.8135</b>	<b>11.0447</b>	<b>15.9196</b>	<b>23.6737</b>	<b>36.9297</b>	<b>62.0562</b>	<b>117.902</b>	<b>281.960</b>
<b>b</b>	<b>1.0019</b>	<b>1.5318</b>	<b>2.0985</b>	<b>2.7182</b>	<b>3.4108</b>	<b>4.2024</b>	<b>5.1279</b>	<b>6.2361</b>	<b>7.5976</b>	<b>9.3185</b>	<b>11.5659</b>	<b>14.6179</b>	<b>18.9689</b>	<b>25.5796</b>	<b>36.5541</b>	<b>57.3884</b>	<b>107.254</b>
$C^0$	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C^n$	0.0835	0.0597	0.0832	0.1092	0.1416	0.1796	0.2267	0.2867	0.3653	0.4715	0.6205	0.8390	1.1783	1.7456	2.7995	5.0981	10.3337
$\psi_{5\pi/4}^0$	104.903	91.2263	82.9757	78.2775	71.5567	66.8986	62.5727	58.4646	54.4826	50.5807	46.7018	42.8171	38.8695	34.8129	30.5616	25.9836	20.8385
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\psi_{5\pi/4}^n$	<b>83.9383</b> n=2	<b>80.1625</b> n=2	<b>76.3982</b> n=2	<b>74.0834</b> n=2	<b>68.9323</b> n=2	<b>65.2255</b> n=2	<b>61.5299</b> n=2	<b>57.8401</b> n=2	<b>54.152</b> n=2	<b>50.4432</b> n=2	<b>46.6903</b> n=1	<b>42.9088</b> n=1	<b>39.0242</b> n=1	<b>35.0077</b> n=1	<b>30.7793</b> n=1	<b>26.2185</b> n=1	<b>21.0505</b> n=1
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR S %	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR $\varphi$ %	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

TABLA 4.7 CÁLCULO DEL ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL IZQUIERDO SUPERIOR:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 5$ ;  $\beta = 5\pi/4$ .





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{5\pi/4}^0$	32.5693	21.812	11.3059	6.6107	4.7659	3.6629	2.8646	2.2484	1.7563	1.3561	1.0278	0.7586	0.5393	0.3636	0.2265	0.1242	0.0540
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$S_{5\pi/4}^n$	17.3115	11.0966	7.9110	5.9948	4.5961	3.6054	2.8443	2.2415	1.7542	1.3555	1.0278	0.7587	0.5394	0.3637	0.2265	0.1243	0.0540
<b>-a</b>	<b>0.1282</b>	<b>0.2959</b>	<b>0.5454</b>	<b>0.8193</b>	<b>1.3657</b>	<b>1.9991</b>	<b>2.8495</b>	<b>4.0010</b>	<b>5.5850</b>	<b>7.8135</b>	<b>11.0447</b>	<b>15.9196</b>	<b>23.6737</b>	<b>36.9297</b>	<b>62.0562</b>	<b>117.902</b>	<b>281.960</b>
<b>b</b>	<b>1.0019</b>	<b>1.5318</b>	<b>2.0985</b>	<b>2.7182</b>	<b>3.4108</b>	<b>4.2024</b>	<b>5.1279</b>	<b>6.2361</b>	<b>7.5976</b>	<b>9.3185</b>	<b>11.5659</b>	<b>14.6179</b>	<b>18.9689</b>	<b>25.5796</b>	<b>36.5541</b>	<b>57.3884</b>	<b>107.254</b>
$C^0$	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$C^n$	0.1444	0.2252	0.3160	0.4170	0.5439	0.6933	0.8789	1.1153	1.4251	1.8442	2.4322	3.2949	4.6341	6.8737	1.0346	20.1095	46.2906
$\varphi_{5\pi/4}^0$	74.3986	137.521	119.823	97.1736	82.9127	74.3986	67.6835	61.9883	56.9291	52.2767	47.8649	43.6021	39.3851	35.1338	30.7506	26.081	20.8786
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$\varphi_{5\pi/4}^n$	<b>87.3857</b> n=3	<b>83.2565</b> n=3	<b>79.1598</b> n=3	<b>76.5586</b> n=3	<b>71.1098</b> n=3	<b>67.1564</b> n=2	<b>63.2488</b> n=2	<b>59.3756</b> n=2	<b>55.5253</b> n=2	<b>51.6808</b> n=2	<b>47.8248</b> n=2	<b>43.9344</b> n=2	<b>39.9695</b> n=2	<b>35.8843</b> n=2	<b>31.5986</b> n=2	<b>27.0035</b> n=2	<b>21.8412</b> n=2
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
<b>ERROR S%</b>	<b>0.0</b>																
<b>ERROR <math>\varphi</math>%</b>	<b>0.0</b>																

**TABLA 4.8 CÁLCULO DEL ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL IZQUIERDO SUPERIOR:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 20$ ;  $\beta = 5\pi/4$ .**





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.83	10.25	7.37	5.59	4.35	3.43	2.72	2.15	1.69	1.31	1.00	0.74	0.52	0.35	0.22	0.12	0.05
$S_{5\pi/4}^0$	22.8158	14.2322	10.3527	8.0829	6.6468	5.6430	4.9026	3.092	2.1101	1.5528	1.1481	0.8349	0.5878	0.3936	0.2440	0.1334	0.0578
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$S_{5\pi/4}^n$	24.4065	15.1417	10.4992	7.7355	5.7440	4.3879	3.3813	2.6109	2.0080	1.5290	1.1451	0.8365	0.5897	0.3947	0.2445	0.1335	0.0578
<b>-a</b>	<b>0.1282</b>	<b>0.2959</b>	<b>0.5454</b>	<b>0.8193</b>	<b>1.3657</b>	<b>1.9991</b>	<b>2.8495</b>	<b>4.001</b>	<b>5.585</b>	<b>7.8135</b>	<b>11.0447</b>	<b>15.9196</b>	<b>23.6737</b>	<b>36.9297</b>	<b>62.0562</b>	<b>117.902</b>	<b>281.960</b>
<b>b</b>	<b>1.0019</b>	<b>1.5318</b>	<b>2.0985</b>	<b>2.7182</b>	<b>3.4108</b>	<b>4.2024</b>	<b>5.1279</b>	<b>6.2361</b>	<b>7.5976</b>	<b>9.3185</b>	<b>11.5659</b>	<b>14.6179</b>	<b>18.9689</b>	<b>25.5796</b>	<b>36.5541</b>	<b>57.388</b>	<b>107.254</b>
$C^0$	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C^n$	0.5162	0.8228	1.1905	1.6159	2.1761	2.8487	3.6967	4.7875	6.2248	8.1748	10.9159	14.942	21.1964	31.6637	51.1197	93.5671	210.012
$\Phi_{5\pi/4}^0$	436.68	442.782	808.329	93.203	97.3054	100.869	103.94	87.7485	71.7171	61.8107	54.1846	47.7847	42.1067	36.8355	31.7476	26.6082	21.102
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\Phi_{5\pi/4}^n$	<b>100.388</b> n = 4	<b>95.535</b> n = 4	<b>90.6305</b> n = 5	<b>87.2156</b> n = 4	<b>80.7584</b> n = 6	<b>75.9112</b> n = 7	<b>71.1614</b> n = 6	<b>66.5204</b> n = 4	<b>61.9883</b> n = 4	<b>57.5422</b> n = 3	<b>53.1648</b> n = 3	<b>48.8212</b> n = 3	<b>44.473</b> n = 3	<b>40.0669</b> n = 3	<b>35.5234</b> n = 3	<b>30.72</b> n = 3	<b>25.4279</b> n = 3
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.06	75.43	71.80	68.17	64.55	60.93	57.31	53.68	50.02	46.32	42.55	38.70	34.70	30.50	25.95	20.82
ERROR S %	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR $\varphi$ %	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

**TABLA 4.9 CÁLCULO DEL ÁNGULO DE ATTITUDEN GRADOS DEL PUERTO LATERAL IZQUIERDO SUPERIOR:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 100$ ;  $\beta = 5\pi/4$ .**



## 4.6.1 Posición final del rotor para $\beta = 5\pi/4$ .

El desarrollo de la tabla 4.7 resultó ser el más fácil, pues sólo se requirió iterar dos veces y sólo una iteración a partir de  $\varepsilon = 0.6$  para encontrar la posición del ángulo  $\varphi$  pudiendo calcular todas las excentricidades. Para el cálculo de la tabla 4.8 se requirió aumentar una iteración para poder encontrar la ubicación de todos los ángulos de actitud iniciando con tres iteraciones y a partir de  $\varepsilon = 0.35$  sólo se requirió de dos iteraciones pudiendo de igual manera calcular todos los puntos. Para el cálculo de la última tabla 4.9 aumentaron las iteraciones llegando en algunos puntos  $\varepsilon = 0.35$  aumentar hasta 7 iteraciones y en otros puntos  $\varepsilon = 0.9$  disminuir a 3 iteraciones, esto se debe a que influye fuertemente la fuerza de presión con respecto a la excentricidad siendo este último caso el lugar donde se aplica la mayor presión.

La Fig. 4.16 muestra gráficamente los resultados obtenidos en las tablas 4.7,4.8 y 4.9, aquí se nota que casi no existe desplazamiento del rotor aunque aumenta la presión gradualmente, como se nota de de las  $f_{prt} = 5$  y  $f_{prt} = 20$  los puntos calculados concuerdan casi igual en la misma ubicación, nótese que al aumentar a  $f_{prt} = 100$  se nota un cambio no muy relevando siendo que se a aumenta la fuerza de presión enormemente. Resultando así el puerto ubicado en la parte **lateral izquierda superior**  $\beta = 5\pi/4$  un puerto de inyección de lubricante muy estable y en el cual no presenta grandes cambios el rotor al ir presurizando gradualmente.

