

**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN  
UNIDAD PROFESIONAL ADOLFO LÓPEZ MATEOS

**PROBLEMA DE REGULACIÓN DIFUSA  
EXACTA PARA SISTEMAS  
MECATRÓNICOS NO LINEALES**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS  
CON ESPECIALIDAD EN  
INGENIERÍA MECÁNICA  
P R E S E N T A:

**ING. CARLOS FERNANDO ROJAS ALEGRÍA**

**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. JESÚS ALBERTO MEDA CAMPAÑA**

**MÉXICO, D. F.**

**JUNIO DE 2010**

## RESUMEN

En este trabajo de tesis se estudia el problema de seguimiento de referencias para sistemas mecatrónicos no lineales, con la finalidad de obtener un método relativamente simple que pueda ser aplicado en sistemas rotodinámicos. Ya que la gran mayoría de la industria de nuestro país depende fundamentalmente de dichos sistemas.

En particular en este trabajo se propone un nuevo método llamado problema de regulación difusa exacta.

El algoritmo utilizado para el desarrollo del nuevo método se encuentra descrito en el capítulo 4, en este método se combinan la teoría de regulación no lineal y el modelado difuso Takagi-Sugeno (TS), lo que permite el desarrollo de la regulación difusa exacta a través de técnicas lineales.

En trabajos previos se ha demostrado que la regulación de salida exacta para modelos difusos Takagi-Sugeno (TS) depende de dos condiciones: 1) El estado estacionario local del sistema tiene que ser el mismo para todos los subsistemas locales y, 2) Las matrices locales de entrada ( $B_i$ ) tienen que ser las mismas para todos los subsistemas locales, incluidos en el modelo difuso Takagi-Sugeno (TS). Obviamente, estas condiciones son difíciles de cumplir, en general. Por esta razón, en este trabajo se relajan las condiciones para resolver el problema de regulación difusa al diseñar el controlador de manera directa sobre el modelo difuso Takagi-Sugeno (TS), en lugar de construir el regulador difuso sobre la base de los reguladores lineales locales.

El desarrollo de este nuevo método permite, bajo ciertas consideraciones, reducir las restricciones impuestas por métodos precedentes y obtener un seguimiento de referencias asintótico. Los estudios realizados con este método son validados por medio de simulaciones en el programa MATLAB. Dos ejemplos son considerados con el fin de ilustrar la construcción del regulador propuesto y validar las mejoras logradas con el nuevo método.

## ABSTRACT

The objective of this thesis is to solve the tracking of references, in a relatively simple way, such that the result can be applied on rotordynamics systems. These systems are very important, for being currently the most widely used methods of production in industry.

In particular, this work presents a new method called Exact Fuzzy Regulation Problem.

The algorithm used to develop this method is described in Chapter 4, in which a regulation theory is combined with the nonlinear Takagi-Sugeno fuzzy model (TS) allowing the development of exact fuzzy regulation on the basis of linear techniques.

Earlier works show that the exact output regulation for Takagi-Sugeno fuzzy models (TS) depends on two conditions: 1) The system's local steady-state has to be the same for all local subsystems, 2) the local input matrix ( $B_i$ ) must be the same for all local subsystems, included in TS fuzzy model. Obviously, these conditions are usually difficult to satisfy. For this reason, in this work, conditions to solve the problem are relaxed by designing directly the controller on the TS fuzzy model, instead of constructing the fuzzy controller from local linear regulators.

The development of this new method allows, under certain conditions, reducing the restrictions imposed by previous methods and obtaining an asymptotic reference tracking. Results are validated by simulations in MATLAB. Two examples are considered to illustrate the construction of the proposed regulator and to illustrate the improvements of the new method.

# AGRADECIMIENTOS

## *A Dios*

*Por permitirme llegar hasta esta instancia de mi vida así como haberme concedido el privilegio de lograr una meta más, además de su infinita bondad y amor.*

## *A mi madre.*

*Por haberme dado la vida, su amor, consejos y su infinito apoyo incondicional, mil gracias mamá por ser mi inspiración de vida, Te amo.*

## *A mi padre.*

*Gracias por confiar en mí, Por enseñarme a ser un hombre de bien, por demostrarme que se pueden lograr y cumplir infinitas metas. Mil Gracias por todos tus inmensos consejos e infinito amor. Te amo mi gran amigo.*

## *A mis hermanos*

*Alonso, Mari, Paty quienes siempre me han brindado su amor, apoyo y comprensión incondicional, gracias por haber creído siempre en mí. Los amo.*

## *A Esme*

*Por ser la persona más especial en mi vida, motivo de superación y logros, Mil gracias amor mío por haber creído siempre en mí, En verdad te agradezco tu infinito amor y paciencia. Te AMO.*

*A toda mi familia que de alguna manera me apoyaron incondicionalmente y muy en especial a mi abuelita la **Sra. María Lozano Vicenteño (+)**, gracias por guiarme en esta etapa difícil de mi vida y ser mi ángel, y es a quien dedico esta tesis.*

*Por eso más. ¡Mil Gracias!*

# AGRADECIMIENTOS

## *A mi querido Instituto Politécnico Nacional*

*Por permitirme ser parte de su gran institución y brindarme una educación de calidad.*

## *AL CONACYT*

*Por su valioso apoyo económico brindado desde el inicio de mis estudios, y dar la oportunidad de superación a profesionistas con gran talento.*

## *A mis Sinodales*

*DR. VALERY R. NOSOV, DR. JULIO CESAR GOMEZ MANCILLA, DR. JESÚS ALBERTO MEDA CAMPAÑA, DR. JOSÉ ANGEL ORTEGA, DR. JOSE ALFREDO JIMENEZ BERNAL, DR. JOSÉ MARTÍNEZ TRINIDAD.*

*Por el tiempo que invirtieron en revisar esta tesis y sus valiosas observaciones.*

## *A mi Director de Tesis*

### *Al Dr. Jesús Alberto Meda Campaña.*

*Por la gran cantidad de finas atenciones y profundos conocimientos que me otorgó, por su valioso tiempo que invirtió en mí, por su gran calidad humana, por la seriedad con la que dirige trabajos de investigación; por la ética y entusiasmo con que prepara e imparte sus clases; y sobre todo, por demostrar con clase, categoría, sencillez y sentido del humor como se puede lograr ser un gran Investigador y amigo. Muchas gracias.*

*Al Dr. Julio Cesar Gómez Mancilla por su tiempo compartido y por impulsar el desarrollo de mi formación profesional; Al Dr. Valery R. Nosov. Por su apoyo y conocimientos aportados en este trabajo.*

## *A mis amigos*

*A todos mis compañeros de la maestría por brindarme incondicionalmente su amistad y comprensión durante todo este tiempo, especialmente a mis grandes amigos; Erik, Sergio, Baptiste, Juan Carlos, Jaime y Jhony Walker.*

## **GRACIAS**

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría

# Contenido

---

	Pág.
Resumen .....	i
Abstract .....	ii
Agradecimientos.....	iii
Contenido .....	iv
Índice de figuras.....	viii
Nomenclatura.....	x
Objetivo .....	xiii
Justificación .....	xiii
Introducción .....	xiv

---

## CAPÍTULO 1

### Estado del Arte

<b>Introducción.</b> .....	2
<b>1.1 General</b> .....	2
<b>1.2 Métodos De Seguimiento</b> .....	3
1.2.1 Seguimiento asintótico .....	3
1.2.2 Teoría de regulación.....	4
<b>1.3 Teoría De Regulación Lineal</b> .....	5
1.3.1 Problema del regulador con retroalimentación de estado (SFRP). .....	9
1.3.2 Construcción del regulador (SFRP) .....	12
1.3.3 Problema del regulador con retroalimentación del error (EFRP). .....	14
1.3.4 Construcción del regulador (efrp). .....	17
<b>1.4 Teoría De Regulación No Lineal</b> .....	19
1.4.1 Regulación robusta para sistemas no lineales .....	24

---

## CAPÍTULO 2

### Control Difuso

<b>Introducción.</b> .....	26
<b>2.1 General</b> .....	26
<b>2.2 Lógica Difusa</b> .....	27
2.2.1 Antecedentes Históricos.....	27

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría

---

# Contenido

---

	Pág.
2.2.2 Conceptos Introdutorios .....	28
2.2.2.1 Conjuntos clásicos .....	28
2.2.2.2 Variables lingüísticas .....	29
2.2.3 Conjuntos Difusos (Fuzzy set) .....	30
2.2.4 Función de Membresía , Pertenencia (Membership Function) .....	32
<b>2.3 Control Difuso</b> .....	33
2.3.1 Fuzzificación (Fuzzification) .....	34
2.3.2 Mecanismo de Inferencia .....	35
2.3.3 Defuzzificación (Defuzzification) .....	36
<b>2.4 Tipos De Modelos Difusos</b> .....	37
2.3.1. Mamdani.....	38
2.3.2. Takagi-Sugeno .....	40
2.3.2.1 Compensación Distribuida en Paralelo .....	43
2.3.2.2 Análisis de la Estabilidad .....	43

---

## CAPÍTULO 3

### Teoría de Regulación Difusa

<b>Introducción.</b> .....	48
<b>3.1 General</b> .....	48
<b>3.2 Teoría De Regulación Difusa</b> .....	49
3.2.1 Antecedentes .....	49
3.2.2 Problema de regulación difusa no-lineal .....	53
3.2.2.1 Sincronización generalizada.....	64

---

## CAPÍTULO 4

### Regulación Difusa Exacta

<b>Introducción.</b> .....	69
<b>4.1 General</b> .....	69
<b>4.2 Formulación del problema</b> .....	70
<b>4.3 Problema de regulación difusa de salida exacta</b> .....	76

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría

---

# Contenido

---

Pág.

---

## CAPÍTULO 5

### Aplicaciones de regulación difusa exacta

5.1 REGULACIÓN DIFUSA CUANDO EL EXOSISTEMA ES PURAMENTE LINEAL .....	82
5.2 REGULACIÓN DIFUSA EXACTA APLICADA AL MODELO DE UN PENDULO INVERTIDO .....	88

---

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSIONES

6.1 CONCLUSIONES Y APORTACIONES.....	90
6.2 RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....	91

---

Referencias

92

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría

---

# Contenido

---

Pág.

## Apéndices

Apéndice		Pág.
A	<b>A1.</b> Programa realizado en MATLAB® versión 7.0 para la sincronización generalizada del sistema de Lorenz y el sistema de Rössler con error acotado	96
	<b>A2.</b> Programa realizado en MATLAB® versión 7.0 para complementar el apéndice A1.	102
B	<b>B1.</b> Programa realizado en MATLAB® versión 7.0 para la regulación difusa cuando el exosistema es puramente lineal con error acotado	103
	<b>B2.</b> Programa realizado en MATLAB® versión 7.0 para complementar el apéndice B1.	109
	<b>B3.</b> Programa realizado en MATLAB® versión 7.0 para la regulación difusa cuando el exosistema es puramente lineal con seguimiento exacto	110
	<b>B4.</b> Programa realizado en MATLAB® versión 7.0 para complementar el apéndice B3.	111

<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>		
<i>NÚMERO</i>	<i>TÍTULO</i>	<i>PÁGINA</i>
<b>1.1</b>	Control de retroalimentación unitario.	5
1.2	Sistema no lineal.	6
1.3	Sistema lineal.	8
1.4	El problema del regulador con retroalimentación de estado.	13
1.5	Problema del regulador con retroalimentación del error	18
<b>2.1</b>	L. A. Zadeh	27
2.2	Lógica difusa vs lógica clásica	31
2.3	Función triangular	32
2.4	Función trapezoidal	32
2.5	Función Gaussiana	32
2.6	Función Sigmoidal	32
2.7	Estructura básica de un sistema de control difuso	33
2.8	Función de membresía del singleton	34
<b>3.1</b>	Sistema de Rossler	59
3.2	Señal de control y seguimiento del error para completar la sincronización de los dos sistemas de Rossler	60
3.3	Estados contra respuesta de los estados para la sincronización completa de los dos sistemas de Rossler.	61

<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>		
<i>NÚMERO</i>	<i>TÍTULO</i>	<i>PÁGINA</i>
3.4	Señal de control vs error de seguimiento para la sincronización generalizada de los sistemas Lorenz-Chen	64
3.5	Estado principal vs respuesta del estado para la sincronización generalizada de los sistemas de Lorenz-Chen.	65
4.1	Esquema de control	76
5.1	La salida vs referencia y el error de seguimiento cuando el controlador difuso es diseñado a base de reguladores lineales	82
5.2	Salida vs referencia y el error de seguimiento cuando el controlador difuso se obtiene a partir de las ecuaciones dinámicas de Francis	85

## NOMENCLATURA

### VALORES INGENIERILES

<i>SÍMBOLO</i>	<i>DEFINICIÓN</i>
$A$	Matriz constante de $\mathbb{R}$
$A^{-1}$	Matriz Inversa de $A$
$A^T$	Matriz transpuesta de $A$
$B$	Matriz constante de $\mathbb{R}$
$C$	Matriz constante de $\mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	Espacio de los números complejos
$e$	Error de salida
$exp$	Exponente
$F$	Matriz constante de $\mathbb{R}$
$f(x)$	Función de $f$ de $x$
$G$	Matriz constante de $\mathbb{R}$
$g(x)$	Función de $g$ de $x$
$H$	Matriz constante de $\mathbb{R}$
$h(x)$	Función de $h$ de $x$
$K_1$	Matriz de ganancia de retroalimentación
$K_2$	Matriz constante de $\mathbb{R}$
$\tilde{K}$	Matriz de ganancias, a partir de $k_1$ y $k_2$
$n$	Dimensión del sistema
$P$	Matriz de las entradas no manipulables
$p$	Vector de perturbación
$Q$	Matriz de distrib. de la señal de referencia
$Q$	Dimensión del exosistema
$\mathbb{R}$	Espacio de los números reales
$\mathbb{R}^n$	Espacio vectorial de dimensión $n$ con componentes reales
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Espacio vectorial de matrices de dimensión $n \times n$ con elementos reales
$S$	Matriz del sistema externo
$s(w)$	Sistema externo que genera las señales de perturbación y referencia
$t$	Tiempo de simulación
$U$	Vector de entradas de control
$u = \delta(w)$	Control en estado estacionario
$w$	Vector de señales de referencia y perturbación
$x$	Vector de variables de estado
$x = \pi(w)$	Mapeo (teoremas 1.1 y 1.2)
$Y$	Vector de señales de salida
$yd$	Vector de señales de referencia

<b>NOMENCLATURA</b>	
<b><u>VALORES INGENIERILES</u></b>	
<i>SÍMBOLO</i>	<i>DEFINICIÓN</i>
$Z$	Vector de estados estimados del sistema
$z_i$	Vector de dimensión $p_i \times 1$
$\frac{d}{dt}$	Derivada con respecto al tiempo
$\frac{\partial y}{\partial x}$	Derivada parcial
$\epsilon$	Pertenece a
$\exists$	Existe
$\rightarrow$	Tiende a
$:$	Tal que
$\forall$	Para toda
$min$	Mínimo
$max$	Máximo
$=$	Igual
$\neq$	Distinto de
$\equiv$	Idéntico
$<$	Menor que
$>$	Mayor que
$\leq$	Menor o igual que
$\geq$	Mayor o igual que

<b>NOMENCLATURA</b>		
<b><u>LETRAS GRIEGAS</u></b>		
<i>SÍMBOLO</i>	NOMBRE	<i>DEFINICIÓN</i>
$\alpha$	Alfa	Parámetro en la ecuación. 1.12
$\gamma$	Gamma	Parámetro en la ecuación. 1.11
$\pi$	Pi	Parámetro en la ecuación 1.11
$\lambda$	Lambda	Valores propios en las matrices del sistema 1.6
$\Gamma$	Gamma	Matriz de dimensión adecuada, ecuación. 1.4
$\Pi$	Pi	Matriz de dimensión adecuada, ecuación 1.4

## OBJETIVO

Determinar el análisis y desarrollo de un método alternativo para el seguimiento de señales de referencia dentro del área de los sistemas no lineales. Las bases de este estudio son: la teoría regulación no lineal, y el modelado difuso tipo Takagi-Sugeno. Como resultado, se obtiene, el método de llamado *Teoría de Regulación Difusa Exacta*; el cual, bajo ciertas consideraciones, reduce las restricciones de métodos precedentes y permite lograr un seguimiento asintótico de las señales de referencia.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

- Análisis de los métodos de regulación difusa existentes.
- Desarrollo del nuevo método.
- Comparación de resultados con los métodos anteriores.
- Aplicación del método propuesto a sistemas mecatronicos no lineales.

### JUSTIFICACIÓN:

El seguimiento de la señal de referencia es un problema importante dentro del área de control de sistemas. Por esta razón, existen muchas formas de hacer frente a este problema. Uno de estos métodos es la teoría regulación no lineal, la cual proporciona un marco muy bien definido para lograr un seguimiento asintótico. Sin embargo, involucra ecuaciones diferenciales parciales; las cuales, en muchos casos resultan muy complejas y algunas veces imposibles de resolver. Por otro lado, recientemente algunas técnicas fueron desarrolladas para caracterizar sistemas no lineales a través de subsistemas locales. Uno de estos es el conocido modelado difuso tipo Takagi-Sugeno (TS). Esta técnica permite modelar dinámicas no lineales por medio de la interpolación difusa de subsistemas lineales locales. Entonces, la combinación de la teoría de regulación no lineal y los modelos Takagi-Sugeno (TS) permite el desarrollo de la Regulación difusa exacta. El desarrollo de este nuevo método permite, bajo ciertas consideraciones, reducir las restricciones impuestas por métodos precedentes y obtener un seguimiento de referencias asintótico. Los estudios realizados con este método son validados por medio de simulaciones en el programa MATLAB.

## INTRODUCCIÓN

El seguimiento de la señal de referencias es un área muy importante dentro de la dinámica de sistemas mecatronicos. Por esa razón, en la literatura, uno puede encontrar diferentes enfoques para hacerle frente. Una de estas técnicas es la teoría de la regulación, que proporciona un marco muy bien definido para llevar a cabo el seguimiento de asintótico, incluso en presencia de perturbaciones

En términos generales, el problema de regulación consiste en buscar un controlador retroalimentado por el estado o el error, tal que con ausencia de influencias externas el punto de equilibrio del sistema de lazo cerrado sea asintóticamente estable, y el error de seguimiento del error tienda a cero cuando la planta es influenciada por la referencia y/o perturbaciones de señales, ambos generados por un sistema externo llamado exosistema.

La solución para el problema de regulación lineal es dado por Francis, básicamente es un equivalente a buscar una solución algebraica de un conjunto de ecuaciones matriciales, mas tarde Isidori y Byrnes extienden este resultado al área no lineal, ellos muestran que el regulador no lineal puede ser obtenido a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales nombrado por consiguiente la ecuación de Francis-Isidori-Byrnes (FIB).

Por otra parte, recientemente algunas técnicas fueron desarrolladas para caracterizar sistemas no lineales, conocido como el modelo difuso de Takagi-Sugeno TS, esta técnica permite modelar dinámicas no lineales por medio de subsistemas lineales locales.

Así, el principal resultado de este trabajo es diseñar un regulador total de salida exacta para el sistema difuso Takagi-Sugeno (TS) considerando tanto, la teoría de regulación lineal y no lineal. Vale la pena mencionar que, existen algunos trabajos previos relacionados con este tema, cuando el controlador final es construido a partir de los reguladores lineales que son diseñados para cada subsistema lineal local dentro del modelo difuso Takagi-Sugeno (TS). Sin embargo, un controlador desarrollado de esta forma, sólo alcanza el seguimiento exacto en algunos casos particulares .

En el trabajo actual, el modelo difuso Takagi-Sugeno (TS) no sólo se usa para aprovechar la estabilización difusa. Si no que, el modelo difuso juega un papel muy importante durante el proceso de diseño del regulador final.

En otras palabras, el estado estacionario de error cero  $\pi(w(t))$  y la entrada en estado estacionario  $\gamma(w(t))$  se diseñará sobre la planta difusa total directamente, y no sólo sobre los subsistemas lineales locales.

Así, lo anterior es la principal aportación del presente trabajo, y se convierte en una diferencia muy significativa cuando este nuevo método se compara con métodos anteriores relacionados con la Teoría Regulación Difusa.

En trabajo esta organizado de la siguiente forma. En el Capítulo 1, se presentan brevemente las teorías de regulación lineal y no lineal, así como la teoría de regulación robusta no lineal. El Capítulo 2 esta dedicado completamente ala lógica difusa; a los modelos difusos tipo Takagi-Sugeno y ala estructura de los controladores difusos. El Capítulo 3 presenta la teoría de regulación difusa; mientras que el resultado principal se desarrolla en el Capítulo 4. El Capítulo 5 incluye dos ejemplos con el nuevo método. Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones y las sugerencias para trabajos futuros



# CAPÍTULO 1

# ESTADO DEL ARTE



## INTRODUCCIÓN.

### 1.1 General

En la actualidad los sistemas mecatrónicos hacen posible la consideración de sistemas de control, con el objetivo de mejorar el desempeño de las maquinas eléctricas. En este capítulo se desarrollara el problema de seguimiento de referencias en sistemas lineales y no lineales [(1)],[(2)], [(3)].