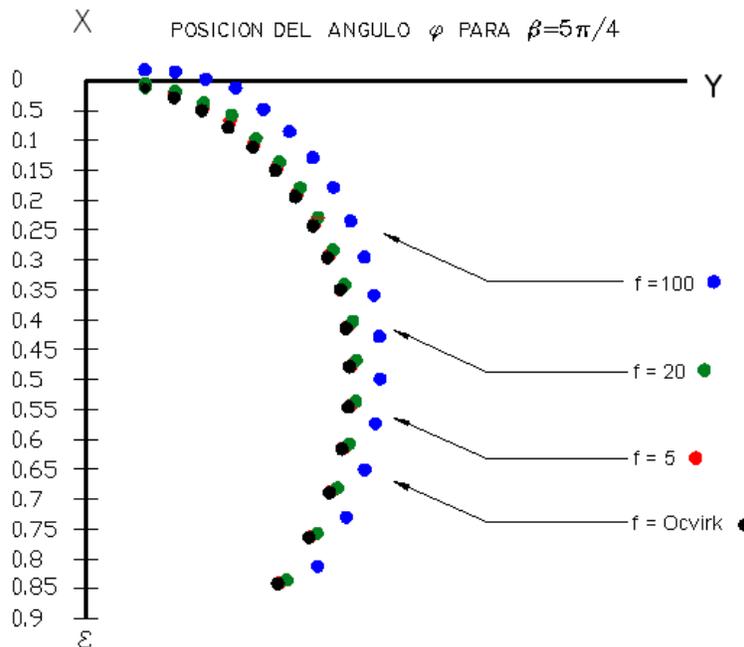


Fig. 4.16 Ubicación del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = 5\pi/4$ .



## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

### 4.7 Tablas de posición de puerto de inyección $\beta = 7\pi/4$ .

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{7\pi/4}^0$	16.4976	10.2725	7.1313	5.5615	4.2878	3.3807	2.6787	2.1183	1.6619	1.2861	0.8338	0.7191	0.5101	0.3416	0.2105	0.1133	0.0473
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$S_{7\pi/4}^2$	15.4805	10.0373	7.2297	5.5268	4.2708	3.3718	2.6739	2.1157	1.6606	1.2856	0.9755	0.7196	0.5108	0.3427	0.2119	0.1149	0.0490
<b>-a</b>	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.0010	5.5850	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
<b>b</b>	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.2361	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.3884	107.254
$C^0$	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C^2$	0.0403	0.0622	0.0864	0.1130	0.1463	0.1853	0.2337	0.2959	0.3763	0.4861	0.6406	0.8685	1.2234	1.3285	2.9483	5.4358	12.7528
$\Phi_{7\pi/4}^0$	102.76	91.0831	83.6576	79.2458	72.8344	68.2507	63.9306	59.7824	113.027	51.7438	47.7732	43.7797	39.7232	35.5406	31.1632	26.4477	21.1479
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\Phi_{7\pi/4}^2$	84.0529 n=2	80.323 n=2	76.6274 n=2	74.3642 n=2	69.3164 n=2	65.6953 n=2	62.0914 n=2	58.5105 n=2	54.9409 n=2	51.3714 n=2	47.8076 n=2	44.2266 n=2	40.6284 n=2	36.9959 n=2	33.3175 n=2	29.5761 n=2	25.7545 n=2
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR S%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR $\varphi\%$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

**TABLA 4.10 CÁLCULO DEL ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL IZQUIERDO INFERIOR:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 5$ ;  $\beta = 7\pi/4$ .**





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.8396	10.2553	7.3791	5.5918	4.3548	3.4381	2.7273	2.1594	1.6967	1.3157	1.0004	0.7402	0.5274	0.3561	0.2221	0.1220	0.0530
$S_{7\pi/4}^0$	25.4994	9.6338	7.9574	5.6659	4.2456	3.2973	2.5875	2.0309	1.5823	1.2154	0.9135	0.6656	0.4641	0.3035	0.1798	0.0899	0.0316
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$S_{7\pi/4}^n$	14.4776	9.4321	6.8176	5.2280	4.043	3.1939	2.5323	2.0016	1.5682	1.2107	0.9152	0.6719	27.1467	0.3158	0.1937	0.1041	0.0440
<b>-a</b>	<b>0.1282</b>	<b>0.2959</b>	<b>0.5454</b>	<b>0.8193</b>	<b>1.3657</b>	<b>1.9991</b>	<b>2.8495</b>	<b>4.0010</b>	<b>5.5850</b>	<b>7.8135</b>	<b>11.0447</b>	<b>15.9196</b>	<b>23.6737</b>	<b>36.9297</b>	<b>62.0562</b>	<b>117.902</b>	<b>281.960</b>
<b>b</b>	<b>1.0019</b>	<b>1.5318</b>	<b>2.0985</b>	<b>2.7182</b>	<b>3.4108</b>	<b>4.2024</b>	<b>5.1279</b>	<b>6.2361</b>	<b>7.5976</b>	<b>9.3185</b>	<b>11.5659</b>	<b>14.6179</b>	<b>18.9689</b>	<b>25.5796</b>	<b>36.5541</b>	<b>57.3884</b>	<b>107.254</b>
$C^0$	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C^n$	0.1726	0.2650	0.3666	0.4781	0.6183	0.7827	0.9872	1.2489	1.5941	2.0647	2.7314	3.7204	5.2757	7.9159	12.9058	24.0068	56.769
$\Psi_{7\pi/4}^0$	25.7545	91.0831	105.653	94.8474	84.6946	77.6243	71.5395	66.0678	60.9914	56.1728	51.5204	46.9482	42.3817	37.7465	32.9336	27.7942	22.0531
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\Psi_{7\pi/4}^n$	<b>88.3845</b> n=3	<b>84.3107</b> n=3	<b>80.3688</b> n=3	<b>77.8879</b> n=3	<b>72.7828</b> n=3	<b>69.1216</b> n=3	<b>65.5406</b> n=3	<b>62.0284</b> n=3	<b>58.5907</b> n=3	<b>55.2274</b> n=3	<b>51.9386</b> n=3	<b>48.7301</b> n=3	<b>45.6074</b> n=3	<b>42.588</b> n=3	<b>39.6831</b> n=3	<b>36.8928</b> n=3	<b>34.2056</b> n=3
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.0667	75.4312	71.8017	68.1780	64.5584	60.9396	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR S %	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ERROR $\varphi$ %	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

TABLA 4.11 CÁLCULO DEL ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL IZQUIERDO INFERIOR:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 20$ ;  $\beta = 7\pi/4$ .





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$S_{ocv}$	15.83	10.25	7.37	5.59	4.35	3.43	2.72	2.15	1.69	1.31	1.00	0.74	0.52	0.35	0.22	0.12	0.05
$S_{7\pi/4}^0$	22.2473	18.5949	17.4002	16.6173	18.4487	4.3955	2.7160	1.9206	1.3991	1.0159	0.7204	0.4885	0.3069	0.1680	0.0914	****	****
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$S_{7\pi/4}^n$	11.3438	7.4692	5.4631	4.2374	3.7821	2.6302	2.0974	1.6650	1.3087	1.0159	0.7672	0.5645	0.3992	0.2671	0.2277	****	****
<b>-a</b>	0.1282	0.2959	0.5454	0.8193	1.3657	1.9991	2.8495	4.001	5.585	7.8135	11.0447	15.9196	23.6737	36.9297	62.0562	117.902	281.960
<b>b</b>	1.0019	1.5318	2.0985	2.7182	3.4108	4.2024	5.1279	6.2361	7.5976	9.3185	11.5659	14.6179	18.9689	25.5796	36.5541	57.388	107.254
$C^0$	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C^n$	1.1019	1.6735	2.2880	2.9498	3.7821	4.7523	5.9596	7.5072	9.5508	12.3411	16.2912	25.588	31.3087	46.783	54.8887	****	****
$\varphi_{7\pi/4}^0$	148.23	148.642	148.78	149.256	148.064	117.674	100.709	89.1007	80.1625	71.9177	64.8073	58.2125	51.9157	45.7278	39.4768	****	****
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\varphi_{7\pi/4}^n$	118.585 n = 18	110.208 n = 16	103.195 n = 10	98.3492 n = 8	91.8738 n = 10	87.1125 n = 8	82.7867 n = 7	78.8103 n = 7	75.132 n = 8	71.7171 n = 4	68.5372 n = 7	65.5636 n = 9	62.7847 n = 8	60.1778 n = 11	53.3252 n = 17	****	****
$\varphi_{ocv}$	82.7078	79.06	75.43	71.80	68.17	64.55	60.93	57.3161	53.6802	50.0203	46.3207	42.5591	38.704	34.7086	30.5002	25.9543	20.8260
ERROR $\xi\%$	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0
ERROR $\varphi\%$	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0

TABLA 4.12 CÁLCULO DEL ÁNGULO DE ATTITUD EN GRADOS DEL PUERTO LATERAL IZQUIERDO INFERIOR:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 100$ ;  $\beta = 7\pi/4$ .



## 4.7.1 Posición final del rotor para $\beta = 7\pi/4$ .

La tabla 4.10 fue particularmente fácil de calcular pues a lo largo de todas las excentricidades planteadas para encontrar el ángulo de actitud sólo se requirió de dos iteraciones. Para el cálculo de la tabla 4.11 en todos los casos se requirió de tres iteraciones, resultando estas dos tablas casos particulares, pues en todas ellas se necesitó el mismo número de iteraciones pudiendo determinar todos los puntos en forma algo sencilla. Quizás una de las tablas más difíciles de calcular fue la 4.12 en esta se requirió de un alto número de iteraciones en casi todos los casos, resultando imposible por este método determinar los dos últimos puntos.

Es interesante como el sistema de ecuaciones 5.1 y 5.2 nos puede proporcionar la ubicación exacta para del rotor ubicando en posiciones diferentes los puertos de inyección de lubricante. Véase en la figura 4.17 que posicionando el puerto de inyección en la parte lateral izquierda inferior claramente se nota como el lubricante a presión empuja el rotor en posición puesta a éste, en un ángulo cercano a  $45^\circ$  véase como el aumento de presión empuja proporcionalmente a medida que se aumenta esta presión.