En diferentes casos, uno de los problemas más importantes en la implementación de sistemas de control, es controlar una planta de tal forma que su salida siga asintóticamente alguna trayectoria de referencia, así como la necesidad de contar con un modelo que describa la dinámica del sistema a ser controlado. Normalmente este modelo no esta disponible o es demasiado complicado para propósitos de diseño que se requiere. Por ello es importante disponer de un modelo lo suficientemente simple para trabajar con él, pero que retenga las características esenciales del proceso.

El seguimiento de la señal de referencia es un problema importante, es por eso que en la literatura existen muchas formas de hacer frente a este problema. Uno de estos métodos es la teoría regulación la cual proporciona un marco muy bien definido de trabajo para lograr un seguimiento asintótico [(4)], [(5)].

La solución para el problema de regulación lineal es dado por Francis en [(4)], básicamente es un equivalente a buscar una solución algebraica de un conjunto de ecuaciones matriciales (Ecuaciones de Francis). Francis también presenta la solución para regulador lineal robusto, en el cual el controlador es capaz de mantener la propiedad de regulación a pesar de las variaciones en los parámetros del sistema, en este caso se muestra como la regulación lineal robusta puede ser alcanzada usando un controlador dinámico que incluye el modelo interno, el cual es generalmente el modelo del exosistema.

En [(5)] Isidori y Byrnes extienden este resultado para el área no lineal, en su trabajo, ellos muestran que el regulador no lineal puede ser obtenido a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales nombrado por consiguiente ecuaciones de Francis-Isidori-Byrnes (FIB).

En el caso no lineal la inclusión de un modelo interno demuestra ser una condición necesaria para tener robustez con respecto a la variación de parámetros [(6)]. Este modelo interno es obtenido como una inmersión para el exosistema dentro de un sistema dinámico que genera todas las entradas de estado estable posibles para cualquier variación admisible de parámetros.



## 1.2 MÉTODOS DE SEGUIMIENTO

Generalmente la tarea de control puede dividirse en dos categorías: estabilización [(7)] y seguimiento de referencias (problema de regulación). En problemas de estabilización un sistema de control, llamado estabilizador, tendrá que ser diseñado para que el estado del sistema en lazo cerrado, sea estabilizado alrededor de un punto de equilibrio. Ejemplos de objetivos de estabilización son: el control de temperatura de un refrigerador, el control de altitud de aviones y el control de posición de brazos en los robots. En el problema de control de seguimiento, el objetivo de diseño es la construcción de un controlador llamado "tracker", tal que la salida del sistema siga una trayectoria la cual es invariante en el tiempo.

Como aplicaciones del seguimiento de trayectorias se pueden mencionar: Seguimiento de orbitas satelitales, arranque de motores y reactores, sincronización de sistemas, control de poblaciones de bacterias, etc.

Por otro lado, en el laboratorio Vibraciones y Rotodinámica del IPN-ESIME Zacateco, fundado por el Dr. Gómez Mancilla [(8)][(9)][(10)][(11)][(12)][(13)] y sus distinguidos colegas, el Dr. Jesús Meda [(14)][(15)][(16)][(17)][(18)] así como el Dr. DR. Valery Nosov [(19)][(20)][(21)][(22)]. En el cual se realiza una gran variedad de estudios en chumaceras hidrostáticas, hidrodinámicas, híbridas ó chumaceras de levitación magnética en el cual el controlador puede designar una trayectoria definida, colocando el eje en un punto deseado, logrando así, disminuir las vibraciones mecánicas del sistema [(23)][(24)][(25)].

En la literatura actual existen muchas formas de hacer frente al problema de seguimiento de referencias. Uno de estos métodos es la teoría regulación la cual proporciona un marco muy bien definido de trabajo para lograr un seguimiento asintótico. En el caso de este trabajo de investigación, únicamente se enfoca al problema de seguimiento de trayectorias utilizando la *teoría de regulación lineal y no lineal*.

### 1.2.1 SEGUIMIENTO ASINTÓTICO

Dado un sistema dinámico no lineal descrito como:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x), \end{cases}$$

Y una trayectoria de salida deseada  $y_d$ , se desea encontrar una ley de control para la entrada  $u$ , tal que, partiendo de cualquier estado inicial en una región  $\Omega$ , el error de seguimiento  $e = y(t) - y_d(t)$  sea convergente a cero, mientras que el estado  $x$  permanezca acotado [(2)].



Desde un punto de vista práctico, se puede requerir que el estado  $x$  permanezca acotado y en particular dentro del rango de validez del modelo del sistema. Cuando el sistema en lazo cerrado es tal que la propiedad del estado inicial implica cero en el error de seguimiento para todo tiempo, esto es:

$$y(t) \equiv y_d(t), \quad \forall t \geq 0$$

se dice que el sistema de control es capaz de realizar un seguimiento perfecto. El seguimiento asintótico, implica que el seguimiento perfecto es alcanzado asintóticamente, y el seguimiento exponencialmente convergente se puede definir de manera similar.

Por otra parte se puede suponer que la trayectoria deseada  $y_d(t)$  y sus derivadas de alto orden son continuas y acotadas. Se considera también que  $y_d(t)$  y estas derivadas están disponibles para un cálculo de control en tiempo real.

Estas suposiciones se satisfacen por el objetivo de control, cuando la salida deseada  $y_d(t)$  está determinada con antelación. En realidad los datos obtenidos son generados a través de un proceso de filtrado, del cual proviene automáticamente altas derivadas de la salida deseada. En algunas tareas de seguimiento, las condiciones establecidas no se satisfacen y en este caso se utiliza un sistema llamado modelo de referencia, a fin de proveer las derivadas requeridas de las señales en el algoritmo de control propuesto.

## 1.2.2 TEORÍA DE REGULACIÓN

El problema de la teoría de regulación fue uno de los temas centrales de investigación en la teoría de control lineal en la década de los 70's. El problema de regulación consiste en buscar un controlador retroalimentado por el estado o el error, tal que con ausencia de influencias externas el punto de equilibrio del sistema de lazo cerrado sea asintóticamente estable, y el seguimiento del error tienda a cero cuando la planta es influenciada por la referencia y/o perturbaciones de señales, ambos generados por un sistema externo llamado exosistema.

Existen muchos problemas en la implementación y práctica del control tales como; la orientación de un misil hacia un blanco en movimiento, el control de una nave espacial la cual esta sometida a perturbaciones, El esquema de este tipo de sistemas se muestra en la Figura 1.1. Donde la planta está sujeta a una perturbación  $w(t)$ , y un controlador el cual debe ser diseñado de manera correcta para que el sistema de lazo cerrado sea asintóticamente estable, así como la salida de la planta  $y(t)$  la cual sigue asintóticamente una referencia  $y_d(t)$ .

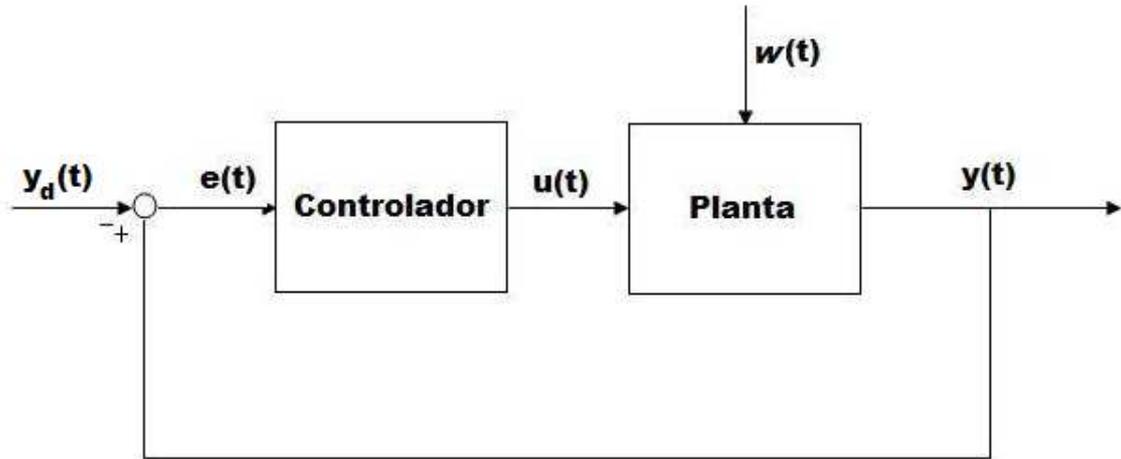


Figura 1.1. Control de retroalimentación unitario.

La mayoría de los procesos mecatronicos pueden ser representados por ecuaciones dinámicas no lineales de la forma siguiente:

$$\dot{x} = f(x) + g(x) + p_1(x)w_1, \quad (1.1.a)$$

$$y = h(x). \quad (1.1.b)$$

Donde: la ecuación (1.1.a) describe el proceso con estado  $x \in \mathbb{R}^n$  y la entrada  $u \in \mathbb{R}^p$ , sujeto a una perturbación externa  $w_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$ , y la ecuación (1.1.b) es una función que describe las salidas medidas en término de las variables de estado.

Así mismo, es posible definir el error de seguimiento de la salida como la diferencia entre la salida del sistema  $y(t)$  y una señal de referencia  $y_d(t)$ , que representa el punto de operación seleccionado, esto es:

$$e(t) = y(t) - y_d(t),$$

En este trabajo, se sumirá que tanto las señales de perturbación como las señales de referencia están generadas por los siguientes sistemas externos:

$$\dot{w}_1(t) = s_1(w_1(t)),$$

$$\dot{w}_2(t) = s_2(w_2(t)),$$

$$y_d(t) = -q(w_2(t)),$$

De lo anterior se puede definir el siguiente sistema:

$$\Sigma: \begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u + p(x)w, \\ e &= h(x) + q(w). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Donde:

$$p(x) = (p_1(x) \ 0), \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad s(w) = \begin{pmatrix} s_1(w_1) \\ s_2(w_2) \end{pmatrix}, \quad e \in \mathbb{R}^p$$

A continuación este esquema se ejemplifica en la figura. 1.2

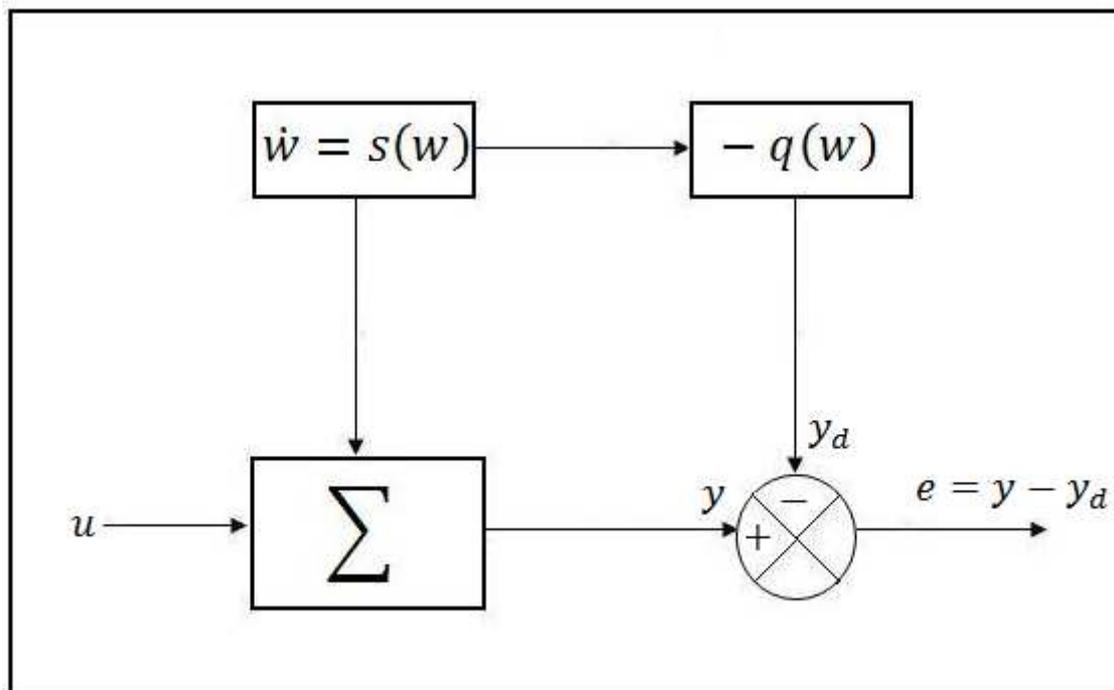


Figura 1.2 Sistema no lineal



Sin perder la generalidad, se supondrá así mismo que el sistema (1.1) tiene un punto de equilibrio  $(x, w) = (x_0, w_0)$ , es decir,  $f(x_0) = 0$ ,  $h(x_0) = 0$ ,  $s(w_0) = 0$ .

La aproximación lineal del sistema (1.2) alrededor de  $(x, w) = (x_0, w_0)$  toma entonces la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Pw(t) \\ \dot{w}(t) &= Sw(t) \\ e(t) &= Cx(t) + Qw(t)\end{aligned}\tag{1.3}$$

Donde  $A, B, P, S, C, Q$ , son calculadas como sigue:

$$\begin{aligned}A &= \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)_{x=x_0}, & B &= g(x_0), & P &= p(x_0) \\ S &= \left(\frac{\partial s(w)}{\partial w}\right)_{w=w_0} \\ C &= \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right)_{x=x_0}, & Q &= \left(\frac{\partial q(w)}{\partial w}\right)_{w=w_0}\end{aligned}$$

Siendo:

- $A$  la matriz del sistema,  $n \times n$ .
- $B$  la matriz de distribución de las entradas manipulables,  $n \times p$ .
- $P$  la matriz de distribución de las entradas no manipulables (perturbaciones),  $n \times q$ .
- $S$  la matriz del sistema externo o exosistema,  $q \times q$ .
- $C$  la matriz de distribución de las salidas observables o informativas,  $p \times n$ .
- $Q$  la matriz de distribución de la señal de referencia,  $p \times q$ .

y además,

- $x$  Es el vector de estado del sistema,  $n \times 1$ .
- $u$  Es el vector de entradas manipulables al sistema,  $p \times 1$ .
- $w$  Es el vector de señales de perturbación y de referencia,  $q \times 1$ .

Ver la figura 1.3 para identificar el sistema lineal (1.3).

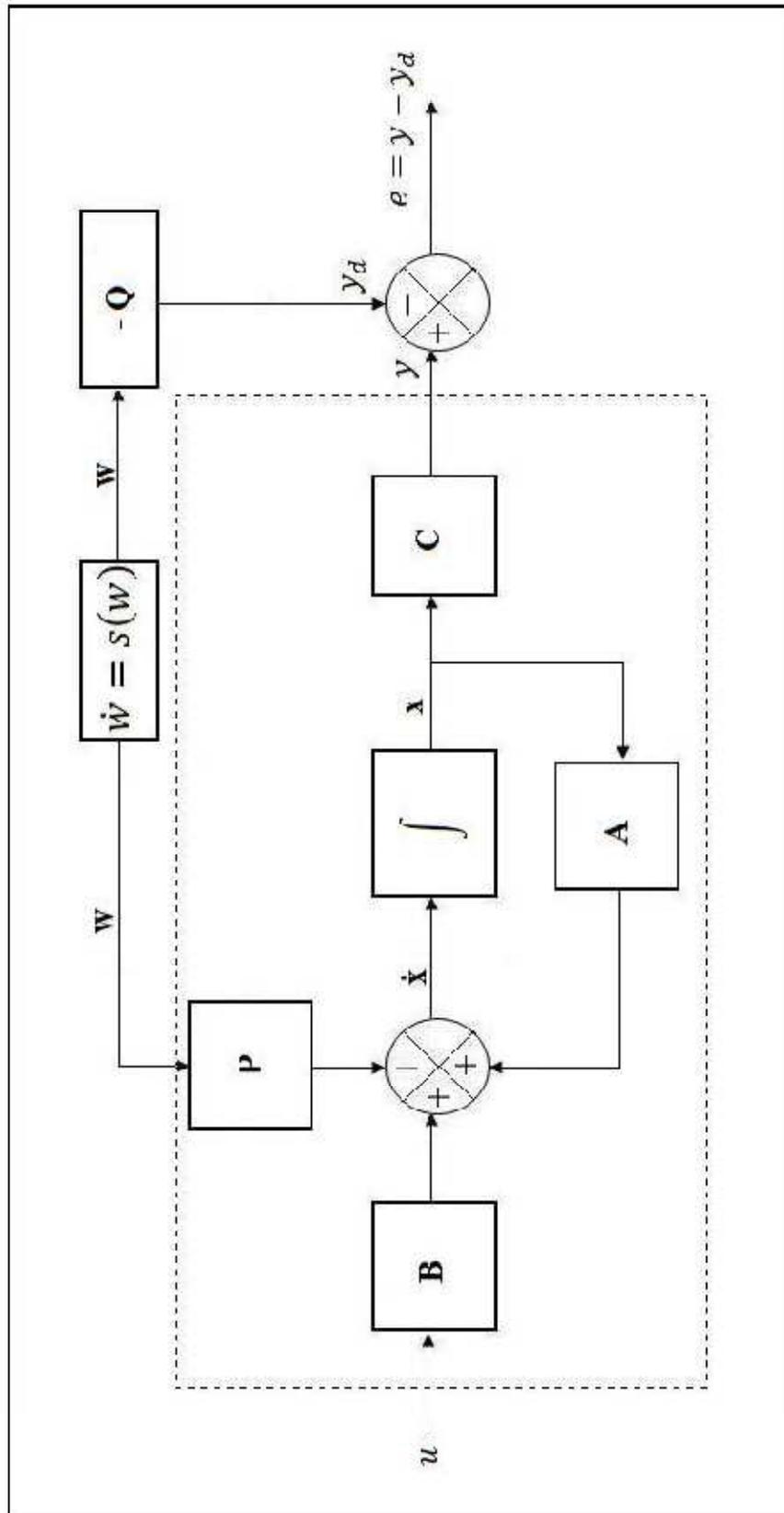


Fig. 1.3 Sistema lineal



## 1.3 TEORÍA DE REGULACIÓN LINEAL

### 1.3.1 Problema del Regulador con Retroalimentación de Estado.

Puesto que el estado de un sistema contiene toda la información esencial concerniente al sistema, es concebible que si la entrada de un sistema retroalimentado es una función de estado, un control razonable adecuado pueda llevarse a cabo. En la retroalimentación del estado se supone que todas las variables de estado están disponibles como salidas [(26)]. La selección de la señal de entrada al sistema se basa en el valor del estado, la entrada de referencia y posiblemente en el tiempo, debido a que el estado y la entrada determinan completamente el comportamiento futuro del sistema [(27)].

Para ecuaciones dinámicas lineales invariantes en el tiempo, es más natural suponer que la ley de control depende linealmente de la señal de referencia y del estado del sistema, de la forma:

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 w(t)$$

Donde:

$K_1$  es una matriz constante real (matriz de ganancia de retroalimentación),  $pxn$ .

$K_2$  es una matriz no singular constante real,  $pxq$ .

Una ley de control de este tipo se llama "control por retroalimentación estática".

El problema del regulador con retroalimentación del estado (state feedback regulation problem SFRP) (Figura 1.4), consiste entonces en hallar un controlador  $u = K_1 x + K_2 w$ , tal que los siguientes requisitos sean satisfechos:

**E)** (Estabilidad). El punto de equilibrio ( $x = x_0$ ) del sistema

$$\dot{x} = (A + BK_1)x,$$

sea asintóticamente estable

**R)** (Regulación). La solución del sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = (A + BK_1)\dot{x} + (BK_2 + P)w,$$

$$\dot{w} = Sw,$$



satisface la condición:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

El siguiente resultado, proporciona una condición necesaria y suficiente para la existencia de un regulador lineal para el sistema (1.3) [(4)], [(28)].

**PROPOSICIÓN 1.1.** Supóngase que las siguientes hipótesis sean satisfechas:

h1) el par  $(A, B)$  es estabilizable, es decir, existe un mapeo  $K_1: x \rightarrow U$ , tal que  $\sigma(A + BK_1) \subset C$  ( es decir, existe una matriz  $K_1$  tal que  $(A + BK_1)$  es estable.

h2) Ningún valor propio de  $S$  se halla en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo, es decir,  $\Re\{\lambda\} \geq 0$  para cada  $\lambda \in \sigma(S)$ .

El teorema que se presenta a continuación permite determinar la existencia de una solución (SFRP).