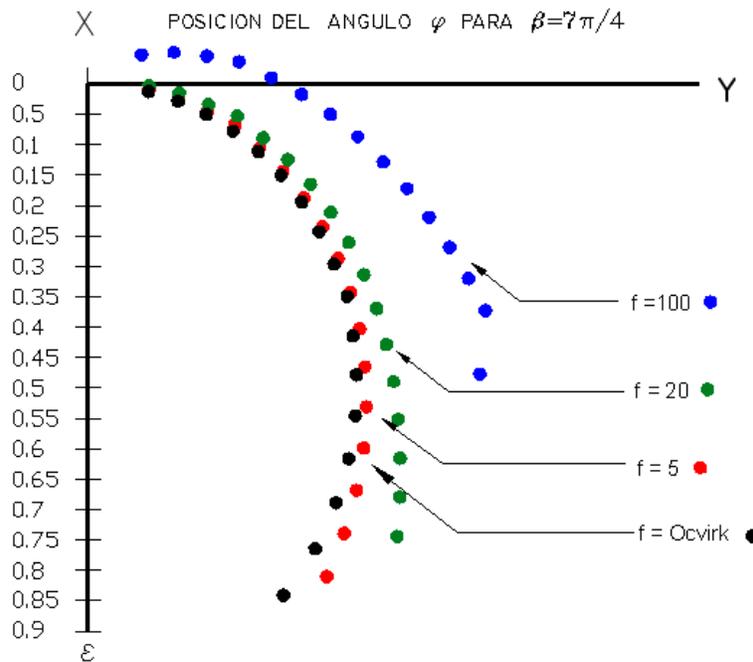


Fig. 4.17 Ubicación del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = 7\pi/4$ .

## 4.8 Resultados.

Los datos obtenidos en las tablas 4.1, 4.2 y 4.3 produjeron la ubicación del rotor la cual ya se explicó y definió en la Fig. 4.14, posteriormente se realizaron los cálculos obtenidos en las tablas ya antes mencionadas. El obtener la tabla 4.15 nos proporciona el cambio relativo que existe entre el locus de equilibrio  $\varphi_{Ocvirk}$  (el cual permite obtener la posición en donde el centro del muñón orbitara) y el ángulo de actitud ya antes calculado, estos datos se determinaron por medio del programa Mathematica 6.

En la figura 4.18 se muestra que el cambio relativo ubicando el puerto de inyección de lubricante en la lateral derecha inferior, estos datos muestran tres sistemas de puntos en los cuales se nota el cambio de posición que el rotor sufrió debido a la presurización. Como se observa sólo aparecen dos series de puntos  $f_{prt} = 5$  y  $f_{prt} = 20$ , ya que  $f_{prt} = 100$  no se pudo calcular por este método, al menos es claro que en éste análisis se nota claramente como el rotor es impulsado en sentido opuesto a la ubicación del puerto de inyección.

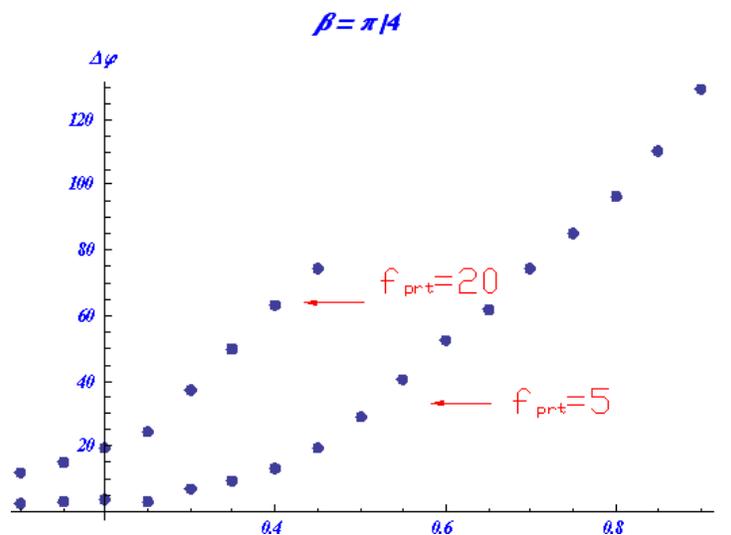


Fig. 4.18 Cambio relativo del rotor para  $\beta = \pi/4$ .

En la Fig. 4.19 se ubica el puerto de inyección de lubricante en la parte lateral derecha superior, aquí notamos que para  $f_{prt} = 5$  a medida que se aumenta la excentricidad no existe un gran desplazamiento relativo, lo mismo casi sucede con  $f_{prt} = 20$ , no así con  $f_{prt} = 100$  pues a medida que se aumenta la excentricidad aumenta el cambio relativo.

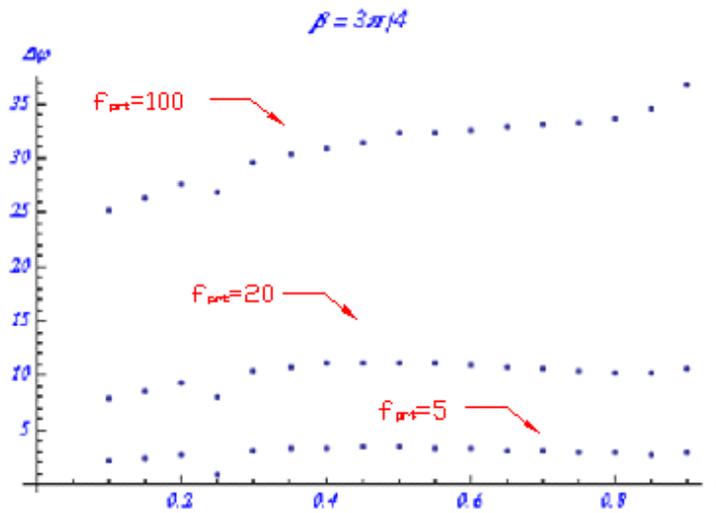


Fig. 4.19 Cambio relativo del rotor para  $\beta = 3\pi/4$ .

La Fig. 4.20 refleja que el rotor se encuentra en el plano negativo aquí con  $f_{prt} = 5$  el cambio es muy pequeño, pero a medida que aumentamos la fuerza de presión así como la excentricidad existe un desplazamiento importante, nótese que este puerto de inyección produce una mayor estabilidad comparada con el puerto anterior.

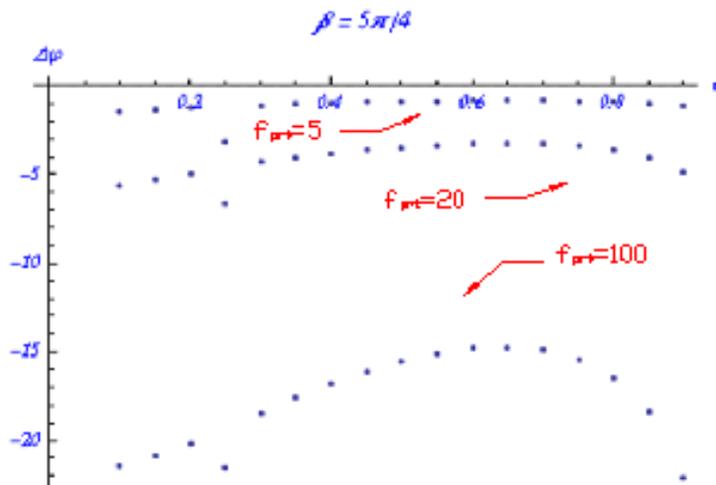


Fig. 4.20 Cambio relativo del rotor para  $\beta = 5\pi/4$

Por último, el puerto ubicado en la parte lateral izquierda inferior describe grandes cambios, aquí se observa que en  $\varepsilon = 0.9$  y con  $f_{prt} = 100$  se lleva a cabo un gran desplazamiento.

Esto produce enormes cambios en la ubicación del rotor,  $\beta = 7\pi/4$  y  $\beta = \pi/4$  fueron los que representaron mayores cambios a medida que se aumenta la fuerza de presión, esto es de esperarse, debido al peso del sistema, resultando así, ciertas las hipótesis planteadas.

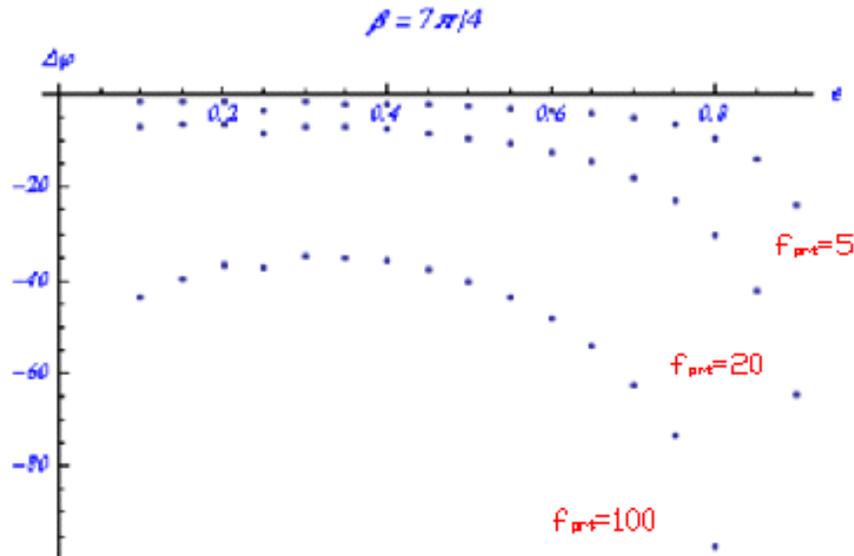


Fig. 4.21 Cambio relativo del rotor para  $\beta = 7\pi/4$ .



# CAPÍTULO V

## Conclusiones y trabajos futuros.

### 5.1 Comparación de resultados numéricos y analíticos.

El método matemático iterativo usado en el presente trabajo, para determinar la posición exacta del rotor, de una chumacera híbrida presurizada ubicando los puertos de inyección de lubricante en diferentes posiciones independientes y con diversas presurizaciones, consistió en ir resolviendo un sistema de ecuaciones, éstas con ayuda del programa computacional MATHEMATICA 6 se fueron resolviendo, iterando hasta determinar el valor más propio.