**TEOREMA 1.1.** Supóngase que h1) y h2) se satisface [(29)]; entonces, el SFRP tiene solución sí y solo si existen dos matrices  $\pi$  y  $\Gamma$  de dimensión adecuada que resuelven la ecuación matricial:

$$\begin{aligned} \Pi S &= A\Pi + B\Gamma + P \\ 0 &= C\Pi + Q \end{aligned} \quad (1.4)$$

En el caso de exosistema constante, se tiene que  $\dot{w} = 0$ , es decir  $S = 0$  y el problema se reduce a hallar una solución de:

$$\begin{aligned} 0 &= A\Pi + B\Gamma + P \\ 0 &= C\Pi + Q, \end{aligned}$$

o,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix},$$

Es decir, el sistema tiene solución, si y solo si,

$$\text{Im} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \subset \text{Im} \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$



De la proposición 1.1, se deduce que, bajo hipótesis adecuadas el problema del regulador lineal tiene solución, si y sólo si existe una solución de la ecuación (1.4); esta ecuación puede escribirse en la forma siguiente:

$$\bar{A}X - \bar{B}XS = \bar{C}, \quad (1.5)$$

o,

$$A = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} -P \\ -Q \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix}.$$

A continuación se establece una condición necesaria y suficiente, que permite decidir sobre la resolubilidad universal de la ecuación (1.4), es decir, sobre la existencia de una solución cualquiera que sea  $\bar{C}$  (es decir, con referencia a la ecuación (1.5), ara cualesquiera  $P$  y  $Q$ ):

**Teorema 1.2.** El sistema  $\bar{A}X - \bar{B}XS = \bar{C}$ , en la incógnita matricial  $X$  es resoluble[] para toda  $\bar{C}$ , si y solo si [(29)].

rango  $(\bar{A} + \lambda \bar{B}) =$  número de filas de  $\bar{C}$  para cada  $\lambda \in \sigma(S)$

De aquí se obtiene lo siguiente

**COROLARIO 1.1** la ecuación matricial

$$\begin{aligned} \Pi S - A\Pi - B\Gamma &= X, \\ C\Pi &= Y, \end{aligned}$$

admite una solución para cada par  $(X, Y)$ , si y solo si

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = n + p \quad (1.6)$$

Para cada  $\lambda \in \sigma(S)$

La condición (1.6) equivale a decir que el sistema sea invertible a la derecha, y además, que los ceros invariantes del sistema no coinciden con los valores propios de  $S$ . Esta condición expresa el hecho de que ciertas señales de referencia fueran no observables en la salida del sistema, pues de otra manera podría ocurrir que ciertas señales de referencia fueran no observables en la salida y por lo tanto imposibles de seguir.



### 1.3.2 Construcción del Regulador

Dada una ecuación dinámica multivariable,  $n$ -dimensional, invariante en el tiempo, y controlable, como la ecuación (1.3), entonces los valores propios de  $(A + BK_1)$  pueden asignarse arbitrariamente por una adecuada selección de  $K_1$ . Como la ecuación dinámica es controlable, la asignación arbitraria de los valores propios se puede hacer introduciendo la retroalimentación del estado. Es decir con  $(A, B)$  estabilizable, se puede determinar un regulador estático en retroalimentación.

Es importante notar que, como el sistema es controlable, la matriz de controlabilidad tiene rango  $n$ . Si existe una  $b_i$  ( $i$  -ésima columna de  $B$ ), tal que la matriz  $[b_i \quad Ab_i \quad \dots \quad A^{n-1}b_i]$  tiene rango  $n$ , entonces el control del estado del sistema puede efectuarse usando la  $i$  -ésima componente de  $u$  únicamente; si no existe tal  $b_i$ , se requieren, en general dos o más componentes de  $u$ . Sin embargo, con la retroalimentación de estado adecuada, el sistema puede hacerse controlable por una sola componente de la entrada.

La construcción del regulador está basada en la demostración del teorema 1.1 [(4)],[(28)]. A continuación se presenta un algoritmo para la construcción del regulador estático lineal (SFRP), dadas las condiciones de estabilidad y controlabilidad para el sistema considerado.

Paso 1) Se escoge  $K_1$  tal que  $\sigma(A + BK_1) \subset \mathbb{C}$ , es decir,  $(A + BK_1)$  es estable.

Paso 2) Hallar  $\Pi$  y  $\Gamma$ , resolviendo la ecuación matricial del Teorema 1.1.

Paso 3) Calcular  $K_2 = \Gamma - K_1\Pi$ .

Paso 4) El regulador es  $u(t) = K_1x(t) + K_2w(t)$ .

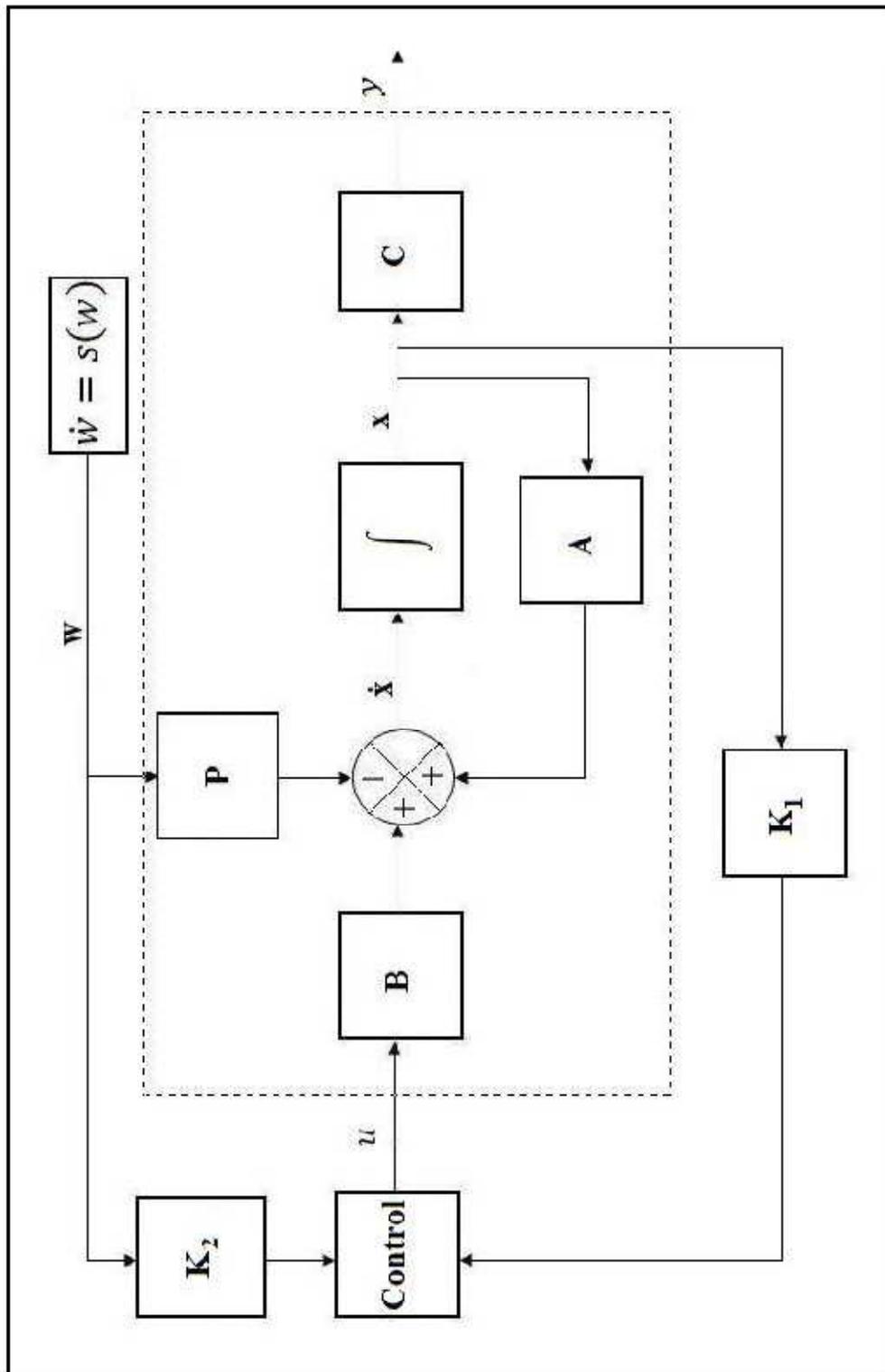


Figura 1.4 El problema del regulador con retroalimentación del estado: SFRP



### 1.3.3 Problema del Regulador con Retroalimentación del Error .

En la retroalimentación del estado se supone que las variables de estado están disponibles como salidas, sin embargo esto no se mantiene en la práctica, debido a que las variables de estado pueden no ser accesibles para mediciones directas o debido a que número de dispositivos de medición es limitado.

Entonces, para poder controlar el sistema por medio de la retroalimentación del estado, una sustitución razonable para el vector de estado tiene que hallarse a partir de la información disponible.

Las entradas y salidas disponibles de una ecuación dinámica pueden usarse para manejar un dispositivo, de modo que las salidas del dispositivo aproximen el vector de estado. Este dispositivo, que construye una aproximación del vector de estado es llamado un *estimador de estado*. Al utilizar un estimado de estado en lugar del estado real en la retroalimentación del estado, se espera obtener el mismo resultado en ambos casos.

Si un sistema dinámico invariante en el tiempo lineal,  $n$ -dimension, es controlable, entonces introduciendo la retroalimentación del estado se puede asignar arbitrariamente los  $n$  valores propios de la ecuación resultante además, si esa ecuación es observable, un conjunto de estimadores con valores propios arbitrarios pueden construirse para generar todas las variables del estado.

Aplicando la matriz de ganancia de retroalimentación a la salida de los estimadores, el sistema resultante tendrá un conjunto de polos deseados. La combinación de los estimadores de estado junto con la matriz de ganancia de origen a un dispositivo denominado *compensador dinámico*.

En sistemas multivariables cada entrada controla más de una salida y cada salida es controlada por más de una entrada. Debido a este fenómeno, que es llamado *acoplamiento*, es generalmente muy difícil controlar un sistema multivariable. Si un compensador puede hallarse tal que cada entrada controle una y sólo una salida, entonces se dice que el sistema es *desacoplado*.

El diseño de un compensador consiste, primero, de un movimiento de los polos del sistema por introducción de la retroalimentación del estado, y entonces hallar un estimador de estado asintótico (observador) para generar el vector de estado. La colocación de polos consiste en que, dado un sistema y un conjunto de polos deseados, se determina un compensador tal que el sistema resultante tiene el conjunto de polos deseado.



La reconstrucción del estado se puede obtener considerando una retroalimentación dinámica salida-entrada, en lugar de una retroalimentación algebraica o estática estado-entrada, como en la sección anterior. Se puede afirmar que cualquier sistema lineal estacionario de orden  $n$  completamente controlable y observable es siempre estabilizable con una conexión de retroalimentación salida-entrada a través de un sistema dinámico adecuado, puro de orden  $n$ .

El compensador es un dispositivo que conectado oportunamente al sistema controlado, no modifica la característica de estructura, mientras que el regulador no modifica el comportamiento asintótico del sistema.

Para el caso del problema del regulador con retroalimentación del error (error feedback regulation problem EFRP), la cantidad medida es el error de seguimiento de la salida  $e(t)$  ( $p \times 1$ ). Entonces se quiere construir un regulador dinámico del tipo:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= Fz(t) + Ge(t), \\ u(t) &= Hz(t).\end{aligned}\tag{1.7}$$

Donde,

$F$  es una matriz constante real,  $(n+q) \times (n+q)$ ,

$G$  es una matriz constante real,  $(n+q) \times p$ ,

$H$  es una matriz constante real,  $p \times (n+q)$ ,

$Z$  es el vector de estados estimados del sistema,  $(n+q) \times 1$ .

Este regulador no es precisamente un observador (estimador de estado), ya que no se requiere que  $z(t)$  tienda a  $[x(t), w(t)]^T$ , es decir que el estimado del estado del sistema y del exosistema (señal de referencia) tiendan al estado y al exosistema mismo.

El sistema (1.3) junto con el controlador dinámico (1.7), (ver figura 1.5) se puede poner en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ GQ \end{pmatrix} w, \\ e &= (C \ 0) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + Qw,\end{aligned}\tag{1.8}$$

o,

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c w,$$

$$e = C_c x_c + Qw.$$



El sistema dinámico retroalimentado sujeto a la perturbación  $w$ , está descrito por la expresión:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{w} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ w \end{pmatrix} \\ e &= (C_c \ Q) \begin{pmatrix} x_c \\ w \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.9)$$

El problema del EFRP consiste entonces en hallar las matrices  $F, G, H$ , tal que satisfagan las siguientes condiciones:

E) (Estabilidad). El punto de equilibrio ( $x = x_0, z = z_0$ ) de

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

Sea asintóticamente estable

R) (Regulación). La solución del sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Ax + BHZ + Pw, \\ \dot{w} &= Sw, \\ \dot{z} &= Fz + G(Cx + Qw), \end{aligned}$$

satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

El siguiente resultado da condiciones para la existencia de una solución del EFRP:

**TEOREMA 1.3.** Se supone que además de las hipótesis h1) y h2) de la proposición 1.1, se satisface la siguiente hipótesis:

h3) El par

$$\begin{pmatrix} (C \ Q) \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

es detectable, es decir, existe una matriz  $G$ , tal que:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix} - G(C \ Q) \end{pmatrix}$$

es estable

Ahora el EFRP tiene solución, si y sólo si, el SFRP es soluble, es decir existe una solución  $\pi$  y  $\Gamma$  para ecuación matricial:

$$\begin{aligned} \Pi S - A\Pi - B\Gamma &= P \\ C\Pi &= -Q \end{aligned}$$



### 1.3.4 Construcción del Regulador.

Para la construcción del regulador dinámico se considera la demostración del teorema 1.3 [(4)],[(28)]. Dado el sistema controlado (2.3) con el par  $(A,B)$  estabilizable y el par  $(A,C)$  detectable, se determina un compensador dinámico en retroalimentación salida-entrada considerando el error de seguimiento de la salida en el punto de operación seleccionado.

Se tiene  $\pi$  y  $\Gamma$  del SFRP.

Paso 1) Se escoge  $H_1$ , tal que,  $\sigma(A + BH_1) \subset \mathbb{C}$ , es decir,  $(A + BH_1)$  es estable.

Paso 2) Se escoge  $G$ , tal que,  $\sigma(A + GC) \subset \mathbb{C}$ , es decir,  $(A + GC)$  es estable

Paso 3) Hallar  $H_2 = \Gamma - H_1\pi$ .

Paso 4) Calcular  $F$

$$F = \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} (H_1 \ H_2) - G(C \ Q)$$

Paso 5) con  $F, G, H$ , se tiene el regulador dinámico:

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Ge(t),$$

$$u(t) = Hz(t),$$

$$H = (H_1 \ H_2).$$

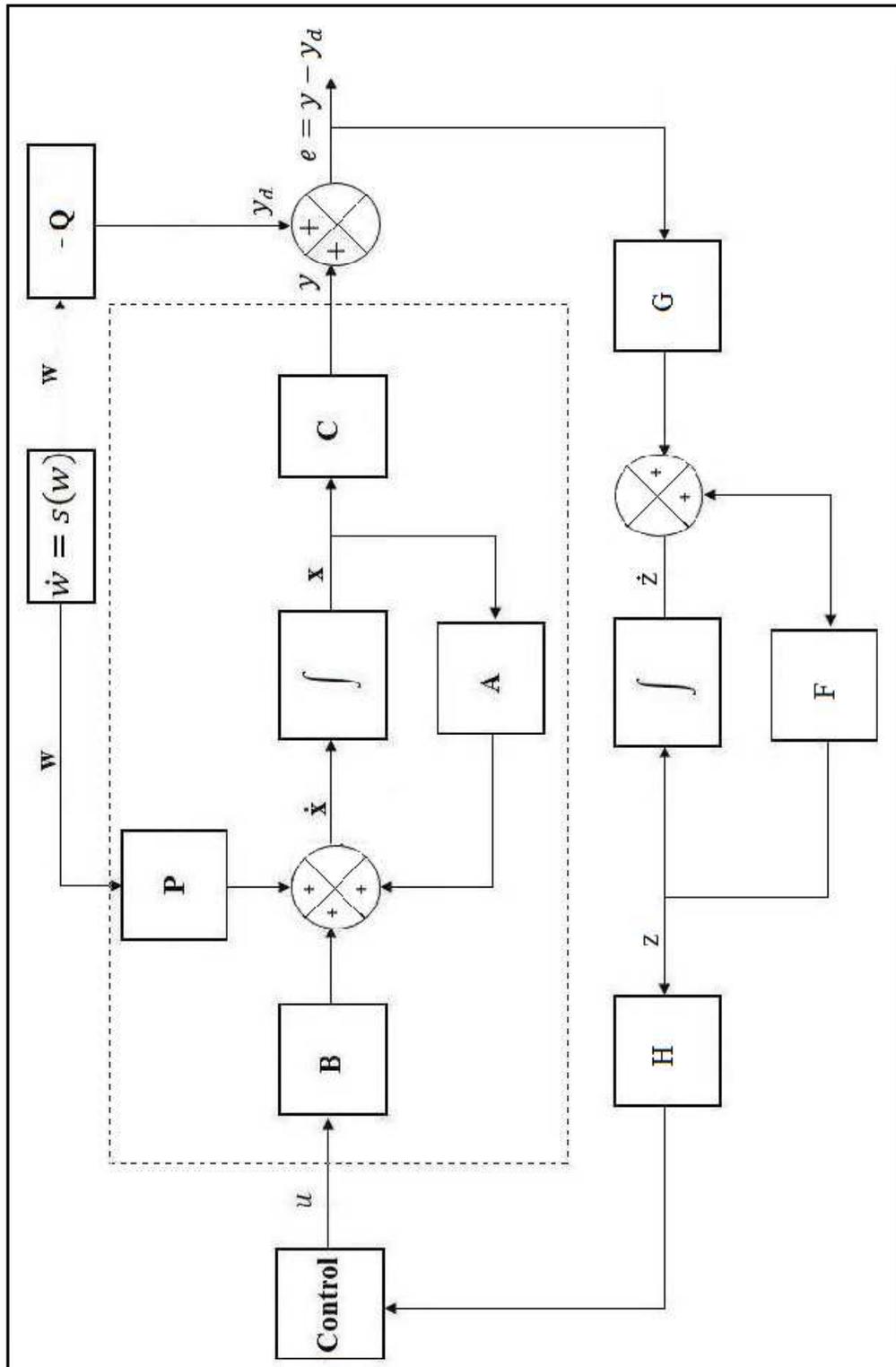


Figura 1.5 Problema del regulador con retroalimentación del error



## 1.4 TEORIA DE REGULACIÓN NO LINEAL

Puesto que ningún sistema físico real es verdaderamente lineal, particularmente sobre un amplio rango de variables de operación, se considera el diseño de una estructura de control para sistemas no lineales, entendiéndose a estos como aquellos sistemas a los que no es aplicable el principio de superposición [(30)].

El principio de superposición implica que la respuesta de un sistema lineal a la suma de sus entradas es la misma que la suma de las respuestas de las entradas iniciales.

La idea de cancelar las no linealidades de un sistema no lineal es atractiva, ya que de este modo, es posible obtener un sistema con una estructura lineal, para la cual es posible aplicar técnicas conocidas.

En [(31)] Isidori y Byrnes muestran que suponiendo hipótesis analógicas a las del caso lineal, la solución del problema del regulador es equivalente a la solución de ciertas ecuaciones no lineales, de las cuales la ecuación matricial presentada en Francis [(4)] es un caso particular. Se muestra también que la solución de estas ecuaciones implica la solución del problema del regulador previendo que la retroalimentación estabiliza asintóticamente la planta.

Considerar el sistema no lineal dado por:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u + p(x)w, \\ e = h(x) + q(w). \end{cases}$$

Se supone que  $(x, w) = (x_0, w_0) = (0, 0)$  es un estado de equilibrio del sistema, es decir, para  $u = 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $s(0) = 0$  y  $h(0) = q(0) = 0$ .

Para el sistema  $\Sigma$  definido como:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ e = h(x) \end{cases} \quad (1.10)$$

El problema del regulador no lineal con retroalimentación de estado (SFRP) consiste en encontrar un controlador

$$u(t) = \alpha(x(t), w(t))$$



Donde  $\alpha(x, w)$  es un mapeo  $C^k$  ( $k \leq 2$ ) definido en  $X \times W$  ( $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ ), con  $\alpha(0,0)$ , tal que se satisface las siguientes propiedades:

1. **Estabilidad:** el estado de equilibrio  $x = 0$  de

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x, w) + p(x)w$$

es asintóticamente estable

2. **Regulación:** Existe una vecindad  $U \in X \times W$  de  $(0,0)$ , tal que para cada condición inicial  $(X_0, W_0) \in U$ , la solución del sistema en lazo cerrado.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x, w) + p(x)w,$$

$$\dot{w} = s(w),$$

satisface la siguiente condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{h(x(t)) + q(w(t))\} = 0$$

El siguiente resultado de [(5)] describe una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución al problema del regulador no lineal con retroalimentación de estado (SFRP).

**TEOREMA 1.4.** Se supone que para el sistema  $\Sigma$  se satisfacen las siguientes hipótesis:

a1) el punto de equilibrio  $w = 0$  es estable en el sentido de Lyapunov, y además todos los valores propios de

$$\left[ \frac{\partial s(w)}{\partial w} \right]_{w=0},$$

están sobre el eje imaginario del plano complejo.

a2) La aproximación lineal de  $\Sigma$  en una vecindad del punto  $x = 0$  es asintóticamente estable, es decir existe una matriz  $K$  tal que  $(A + BK)$  es estable con:

$$A = \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad y \quad B = g(0).$$



Ahora el problema del regulador no lineal con retroalimentación del estado es resoluble si y solo si existen dos mapeos  $x = \pi(w)$  y  $u = \gamma(w)$  de clase  $C^2$ , con  $\pi(0) = \gamma(0) = 0$ , ambos definidos en una vecindad del origen, tal que satisfacen la condición (Ecuaciones de Francis-Isidori-Byrnes):

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} s(w) = f(\pi(w)) + g(\pi(w))\gamma(w) + p(\pi(w))w \quad (1.11)$$

$$0 = h(\pi(w)) + q(w)$$

Una vez que la ecuación (1.11) se satisface, el controlador

$$u = \alpha(x, w) = \gamma(w) + K(x - \pi(w)) \quad (1.12)$$

Resuelve el problema del regulador no lineal con retroalimentación de estado (SFRP), como se demuestra en [(31)].

En el caso del problema del regulador no lineal con retroalimentación del error (EFRP), el teorema siguiente permite verificar cuando un controlador dado resuelve el problema de la regulación robusta ante señales de referencia y perturbaciones constantes.

**Teorema 1.5** se supone que la aproximación lineal del sistema no lineal satisface la hipótesis h1) además se supone que existe un compensador

$$\dot{z} = \xi(z, e),$$

$$u = \theta(z),$$

Es asintóticamente estable.

Entonces existe una solución al problema del regulador no lineal con retroalimentación del error si existen dos mapeos  $x = \pi(w)$  y  $z = \sigma(w)$  de clase  $C^2$  con  $\pi(0) = \sigma(0) = 0$  tal que satisfacen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(x)}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w)) + g(\pi(w))\theta(\sigma(w)) + p(\pi(w))w, \\ \frac{\partial \sigma(x)}{\partial w} s(w) &= \xi(\sigma(w), 0), \\ 0 &= h(\pi(w)) + q(w). \end{aligned} \quad (1.13)$$



Por otro lado, definiendo el sistema extendido

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) + p(x)w \\ s(w) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(x) \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

$$e = h(x) + q(w).$$

Como  $\Sigma e$  se tiene que:

$$\Sigma e: \begin{cases} \dot{x}_e = f_e(x_e) + g_e(x_e) u \\ e = h_e(x_e) \end{cases} \quad (1.14)$$

$x_e = \text{col}\{x, w\} \in X_e = X \times W$ , es el estado extendido

$$f_e(x_e) = \text{col}\{f(x) + p(x)w, s(w)\}$$

$$g_e(x_e) = \text{col}\{g(x), 0\},$$

$$h_e(x_e) = h(x) + q(w).$$

Entonces, se supone que además de las hipótesis del *Teorema 1.4* se cumple la siguiente hipótesis:

a3) El sistema  $\Sigma e$  tiene un vector de grado relativo bien definido  $\{\rho_1, \dots, \rho_p\}$  en el punto  $(x, w) = (0, 0)$ .

Observación. El grado relativo es el número de veces que se necesita derivar la salida a fin de que la entrada aparezca explícitamente [(5)].

La idea central que se usará consiste en hallar una transformación no lineal de coordenadas  $(z, w) = \Phi(X, W)$ , donde  $z = \text{col}\{z_1, \dots, z_p\}$ , y  $z_i$  es un vector de dimensión  $p_i \times 1$ , tal que el sistema (1.14) toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i^1 &= z_i^2 \\ \dot{z}_i^2 &= z_i^3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_i^{p_i} &= b_i(z, \xi, w) + a_i(z, \xi, w)u \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\xi = q(z, \xi, w)$$

$$\dot{w} = S(w)$$

$$e(t) = \text{col}(z_1^1, z_2^1, \dots, z_p^1)$$



Claramente, para este caso, si se desea que el error de seguimiento sea cero, es decir,  $e(t) = 0$ , esto implica que  $z_i = 0$  y la entrada necesaria está dada por

$$u^*(0, \xi, w) = -A^{-1}(0, \xi, w)[B(0, \xi, w)],$$

donde

$$A(z, \xi, w) = \begin{pmatrix} a_i(z, \xi, w) \\ \cdot \\ a_p(z, \xi, w) \end{pmatrix}; \quad B(z, \xi, w) = \begin{pmatrix} b_1(z, \xi, w) \\ \cdot \\ b_p(z, \xi, w) \end{pmatrix}$$

La solución del (SFRP) estará entonces dada por

$$\pi(w) = \text{col}(0, \pi_\xi(w)), \text{ donde } \pi_\xi(w) \text{ es la solución de}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} s(w) = q(0, \pi_\xi, w, u^*(0, \pi_\xi, w)).$$

Las hipótesis tomadas garantizan la existencia de esta solución

La estructura de control que se usa es una modificación de la ley (1.12) y está dada por

$$u = \alpha_s(z, \xi, w),$$

con

$$\alpha_s = A_e^{-1}(z, \xi, w) \left( \begin{bmatrix} -b_1(z, \xi, w) \\ \cdot \\ -b_m(z, \xi, w) \end{bmatrix} + \tilde{K}_1 z + \tilde{K}_2(\xi, \pi_\xi(w)) \right). \quad (1.16)$$

Donde:  $\tilde{K} = [\tilde{K}_1 \tilde{K}_2]$  deben seleccionarse en tal forma que  $\tilde{K}_1 z + \tilde{K}_2 \xi$  estabiliza la aproximación lineal del sistema (1.15).

$\tilde{K}_1$  y  $\tilde{K}_2$  Pueden obtenerse directamente de las ganancias previas  $K_1$  y  $K_2$  del (SFRP) lineal



En las coordenadas originales, el control (1.16) toma la forma:

$$u(x, w) = \alpha_s(x, w) = A^{-1}(z, \xi, w) \left( [-b(z, \xi, w)] + \tilde{K} \begin{pmatrix} z \\ \xi - \pi_\xi \end{pmatrix} \right)_{\substack{z \\ \xi} = \phi(x)}, \quad (1.17)$$

### 1.4.1 Regulación Robusta para sistemas no lineales

En general, para un sistema no lineal con señales de referencia no constantes, un compensador lineal robusto construido sobre la base de la aproximación lineal no es suficiente para mantener la propiedad de regulación en el sentido de que un controlador que resuelve el problema del regulador se dice **ROBUSTO** si, para variaciones en el sistema que mantienen la propiedad de estabilidad, y la propiedad de regulación se mantiene [(29)].

El problema de la regulación no lineal robusta puede ser resuelto en el caso particular de señales externas constantes caracterizadas por la relación  $\dot{w} = 0$ .

En [(32)] se presenta un resultado donde muestra que para sistemas no lineales con señales externas constantes, un regulador robusto calculado sobre la base de la aproximación lineal, es suficiente para obtener regulación robusta. Este resultado se resume en la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN 1.2** Se considera un sistema no lineal descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u + p(x)w, \\ \dot{w} &= 0, \\ e &= h(x) + q(w). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Y sea

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Pw, \\ \dot{w} &= 0, \\ e &= Cx + Qw, \end{aligned} \quad (1.19)$$

La aproximación lineal en el punto  $(x, w) = (x_0, w_0)$ . El compensador lineal de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z} &= F_e z + G_e e, \\ u &= H_e z, \end{aligned}$$

proporciona regulación robusta; con  $F_e, G_e$  y  $H_e$  calculadas a partir de las matrices que caracterizan al sistema lineal (1.3).



## CAPÍTULO 2

# CONTROL DIFUSO



## INTRODUCCIÓN.

### 2.1 General

En la actualidad la lógica difusa ha tomado una fama muy importante por la variedad de sus aplicaciones, las cuales van desde el control de complejos procesos industriales, hasta el diseño de dispositivos artificiales de deducción automática, pasando por la construcción de artefactos electrónicos de uso doméstico y de entretenimiento, así como también de sistemas de diagnóstico.

La lógica difusa o también llamada lógica borrosa es un sistema matemático que modela funciones no lineales, que convierte unas entradas en salidas acordes con los planteamientos lógicos que usan el razonamiento aproximado.

Con ayuda de la lógica borrosa se puede gobernar un sistema por medio de reglas como son "SI-ENTONCES". En general la lógica difusa se puede aplicar tanto a sistemas de control, como mecatronicos, así como para controlar cualquier sistema dinámico de la ingeniería.

Hoy en día es bien conocido que la lógica difusa provee un entorno ideal para resolver problemas de forma más parecida al razonamiento humano que a la estricta matemática de los sistemas artificiales, ya que es posible diseñar un controlador aún sin tener un modelo matemático explícito de la planta.

Una de las aplicaciones mas importantes de la teoría difusa se estableció en Sendai (Japón) donde se puso en servicio un metro controlado mediante lógica difusa, este tenia la peculiaridad de poseer controladores que hacían la frenada y la aceleración mucho mas suaves facilitando así la conducción.

Por otra parte, como bien sabemos todo lo que nos rodea es no lineal, es por eso que recientemente algunas técnicas fueron desarrolladas para caracterizar sistemas no lineales mediante subsistemas lineales locales [(33)], [(34)]. Uno de estos es el conocido modelo difuso de Takagi-Sugeno TS, esta técnica permite modelar dinámicas no lineales por medio de subsistemas lineales locales que propiamente describen, al menos localmente el comportamiento del sistema no lineal para una región predeterminada del espacio de estado.

Cada uno de estos subsistemas lineales corresponde a puntos de operación diferentes, básicamente la mezcla se realiza por la sumatoria de los subsistemas locales. Entonces, el controlador local puede ser diseñado para cada subsistema, obteniendo el controlador total por el mismo procedimiento usado para definir el sistema difuso completo [(17)].

## 2.2 LÓGICA DIFUSA

### 2.2.1 Antecedentes Históricos

La Lógica Difusa es una metodología que proporciona una manera simple y elegante de obtener una conclusión a partir de información de entrada vaga, ambigua, imprecisa, con ruido o incompleta, en general la lógica difusa imita como una persona toma decisiones basada en información con las características mencionadas. Una de las ventajas de la lógica difusa es la posibilidad de implementar sistemas basados en ella tanto en hardware como en software o en combinación de ambos.

La lógica difusa fue investigada, por primera vez, a mediados de los años sesenta en la universidad de Berkeley (California) por el Dr. Lotfy A. Zadeh (Figura 2.1), fue en 1965 cuando el Dr. Zadeh publicó un artículo titulado "*Conjuntos Difusos (fuzzy set)*" en la revista científica *Information and Control* [(35)]. En este artículo describió a través de la teoría matemática de conjuntos, como poder trabajar matemáticamente con expresiones imprecisas, tal como lo hace el ser humano.

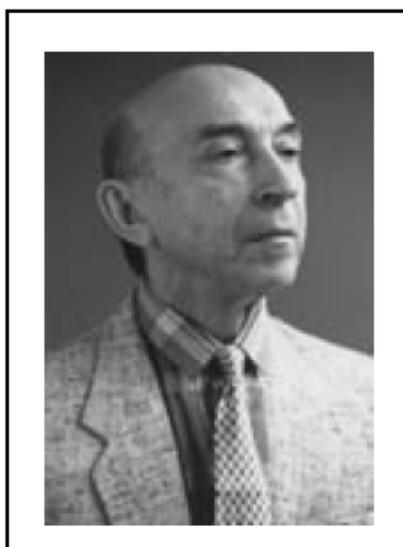


Figura 2.1 L. A. Zadeh

En 1974, el británico Ebrahim Mamdani, demuestra la aplicabilidad de la lógica difusa en el campo del control. Desarrolla el primer sistema de control práctico, la regulación de un motor de vapor. En la década de los ochenta, siguiendo el camino iniciado por Mamdani, Takagi y Sugeno desarrollan la primera aproximación para construir reglas difusas a partir de datos de entrenamiento, y aunque en un principio no tiene mucha repercusión, más tarde será el punto de partida para investigar la identificación de modelos difusos.

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría



## 2.2.2 Conceptos introductorios

Dado que como era de esperar toda la literatura existente está escrita en el idioma inglés, los términos acuñados según el estado del arte actual constan de palabras inglesas. Como no está muy claro cuál es la mejor traducción al castellano de términos como *defuzzification*, en la definición de un concepto escribimos entre paréntesis el término original en inglés cuando haya lugar a dudas o ambigüedades.

### 2.2.2.1 Conjuntos clásicos

Como se sabe la lógica difusa se extiende en algún sentido a la teoría clásica de conjuntos. Comenzamos entonces con la definición de conjunto en el sentido tradicional.

**Definición 2.1.** Un conjunto clásico  $C$  es una colección de (posiblemente infinitos y no numerables) objetos  $c$ . Decimos entonces que  $c$  es un elemento del conjunto  $C$ , y lo simbolizamos  $c \in C$ .

**Definición 2.2.** Los conjuntos  $A$  y  $B$  son iguales ( $A = B$ ) si todo elemento  $a \in A$  pertenece también a  $B$ , y viceversa.

Un conjunto puede ser definido en forma *extensional* enumerando cada uno de sus elementos, o en forma *intencional* enunciando una propiedad común y única de todos sus elementos.

---

**Ejemplo 2.1.** Sean los conjuntos  $C_1 = \{1, 2, 3\}$  y  $C_2 = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 3\}$ .

Ambos contienen los mismos elementos (por lo tanto son iguales), pero  $C_1$  fue definido en forma extensional y  $C_2$  en forma intencional.

---

**Definición 2.3.** El conjunto  $S$  es un subconjunto (*subset*) de  $C$  si todos los elementos de  $S$  también pertenecen a  $C$ . En símbolos  $S \subset C$ .

---

**Ejemplo 2.2.** El conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales es un subconjunto del conjunto  $\mathbb{R}$  de los números reales. Escribimos  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ .

---



### 2.2.2.2 Variables lingüísticas

La ventaja sobresaliente de la lógica difusa es que al igual que las personas, maneja variables lingüísticas, tal como la ya mencionada "belleza", en forma conveniente para su tratamiento matemático. Este concepto es de vital importancia en las aplicaciones de la lógica difusa. Sólo para estar a tono con la nomenclatura aceptada y no por una conveniencia semántica [(36)].

**Definición 2.4.** El universo de discurso (*universe of discourse*)  $U$  de la variable  $x$  es el dominio sobre el cual  $x$  está definida.

Si bien los conceptos de variable lingüística y valor lingüístico deberían resultar intuitivos y un par de ejemplos bastarían para su comprensión, siendo así se presentan dos definiciones al respecto.

**Definición 2.5.** Dada una variable real  $x$  definida en un universo de discurso  $U$ , llamamos variable lingüística  $\tilde{x}$  al concepto asociado a  $x$  que sólo puede tomar valores lingüísticos, a definir a continuación.

**Definición 2.6.** Sea  $\tilde{x}$  una variable lingüística definida sobre el universo de discurso  $U$ . El conjunto (clásico) de valores arbitrarios que  $\tilde{x}$  puede tomar es:

$$\tilde{V} = \{\tilde{v}_i: i = 1, 2, \dots, N\}$$

y cada uno de los elementos de  $\tilde{V}$  se llama valor lingüístico. A menudo los valores lingüísticos que una variable lingüística puede tomar son adjetivos que describen de alguna manera una propiedad de la variable. El siguiente ejemplo ayudara a comprender mejor estas últimas dos definiciones.

---

**Ejemplo 2.3.** Sea  $h \in [0, h_{max}]$  la altura del nivel de agua líquida en el circuito secundario del generador de vapor de un reactor nuclear. Si hay mucho líquido, el vapor generado será bajo y el sistema de control hará un *trip*<sup>1</sup> de turbina para no arruinar sus álabes. Por otro lado, si hay poca agua en fase líquida la extracción de calor del circuito primario será pobre y el sistema de seguridad provocará un *scram*<sup>2</sup> del reactor ante un aumento de la temperatura del refrigerante. Definimos entonces una variable lingüística "altura" sobre  $h$  que pueda tomar los siguientes valores lingüísticos:

$$\begin{aligned} \text{altura} = \{ & \text{inaceptablemente baja, peligrosamente baja,} \\ & \text{baja, normal, alta, peligrosamente alta} \\ & \text{inaceptablemente alta} \} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> *trip* - Esto implica la desconexión mecánica al generador eléctrico y un bypass del vapor generado directamente al condensador, poniendo fuera de servicio la central. <sup>2</sup> *scram* -Es la inserción de emergencia de las barras de control en el núcleo del reactor, apagándolo (si tenemos suerte).

### 2.2.3 Conjuntos difusos (Fuzzy set)

Luego de examinar los ejemplos anteriores queda la sensación de que los valores lingüísticos propuestos son extremadamente arbitrarios y subjetivos. La forma en la que la lógica difusa trata esta cuestión, es el punto central de la teoría y las dos definiciones que siguen son claves para este desarrollo [(37)].

**Definición 2.7.** Sea  $\tilde{x}$  una variable lingüística definida a partir de la variable real  $x \in U$ , y sea  $\tilde{v}$  uno de los posibles valores lingüísticos que  $\tilde{x}$  puede tomar. La función  $\mu_{\tilde{v}}(x): U \rightarrow [0, 1]$  que describe la certeza subjetiva pero no aleatoria de que  $\tilde{x}$  pueda ser clasificada lingüísticamente por  $\tilde{v}$  se llama función de membresía (*membership function*).

**Definición 2.8.** Dado un valor lingüístico  $\tilde{v}$  aplicable a la variable lingüística  $\tilde{x}$  sobre el universo de discurso  $U$  y una función de membresía  $\mu_{\tilde{v}}$ , definimos el conjunto difuso (*fuzzy set*)  $V_{\tilde{v}}$  como:

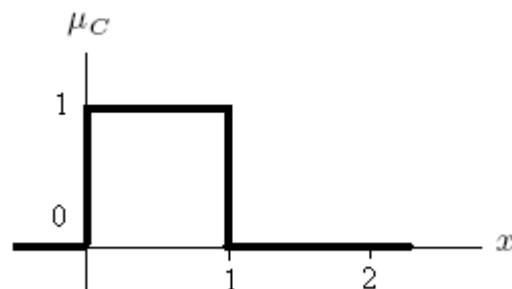
$$V_{\tilde{v}} = \{(X, \mu_{\tilde{v}}(x)): x \in U\}.$$

Esto es, un conjunto clásico cuyos elementos son pares  $\{X, \mu_{\tilde{v}}(x)\}$  que representan la certeza de que el valor real  $x$  pueda ser clasificado lingüísticamente como  $\tilde{v}$ .

En cierta forma, la definición 2.8 resulta una generalización de la definición 2.1 en la que  $\mu_c$  sólo puede tomar dos valores cero (0) o uno (1).

---

**Ejemplo 2.5.** El conjunto clásico  $C = [0, 1]$  puede ser escrito como conjunto difuso. En efecto, sea.



$$\mu_C(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Entonces el conjunto difuso

$$F = \{(X, \mu_C(x)): x \in \mathbb{R}\}$$

---

El primer ejemplo utilizado por Zadeh, para ilustrar el concepto de conjunto difuso, fue el conjunto "hombres altos". Según la teoría de la lógica clásica el conjunto "hombres altos" es un conjunto al que pertenecerían los hombres con una estatura mayor a un cierto valor, que podemos establecer en 1.80 metros, por ejemplo, todos los hombres con una altura inferior a este valor quedarían fuera del conjunto. Así tendríamos que un hombre que mide 1.81 metros de estatura pertenecería al conjunto hombres altos, y en cambio un hombre que mida 1.79 metros de altura ya no pertenecería a este conjunto. Sin embargo, no parece muy lógico decir que un hombre es alto y otro no lo es cuando su altura difiere en dos centímetros. El enfoque de la lógica difusa considera que el conjunto "hombres altos" es un conjunto que no tiene una frontera clara para pertenecer o no pertenecer a él: mediante una función que define la transición de "alto" a "no alto" se asignara a cada valor de altura un grado de pertenencia al conjunto, entre 0 y 1. Así por ejemplo, un hombre que mida 1.79 podría pertenecer al conjunto difuso "hombres altos" con un grado 0.8 de pertenencia, uno que mida 1.81 con un grado 0.85, y uno que mida 1.50 m con un grado 0.1. Visto desde esta perspectiva se puede considerar que la lógica clásica es un caso límite de la lógica difusa en el que se asigna un grado de pertenencia 1 a los hombres con una altura mayor o igual a 1.80 y un grado de pertenencia 0 a los que tienen una altura menor. Figura 2.2



Figura 2.2 Lógica difusa vs lógica clásica

Para cada conjunto difuso, existe una función de membresía asociada a sus elementos, que indican en que medida el elemento forma parte de ese conjunto difuso.

## 2.2.4 Función de membresía , pertenencia (Membership Function)

Teniendo así la idea de conjunto difuso, podemos acercarnos a la forma de atacar los problemas con las herramientas de lógica difusa. En principio, cualquier función que esté definida en un intervalo de interés del universo de discurso podría utilizarse como función de membresía para caracterizar a un conjunto difuso. La utilización de uno u otro tipo de función además de los parámetros característicos, depende del caso particular a analizar.