Este método resultó ser muy exacto casi del 100% para todos los casos propuestos, por lo que se concluye ser un método muy preciso y confiable, no obstante para algunos casos particulares se requirió de un gran número, hasta 27 iteraciones para  $\beta = 3\pi/2$  y en otros casos, aunque fueron menos iteraciones es un proceso laborioso.

Cabe mencionar que para una fuerza de presión  $f_{prt} = 100$  ubicando el puerto de inyección en la parte **lateral derecha inferior**  $\beta = \pi/4$  no se pudo calcular la ubicación del rotor, motivo por el cual este método no tiene un alcance de encontrar dicha posición para determinadas presurizaciones, dependiente directamente de una posición arbitraria del puerto de inyección de lubricante con una determinada excentricidad  $\varepsilon$ .

Por lo anterior ya antes expuesto, este método se considera el tener grandes ventajas, así también algunas desventajas, pero en general es un método apto hasta donde su alcance lo permita para determinado fin.

A continuación se muestran los datos finales obtenidos de cada tabla, correspondientes al ángulo de actitud  $\varphi$  dependiente de la ubicación del puerto de inyección de lubricante, sumado a estos se adjuntan los valores ya calculados por el Dr. Ignacio Ramírez Vargas habiendo encontrado la posición del puerto de inyección de lubricante para dos casos especiales, una en la parte superior  $\beta = \pi$  y otro en la inferior  $\beta = 2\pi$ .





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

### 5.1.1 Tablas: Ubicación del rotor colocando el puerto de inyección de lubricante en 8 posiciones diferentes.

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$\beta_{2\pi}$	82.70	79.06	75.43	71.80	68.17	64.55	60.93	57.31	53.68	50.02	46.32	42.55	38.70	34.70	30.50	25.95	20.82
$\beta_{\pi/4}^n$	80.7527 n=3	76.5758 n=3	72.448 n=3	69.58 n=3	63.5124 n=3	58.4818 n=3	52.7694 n=3	46.0601 n=4	38.2392 n=5	29.91 n=4	22.18 n=7	16.2319 n=8	9.9236 n=10	5.1508 n=10	1.0084 n=10	-2.6699 n=10	-6.0733 n=10
$\beta_{\pi/2}^2$	79.6526	75.4872	71.2358	68.2966	62.5338	58.138	53.7721	49.5036	45.3683	41.4005	37.5975	33.9592	30.4355	26.9634	23.4626	19.7785	15.6704
$\beta_{3\pi/4}^n$	80.873 n=3	77.1029 n=3	73.373 n=3	71.064 n=3	66.0334 n=3	62.4352 n=3	58.8714 n=3	55.3477 n=3	51.8355 n=3	48.3233 n=3	44.748 n=1	41.1957 n=3	37.5058 n=3	33.6785 n=3	29.6105 n=1	25.216 n=2	20.2197 n=2
$\beta_{\pi}$	82.70	79.06	75.43	71.80	68.17	64.55	60.93	57.31	53.68	50.02	46.32	42.55	38.70	34.70	30.50	25.95	20.82
$\beta_{5\pi/4}^n$	83.9383 n=2	80.1625 n=2	76.3982 n=2	74.0834 n=2	68.9323 n=2	65.2255 n=2	61.5299 n=2	57.8401 n=2	54.152 n=2	50.4432 n=2	46.6903 n=1	42.9088 n=1	39.0242 n=1	35.0077 n=1	30.7793 n=1	26.2185 n=1	21.0505 n=1
$\beta_{3\pi/2}^2$	84.3852	80.5407	76.742	74.3928	69.2419	65.5349	61.8393	58.1609	54.4826	50.7870	47.0685	43.2984	39.4424	34.9791	31.2892	26.7972	21.7667
$\beta_{7\pi/4}^n$	84.0529 n=2	80.323 n=2	76.6274 n=2	74.3642 n=2	69.3164 n=2	65.6953 n=2	62.0914 n=2	58.5105 n=2	54.9409 n=2	51.3714 n=2	47.8076 n=2	44.2266 n=2	40.6284 n=2	36.9959 n=2	33.3175 n=2	29.5761 n=2	25.7545 n=2

TABLA 5.1 POSICIONES DEL ROTOR DE UNA CHUMACERA CORTA HÍBRIDA PRESURIZADA:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 5$ .





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$\beta_{2\pi}$	82.70	79.06	75.43	71.80	68.17	64.55	60.93	57.31	53.68	50.02	46.32	42.55	38.70	34.70	30.50	25.95	20.82
$\beta_{\pi/4}^n$	73.0235 n=4	67.2481 n=4	60.5445 n=4	53.9898 n=5	42.7942 n=7	32.3091 n=11	22.6146 n=15	14.4729 n=62									
$\beta_{\pi/2}^2$	70.8405	65.4490	60.0116	55.9092	49.5093	44.6563	40.1586	36.0161	32.2174	28.7224	25.4852	22.4542	19.5665	16.7647	13.9630	11.0466	7.8036
$\beta_{3\pi/4}^n$	76.1633 n=4	72.2041 n=4	68.3596 n=4	65.9532 n=4	61.0372 n=3	57.536 n=3	54.1674 n=3	50.8729 n=3	47.63 n=2	44.4214 n=3	41.2014 n=2	37.9413 n=3	34.5952 n=3	31.1001 n=3	27.3759 n=3	23.2965 n=3	18.6097 n=3
$\beta_{\pi}$	82.70	79.06	75.43	71.80	68.17	64.55	60.93	57.31	53.68	50.02	46.32	42.55	38.70	34.70	30.50	25.95	20.82
$\beta_{5\pi/4}^n$	87.3857 n=3	83.2565 n=3	79.1598 n=3	76.5586 n=3	71.1098 n=3	67.1564 n=2	63.2488 n=2	59.3756 n=2	55.5253 n=2	51.6808 n=2	47.8248 n=2	43.9344 n=2	39.9695 n=2	35.8843 n=2	31.5986 n=2	27.0035 n=2	21.8412 n=2
$\beta_{3\pi/2}^2$	89.3986	84.9353	80.6266	77.8592	72.3760	68.3940	64.4807	60.6304	56.8088	53.0215	49.2285	45.4126	41.5509	37.5918	33.4837	29.1177	24.2991
$\beta_{7\pi/4}^n$	88.3845 n=3	84.3107 n=3	80.3688 n=3	77.8879 n=3	72.7828 n=3	69.1216 n=3	65.5406 n=3	62.0284 n=3	58.5907 n=3	55.2274 n=3	51.9386 n=3	48.7301 n=3	45.6074 n=3	42.588 n=3	39.6831 n=3	36.8928 n=3	34.2056 n=3

**TABLA 5.2 POSICIONES DEL ROTOR DE UNA CHUMACERA CORTA HÍBRIDA PRESURIZADA:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 20$ .**





## Teoría de chumaceras con puertos horizontales

$\varepsilon$	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
$\beta_{2\pi}$	82.70	79.06	75.43	71.80	68.17	64.55	60.93	57.31	53.68	50.02	46.32	42.55	38.70	34.70	30.50	25.95	20.82
$\beta_{\pi/4}^n$	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
$\beta_{\pi/2}^2$	39.173 n = 27	31.51 n = 7	28.64 n = 6	25.5081 n = 18	20.62 n = 7	17.18 n = 5	14.152 n = 10	11.401 n = 7	8.823 n = 6	6.531 n = 5	4.354 n = 5	2.291 n = 5	0.3437 n = 6	-1.5870 n = 5	-3.5466 n = 5	-5.6207 n = 5	-7.9583 n = 4
$\beta_{3\pi/4}^n$	61.7878 n = 5	58.2469 n = 5	54.643 n = 5	52.4715 n = 5	48.0253 n = 4	44.9715 n = 4	42.0551 n = 4	39.253 n = 4	36.5261 n = 4	33.8561 n = 3	31.209 n = 4	28.539 n = 3	25.9034 n = 2	23.1647 n = 2	20.2369 n = 2	16.9882 n = 2	13.178 n = 2
$\beta_{\pi}$	82.70	79.06	75.43	71.80	68.17	64.55	60.93	57.31	53.68	50.02	46.32	42.55	38.70	34.70	30.50	25.95	20.82
$\beta_{5\pi/4}^n$	100.388 n = 4	95.535 n = 4	90.6305 n = 5	87.2156 n = 4	80.7584 n = 6	75.9112 n = 7	71.1614 n = 6	66.5204 n = 4	61.9883 n = 4	57.5422 n = 3	53.1648 n = 3	48.8212 n = 3	44.473 n = 3	40.0669 n = 3	35.5234 n = 3	30.72 n = 3	25.4279 n = 3
$\beta_{3\pi/2}^2$	113.698 n = 9	106.639 n = 7	99.9181 n = 7	95.0709 n = 6	87.7599 n = 9	82.288 n = 5	77.1545 n = 8	72.313 n = 6	67.7007 n = 5	63.2717 n = 5	58.9975 n = 4	54.8321 n = 4	50.7297 n = 4	46.656 n = 4	42.5536 n = 3	38.3251 n = 4	33.8332 n = 4
$\beta_{7\pi/4}^n$	118.585 n = 18	110.208 n = 16	103.195 n = 10	98.3492 n = 8	91.8738 n = 10	87.1125 n = 8	82.7867 n = 7	78.8103 n = 7	75.132 n = 8	71.7171 n = 4	68.5372 n = 7	65.5636 n = 9	62.7847 n = 8	60.1778 n = 11	53.3252 n = 17	****	****

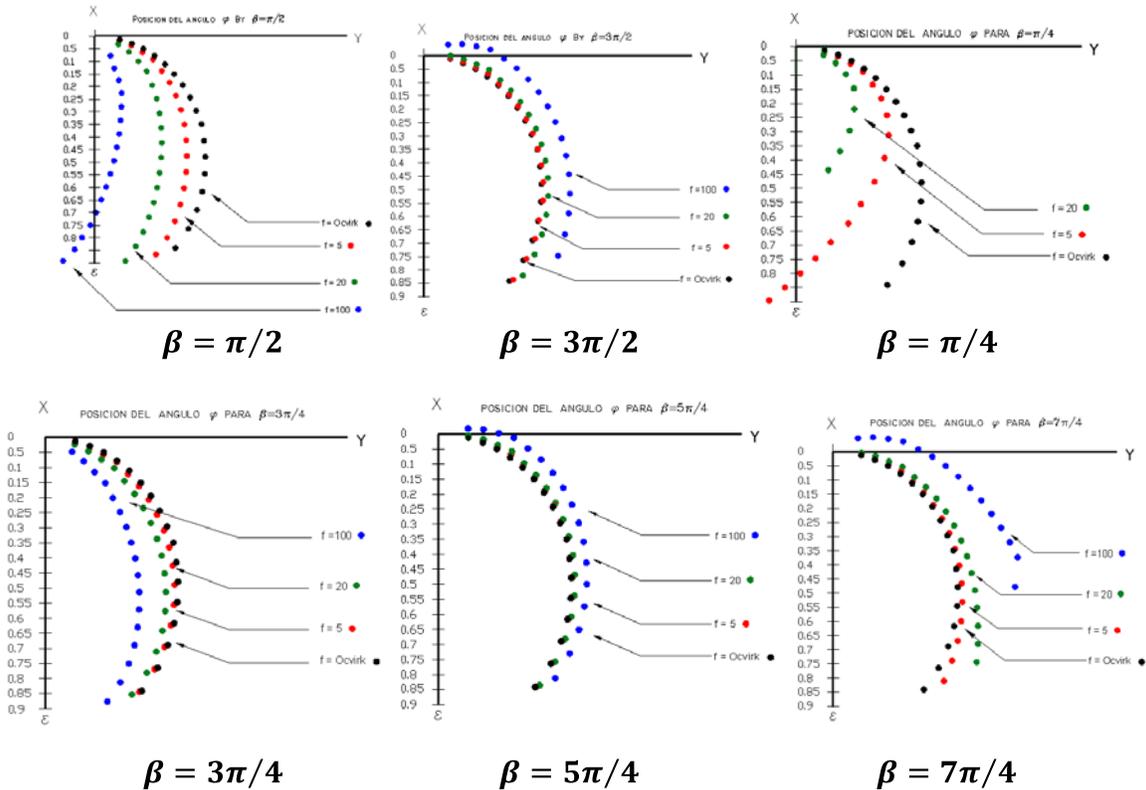
**TABLA 5.3 POSICIONES DEL ROTOR DE UNA CHUMACERA CORTA HÍBRIDA PRESURIZADA:  $(L/D) = (1/4)$ ;  $f_{prt} = 100$ .**



## 5.2 Conclusiones.

1) Nuestros resultados son representados para los puertos horizontales en las Fig. (3.11) y (3.12). Para los puertos de inyección de lubricante simétricos, los cuales fueron analizados independientemente se encuentran en las Fig. (4.14),(4.15),(4.16) y (4.17).

2) A continuación se muestra la ubicación del rotor colocando el puerto de inyección de lubricante en seis posiciones diferentes.



## 5.3 Recomendaciones y trabajos futuros.

- Es importante considerar el caso general donde posicionamos el puerto de inyección de lubricante en posición arbitrariamente, pues de esta forma se tendrá un conocimiento general de la ubicación donde quedará posicionada el muñón, es importante notar que esta ubicación está íntimamente relacionado con las diferentes fuerza de presión a la cual se someta la chumacera, así como de la excentricidad.
- Dato importante es el poder conocer las tablas de los coeficientes rotodinámicos para cada puerto de inyección, así como arbitrarios.
- Calcular la dependencia de la velocidad umbral de la fuerza de presurización y calcular las tablas.
- Presentar los resultados en forma adecuada para los ingenieros e implementar algún dispositivo o tabla útil a dicho propósito.



## Referencias.

- [1] Ignacio Ramírez Vargas. *Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales: caso de la chumacera corta*, Tesis de Doctorado, SEPI- ESIME, IPN, 2007.
- [2] Enrique Trejo Cano. “*Estudio numérico de la respuesta vibratoria de ejes fisurados en chumaceras presurizadas.*” Tesis de Maestría SEPI-ESIME, IPN 2006.
- [3] José Manuel Machorro López. “*Experimentación y validación de modelos dinámicos para detectar fisuras en ejes rotatorios de maquinaria en operación*” Tesis de Maestría SEPI-ESIME, IPN 2005.
- [4] V. R. Nossov, J. Gómez Mancilla, I. Ramírez Vargas. (2007) **New Analytical Model and Stationary Position for a Short Journal Bearing with Point Injection Ports. (Presented in paper style)**
- [5] J. Gómez-Mancilla, V. R. Nossov, I. Ramírez Vargas. “*New model and Stationary Position for a Short Journal Bearings with Upper Point Injection Ports*” 7th IF To MM Conference on Rotor Dynamics, Vienna, Austria, 25- 28 September 2006.(*presented Conference paper style*)
- [6] V.R. Nossov, J.Gómez-Mancilla, I. Ramirez-Vargas, D.E.Rivera-Arreola **STATIONARY POSITION IN HYBRID JOURNAL BEARING WITH HORIZONTAL POINT INJECTION PORTS** (Presented Conference Paper style IMRC2009, XVIII International Materials Research Congress **2009**)
- [7] Rivera-Arreola , V.R. Nossov, J.Gómez-Mancilla, I. Ramirez-Vargas, **Horizontal location of injection ports oil in short hybrid journal bearing. (Paper style Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas CNIES 2009 SEPI-ESIME-IPN)**
- [8] Samuel Morales Bonilla “*DISEÑO MECANICO DE UNA CHUMACERA HIBRIDA POR MEDIO DE MATLAB*” Tesis de Licenciatura ESIME-AZCAPOTZALCO, IPN 2007.
- [9] J.Gómez-Mancilla, J.A. Meda-Campaña, J. H. Salazar-Silva “*Pressurized Bearing Design using Nonlinear Active Control Attenuating Vibrations*” (*presented Conference Paper style*) 10<sup>0</sup> Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas **CNIES 2007 SEPI-ESIME-IPN**).
- [10] J.Gómez-Mancilla, V.R. Nossov, Gerardo Silva-Navarro “*Rotor-bearing system stability performance comparing hybrid versus conventional bearing*” *Rotating Machinery Vol. 1 pg. 17, 2005.*





Apéndice A.

Programa en MATHEMATICA 6 para determinar los campos de presión.

```

.....inyección lateral derecha.....fprt:=5.....
S:=1
n:=10
b:=Pi/2
a:=0
e:=0.6
fprt:=5
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((nPi)^0.5)E^((n^2)*((tetaPib+fi)^2))*(1(a*z)Abs[za])))/(2*(1+e*Cos[tet
a])^3),{teta,0,2 Pi},{z,-1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-4,1},AxesLabel->{teta,z,p}]

```

```

.....inyección lateral derecha.....fprt:=20.....
S:=1
n:=10
b:=Pi/2
a:=0
e:=0.6
fprt:=20
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((P^0.5)E^((n^2)*((tetaPib+fi)^2))*(1(a*z)Abs[za])))/(2*(1+e*Cos[teta]
^3),{teta,0,2Pi},{z,1,1},PlotPoints>40,ViewPoint>{1,4,1},AxesLabel>{teta,z,p},PlotRange>{4,
15}]

```

```

.....inyección lateral derecha.....fprt:=100.....
S:=1
n:=10
b:=Pi/2
a:=0
e:=0.6
fprt:=100
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((P^0.5)E^((n^2)*((tetaPib+fi)^2))*(1(a*z)Abs[za])))/(2*(1+e*Co[teta])^3
),{teta,0,2Pi},{z,-1,1},PlotPoints>40,ViewPoint>{1,4,1},AxesLabel>{teta,z,p},PlotRange>{-
4,90}]

```





.....inyección lateral derecha mostrando máximos positivos.....fprt:=5.....

```
S:=1
n:=10
b:=Pi/2
a:=0
e:=0.6
fprt:=5
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[Max[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((n/Pi)^0.5) E^((-n^2)*((teta-Pi-b+fi)^2))*(1-(a*z)-Abs[z-
a])))/(2*(1+e*Cos[teta])^3),0],{teta,0,2 Pi},{z,-1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-
4,1},AxesLabel->{teta,z,p},PlotRange->{-2,4}]
```

.....inyección lateral izquierda.....fprt:=5.....

```
S:=1
n:=10
b:=3*Pi/2
a:=0
e:=0.6
fprt:=5
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((nPi)^0.5)E^((n^2)*((tetaPib+fi)^2))*(1(a*z)Abs[za])))/(2*(1+e*Cos[teta]
^3),{teta0,2Pi},{z,-1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-4,1},AxesLabel->{teta,z,p}]
```

.....inyección lateral izquierda.....fprt:=20.....

```
S:=1
n:=10
b:=3*Pi/2
a:=0
e:=0.6
fprt:=20
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((P^0.5)E^((n^2)*((tetaPib+fi)^2))*(1(a*z)Abs[za])))/(2*(1+e*Cos[teta]
^3),{teta,0,2Pi},{z,1,1},PlotPoints>40,ViewPoint>{1,4,1},AxesLabel>{teta,z,p},PlotRange>{4,
15}]
```





.....inyección lateral izquierda.....fprt:=100.....

```

S:=1
n:=10
b:=3*Pi/2
a:=0
e:=0.6
fprt:=100
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((P^0.5)E^((n^2)*((tetaPib+fi)^2))*(1(a*z)Abs[za])))/(2*(1+e*Co[teta])^3
),{teta,0,2Pi},{z,-1,1},PlotPoints>40,ViewPoint>{1,4,1},AxesLabel>{teta,z,p},PlotRange>{-
4,90}]