El grado de membresía en los conjuntos difusos, puede ser representado por una función continua, la cual es denominada como función de membresía. En otras palabras, si  $F$  es un conjunto difuso, entonces la función de membresía  $\mu_F(x)$  mide el grado con el cual el valor  $x$  pertenece al conjunto  $F$ , y puede tomar diferentes formas, dependiendo de la aplicación en particular. Algunas de las funciones más conocidas son: función trapezoidal, triangular, gaussiana, entre otras [(38)].

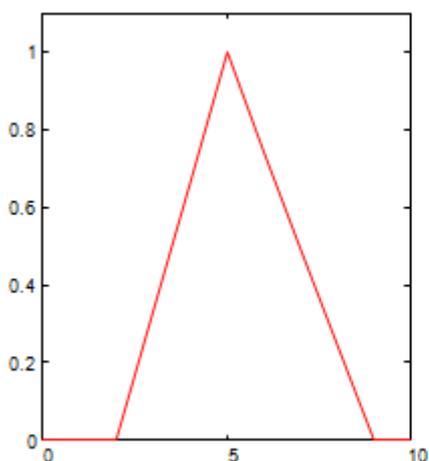


Figura 2.3 Función triangular

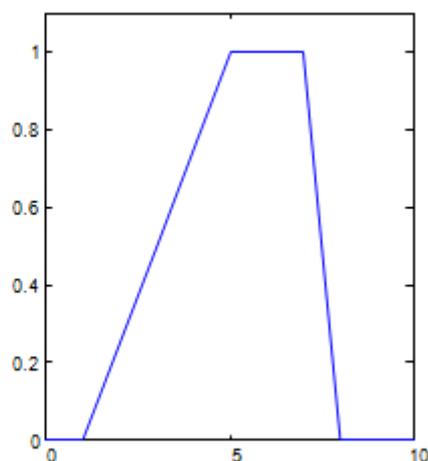


Figura 2.4 Función trapezoidal

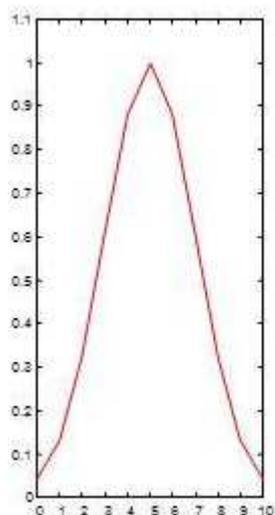


Figura 2.5 Función Gaussiana

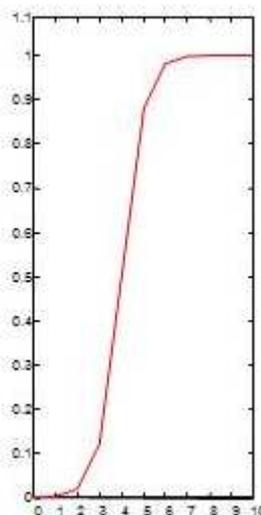


Figura 2.6 Función Sigmoidal

## 2.3 CONTROL DIFUSO

El control difuso fue propuesto por E. H. Mamdani en 1974, diferentes estudios aplicados a la teoría del control difuso han mostrado que el aprendizaje difuso y/o los algoritmos de control difuso son de las áreas más activas y fructíferas de la investigación en los últimos años dentro del campo de la lógica difusa. Regularmente algunas aplicaciones del control difuso a procesos industriales, han producido resultados superiores a sus equivalentes obtenidos por el control clásico [(38)].

La finalidad del control difuso es modificar el comportamiento de la planta a controlar mediante el cambio de una entrada o varias entradas del sistema, de acuerdo a un conjunto de reglas y un proceso de inferencia que permita producir las salidas deseadas. Los sistemas de control difuso se basan en reglas difusas que representan un mecanismo de decisión de control, para ajustar los cambios indeseables provenientes de la planta. Normalmente, los sistemas de control difuso sustituyen o reemplazan las habilidades de un operador humano por un sistema basado en reglas difusas, otra característica de los sistemas difusos es que reemplazan el papel del modelo matemático de ecuaciones diferenciales, por otro modelo que es construido con un número de reglas.

La estructura básica de un sistema de control difuso consiste de cuatro módulos: un fuzzificador que se encarga de acondicionar las señales de entrada y darles un valor difuso, así como un conjunto de reglas que contiene una selección de reglas difusas, un mecanismo de inferencia que define las funciones de membresía usadas en reglas y el método de razonamiento que realiza el procedimiento de inferencia y finalmente un defuzzificador que se encarga de asignar el valor final a la salida en términos de el control de la planta. Figura 2.7.

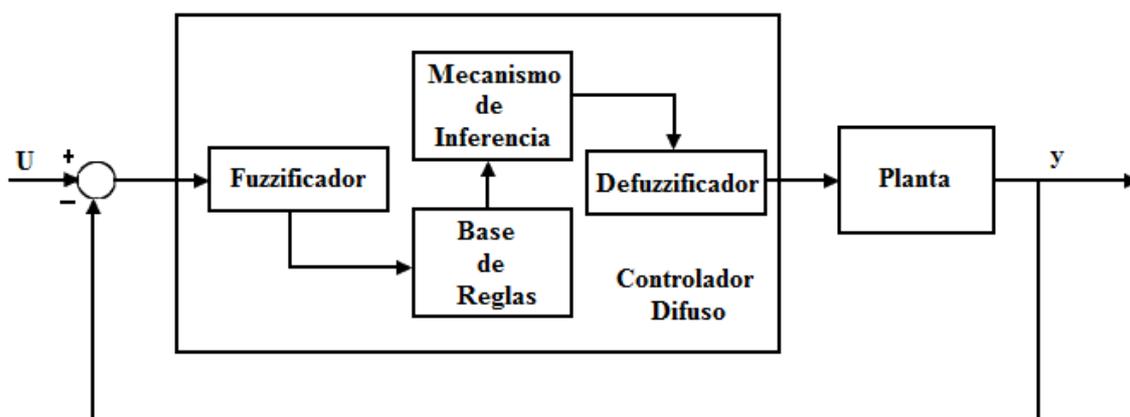


Figura 2.7 Estructura básica de un sistema de control difuso

A continuación examinaremos en detalle los elementos que conforman un controlador difuso.

### 2.3.1 Fuzzificación (Fuzzification)

El proceso de la fuzzificación consiste en una transformación de un dato o de un conjunto clásico a su correspondiente conjunto difuso, por tanto, denotemos por  $U_i^*$ , el conjunto de todos los posibles conjuntos difusos que pueden ser definidos por  $U_i$  y dado  $u_i \in U_i$ , denotemos la transformación difusa de  $u_i$  a un conjunto difuso por  $A_i^{fuz}$ , el cual es definido en el universo del discurso  $U_i$ .

La transformación de un conjunto clásico a un conjunto difuso se produce mediante el uso del operador de fuzzificador [(36)], definido por  $F: U_i \rightarrow U_i^*$  en donde  $F(u_i) = A_i^{fuz}$ .

Regularmente el uso del fuzzificador tipo singleton es el más utilizado para las aplicaciones en área del control automático y este es definido como un conjunto difuso  $A_i^{fuz} \in U_i^*$  con función de membresía:

$$\mu_{A_i^{fuz}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = u_i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.1)$$

Cualquier conjunto difuso con la forma (2.1) en su función de membresía es llamado "singleton" figura 2.8.

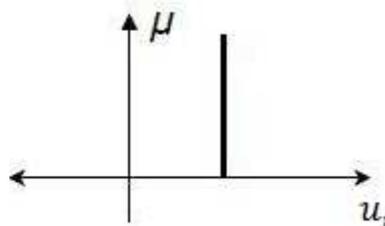


Figura 2.8 Función de membresía del singleton



### 2.3.2 Mecanismo de Inferencia

El mecanismo de inferencia difusa es el núcleo de cualquier controlador difuso. Su comportamiento dinámico es en general caracterizado por un conjunto de reglas difusas de la forma:

$$SI\ x\ es\ A\ ENTONCES\ y\ es\ B \quad (2.2)$$

En donde  $A$  y  $B$  son valores lingüísticos definidos por un conjunto difuso en un universo  $X$  e  $Y$  respectivamente. La cláusula *IF* (Si), es un antecedente con una condición en el dominio de aplicación; la cláusula *THEN* (entonces), es una consecuencia de una acción de control dado al proceso. Con un conjunto de reglas difusas, el mecanismo de inferencia difusa es capaz de derivar una acción de control para un conjunto de valores de entrada. En otras palabras, una acción de control es determinada por las entradas observadas, las cuales representan el estado del proceso a ser controlado mediante el uso de las reglas de control. La expresión "*IF x es A THEN y es B*", la cual se abrevia regularmente como  $A \rightarrow B$ , en esencia, es una relación binaria  $\mathcal{R}$  de las variables  $x$  e  $y$  en el espacio del producto  $X \times Y$ . Existen diversos métodos de inferencia difusa que pueden ser formulados a través de los operadores *t-norma* y *s-norma* para calcular la relación difusa  $\mathcal{R} = A \rightarrow B$ . En general, los siguientes métodos son los más utilizados:

1. Implicación de Dienes-Rescher [(37)]: En esta implicación la regla difusa (2.2) es interpretada como una relación  $\mathcal{R}_D$  en  $A \times B$  con función de membresía

$$\mu_{\mathcal{R}_D}(x, y) = \max[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)] \quad (2.3)$$

2. Implicación Lukasiewics [(37)]: Específicamente, la regla difusa (2.2) es interpretada como una relación difusa  $\mathcal{R}_L$  en  $A \times B$  con función de membresía

$$\mu_{\mathcal{R}_L}(x, y) = \min[1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)] \quad (2.4)$$

3. Implicación de Zadeh [(37)]: Aquí la regla difusa (2.2) es interpretada como una relación difusa  $\mathcal{R}_Z$  en  $A \times B$  con función de membresía

$$\mu_{\mathcal{R}_Z}(x, y) = \max[\min(\mu_A(x), \mu_B(y)), 1 - \mu_A(x)] \quad (2.5)$$

4. Implicación Mamdani [(37)]: La regla difusa (2.2) es interpretada como una relación  $\mathcal{R}_M$  en  $A \times B$  con función de membresía

$$\mu_{\mathcal{R}_M}(x, y) = \min[\mu_A, \mu_B], \quad \text{ó} \quad \mu_{\mathcal{R}_M} = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y) \quad (2.6)$$

Estas cuatro ecuaciones representan diferentes interpretaciones de la regla difusa (2.2), la implicación de Mamdani, es la más utilizada en sistemas difusos.

### 2.3.3 Defuzzificación (Defuzzification)

La defuzzificación es definida como un mapeo de un conjunto difuso  $B$  en  $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}$  (que es la salida de la inferencia difusa) a un elemento de un conjunto clásico  $y_q^{crisp} = y^* \in \mathbb{V}$ . Conceptualmente, la tarea de defuzzificar es especificar un punto, elemento de  $\mathbb{V}$ , que refleje la mejor representación del conjunto difuso  $B$ . A la fecha no existe un algoritmo óptimo para la defuzzificación, sin embargo, algunos métodos de defuzzificación son prácticos. Como es común, a continuación detallaremos dos de las técnicas más utilizadas para la defuzzificación(39).

**1.** El defuzzificador centro de gravedad (COG): Especifica la salida  $y^*$  como el centro del área cubierta por la función de membresía del conjunto difuso  $B$ , y esta es dada por:

$$y^* = y_q^{crisp} = \frac{\sum_{i=1}^R b_i^q \prod_{yq} \mu_{B_q^i}(y_q) dy_q}{\sum_{i=1}^R \prod_{yq} \mu_{B_q^i}(y_q) dy_q} \quad (2.7)$$

en donde  $R$  es el número de reglas difusas,  $b_i^q$  es el centro del área de la función de membresía de  $B_q^p$  asociado con el conjunto difuso implicado  $B_q^i$  para la  $i$  – ésima regla  $(j, k, \dots, l; p, q)_i$ , y

$$\prod_{yq} \mu_{B_q^i}(y_q) dy_q \quad (2.8)$$

denota el área bajo  $\mu_{B_q^i}(y_q)$ . Note que el sistema difuso debe ser definido tal que

$$\sum_{i=1}^R b_i^q \prod_{yq} \mu_{B_q^i}(y_q) dy_q \neq 0 \quad (2.9)$$

Para toda  $u_i$ , o la salida  $y_q^{crisp}$ , no será definida apropiadamente. Este valor no debe

ser cero si existe una regla seleccionada para cada posible combinación de las entradas del sistema difuso y si todo el conjunto difuso de las consecuencias tiene área distinta de cero.

**2.** Defuzzificador promedio de centros: El defuzzificador promedio de centros determina la salida clásica  $y_q^{crisp}$  usando los centros de cada salida de las funciones de membresía. El valor óptimo o máximo de cada conclusión es representada mediante el conjunto difuso implicado:

$$y_q^{crisp} = \frac{\sum_{i=1}^R b_i^q \sup_{yq} \{ \mu_{B_q^i}(y_q) \}}{\left\{ \sum_{i=1}^R \sup_{yq} \{ \mu_{B_q^i}(y_q) \} \right\}} \quad (2.10)$$



Donde el "sup" denota el supremo ( $\sup_x\{\mu(x)\}$ ) puede ser simplemente pensado como al valor más alto de  $\mu(x)$  y  $b_i^q$  es el centro del área de la función de membresía de  $B_q^p$  asociado con el conjunto de implicación difusa  $B_q^i$  para la  $i$  –ésima regla  $(j, k, \dots, l; p, q)_i$ . Note que el sistema difuso puede ser definido como:

$$\sum_{i=1}^R b_i^q \sup_{y_q} \{\mu_{B_q^i}(y_q)\} \neq 0 \quad (2.11)$$

Para toda  $u_i$ , en donde el  $\sup_{y_q} \{\mu_{B_q^i}(y_q)\}$  es regularmente fácil de calcular si  $\mu_{B_q^i}(y_q) = 1$  para al menos un  $y_q$ , entonces para varias estrategias de inferencias podemos utilizar los cálculos correspondientes para la  $i$  –ésima regla  $(j, k, \dots, l; p, q)_i$  por lo que el conjunto difuso de implicaciones  $B_q^i$  es definido en su función de membresía como

$$\mu_{B_q^i}(y_q) = \mu_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) * \mu_{B_q^p}(y_q) \quad (2.12)$$

Y obtener

$$\sup_{y_q} \{\mu_{B_q^i}(y_q)\} = \mu_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \quad (2.13)$$

Por lo tanto, la ecuación para la defuzzificación centro promedio esta dada por

$$y_q^{crisp} = \frac{\sum_{i=1}^R b_i^q \mu_i(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(u_1, u_2, \dots, u_n)} \quad (2.14)$$

Donde se debe asegurar que  $\sum_{i=1}^R \mu_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0$  para toda  $u_i$ .

## 2.4 TIPOS DE MODELOS DIFUSOS

En esta sección se presentan los modelos difusos de tipo Mamdani y Takagi-Sugeno, los cuales han sido utilizados exitosamente en una gran variedad de aplicaciones en la comunidad del control difuso. Aunque, el objetivo del controlador difuso Mamdani es el de representar a un exitoso operador humano, el controlador difuso de tipo Takagi-Sugeno sugiere ser más eficiente en cálculos y en métodos de adaptación.

### 2.3.1. Mamdani

En esta subsección definiremos la construcción de un sistema difuso tipo Mamdani. Primero, considérese una base de reglas difusas del tipo MISO (Múltiples entradas-Una salida) descritas por (2.15).

$$\begin{aligned}
 R^1: & \text{IF } u_1 \text{ es } A_1^j \text{ y } u_2 \text{ es } A_2^k \text{ y, ..., y } u_n \text{ es } A_n^l \text{ THEN } y_1 \text{ es } B_1^t \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 R^j: & \text{IF } u_1 \text{ es } A_1^j \text{ y } u_2 \text{ es } A_2^k \text{ y, ..., y } u_n \text{ es } A_n^l \text{ THEN } y_j \text{ es } B_j^s \quad (2.15) \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 R^m: & \text{IF } u_1 \text{ es } A_1^j \text{ y } u_2 \text{ es } A_2^k \text{ y, ..., y } u_n \text{ es } A_n^l \text{ THEN } y_m \text{ es } B_m^t
 \end{aligned}$$

En donde  $A_i^j, A_2^k, \dots, A_n^l$  y  $B_1^s$  para  $R^j$ , representan los valores lingüísticos correspondientes [(36)].

Si la entrada al sistema difuso es dado por

$$u_i = x_i^* \quad (2.16)$$

entonces, haciendo uso del fuzzificador singleton

$$\mu = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i = x_i^* \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.17)$$

se tiene que

$$(u_i \text{ es } A_i^j) \rightarrow \mu_{A_i^j}(x_i^*) \quad (2.18)$$

en donde  $A_i^j$  denota el valor lingüístico correspondiente a la  $i$  – ésima entrada de la  $j$  – ésima regla difusa  $R^j$  correspondiente a la base de reglas difusas descritas por (2.15). Al hacer uso de la ecuación (2.16), la  $j$  – ésima regla difusa de la base de reglas (2.15) es representa por:

$$R^j: \text{IF } x_1^* \text{ es } A_1^j \text{ y } x_2^* \text{ es } A_2^k \text{ y, ..., y } x_n^* \text{ es } A_n^l \text{ THEN } y_j \text{ es } B_j^s \quad (2.19)$$

En donde la operación difusa de la  $j$  – ésima regla (2.19) es definida por

$$\prod_i^n \mu_{A_i^j}(x_i^*) \quad (2.20)$$



El motor de inferencia difusa que utiliza esta base de reglas difusas es el mecanismo de inferencia del producto o implicación de Mamdani, por lo que para la  $j$  –ésima regla se tiene que:

$$\prod_i^n \mu_{A_i}(x_i^*) \mu_{\tilde{B}_j}(y) \quad (2.21)$$

y la  $l$  –regla  $p$  se obtiene mediante el operador “OR”

$$\mu_p = \max_{i=1}^M \left[ \prod_i^n \mu_{A_i}(x_i^*) \mu_{\tilde{B}_{j=1}}(y) \right] \quad (2.22)$$

en donde el índice  $M$  representa el número de reglas para (2.15) y  $B_j^s$  denota el valor lingüístico correspondiente a la salida  $y_j$  de la  $j$  –ésima regla difusa  $R^j$ , con  $j = l$ .

El método de defuzzificación puede ser obtenido suponiendo que  $\bar{y}_j$  es centro de  $\tilde{B}_j$ , la altura de la  $l$  –regla del conjunto difuso es

$$\prod_i^n \mu_{A_i}(x_i^*) \mu_{\tilde{B}_j}(\bar{y}_j) \quad (2.23)$$

y

$$\mu_{\tilde{B}_j}(\bar{y}_j) = 1 \quad (2.24)$$

Es un conjunto difuso normalizado, sustituyendo la ecuación (2.24) en la ecuación (2.23) se obtiene que el centro promedio es dado por.

$$y^* = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{y}_j (\prod_i^n \mu_{A_i}(x_i^*))}{\sum_{j=1}^m (\prod_i^n \mu_{A_i}(x_i^*))}$$

**Teorema 2.1** Sistemas difusos con base de reglas difusas, mecanismos de inferencia tipo producto, fuzzificador singleton y defuzzificador centro promedio poseen el siguiente mapeo no lineal [(34)].

$$y^{crisp} = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{y}_j (\prod_i^n \mu_{A_i}(x_i))}{\sum_{j=1}^m (\prod_i^n \mu_{A_i}(x_i))} \quad (2.25)$$



### 2.3.2. Takagi-Sugeno

El modelo difuso de Takagi-Sugeno (también conocido como modelo TKS) fue propuesto por Takagi, Sugeno y Kang, en un esfuerzo para formalizar un método sistemático para generar reglas difusas a partir de un conjunto de datos de entradas y salidas de un sistema lineal y no lineal [(40)].

Este enfoque permite aproximar un sistema no lineal mediante un conjunto de modelos lineales locales. Un modelo difuso dinámico TS se describe por un conjunto de reglas "IF - THEN" como sigue:

La regla "i" del modelo difuso TS es de la siguiente forma, en donde CFS y DFS denotan el sistema difuso continuo y el sistema difuso discreto, respectivamente [(41)].

#### Sistema Difuso Continuo (CFS)

Modelo de la regla i:

$$\text{SI } z_1(t) \text{ es } M_1^i \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_p^i \text{ ENTONCES } \sum_i: \begin{cases} \dot{x}(k) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases}, \quad (2.26) \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

#### Sistema Difuso Discreto (DFS)

Modelo de la regla i:

$$\text{SI } z_1(t) \text{ es } M_1^i \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_p^i \text{ ENTONCES } \sum_i: \begin{cases} \dot{x}(k+1) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (2.27)$$

$$i = 1, 2, \dots, r$$

Donde,  $M_{ij}$  es una selección difusa y  $r$  es el numero de reglas;  $x(t) \in R^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in R^m$  es el vector de entrada,  $y(t) \in R^q$  es el vector de salida,  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $B_i \in R^{n \times m}$ , y  $C_i \in R^{q \times n}$ ;  $z_i(t), \dots, z_p(t)$  estas son las variables que pueden ser función de las variables de estado, disturbios externos y/o tiempo. Nosotros utilizaremos  $z(t)$  para denotar el vector que contiene todos los elementos individuales  $z(t), \dots, z_p(t)$ , también se asume que en este capítulo, las variables no son funciones de la variable de entrada  $u(t)$ . Estas suposiciones son necesarias para evitar un proceso complicado de defusificación para los controladores difusos.



Tenga en cuenta que las condiciones de estabilidad derivada de este trabajo pueden ser aplicadas exactamente para el caso en donde variables de variables son funciones de las variables de entrada  $u(t)$ . Cada ecuación lineal representada por  $A_i x(t) + B_i u(t)$  es llamada "subsistema".

Entonces a partir de  $(x(t), u(t))$ , la salida final para el sistema difuso es deducida de la siguiente manera:

CFS

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\},\end{aligned}\tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t).\end{aligned}\tag{2.29}$$

DFS

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\},\end{aligned}\tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t).\end{aligned}\tag{2.31}$$



Donde

$$z(t) = [z_1(t)z_2(t) \dots z_p(t)],$$

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)),$$

$$z(k) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \quad (2.32)$$

para toda  $t$ . El termino  $M_{ij}(z_j(t))$  es el grado de la función de membrecía para  $z_j(t)$  en  $M_{ij}$

Ya que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0, \\ \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ w_i(z(t)) \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Por lo tanto

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) > 0, \\ \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ h_i(z(t)) \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

para toda  $t$ .

### 2.3.2.1 Compensación Distribuida en Paralelo

La técnica de control conocida como composición distribuida en paralelo o PDC fue introducida por Wang en 1995, y provee un procedimiento de diseño de un controlador a partir del modelo difuso de la planta. Además resulta una forma sistemática y eficiente de controlar sistemas no lineales. La idea consiste en compensar cada uno de los subsistemas propuestos por las reglas difusas utilizando técnicas de control lineal, y luego inferir una acción de control global a partir de reglas difusas que tengan las mismas premisas que las del modelo difuso y que propongan cada una la compensación correspondiente [(42)].

Dado el modelo difuso TS de una planta continúa

$$\text{SI } \tilde{x}_1 \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } \tilde{x}_n \text{ es } M_{in} \text{ ENTONCES } F(x) = A_i x + B_i u$$

la acción de control global  $u(x)$  es la inferencia del sistema difuso de TS

$$\text{SI } \tilde{x}_1 \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } \tilde{x}_n \text{ es } M_{in} \text{ ENTONCES } u(x) = K_i x$$

donde las matrices  $K_i$  son tales que estabilizan el  $i$ -ésimo subsistema, calculadas según la teoría de control lineal por variable de estado.

### 2.3.2.2 Análisis de la Estabilidad

Una de las características más importantes de un controlador es su estabilidad, en el sentido de asegurar que tanto la acción de control como la respuesta de la planta se mantengan acotadas en el tiempo, es decir, no aumenten indefinidamente. Este es uno de los asuntos más importantes de la teoría de control lineal.

**Definición 2.9** Un sistema es BIBO-estable (del inglés Bounded-Input-Bounded-Output) si para cualquier entrada  $u(t)$  acotada la salida  $y(t)$  también se mantiene acotada para todo tiempo  $t$  [(41)].

$$\forall |u| < M \rightarrow |y| < L \quad \forall t$$

**Teorema 2.2** Un sistema lineal e invariante en el tiempo SISO continuo es BIBO-estable si su función de transferencia  $G(s)$  tiene todos sus polos en el semiplano izquierdo del plano complejo  $s$ , excluyendo el eje imaginario [(34)].

**Teorema 2.3** Un sistema lineal e invariante en el tiempo MIMO es BIBO-estable si todos los autovalores de la matriz  $[A + BK]$  tienen componente real estrictamente negativa [(34)].



Si bien las matrices de ganancia  $K_i$  deben ser diseñadas de forma tal de compensar cada subsistema, de allí la palabra paralelo en la sigla PDC; en forma independiente, la estabilidad global del sistema a lazo cerrado depende de que exista una cierta relación entre  $K_i$  y  $K_j$  cuando  $i \neq j$ . En otras palabras, el hecho de que cada uno de los subsistemas sea estable no garantiza la estabilidad global del sistema.

Dentro de las muchas concepciones que podemos tener de la palabra estabilidad, nos mantendremos en línea con la llamada *estabilidad de Lyapunov*, que ciertamente es diferente del concepto de estabilidad BIBO de la definición 2.9.

**Definición 2.10** Un punto fijo  $x^*$  es estable si para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que, dada una condición inicial  $x_0$  que satisfaga  $|x^* - x_0| < \delta(\epsilon)$ , se cumpla

$$|x(t) - x^*| < \epsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Más aún, el punto fijo es asintóticamente estable si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*,$$

para una condición inicial  $x_0$  tal que  $|x^* - x_0| < \eta$ . Si  $\eta \rightarrow \infty$ , entonces el punto  $x^*$  es global y asintóticamente estable.

**Definición 2.11** Dado un sistema dinámico

$$\dot{x} = F(x)$$

y un punto fijo  $x^*$ , una función  $V(x): U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se llama Función de Lyapunov si cumple simultáneamente

$$V(x) \begin{cases} = 1, & \text{si } x = x^* \\ > 0, & \text{si } x \neq x^* \end{cases}$$

y

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(x) \leq 0, \quad (2.35)$$

en todo dominio de definición  $U$ .

**Teorema** (de Lyapunov) Un punto fijo  $x^*$  es estable en  $U$  si existe una función de Lyapunov  $V(x)$ . Más aún, si la desigualdad (2.35) es rigurosa, el punto fijo es asintóticamente estable. El teorema de Lyapunov nos da una base para probar la estabilidad de un sistema difuso de Takagi-Sugeno [(34)].



**Teorema 2.3.** Es condición suficiente para que el origen de un sistema dinámico de Takagi-Sugeno

$$\text{SI } \tilde{x}_1 \text{ es } M_{i1} \text{ y } \cdots \text{ y } \tilde{x}_n \text{ es } M_{in} \text{ ENTONCES } \dot{x} = A_i x$$

Sea global y asintóticamente estable, la existencia de una matriz definida positiva  $P$  tal que todas las matrices de prueba

$$T_i = PA_i + A_i^T P$$

sean definidas negativas.

*Demostración.* Dado que el sistema difuso de Takagi-Sugeno es homogéneo, el origen es un punto fijo. Si  $P$  es una matriz definida positiva, entonces

$$V(x) = x^T P x$$

Cumple la primera condición para ser una función de Lyapunov para el origen, en  $\mathbb{R}^n$ . Suponiendo que las intensidades de disparo son tales que  $\sum w_i = 1$  para simplificar la notación, la derivada temporal de  $V(x)$  de la función de Lyapunov es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x \\ &= x^T P \left( \sum w_i A_i \right) x + \left[ \left( \sum w_i A_i \right) x \right]^T P x \end{aligned}$$

Dado que  $0 < w_i \leq 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq x^T P \left( \sum A_i \right) x + \left[ \left( \sum A_i \right) x \right]^T P x \\ &\leq x^T P \left( \sum A_i \right) x + x^T \left( \sum A_i \right)^T P x \\ &\leq \sum x^T P A_i x + x^T A_i^T P x \\ &\leq \sum x^T [P A_i + A_i^T P] x \end{aligned}$$

Si se cumple la hipótesis del teorema, resulta

$$x^T [P A_i + A_i^T P] x < 0$$

Luego  $\dot{V}(x) < 0$  y el sistema es global y asintóticamente estable por el teorema 6.2.



Notar que el teorema 6.3 sólo da una condición suficiente pero no necesaria para la estabilidad. En efecto, por más que mostremos que no existe una matriz definida positiva  $P$  que satisfaga las condiciones del teorema, todavía puede existir otra función de Lyapunov, tal vez no definida en todo  $\mathbb{R}^n$  diferente a la propuesta que sí satisface el teorema 6.2.

Para un sistema difuso dado, en general no es sencillo encontrar una matriz  $P$ , si es que efectivamente existe y que cumpla las condiciones de estabilidad. Sólo en casos triviales es posible obtener una matriz  $P$  por simple inspección. En todo caso, este problema se suele atacar numéricamente utilizando un método de optimización convexa llamado *Linear Matrix Inequalities* o LMI,

En particular nos interesa estudiar la estabilidad de una planta modelada en forma difusa como

$$\text{SI } \tilde{x}_1 \text{ es } M_{i1} \text{ y } \cdots \text{ y } \tilde{x}_n \text{ es } M_{in} \text{ ENTONCES } \dot{x} = A_i x + B_i u$$

Sobre la cual aplicamos un controlador difuso de Takagi-Sugeno

$$\text{SI } \tilde{x}_1 \text{ es } M_{i1} \text{ y } \cdots \text{ y } \tilde{x}_n \text{ es } M_{in} \text{ ENTONCES } u = K_i x$$

Nuevamente normalizando según  $\sum w_i = 1$ , la evolución temporal a lazo cerrado es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^r w_i(x) [A_i x + B_i u] \\ &= \sum_{i=1}^r w_i(x) \left[ A_i x + B_i \sum_{j=1}^r w_j(x) K_j x \right] \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(x) w_j(x) [A_i + B_i K_j] x \end{aligned}$$

Aplicando el teorema 6.3 tenemos una condición suficiente para probar la estabilidad del sistema a lazo cerrado.

**Corolario 2.1.** Un sistema dinámico de Takagi-Sugeno a lazo cerrado es estable

Si existe una matriz definida positiva  $P$  tal que todas las matrices de prueba

$$T_{ij} = P(A_i + B_i K_j) + (A_i + B_i K_j)^T P$$

Son definidas negativas.



## CAPÍTULO 3

# TEORÍA DE REGULACIÓN DIFUSA



## INTRODUCCIÓN.

### 3.1 General

En este capítulo se extiende al contexto no lineal de los conceptos utilizados anteriormente en el cual el modelo difuso de Takagi-Sugeno (TS) y la teoría de regulación no lineal son combinados para construir un controlador capaz de tomar la salida de la planta difusa hacia la señal de referencia generada por un sistema externo. El modelo difuso permite que el controlador sea modelado por medio de técnicas numéricas donde la región estable resultante es más grande que la obtenida cuando un controlador lineal simple es usado para estabilizar los sistemas no lineales.

Por otra parte, como se sabe que un regulador difuso construido para controladores lineales no resuelve el problema de regulación en general, es por eso que en este capítulo el regulador no lineal completo es considerado. Es por eso que en este capítulo se analiza el regulador difuso basado en el diseño lineal.

En [(41)] se presenta como el controlador difuso conocido como *compensador distribuido en paralelo* (PDC), puede ser diseñado bajo técnicas de LMI (*Desigualdades Matriciales Lineales*).

Entonces, en este capítulo el regulador para el sistema difuso no lineal, es desarrollado usando una combinación de la teoría de regulación no lineal y el modelo difuso de Takagi-Sugeno. En [(43)] y [(44)] se presentan algunos parámetros relacionados con este procedimiento, donde el controlador final es construido del regulador lineal diseñado para cada subsistema en el modelo difuso Takagi-Sugeno. En [(17)] se muestra el desarrollo del controlador, el cual solo alcanza el seguimiento exacto en algunos casos particulares.

Se remite al lector a [(17)], donde los modos de deslizamiento se emplean para mejorar el rendimiento del regulador difuso, construido a partir de controladores lineales.

El modelo difuso de TS solo es usado para tomar ventaja de los resultados de la estabilización presentados en [(41)], el cual da una región de atracción mayor que la obtenida por un estabilizador lineal simple. Para satisfacer la condición de la regulación, los componentes del controlador que alcanzan un error cero, pueden ser diseñados en la planta difusa no lineal y no sólo en los subsistemas locales.



## 3.2 TEORÍA DE REGULACIÓN DIFUSA

### 3.2.1 Antecedentes

Hoy en día es bien conocido que una buena aproximación para los sistemas no lineales es proporcionada por el llamado modelo difuso Takagi-Sugeno. Un modelo de esta manera es definido por la selección adecuada de un conjunto de subsistemas lineales, de acuerdo con las reglas asociadas con algunos conocimientos físicos y alguna caracterización lingüística de las propiedades de los sistemas.

Estos subsistemas lineales propiamente describen, al menos localmente el comportamiento del sistema no lineal para una región predeterminada del espacio de estado.

Para satisfacer la condición de la regulación, los componentes del controlador que alcanzan un error cero pueden ser diseñados en la planta difusa no lineal y no solo en los subsistemas locales. Esta es la principal diferencia entre la teoría de regulación difusa y los trabajos previos de regulación.

Considerar el sistema no lineal dado por:

$$\dot{x} = f(x, w, u) \quad \text{Planta} \quad (3.1)$$

$$\dot{w} = s(w) \quad \text{Exosistema} \quad (3.2)$$

$$e = h(x, w) \quad \text{Error} \quad (3.3)$$

Donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y es el vector de estados de la planta,  $w \in W \subset \mathbb{R}^r$  y es el vector de estados del exosistema que genera la referencia y/o la señal de perturbación y  $u \in \mathbb{R}^m$  y es la señal de entrada al sistema.

La ecuación (3.3) describe la salida del error de seguimiento  $e \in \mathbb{R}^m$ , el cual es usualmente dado por la diferencia entre las salidas del sistema medidas de la planta y la señal de referencia, es decir.

$$h(x, w) = c(x) - q(w).$$

Donde  $c(x)$  es la salida de la planta y  $q(w)$  es la salida del exosistema.

Esto es considerado como la salida del sistema que depende o coincide exactamente con el estado  $x$ . Se asume que  $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ ,  $s(\cdot)$  y  $h(\cdot, \cdot)$  son funciones analíticas, con  $s(0) = 0$ ,  $f(0, 0, 0) = 0$  y  $h(0, 0) = 0$ .



El modelo de Takagi-Sugeno para el sistema (3.1)-(3.3) esta dado por [(37)]:

Modelo

Regla  $i$ :

$$\text{SI } z_1 \text{ es } M_1^i \text{ y } z_2 \text{ es } M_2^i \text{ y } \dots \text{ y } z_p \text{ es } M_p^i \text{ ENTONCES } \sum i: \begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u + P_i w \\ \dot{w} = s(w) \\ e_i = C_i x - q(w), \quad i = 1 \dots r \end{cases}$$

Donde  $r$  es el número de reglas en el modelo. Los conjuntos  $M_j^i$  son conjuntos difusos definidos sobre la base de conocimientos previos de la dinámica del sistema. Las matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $P_i$ ,  $C_i$ ,  $S$  y  $Q$  son obtenidas para linealizar el sistema no lineal alrededor de algunos puntos de operación  $(x, w, u) = (x^i, w^i, u^i)$ , es decir.

$$A_i = \left. \frac{\partial f(x, w, u)}{\partial x} \right|_{(x^i, w^i, u^i)}, \quad B_i = \left. \frac{\partial f(x, w, u)}{\partial u} \right|_{(x^i, w^i, u^i)},$$

$$P_i = \left. \frac{\partial f(x, w, u)}{\partial w} \right|_{(x^i, w^i, u^i)}, \quad C_i = \left. \frac{\partial h(x, w)}{\partial x} \right|_{(x^i, w^i)},$$

$$S = \left. \frac{\partial s(w)}{\partial w} \right|_{(w^i)}, \quad Q = \left. \frac{\partial h(x, w)}{\partial w} \right|_{(x^i, w^i)}.$$

El modelo no lineal difuso de TS es dado por:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z) [A_i x + B_i u + P_i w], \quad (3.5)$$

$$\dot{w} = s(w), \quad (3.6)$$

$$e = \sum_{i=1}^r h_i(z) C_i x - q(w), \quad (3.7)$$

Donde  $h_i(z)$  es el peso normalizado para cada regla. Estos pesos dependen de la función de membresía para la variable premisa  $z_j$  en  $M_j^i$ .



$$h_i(z) = \frac{\bar{w}_i(z)}{\sum_{i=1}^r \bar{w}_j(z)}, \quad (3.8)$$

$$\bar{w}_i(z) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j), \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(z) = 1, \quad (3.10)$$

$$h_i(z) \geq 0. \quad (3.11)$$

Con  $z = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_p]$ ,  $i = 1 \dots r$ ,  $j = 1 \dots p$  y  $z_j$  dependiendo de  $x$ .

Así, el Problema de Regulación Difusa no-lineal (NFRP) es definido como el problema de encontrar, si es posible un controlador.

$$u = \alpha(x, w) \quad (3.12)$$

De tal manera que,

FS) El punto de equilibrio  $x = 0$  del sistema retroalimentado sin señal externa.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z) [A_i x + B_i \alpha(x, 0)],$$

es asintóticamente estable

FR) La solución del sistema retroalimentado (3.5)-(3.7) y (3.12) satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0,$$

cuando la planta este bajo los efectos del exosistema.



Antes de proceder con la regulación difusa, se recuerda que, de acuerdo a la teoría de regulación de Isidori, para el sistema no lineal (3.1)-(3.3) cuya linealización es alrededor de  $x = 0$  es dado por

$$\dot{x} = Ax + Bu + Pw, \quad (3.13)$$

$$\dot{w} = s(w), \quad (3.14)$$

$$e = Cx - q(w). \quad (3.15)$$

El problema del regulador no lineal (NRP) consiste en encontrar un controlador.

$$u = \alpha(x, w) \quad (3.16)$$

De tal manera el sistema retroalimentado

$$\dot{x} = Ax + B\alpha(x, 0)$$

Tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable, y la solución de sistema retroalimentado (3.13)-(3.15) y (3.16) satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

En [(5)] se presenta el siguiente teorema que da las condiciones de existencia para la solución del (NRP).

**Teorema 3.1:** Supongamos lo siguiente.

- H1) El exosistema  $\dot{w} = s(w)$  es Poisson estable,
- H2) Existe una ganancia  $K$  de tal manera que la matriz  $A + BK$  es estable
- H3) Existen mapeos  $x_{ss} = \pi(w)$ ,  $u_{ss} = \gamma(w)$  con  $\pi(0)=0$  y  $\gamma(0) = 0$  que satisface.

$$\frac{\partial \pi(w)}{\partial w} s(w) = f(\pi(w), w, \gamma(w)), \quad (3.17)$$

$$0 = h(\pi(w), w). \quad (3.18)$$

Entonces, el problema de regulación no lineal puede ser resuelto y el controlador está dado por.

$$u = K(x - \pi(w)) + \gamma(w). \quad (3.19)$$



Se puede ver fácilmente que, para el caso lineal los mapeos  $x_{ss} = \pi(w)$  y  $u_{ss} = \gamma(w)$  se convierte en  $x_{ss} = \Pi w$  y  $u_{ss} = \Gamma w$  respectivamente, por lo tanto las condiciones (3.17)-(3.18) se reducen a las ecuaciones lineales matriciales de Francis:

$$\Pi S = A \Pi + B \Gamma + P, \quad (3.20)$$

$$0 = C \Pi - Q. \quad (3.21)$$

En este punto se hace hincapié en la señal de control para (3.5)-(3.7) dado no es simplemente la suma ponderada de los reguladores locales, es decir.

$$u = \sum_{i=1}^r h_i(z) [K_i x + L_i w]$$

Donde

$$L = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left[ \Gamma_i x - \sum_{j=1}^r h_j(z) \Pi j w \right]$$

Sino un controlador de la forma (3.19), donde la ganancia  $K$  sera remplazada por un estabilizador difuso y los mapeos  $\pi(w)$  y  $\gamma(w)$  son los que solucionan el problema de regulación difuso no-lineal para el modelo difuso global (3.5)-(3.7). Es decir en la siguiente sección no serán diseñados varios reguladores locales, solo uno totalmente no lineal.

### 3.2.2 Problema de Regulación Difuso No-lineal (NFRP)

A continuación se considerará el modelo difuso definido por (3.5)-(3.7). Para resolver el problema (NFRP), se propone el diseño de un controlador difuso basado en el enfoque Tanaka's PDC [(41)], y la solución al problema de regulación no-lineal para (3.5)-(3.7) [(14)].

De esta manera, el resultado del controlador total esta dado por:

$$u = \sum_{i=1}^r h_i(z) K_i [x - \pi(w)] + \gamma(w) \quad (3.22)$$

El siguiente teorema da las condiciones para la existencia de la solución a NFRP.