```

.....inyección lateral izquierda mostrando máximos positivos.....fprt:=5.....

```

S:=1
n:=10
b:=3*Pi/2
a:=0
e:=0.6
fprt:=5
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[Max[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((n/(Pi)^0.5) E^((-n^2)*((teta-Pi-b+fi)^2))*(1-(a*z)-Abs[z-
a])))/(2*(1+e*Cos[teta])^3),0],{teta,0,2 Pi},{z,-1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-
4,1},AxesLabel->{teta,z,p},PlotRange->{-2,4}]

```

.....inyección lateral derecha inferior.....fprt:=5.....

```

S:=1
n:=10
b:=Pi/4
a:=0
e:=0.6
fprt:=5
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((n/(Pi)^0.5) E^((-n^2)*
((teta-Pi-b+fi)^2))*(1-(a*z)-Abs[z-a])))/(2*(1+e*Cos[teta])^3),{teta,0,2Pi},{z,-
1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-4,1},AxesLabel->{teta,z,p},PlotRange->{-5,15}]

```





.....inyección lateral derecha inferior.....fprt:=20.....

```

S:=1
n:=10
b:=Pi/4
a:=0
e:=0.6
fprt:=20
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((n/(Pi)^0.5)E^((-n^2)*((teta-Pi-b+fi)^2))*(1-(a*z)-Abs[z-
a])))/(2*(1+e*cos[teta])^3),{teta,0,2 Pi},{z,-1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-
4,1},AxesLabel->{teta,z,p},PlotRange->{-5,50}]

```

.....inyección lateral-derecha inferior.....fprt:=100.....

```

S:=1
n:=10
b:=Pi/4
a:=0
e:=0.6
fprt:=100
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((n/(Pi)^0.5)E^((-n^2)*((teta-Pi-b+fi)^2))*(1-(a*z)-Abs[z-
a])))/(2*(1+e*cos[teta])^3),{teta,0,2 Pi},{z,-1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-
4,1},AxesLabel->{teta,z,p},PlotRange->{-5,250}]

```

.....inyección lateral derecha superior.....fprt:=5.....

```

S:=1
n:=10
b:=3*Pi/4
a:=0
e:=0.6
fprt:=5
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((n/(Pi)^0.5)E^((-n^2)*
((teta-Pi-b+fi)^2))*(1-(a*z)-Abs[z-a])))/(2*(1+e*cos[teta])^3),{teta,0,2 Pi},{z,-
1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-4,1},AxesLabel->{teta,z,p},PlotRange->{-5,5}]

```





.....inyección lateral derecha superior .....fprt=20.....

```

S:=1
n:=10
b:=3*Pi/4
a:=0
e:=0.6
fprt:=20
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((n/(Pi)^0.5) E^((-n^2)*
((teta-Pi-b+fi)^2))*(1-(a*z)-Abs[z-a])))/(2*(1+e*Cos[teta])^3),{teta,0,2 Pi}, {z,-
1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-4,1},AxesLabel->{teta,z,p},PlotRange->{-5,5}]

```

.....inyección lateral derecha superior .....fprt=100.....

```

S:=1
n:=10
b:=3*Pi/4
a:=0
e:=0.6
fprt:=100
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((n/(Pi)^0.5) E^((-n^2)*
((teta-Pi-b+fi)^2))*(1-(a*z)-Abs[z-a])))/(2*(1+e*Cos[teta])^3),{teta,0,2 Pi}, {z,-
1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-4,1},AxesLabel->{teta,z,p},PlotRange->{-5,20}]

```

.....inyección lateral izquierda superior .....fprt=5.....

```

S:=1
n:=10
b:=5*Pi/4
a:=0
e:=0.6
fprt:=5
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((n/(Pi)^0.5) E^((-n^2)*
((teta-Pi-b+fi)^2))*(1-(a*z)-Abs[z-a])))/(2*(1+e*Cos[teta])^3),{teta,1.5 Pi,4 Pi}, {z,-
1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-4,1},AxesLabel->{teta,z,p},PlotRange->{-4,4}]

```





.....inyección lateral izquierda superior .....fprt=20.....

```
S:=1
n:=10
b:=5*Pi/4
a:=0
e:=0.6
fprt:=20
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((n/(Pi)^0.5) E^((-n^2)*
((teta-Pi-b+fi)^2))*(1-(a*z)-Abs[z-a])))/(2*(1+e*Cos[teta])^3),{teta,1.5 Pi,4 Pi}, {z,-
1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-4,1},AxesLabel->{teta,z,p},PlotRange->{-4,4}]
```

.....inyección lateral izquierda superior .....fprt=100.....

```
S:=1
n:=10
b:=5*Pi/4
a:=0
e:=0.6
fprt:=100
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((n/(Pi)^0.5) E^((-n^2)*
((teta-Pi-b+fi)^2))*(1-(a*z)-Abs[z-a])))/(2*(1+e*Cos[teta])^3),{teta,1.5 Pi,4 Pi}, {z,-
1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-4,1},AxesLabel->{teta,z,p},PlotRange->{-5,5}]
```

.....inyección lateral izquierda inferior .....fprt=5.....

```
S:=1
n:=10
b:=7*Pi/4
a:=0
e:=0.6
fprt:=5
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((n/(Pi)^0.5) E^((-n^2)*
((teta-Pi-b+fi)^2))*(1-(a*z)-Abs[z-a])))/(2*(1+e*Cos[teta])^3),{teta,2 Pi,4 Pi}, {z,-
1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-4,1},AxesLabel->{teta,z,p},PlotRange->{-4,4}]
```





.....inyección lateral izquierda inferior.....fprt=20.....

```

S:=1
n:=10
b:=7*Pi/4
a:=0
e:=0.6
fprt:=20
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((n/(Pi)^0.5) E^((-n^2)*
((teta-Pi-b+fi)^2))*(1-(a*z)-Abs[z-a])))/(2*(1+e*Cos[teta])^3),{teta,2 Pi,4 Pi},{z,-
1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-4,1},AxesLabel->{teta,z,p},PlotRange->{-4,4}]

```

.....inyección lateral izquierda inferior.....fprt=100.....

```

S:=1
n:=10
b:=7*Pi/4
a:=0
e:=0.6
fprt:=100
r:=0.25
q=fprt/S
fi=ArcTan[(Pi/(4*e))*(1-e^2)^0.5]
G1=Plot3D[(((6*Pi*e*(r^2)*Sin[teta])/((1+e*Cos[teta])^3))*(1-
z^2))+((r^2)*q*((n/(Pi)^0.5) E^((-n^2)*
((teta-Pi-b+fi)^2))*(1-(a*z)-Abs[z-a])))/(2*(1+e*Cos[teta])^3),{teta,2 Pi,4 Pi},{z,-
1,1},PlotPoints->40,ViewPoint->{1,-4,1},AxesLabel->{teta,z,p},PlotRange->{-4,18}]

```





**Apéndice B.**

Programas en MATHEMATICA 6 para calcular las tablas correspondientes a los puertos de inyección lateral y en los cuatro vértices por medio de iteraciones.

$$\beta = \pi/2 \quad ; f_{prt} = 5$$

```

a:=0.1282
b:=1.0019
A=-a*Sin[Fi]+b*Cos[Fi];
Plot[A,{Fi,0,Pi}]
c:=0.625
e:=0.1
beta:=Pi/2
B=(-c*Sin[Pi+beta])/(1+e*Cos[Pi+beta-Fi])^3;
Plot[B,{Fi,0,Pi}]
Plot[{A,B},{Fi,0,Pi}]
Z=FindRoot[{A==B},{Fi,1.}]
a2:=0.1282
b2:=1.0019
Fi2:=1.3902
S2=(16/(a2*Cos[Fi2]+b2*Sin[Fi2]))
C2=0.625/S2
    
```

$$\beta = 3\pi/2 \quad ; f_{prt} = 5$$

```

a:=0.1282
b:=1.0019
A=-a*Sin[Fi]+b*Cos[Fi];
Plot[A,{Fi,0,Pi}]
c:=0.625
e:=0.1
beta:=3*Pi/2
B=(-c*Sin[Pi+beta])/(1+e*Cos[Pi+beta-Fi])^3;
Plot[B,{Fi,0,Pi}]
Plot[{A,B},{Fi,0,Pi}]
Z=FindRoot[{A==B},{Fi,1.}]
a2:=0.1282
b2:=1.0019
Fi2:=1.3902
S2=(16/(a2*Cos[Fi2]+b2*Sin[Fi2]))
C2=0.625/S2
    
```





$$\beta = \pi/4 \quad ; f_{prt} = 5$$

```

a:=0.1282
b:=1.0019
A=-a*Sin[Fi]+b*Cos[Fi];
Plot[A,{Fi,0,Pi}]
c:=0.625
ε:=0.1
β:=Pi/4
B=(-c*Sin[Pi+β])/(1+ε*Cos[Pi+β-Fi])^3;
Plot[B,{Fi,0,Pi}]
Plot[{A,B},{Fi,0,Pi}]
Z=FindRoot[{A==B},{Fi,1.}]
a2:=0.1282
b2:=1.0019
β2:=Pi/4
ε2:=0.1
fprt:=5
Fi2:=1.4069
d:=Cos[Pi+β2]/(8 (1+ε2*Cos[Pi+β2-Fi2])^3);
Scero=(16+d*fprt)/(a2*Cos[Fi2]+b2*Sin[Fi2])
C=0.625/Scero

```

$$\beta = 3\pi/4 \quad ; f_{prt} = 5$$

```

a:=0.1282
b:=1.0019
A=-a*Sin[Fi]+b*Cos[Fi];
Plot[A,{Fi,0,Pi}]
c:=0.625
ε:=0.1
β:=3*Pi/4
B=(-c*Sin[Pi+β])/(1+ε*Cos[Pi+β-Fi])^3;
Plot[B,{Fi,0,Pi}]
Plot[{A,B},{Fi,0,Pi}]
Z=FindRoot[{A==B},{Fi,1.}]
a2:=0.1282
b2:=1.0019
β2:=3*Pi/4
ε2:=0.1
fprt:=5
Fi2:=1.4069
d:=Cos[Pi+β2]/(8 (1+ε2*Cos[Pi+β2-Fi2])^3);
Scero=(16+d*fprt)/(a2*Cos[Fi2]+b2*Sin[Fi2])
C=0.625/Scero