**TEOREMA 3.2:** Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

**FH1)** el exosistema  $\dot{w} = s(w)$  y Poisson es estable,

**FH2)** existe una matriz  $K_i$  y  $P$  tal que.

$$A_{ii}^{-T}P + P\bar{A}_{ii} < 0, \quad (3.23)$$

para todo  $i = 1 \dots r$  y

$$\left(\frac{\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji}}{2}\right)P + P\left(\frac{\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji}}{2}\right) \leq 0 \quad (3.24)$$

para  $i < j \leq r$ , son asintóticamente estables con

$$\bar{A}_{ij} = (A_i + B_i K_j). \quad (3.25)$$

**FH3)** existe mapeos  $x_{ss} = \pi(w)$ ,  $u_{ss} = \gamma(w)$  con  $\pi(0) = 0$  y  $\gamma(0) = 0$

que satisfacen

$$\frac{\partial \pi(w)}{\partial w} s(w) = \sum_{i=1}^r h_i(z) [A_i \pi(w) + B_i \gamma(w) + P_i w], \quad (3.26)$$

$$0 = \sum_{i=1}^r h_i(z) C_i \pi(w) - q(w), \quad (3.27)$$

entonces el **NFRP** es resuelto.

La condición FH1) se incluye para asegurar que la señal de referencia no tiende a cero a medida que aumenta el tiempo, y por lo tanto el problema de regulación no se convierta en una estabilización única. Suposición FH2) garantiza la existencia del controlador difuso  $\alpha(x, 0)$  es definido como:

$$\alpha(x, 0) = \sum_{i=1}^r h_i(z) K_i x.$$

De tal manera que

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z) [A_i x + B_i \alpha(x, 0)],$$

es asintóticamente estable



Al analizar la propiedad del error en la regulación de estado estacionario se definió como  $e_{ss} = x - \pi(w)$  y al derivarlo respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{e}_{ss} = \dot{x} - \frac{\partial \pi(w)}{\partial w} s(w)$$

$$= \sum_{i=1}^r h_i(z) \left[ A_i + B_i \sum_{i=1}^r h_i(z) K_i \right] e_{ss} + \sum_{i=1}^r h_i(z) [A_i \pi(w) + B_i \gamma(w) + P_i w] - \frac{\partial \pi(w)}{\partial w} s(w)$$

Mientras que, el error de seguimiento esta dado por

$$e = \sum_{i=1}^r h_i(z) C_i x - q(w)$$

Que en términos del estado estacionario el error se convierte en

$$e = \sum_{i=1}^r h_i(z) C_i x (e_{ss} + \pi(w)) - q(w)$$

De esta manera, resulta claro que el seguimiento asintótico de la referencia en el  $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$ , se logra cuando FH2) Y FH3) se cumplen.

En este último resultado la condición de estabilidad se basa en el diseño de un controlador local donde posteriormente se encuentra una matriz P de tal manera que la condición FH2) se cumple.

Sin embargo por medio de las desigualdades matriciales lineales (LMIs), estas técnicas se pueden llevar a cabo al mismo tiempo. Esto simplifica el diseño en general. El lector puede consultar [(45)]. Donde se da un análisis completo de la técnica de las LMIs y se muestra como este enfoque numérico se puede aplicar para obtener la solución a NFRP.

**TEOREMA 3.3** Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

**FLH1)** El exosistema  $\dot{w} = s(w)$  es Poisson estable,

**FLH2)** Las siguientes LMIs son factibles

$$QA_i^T + M_i^T B_i^T + A_i Q + B_i M_i < 0 \quad (3.28)$$

Para todo  $i = 1 \dots r$ ,



y

$$o > \left( \frac{QA_i^T + M_j^T B_i^T + QA_j^T + M_i^T B_j^T}{2} \right) + \left( \frac{A_i Q + B_i M_j + A_j Q + B_j M_i}{2} \right) \quad (3.29)$$

para  $i < j \leq r$ ,

**FLH3)** Existen mapeos  $x_{ss} = \pi(w)$ ,  $u_{ss} = \gamma(w)$  con  $\pi(0) = 0$ , y  $\gamma(0) = 0$  y

satisface las condiciones.

$$\frac{\partial \pi(w)}{\partial w} s(w) = \sum_{i=1}^r h_i(z) [A_i \pi(w) + B_i \gamma(w) + P_i w],$$

$$0 = \sum_{i=1}^r h_i(z) C_i \pi(w) - q(w),$$

Entonces el **NFRP** es resuelto. Por otra parte, las matrices  $P$  y  $K_i$  son dadas por  $P = Q^{-1}$  y  $K_i = M_i P$  respectivamente.

Si consideramos una matriz  $K_i$  y  $P$  como incógnitas, entonces se puede ver fácilmente que las desigualdades (3.23) y (3.24) son no lineales. Sin embargo pueden ser transformadas a desigualdades matriciales lineales. Esto se puede hacer pre multiplicando y pos multiplicando por  $P^{-1}$ . Las expresiones del resultado (3.28) y (3.29) son desigualdades matriciales que pueden tratadas por métodos numéricos altamente conocidos como la técnica LMIs. Las nuevas incógnitas son  $Q = P^{-1}$  y  $M_i = K_i P^{-1}$ .

A continuación se muestran algunos resultados de la regulación difusa junto con el modelo difuso los cuales son presentados para la sincronización de sistemas difusos descritos por Takagi-Sugeno TS, en el cual el controlador difuso se diseña apartir de controladores lineales locales, esto muestra que el error de seguimiento es acotado si el controlador lineal es diseñado apropiadamente.



Los resultados presentados hasta hora sobre la existencia de mapeos en estado estable no lineal  $x_{ss} = \pi(w)$  y  $u_{ss} = \gamma(w)$ . Realmente algo interesante es ver si estos mapeos en estado estacionario también pueden ser sados en términos de la funciones de membresía, es decir, si  $\pi(w)$  y  $\gamma(w)$  se pueden escribir como:

$$\pi(w) = \left( \sum_{i=1}^r \mu_i(w) \Pi_i \right) w, \quad \gamma(w) = \left( \sum_{i=1}^r \mu_i(w) \Gamma_i \right) w \quad (3.30)$$

Con  $\Pi_i$  y  $\Gamma_i$  calculadas a partir del problema de regulación de salida respectivamente de cada subsistema lineal en el modelo difuso TS, es decir

Para el subsistema descrito por:

Regla de la planta  $i$ :

$$\text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{1i} \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_{pi} \text{ ENTONCES } \sum_i \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + P_i w(t) \\ \dot{w}(t) = s(w)(t) \\ e_i(t) = C_i x(t) - R_i w(t), \quad i = 1 \dots r. \end{array} \right.$$

En otras palabras, la solución del problema del regulador de estos subsistemas se deduce de la existencia de una solución de las ecuaciones matriciales:

$$\Pi_i S_i = A_i \Pi_i + B_i \Gamma_i + P_i \quad (3.31)$$

$$0 = C_i \Pi_i - R_i \quad (3.32)$$

Para cada subsistema, desafortunadamente esto no es verdad en general, como se muestra a continuación.

Considerando que el estado estacionario del mapeo (3.30) debe satisfacer las **ecuaciones (1.13)** que se mencionan en el Capitulo 1, las cuales toman la siguiente forma después de aplicar el modelo difuso TS [(46)].

$$\frac{\partial \pi(w)}{\partial w} s(w) = \sum_{i=1}^r \mu_i(w) A_i(w) + \sum_{i=1}^r \mu_i(w) B_i \gamma(w) + \sum_{i=1}^r \mu_i(w) P_i w \quad (3.33)$$

$$0 = \sum_{i=1}^r \mu_i(w) [C_i \pi(w) - R_i w] \quad (3.34)$$

Dando

$$\left[ \left( \sum_{i=1}^r \mu_i \Pi_i \right) + \left( \sum_{i=1}^r \mu_i(w) \Pi_i \right) \left( \sum_{i=1}^r \mu_i S_i \right) \right] w \equiv \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j (A_i \Pi_j + B_i \Gamma_j + P_i) \right] w$$

$$0 = \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j (C_i \Pi_j - R_i) \right] w.$$

De esto se puede observar que las siguiente ecuaciones:

$$\Pi_i S_i = A_i \Pi_i + B_i \Gamma_i + P_i \quad (3.35)$$

$$0 = C_i \Pi_i - R_i$$

para todo  $i = 1, \dots, r$ : corresponden exactamente a la solución del problema de regulación para cada subsistema. En este punto, las ecuaciones resuelven el problema de regulación para los parámetros no lineales si y solo si las siguientes ecuaciones se verifican.

$$0 = \sum_{i=1}^r \mu_i \Pi_i + \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r \mu_i \mu_j (\Pi_i S_j + \Pi_j S_i) - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \mu_i \mu_j (A_i \Pi_j + B_i \Gamma_j + P_i + A_j \Pi_i + B_j \Gamma_i + P_j)$$

$$0 = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \mu_i \mu_j (C_i \Pi_j - R_i + C_j \Pi_i - R_j),$$

en general no es verdad, sin embargo ocurre un caso particular cuando  $\Pi_1 = \Pi_2 = \dots = \Pi_r = \Pi$ . Entonces el término  $\sum_{i=1}^r \mu_i \Pi_i = \sum_{i=1}^r \mu_i \Pi = 0$  desde  $\sum_{i=1}^r \mu_i = 1$ . Así, las ecuaciones  $C_i \Pi - R_i + C_j \Pi - R_j = 0$ , satisfacen la ecuación (3.35) y solo es necesario para:

$$0 = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \mu_i \mu_j (\Pi S_j + \Pi S_i) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r \mu_i \mu_j (A_i \Pi + B_i \Gamma_j + P_i + A_j \Pi + B_j \Gamma_i + P_j) \quad (3.36)$$

Ahora podemos distinguir dos casos:

- a)  $B_1 = B_2 = B$ .
- b)  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ .

En ambos casos la ecuación (3.36) es trivialmente satisfecha por las ecuaciones (3.35) y el problema del regulador tiene solución. La situación b) implica que las ecuaciones del regulador (3.33)-(3.34) tienen una solución lineal  $x_{ss} = \Pi w$ ,  $u_{ss} = \Gamma w$ .

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría



Esta característica permite la sincronización de los sistemas caóticos, no solo en sistemas caóticos similares. En otras palabras este enfoque puede ser utilizado para obtener cualquier sincronización generalizada o completa. Varias simulaciones se llevan a cabo para ilustrar como se puede resolver el problema de una forma práctica mediante la técnica de la: Desigualdad Matricial Lineal (LMIs).

La dinámica caótica se puede encontrar en diversos procesos de la vida real, por ejemplo; en el clima, las turbulencias dentro de chumaceras, los latidos del corazón humano, las actividades del cerebro, los mercados financieros, entre otros muchos. Por esta razón, el estudio del caos ha recibido mayor atención durante las décadas pasadas. Vale la pena mencionar que el control de caos no sólo implica la supresión de la conducta caótica, también significa modificarla o incluso generarla. Uno de los aspectos mas importantes en el control del caos es la sincronización.

Los sistemas caóticos presentan elevada sensibilidad a las condiciones iniciales. Sin embargo, es posible sincronizar este tipo de sistemas complejos llevándolos a evolucionar en la misma trayectoria caótica. [(43),(5),(47)(48)]

La sincronización de los sistemas caóticos puede ser vista como una igualdad asintótica de las variables de estado, mientras el sistema evoluciona en el tiempo. Este tipo de sincronización es conocido como CS (sincronización completa). Sincronización convencional ó sincronización idéntica [(49)].

Considerar el siguiente sistema caótico con un controlador  $u$ :

$$\begin{aligned}\dot{w} &= f(w) \\ \dot{x} &= f'(x, w, u)\end{aligned}\tag{3.37}$$

La existencia de CS implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$ . Donde  $e = x - w$  y es el error de sincronización.

Obviamente, este tipo de sincronización se puede ver como un problema de regulación. En esta sección la salida del regulador difuso basado en controladores lineales simples se considera como la señal de sincronización entre dos sistemas caóticos.

El método difuso es usado para sincronizar dos sistemas de Rössler descritos por las siguientes ecuaciones.



Sistema respuesta

$$\dot{x}_1 = -(x_2 + x_3)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + ax_2$$

$$\dot{x}_3 = bx_1 - (c - x_1)x_3 + u$$

Conducción del sistema

$$\dot{w}_1 = -(w_2 + w_3),$$

$$\dot{w}_2 = w_1 + aw_2,$$

$$\dot{w}_3 = bw_1 - (c - w_1)w_3.$$

Con  $a = 0.34$ ,  $b = 0.4$ ,  $c = 4.5$ , donde  $u$  es el controlador.

Estos sistemas pueden ser representados exactamente por medio de las 2 siguientes reglas del modelo difuso TS cuando  $x_1 \in [c - d, c + d]$  [(41)].

Sistema respuesta:

Regla  $i$ :

$$\text{SI } x_1 \text{ es } M_{1,i1} \text{ ENTONCES } \dot{x} = A_i x + B_i u \quad \text{para } i = 1, \dots, 2.$$

Sistema principal:

Regla  $i$ :

$$\text{SI } w_1 \text{ es } M_{2,i1} \text{ ENTONCES } \dot{w} = S_i w \quad \text{para } i = 1, \dots, 2.$$

Dando por resultado;

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^2 h_{1,i}(x_1) \{A_i x + B_i u\},$$

$$\dot{w} = \sum_{i=1}^2 h_{2,i}(w_1) S_i w,$$

$$e = \sum_{i=1}^2 h_{1,i}(x_1) C_i x - \sum_{i=1}^2 h_{2,i}(w_1) Q_i w$$

Donde las matrices del sistema lineal son definidas como;

$$A_1 = S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & -d \end{pmatrix},$$

$$A_2 = S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & d \end{pmatrix},$$

$$B = (0 \ 0 \ 1)^T,$$

y

$$C = Q = (1 \ 0 \ 0).$$

Para este caso, La función de membresía representa la no linealidad de los sistemas originales que están dados por.

$$h_{1,1}(x_1) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c - x_1}{d} \right),$$

$$h_{1,2}(x_1) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c - x_1}{d} \right),$$

$$h_{2,1}(w_1) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c - w_1}{d} \right),$$

Atractor de Rossler

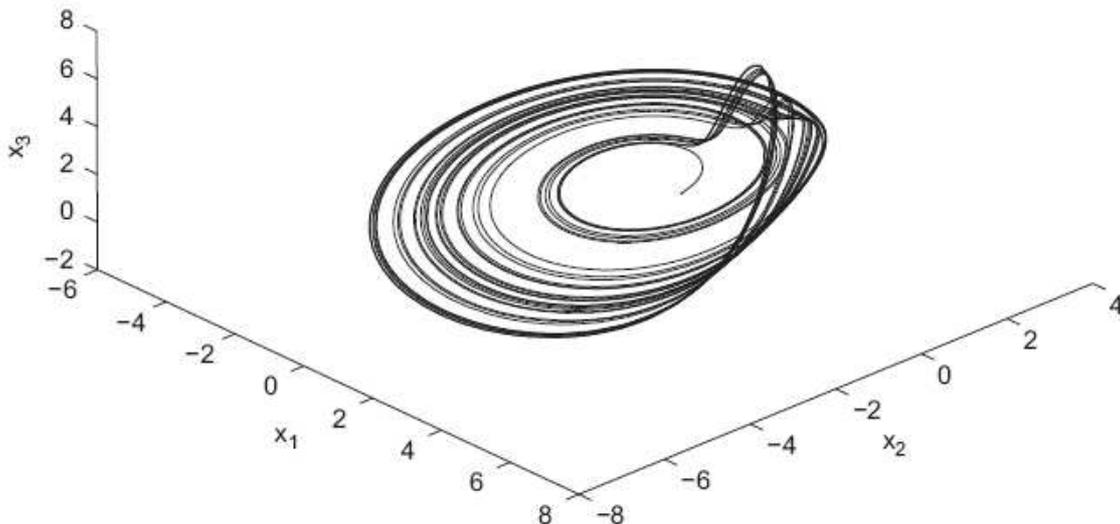


Figura 3.1 sistema de Rössler

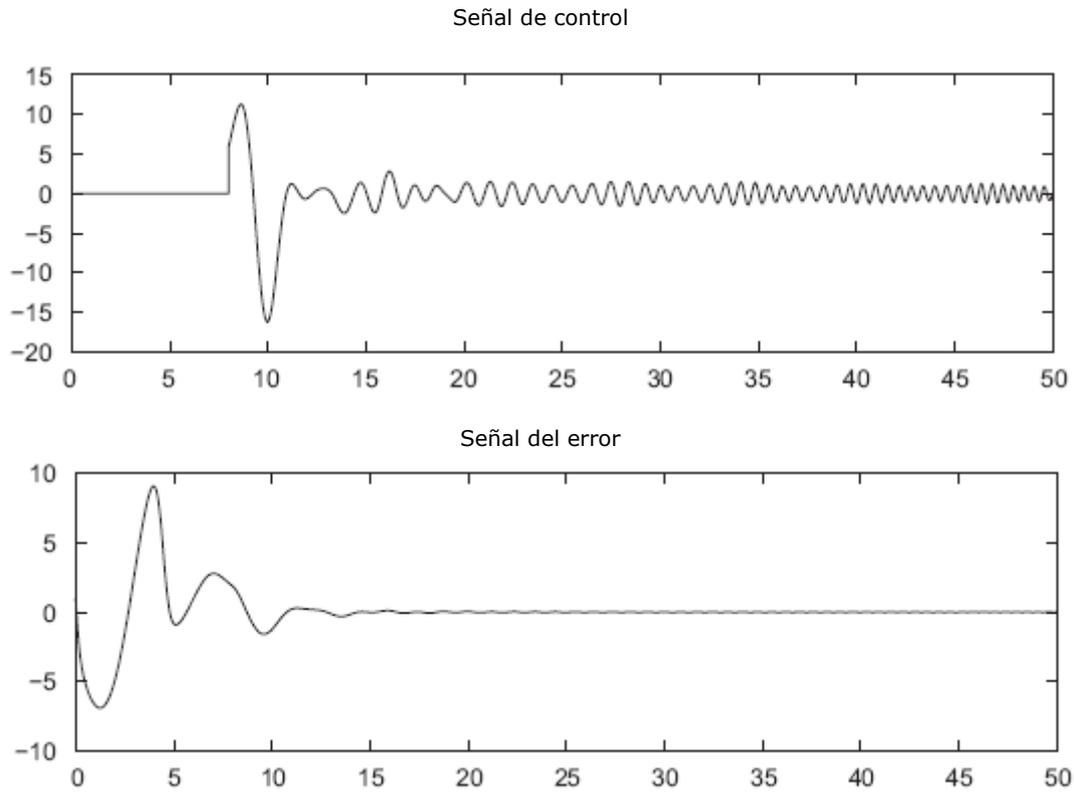


Figura 3.2 Señal de control y seguimiento del error para completar la sincronización de los dos sistemas de Rossler

y

$$h_{2,2}(w_1) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c - w_1}{d} \right),$$

donde  $d = 10$ .

El controlador es capaz de sincronizar los sistemas caóticos y se obtiene a partir de.

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

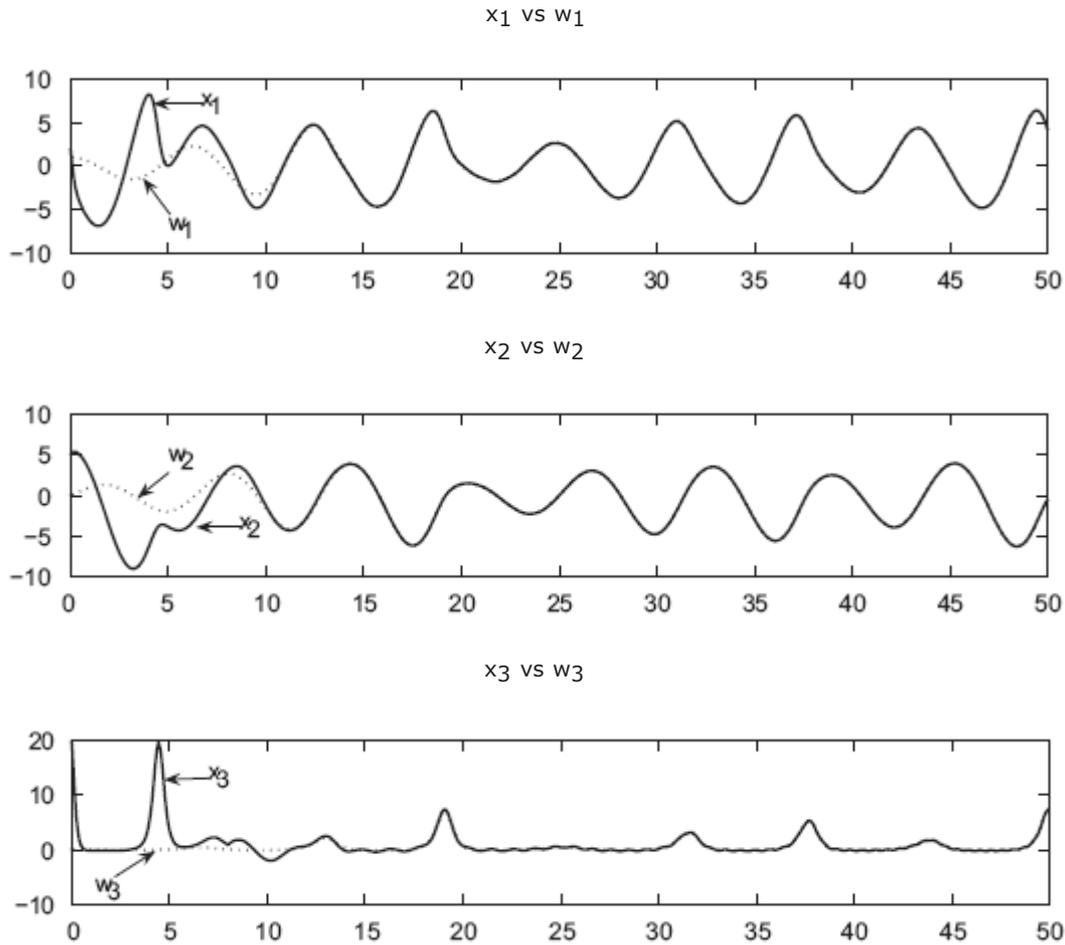


Figura 3.3 Estados contra respuesta de los estados para la sincronización completa de los dos sistemas de Rossler.

$$\Gamma_{11} = (0 \ 0 \ 0),$$

$$\Gamma_{12} = (0 \ 0 \ 20),$$

$$\Gamma_{21} = (0 \ 0 \ -20),$$

$$\Gamma_{22} = (0 \ 0 \ 0),$$

$$K_1 = (2.4856 \ 0.6387 \ 8.2318),$$

$$K_2 = (2.4856 \ 0.6387 \ -11.7682),$$

El proceso de simulación inicia con las siguientes condiciones iniciales:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = 20$ ,  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = 0$ ,  $w_3 = 0$ , permitiendo que el sistema evolucione en 50 pasos. Los resultados se presentan en las figuras (3.1-3.3), mostrando un desempeño satisfactorio del regulador difuso.