```





$$\beta = 5\pi/4 ; f_{prt} = 5$$

```

a:=0.1282
b:=1.0019
A=-a*Sin[Fi]+b*Cos[Fi];
Plot[A,{Fi,0,Pi}]
c:=0.625
e:=0.1
beta:=5*Pi/4
B=(-c*Sin[Pi+beta])/(1+e*Cos[Pi+beta-Fi])^3;
Plot[B,{Fi,0,Pi}]
Plot[{A,B},{Fi,0,Pi}]
Z=FindRoot[{A==B},{Fi,1.}]
a2:=0.1282
b2:=1.0019
beta2:=5*Pi/4
e2:=0.1
fpert:=5
Fi2:=1.4069
d:=Cos[Pi+beta2]/(8*(1+e2*Cos[Pi+beta2-Fi2])^3);
Scero=(16+d*fpert)/(a2*Cos[Fi2]+b2*Sin[Fi2])
C=0.625/Scero

```

$$\beta = 7\pi/4 ; f_{prt} = 5$$

```

a:=0.1282
b:=1.0019
A=-a*Sin[Fi]+b*Cos[Fi];
Plot[A,{Fi,0,Pi}]
c:=0.625
e:=0.1
beta:=7*Pi/4
B=(-c*Sin[Pi+beta])/(1+e*Cos[Pi+beta-Fi])^3;
Plot[B,{Fi,0,Pi}]
Plot[{A,B},{Fi,0,Pi}]
Z=FindRoot[{A==B},{Fi,1.}]
a2:=0.1282
b2:=1.0019
beta2:=7*Pi/4
e2:=0.1
fpert:=5
Fi2:=1.4069
d:=Cos[Pi+beta2]/(8*(1+e2*Cos[Pi+beta2-Fi2])^3);
Scero=(16+d*fpert)/(a2*Cos[Fi2]+b2*Sin[Fi2])
C=0.625/Scero

```





## Apéndice C.

Programa en MATHEMATICA 6 para determinar en cambio relativo, se obtienen las siguientes tablas para cada ángulo  $\beta$  sustituyendo los valores de las tablas de posición de rotor.

```

 $\varphi_{ocv} := 82.7078$ 
 $\varphi_2 := 79.6526$ 
 $\Delta\varphi = 100 \cdot ((\varphi_{ocv} - \varphi_2) / (\varphi_{ocv}))$ 

```

**TABLA C.1 CÁLCULO DEL CAMBIO RELATIVO  $\beta = \pi/2$ .**

$\varepsilon$	$f_{prt} = 5$	$f_{prt} = 20$	$f_{prt} = 100$	$\varphi_{ocv}$
0.1	3.69397	14.3485	52.6369	82.7078
0.15	4.52719	17.2231	60.1442	79.0667
0.2	5.56189	20.4419	62.0310	75.4312
0.25	4.8816	22.1339	64.8886	71.8017
0.3	8.28038	27.3823	69.7521	68.1780
0.35	9.9451	30.8281	73.3850	64.5584
0.4	11.7616	34.1010	76.7733	60.9396
0.45	13.6306	37.1623	80.1086	57.3161
0.5	15.4841	39.9827	83.5638	53.6802
0.55	17.2326	42.5785	86.9433	50.0203
0.6	18.8322	44.9810	90.6003	46.3207
0.65	20.2070	47.2400	94.6169	42.5591
0.7	21.3634	49.4458	99.1120	38.704
0.75	22.3149	51.6987	104.572	34.7086
0.8	23.0739	54.2200	111.628	30.5002
0.85	23.7949	57.4383	121.656	25.9543
0.9	24.7556	62.5295	138.213	20.8260





**TABLA C.2 CÁLCULO DEL CAMBIO RELATIVO  $\beta = 3\pi/2$ .**

$\varepsilon$	$f_{prt} = 5$	$f_{prt} = 20$	$f_{prt} = 100$	$\varphi_{ocv}$
0.1	-2.0281	-8.0896	-37.4695	82.7078
0.15	-1.8642	-7.4223	-34.8836	79.0667
0.2	-1.7377	-6.8870	-32.4647	75.4312
0.25	-3.6086	-8.4364	-32.4107	71.8017
0.3	-1.5604	-6.1574	-28.7368	68.1780
0.35	-1.4723	-5.9412	-27.4795	64.5584
0.4	-1.4763	-5.8108	-26.6281	60.9396
0.45	-1.4739	-5.7824	-26.1787	57.3161
0.5	-1.4947	-5.8282	-26.1190	53.6802
0.55	-1.5327	-5.9999	-26.4928	50.0203
0.6	-1.6144	-6.2775	-27.3694	46.3207
0.65	-1.7371	-6.7047	-28.8651	42.5591
0.7	-1.9078	-7.3555	-31.0845	38.7040
0.75	-0.7796	-8.3071	-34.4553	34.7086
0.8	-2.5868	-9.7819	-39.5200	30.5002
0.85	-3.2476	-12.1883	-47.6882	25.9543
0.9	-4.5169	-16.6768	-62.5034	20.8260

**TABLA C.3 CÁLCULO DEL CAMBIO RELATIVO  $\beta = \pi/4$ .**

$\varepsilon$	$f_{prt} = 5$	$f_{prt} = 20$	$f_{prt} = 100$	$\varphi_{ocv}$
0.1	2.3638	11.7090	*****	82.7078
0.15	3.1503	14.9476	*****	79.0667
0.2	3.9548	19.7354	*****	75.4312
0.25	3.0942	24.8070	*****	71.8017
0.3	6.8432	37.2316	*****	68.1780
0.35	9.4125	49.9536	*****	64.5584
0.4	13.4070	62.8901	*****	60.9396
0.45	19.6384	74.7489	*****	57.3161
0.5	28.7647	*****	*****	53.6802
0.55	40.2042	*****	*****	50.0203
0.6	52.1164	*****	*****	46.3207
0.65	61.8603	*****	*****	42.5591
0.7	74.3602	*****	*****	38.7040
0.75	85.1598	*****	*****	34.7086
0.8	96.6937	*****	*****	30.5002
0.85	110.2869	*****	*****	25.9543
0.9	129.1621	*****	*****	20.8260





**TABLA C.4 CÁLCULO DEL CAMBIO RELATIVO  $\beta = 3\pi/4$ .**

$\varepsilon$	$f_{prt} = 5$	$f_{prt} = 20$	$f_{prt} = 100$	$\varphi_{ocv}$
0.1	2.2184	7.9127	25.2938	82.7078
0.15	2.4837	8.6795	26.3319	79.0667
0.2	2.7285	9.3628	27.5591	75.4312
0.25	1.0274	8.1453	26.9218	71.8017
0.3	3.1455	10.4737	29.5589	68.1780
0.35	3.2888	10.8775	30.3398	64.5584
0.4	3.3938	11.1129	30.9888	60.9396
0.45	3.4342	11.2415	31.5148	57.3161
0.5	3.4364	11.2708	32.4590	53.6802
0.55	3.3926	11.1932	32.3152	50.0203
0.6	3.3952	11.0518	32.6240	46.3207
0.65	3.2035	10.8503	32.9426	42.5591
0.7	3.0958	10.6159	33.0730	38.7040
0.75	2.9678	10.3965	33.2594	34.7086
0.8	2.9170	10.2435	33.6499	30.5002
0.85	2.8446	10.2403	34.5457	25.9543
0.9	2.9112	10.6419	36.7233	20.8260

**TABLA C.5 CÁLCULO DEL CAMBIO RELATIVO  $\beta = 5\pi/4$ .**

$\varepsilon$	$f_{prt} = 5$	$f_{prt} = 20$	$f_{prt} = 100$	$\varphi_{ocv}$
0.1	-1.4877	-5.6559	-21.3767	82.7078
0.15	-1.3859	-5.2990	-20.8283	79.0667
0.2	-1.2819	-4.9430	-20.1498	75.4312
0.25	-3.1777	-6.6250	-21.4673	71.8017
0.3	-1.1063	-4.3002	-18.4522	68.1780
0.35	-1.0333	-4.0242	-17.5853	64.5584
0.4	-0.9686	-3.7893	-16.7736	60.9396
0.45	-0.9142	-3.5932	-16.0588	57.3161
0.5	-0.8789	-3.4372	-15.4770	53.6802
0.55	-0.8454	-3.3196	-15.0376	50.0203
0.6	-0.7979	-3.2471	-14.7754	46.3207
0.65	-0.8216	-3.2315	-14.7138	42.5591
0.7	-0.8273	-3.2696	-14.9054	38.7040
0.75	-0.8617	-3.3873	-15.4379	34.7086
0.8	-0.9150	-3.6012	-16.4694	30.5002
0.85	-1.0179	-4.0424	-18.3618	25.9543
0.9	-1.0779	-4.8746	-22.0968	20.8260





TABLA C.6 CÁLCULO DEL CAMBIO RELATIVO  $\beta = 7\pi/4$ .

$\varepsilon$	$f_{prt} = 5$	$f_{prt} = 20$	$f_{prt} = 100$	$\varphi_{ocv}$
0.1	-1.6263	-6.8635	-43.3782	82.7078
0.15	-1.5889	-6.6323	-39.3861	79.0667
0.2	-1.5858	-6.5458	-36.8067	75.4312
0.25	-3.5688	-8.4764	-36.9733	71.8017
0.3	-1.6697	-6.7540	-34.7557	68.1780
0.35	-1.7610	-7.0683	-34.9359	64.5584
0.4	-1.8900	-7.5500	-35.8504	60.9396
0.45	-2.0838	-8.2215	-37.5011	57.3161
0.5	-2.3485	-9.1476	-39.9622	53.6802
0.55	-2.7011	-10.4099	-43.3759	50.0203
0.6	-3.2100	-12.1282	-47.9623	46.3207
0.65	-3.9180	-14.4998	-54.0530	42.5591
0.7	-4.9720	-17.8363	-62.2176	38.7040
0.75	-6.5900	-22.7015	-73.3800	34.7086
0.8	-9.2369	-30.1076	-97.3029	30.5002
0.85	-13.9545	-42.1452	*****	25.9543
0.9	-23.6651	-64.2446	*****	20.8260





**Apéndice D.**

Programa en MATHEMATICA 6 para determinar el cambio relativo, utilizando los valores de las tablas del apéndice C se obtienen las graficas.

$$\beta = \pi/2.$$

```
a=ListPlot[{{0.1,3.6939},{0.15,4.5271},{0.2,5.5618},{0.25,4.8816},
{0.3,8.2803},{0.35,9.9451},{0.4,11.7616},{0.45,13.6303},
{0.50,15.4841},{0.55,17.2326},{0.6,18.8322},{0.65,20.207},{0.7,21.3634},
{0.75,22.3149},{0.8,23.0739},{0.85,23.7949},{0.9,24.7556},
{0.1,14.3485},{0.15,17.2231},{0.2,20.4419},{0.25,22.1339},
{0.3,27.3823},{0.35,30.8281},{0.4,34.101},{0.45,37.1623},
{0.50,39.9827},{0.55,42.5785},{0.6,44.981},{0.65,47.24},{0.7,49.4458},
{0.75,51.6987},{0.8,54.22},{0.85,57.4383},{0.9,62.5295},
{0.1,52.6369},{0.15,60.1442},{0.2,62.031},{0.25,64.8886},
{0.3,69.7521},{0.35,73.385},{0.4,76.7733},{0.45,80.1086},{0.50,83.5638},
{0.55,86.9433},{0.6,90.6003},{0.65,94.6169},{0.7,99.112},
{0.75,104.572},{0.8,111.628},{0.85,121.656},{0.9,138.213}},
TextStyle->{FontSlant->"Italic",FontWeight->"Bold",FontSize->10,
PointSize[0.010]},AxesLabel->{ε,Δφ},LabelStyle->Directive[Blue,Bold],
PlotLabel->"β= π/2 " ]
```

$$\beta = 3\pi/2$$

```
b=ListPlot[{{0.1,-2.0281},{0.15,-1.8642},{0.2,-1.7377},
{0.25,-3.6086},{0.3,-1.5604},{0.35,-1.4723},{0.4,-1.4763},
{0.45,-1.4739},{0.50,-1.4947},{0.55,-1.5327},{0.6,-1.6144},
{0.65,-1.7371},{0.7,-1.9078},{0.75,-0.7796},{0.8,-2.5868},
{0.85,-3.2476},{0.9,-4.5169},{0.1,-8.0896},{0.15,-7.4223},
{0.2,-6.8876},{0.25,-8.4364},{0.3,-6.1574},{0.35,-5.9412},
{0.4,-5.8108},{0.45,-5.7824},{0.50,-5.8282},{0.55,-5.9999},
{0.6,-6.2775},{0.65,-6.7047},{0.7,-7.3555},{0.75,-8.3071},
{0.8,-9.7819},{0.85,-12.1883},{0.9,-16.6768},{0.1,-37.4695},
{0.15,-34.8836},{0.2,-32.4647},{0.25,-32.4107},
{0.3,-28.7368},{0.35,-27.4795},{0.4,-26.6281},
{0.45,-26.1787},{0.50,-26.119},{0.55,-26.4928},
{0.6,-7.3694},{0.65,-28.8651},{0.7,-31.0845},{0.75,-34.4553},
{0.8,-39.52},{0.85,-47.6882},{0.9,-62.5034}},
TextStyle->{FontSlant->"Italic",FontWeight->"Bold",FontSize->10,
PointSize[0.015]},AxesLabel->{ε,Δφ},LabelStyle->Directive[Blue,Bold],
PlotLabel->"β= 3π/2 " ]
```





$$\beta = \pi/4.$$

```
c=ListPlot[{{0.1,2.3638},{0.15,3.1503},{0.2,3.9548},{0.25,3.0942},
{0.3,6.8432},{0.35,9.4125},{0.4,13.4070},{0.45,19.6384},
{0.50,28.7647},{0.55,40.2042},{0.6,52.1164},{0.65,61.8603},{0.7,74.3602},
{0.75,85.1598},{0.8,96.6937},{0.85,110.2869},{0.9,129.1621},
{0.1,11.7090},{0.15,14.9476},{0.2,19.7354},{0.25,24.8070},
{0.3,37.2316},{0.35,49.9536},{0.4,62.8901},{0.45,74.7489}},
TextStyle->{FontSlant->"Italic",FontWeight->"Bold",FontSize->10,
PointSize[0.015]},AxesLabel->{ε,Δφ},LabelStyle->Directive[Blue,Bold],
PlotLabel->"β= π/4 " ]
```

$$\beta = 3\pi/4$$

```
d=ListPlot[{{0.1,2.2184},{0.15,2.4837},{0.2,2.7285},{0.25,1.0274},
{0.3,3.1455},{0.35,3.2888},{0.4,3.3938},{0.45,3.4342},{0.50,3.4364},
{0.55,3.3926},{0.6,3.3952},{0.65,3.2035},{0.7,3.0958},{0.75,2.9678},
{0.8,2.9170},{0.85,2.8446},{0.9,2.9112},{0.1,7.9127},{0.15,8.6795},
{0.2,9.3628},{0.25,8.1453},{0.3,10.4737},{0.35,10.8775},{0.4,11.129},
{0.45,11.2415},{0.50,11.2708},{0.55,11.1932},{0.6,11.0518},
{0.65,10.8503},{0.7,10.6159},{0.75,10.3965},{0.8,10.2435},
{0.85,10.2403},{0.9,10.6419},{0.1,25.2938},{0.15,26.319},
{0.2,27.5591},{0.25,26.9218},{0.3,29.589},{0.35,30.3398},
{0.4,30.9888},{0.45,31.5148},{0.50,32.4590},{0.55,32.3152},
{0.6,32.6240},{0.65,32.9426},{0.7,33.0730},{0.75,33.2594},
{0.8,33.6499},{0.85,34.5457},{0.9,36.7233}},
TextStyle->{FontSlant->"Italic",FontWeight->"Bold",FontSize->10,
PointSize[0.01]},AxesLabel->{ε,Δφ},LabelStyle->Directive[Blue,Bold],
PlotLabel->"β= 3π/4 " ]
```

$$\beta = 5\pi/4$$

```
e=ListPlot[{{0.1,-1.4877},{0.15,-1.3859},{0.2,-1.2819},
{0.25,-3.1777},{0.3,-1.1063},{0.35,-1.0333},{0.4,-0.9686},
{0.45,-0.9142},{0.50,-0.8789},{0.55,-0.8454},{0.6,-0.7979},
{0.65,-0.8216},{0.7,-0.8273},{0.75,-0.8617},{0.8,-0.9150},
{0.85,-1.0179},{0.9,-1.0779},{0.1,-5.6559},{0.15,-5.2990},
{0.2,-4.9430},{0.25,-6.6250},{0.3,-4.3002},{0.35,-4.0242},
{0.4,-3.7893},{0.45,-3.5932},{0.50,-3.4372},{0.55,-3.3196},
{0.6,-3.2471},{0.65,-3.2315},{0.7,-3.2696},{0.75,-3.3873},
{0.8,-3.6012},{0.85,-4.0424},{0.9,-4.8746},{0.1,-21.3767},
{0.15,-20.8283},{0.2,-20.1498},{0.25,-21.4673},
{0.3,-18.4522},{0.35,-17.5853},{0.4,-
```





```
16.7736}, {0.45, -16.0588}, {0.50, -15.4770}, {0.55, -
15.0376}, {0.6, -14.7754}, {0.65, -14.7138}, {0.7, -
14.9050}, {0.75, -15.4379}, {0.8, -16.4694}, {0.85, -
18.3618}, {0.9, -
22.0968}}, TextStyle->{FontSlant->"Italic", FontWeight->"Bold", Fo
ntSize->10, PointSize[0.01]}, AxesLabel->{ $\epsilon$ ,  $\Delta\varphi$ }, LabelStyle->Direc
tive[Blue, Bold], PlotLabel->" $\beta= 5\pi/4$  "
```

$$\beta = 7\pi/4$$

```
f=ListPlot[{{0.1, -1.6263}, {0.15, -1.5889}, {0.2, -
1.5858}, {0.25, -3.5688}, {0.3, -1.6697}, {0.35, -1.7610}, {0.4, -
1.89}, {0.45, -2.0838}, {0.50, -2.3485}, {0.55, -2.7011}, {0.6, -
3.21}, {0.65, -3.9180}, {0.7, -4.972}, {0.75, -6.59}, {0.8, -
9.2369}, {0.85, -13.9445}, {0.9, -23.6651}, {0.1, -6.8635}, {0.15, -
6.6323}, {0.2, -6.5458}, {0.25, -8.4764}, {0.3, -6.7540}, {0.35, -
7.0683}, {0.4, -7.55}, {0.45, -8.2215}, {0.50, -9.1476}, {0.55, -
10.4099}, {0.6, -12.1282}, {0.65, -14.4998}, {0.7, -
17.8363}, {0.75, -22.7015}, {0.8, -30.1076}, {0.85, -
42.1452}, {0.9, -64.2446}, {0.1, -43.3782}, {0.15, -39.3861}, {0.2, -
36.8067}, {0.25, -36.9733}, {0.3, -34.7557}, {0.35, -
34.9359}, {0.4, -35.8504}, {0.45, -37.5011}, {0.50, -
39.9622}, {0.55, -43.3759}, {0.6, -47.9623}, {0.65, -
54.0530}, {0.7, -62.2176}, {0.75, -73.38}, {0.8, -
97.3029}}, TextStyle->{FontSlant->"Italic", FontWeight->"Bold", Fo
ntSize->10, PointSize[0.01]}, AxesLabel->{ $\epsilon$ ,  $\Delta\varphi$ }, LabelStyle->Direc
tive[Blue, Bold], PlotLabel->" $\beta= 7\pi/4$  "
```