Hasta el momento, el problema de sincronización presentado ha cumplido con las condiciones necesarias para su solución. Por esta razón, se puede llegar fácilmente al CS por medio de los reguladores difusos diseñados sobre controladores locales. Sin embargo una situación aun más interesante surge cuando se requiere la sincronización de dos sistemas caóticos diferentes.



A continuación se analizará el problema para dos diferentes sistemas caóticos, usando La teoría de regulación difusa.

### 3.2.2.1 Sincronización Generalizada

En general no es posible encontrar un error trivial cero en estado estacionario, cuando los sistemas de sincronización son diferentes, por lo que hay una versión mas reducida conocida como GS (sincronización Generalizada)[(43),(50),(16)(15)], la cual es de uso común.

Considerar los siguientes dos sistemas caóticos:

$$\begin{aligned}\dot{w} &= f(w) \\ \dot{x} &= f'(x, \phi(w), u)\end{aligned}\quad (3.38)$$

Donde  $w$  es el vector de estado de  $r$  – dimensión,  $x$  es el vector de estado de la respuesta de  $n$  – dimensión; donde con  $s$  y  $f$  se satisfacen los campos vectoriales de  $s: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ , y  $f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ , respectivamente, las trayectorias caóticas de los dos sistemas se sincronizan en un sentido generalizado si existe una transformación  $\pi: w \rightarrow x$ , el cual es capaz de asignar asintóticamente la trayectoria principal del sistema en los del sistema de respuesta.  $x(t) = \pi(w(t))$ , independientemente de sus condiciones iniciales. La condición que se debe cumplir para lograr GS es dada en [(51)].

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; x(0)) - w(t; w(0))\| = 0,$$

donde  $x(0)$  y  $w(0)$  son dos condiciones iniciales genéricas del sistema (3.38)

Sobre la base de los conceptos anteriores, el siguiente ejemplo muestra como el regulador difuso diseñado en base a controladores locales puede sincronizar los sistemas caóticos de una manera general. En este ejemplo se considera que el sistema principal es el sistema de Lorenz y el sistema de respuesta es el sistema de Chen. Cada uno descrito por un modelo difuso TS de dos reglas [(41)].

Sistema respuesta

Regla  $i$ :

$$\text{SI } x_1 \text{ es } M_{1,i1} \text{ ENTONCES } \dot{x} = A_i x + B_i u \quad \text{para } i = 1, \dots, 2.$$

Sistema principal:

Regla  $i$ :

$$\text{SI } w_1 \text{ es } M_{2,i1} \text{ ENTONCES } \dot{w} = S_i w \quad \text{para } i = 1, \dots, 2.$$

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría



Por consiguiente;

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^2 h_{1,i}(x_1)\{A_i x + B_i u\},$$

$$\dot{w} = \sum_{i=1}^2 h_{2,i}(w_1)S_i w,$$

$$e = \sum_{i=1}^2 h_{1,i}(x_1) C_i x - \sum_{i=1}^2 h_{2,i}(w_1) Q_i w$$

con

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & d \\ 0 & -d & b \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & -d \\ 0 & d & b \end{pmatrix},$$

$$B = (0 \ 1 \ 0)^T,$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} -a_w & a_w & 0 \\ c_w & 1 & d \\ 0 & -d & b_w \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} -a_w & a_w & 0 \\ c_w & 1 & -d \\ 0 & d & b_w \end{pmatrix},$$

y

$$C = Q = (1 \ 0 \ 0).$$

Donde  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 28$ ,  $a_w = 10$ ,  $b_w = \frac{8}{3}$ ,  $c_w = 28$ , y  $d = 30$ . Las funciones de membresía para este caso son:

$$h_{1,1}(x_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{-x_1 + d}{d} \right),$$

$$h_{1,2}(x_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{x_1 + d}{d} \right),$$

$$h_{2,1}(w_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{-w_1 + d}{d} \right),$$

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría

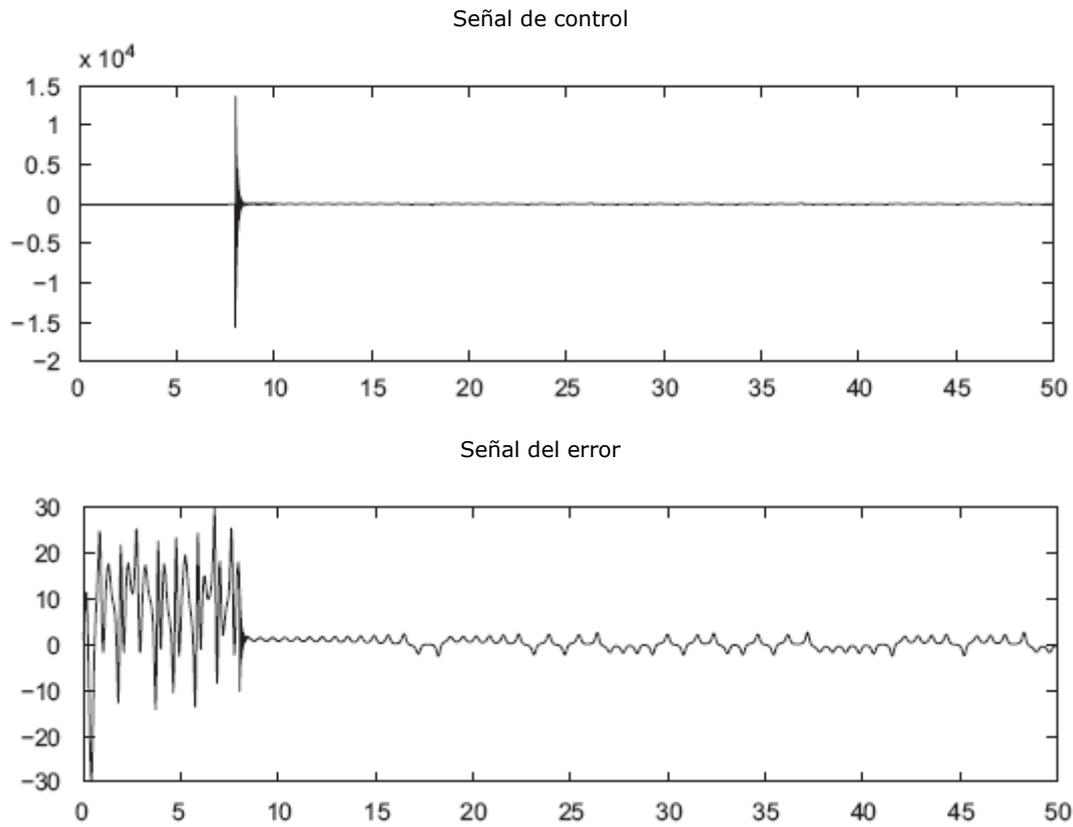


Figura 3.4 Señal de control vs error de seguimiento para la sincronización generalizada de los sistemas Lorenz-Chen

y

$$h_{2,2}(w_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{w_1 + d}{d} \right),$$

con  $d = 30$ .

Como se menciona antes, el controlador toma la forma deseada, a partir de las matrices siguientes:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.7143 & 0.2857 & 0 \\ 3.0041 & -0.0143 & 1.2861 \end{pmatrix}, & \Gamma_{11} &= (-102.2648 \quad -0.7142 \quad -30.01221), \\ \Pi_{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.7143 & 0.2857 & 0 \\ 3.0041 & -0.0143 & -1.2861 \end{pmatrix}, & \Gamma_{12} &= (-102.2648 \quad -0.7142 \quad 30.01221), \\ \Pi_{21} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.7143 & 0.2857 & 0 \\ -3.0041 & 0.0143 & -1.2861 \end{pmatrix}, & \Gamma_{21} &= (-102.2648 \quad -0.7142 \quad -30.01221), \\ \Pi_{22} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.7143 & 0.2857 & 0 \\ -3.0041 & 0.0143 & 1.2861 \end{pmatrix}, & \Gamma_{22} &= (-102.2648 \quad -0.7142 \quad 30.01221), \end{aligned}$$

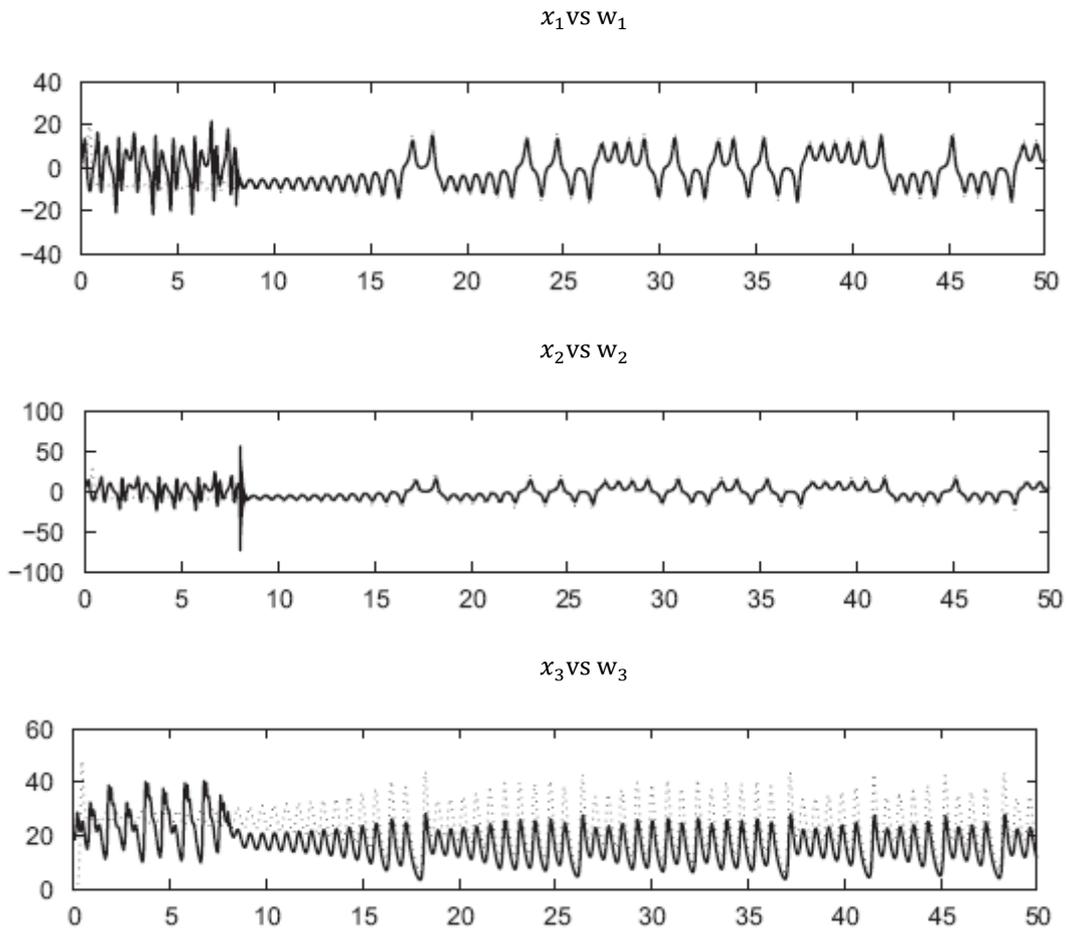


Figura 3.5 Estado principal vs respuesta del estado para la sincronización generalizada de los sistemas de Lorenz-Chen.

$$K_1 = (-1055 \quad -14.694 \quad 99.768),$$

$$K_2 = (-1055 \quad -14.694 \quad -99.768),$$

Como puede verse fácilmente el estado estacionario  $\pi(w)$  no es lineal de la forma  $\Pi w$ , de acuerdo al análisis realizado la regulación exacta no se puede lograr. En otras palabras el seguimiento exacto de referencias no puede garantizarse en general cuando el regulador difuso se construye a partir de reguladores lineales. Esto se muestra en la figuras 3.4 y 3.5.

Sin embargo este tipo de controladores puede lograr GS, porque el regulador difuso siempre toma los estados de la respuesta del sistema a la aproximación múltiple  $\hat{\pi}(w)$ , independientemente de las condiciones iniciales.



## CAPÍTULO 4

# REGULACIÓN DIFUSA EXACTA



## INTRODUCCIÓN.

### 4.1 General

En este capítulo se muestra algoritmo utilizado para el desarrollo del nuevo método, en el que se combinan la Teoría de Regulación no lineal y el modelo difuso Takagi-Sugeno (TS). Permitiendo el desarrollo de la Teoría de Regulación difusa exacta.

En anteriores trabajos se ha demostrado que la regulación de salida exacta para modelos difusos Takagi-Sugeno (TS) depende de dos condiciones: 1) El estado estacionario local del sistema tiene que ser el mismo para todos los subsistemas locales y, 2) Las matrices locales de entrada ( $B_i$ ) tienen que ser la misma para todos los subsistemas locales, incluyendo el modelo difuso TS. Obviamente, estas condiciones son difíciles de cumplir, en general. Por esta razón, en este trabajo las condiciones de flexibilidad para resolver el problema de regulación difuso se realizan de manera directa con el modelo difuso TS, en lugar de construir el regulador difuso sobre la base de los reguladores lineales locales.

Así, el principal resultado de este trabajo es diseñar un regulador total de salida exacta para el sistema difuso TS considerando tanto, la teoría de regulación lineal y no lineal. Vale la pena mencionar que, existen algunos trabajos previos relacionados con este tema, cuando el controlador final es construido a partir de los reguladores lineales que están diseñados para cada subsistema lineales locales dentro del modelo difuso TS. Sin embargo, un controlador desarrollado de esta forma, sólo alcanza el seguimiento exacto en algunos casos particulares.

En el trabajo el modelo difuso juega un papel muy importante durante el proceso de diseño del regulador final. En otras palabras, el estado estacionario de error cero  $\pi(w(t))$  y la entrada en estado estacionario  $\gamma(w(t))$  se diseñará en la planta difusa total directamente, y no sólo en los subsistemas lineales locales.

Así, lo anterior es la principal aportación del presente trabajo, y se convierte en una diferencia muy significativa cuando este nuevo método se compara con métodos anteriores relacionados con la Teoría Regulación Difusa.



## 4.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considerar nuevamente el sistema no lineal dado por

$$\dot{x} = f(x(t), w(t), u(t)), \quad (4.1)$$

$$\dot{w} = s(w(t)), \quad (4.2)$$

$$e = h(x(t), w(t)), \quad (4.3)$$

Donde  $x \in \mathbb{R}^n$ , es el vector de estados de la planta,  $w \in W \subset \mathbb{R}^r$ , es el vector de estados del exosistema que genera la referencia y/o la señal de perturbación y  $u \in \mathbb{R}^m$ , es la señal de entrada al sistema.

La ecuación (4.3) describe la salida del error de seguimiento  $e \in \mathbb{R}^m$ , el cual es usualmente dado por la diferencia entre las salidas del sistema medidas de la planta y la señal de referencia, ósea  $h(x(t), w(t)) = c(x(t)) - q(w(t))$  donde  $y(t) = c(x)$  es la salida de la planta y  $y_{ref} = q(w(t))$  es la salida del exosistema.

Es importante mencionar que en [(31)],[(5)], se ha demostrado que el problema de regulación no puede ser resuelto en general, cuando la dimensión de  $e(t)$  es mas grande que la dimensión de  $u(t)$ . Por otro lado cuando la dimensión de  $u$  es mas grande que la dimensión de  $e(t)$  el problema de seguimiento no es interesante.

Considerado que la salida del sistema que depende o coincide exactamente con el estado  $x$ . Se asume como  $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ ,  $s(\cdot)$  y  $h(\cdot, \cdot)$  son funciones analíticas, con  $s(0) = 0$ ,  $f(0,0,0) = 0$  y  $h(0,0) = 0$ .

Como se ha visto en los capítulos anteriores una buena aproximación para los sistemas no lineales es proporcionada por el llamado modelo difuso TS. Un modelo de esta manera se define sobre la elección adecuada de un conjunto de subsistemas lineales. De acuerdo con las reglas asociadas o con algunos conocimientos físicos del sistema. Estos subsistemas lineales describen adecuadamente, al menos localmente, el comportamiento del sistema no lineal para una región predefinida del el espacio de estados.

En este punto, se hace hincapié en que el modelo difuso del exosistema puede depender de funciones de membresía diferentes a los considerados en el modelo de la planta difusa. Además, el número de reglas del exosistema difuso puede ser diferente del número de reglas de la planta difusa. Estas consideraciones son incluidas para el siguiente análisis, a fin de obtener un resultado más general, y capaz de ser aplicado en un mayor numero de situaciones reales.



La aproximación difusa del sistema (4.1)-(4.3) se puede escribir como [(15)].

Planta difusa

Regla  $i$ :

$$\begin{aligned} & \text{SI } z_{1,1}(t) \text{ es } M_{1,i,1} \text{ y } z_{1,p_1}(t) \text{ es } M_{1,i,p_1} \text{ ENTONCES} \\ & \dot{x} = A_i x(t) + B_i u(t) + P_i w(t) \quad \text{para } i = 1 \dots r \end{aligned} \quad (4.4)$$

Exosistema difuso

Regla  $i$ :

$$\begin{aligned} & \text{SI } z_{2,1}(t) \text{ es } M_{2,i,1} \text{ y } z_{2,p_2}(t) \text{ es } M_{2,i,p_2} \text{ ENTONCES} \\ & \dot{w} = s_i w(t) \quad \text{para } i = 1 \dots r \end{aligned} \quad (4.5)$$

Donde  $r_1$  es el número de reglas de la planta difusa, mientras que  $r_2$  es el número de reglas del exosistema. Los conjuntos difusos definidos sobre la base de conocimientos previos de la dinámica del sistema.

Se asume para las matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $P_i$ ,  $C_i$ ,  $S$  y  $Q$  son obtenidas al linealizar el sistema no lineal alrededor de algunos puntos de operación  $(x, w, u) = (x^i, w^i, u^i)$ , es decir.

$$\begin{aligned} A_i &= \left. \frac{\partial f(x, w, u)}{\partial x} \right|_{(x^i, w^i, u^i)}, & B_i &= \left. \frac{\partial f(x, w, u)}{\partial u} \right|_{(x^i, w^i, u^i)}, \\ P_i &= \left. \frac{\partial f(x, w, u)}{\partial w} \right|_{(x^i, w^i, u^i)}, & C_i &= \left. \frac{\partial h(x, w)}{\partial x} \right|_{(x^i, w^i)}, \\ S &= \left. \frac{\partial s(w)}{\partial w} \right|_{(w^i)}, & Q &= \left. \frac{\partial h(x, w)}{\partial w} \right|_{(x^i, w^i)}, \end{aligned}$$

O bien considerando el sector no lineal presentado en [(41)], que produce una representación exacta del sistema no lineal original, al menos en una región local del diagrama de fase.

Así, el sistema se define por [(4.1)]

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_{1,i}(z_1(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + P_i w(t)], \quad (4.6)$$

$$\dot{w}(t) = \sum_{i=1}^r h_{2,i}(z_2(t)) S_i w(t), \quad (4.7)$$

$$e(t) = \sum_{i=1}^r h_{1,i}(z_1(t)) C_i x(t) - \sum_{i=1}^r h_{2,i}(z_2(t)) Q_i w(t). \quad (4.8)$$

Donde,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado de la planta,  $w(t) \in \mathbb{R}^s$  es el estado del exosistema,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es la señal de control,  $e(t) \in \mathbb{R}^m$  es el error de seguimiento, y  $z_*(t) = [z_{*,1}(t) \ z_{*,2}(t) \ \dots \ z_{*,p^*}(t)]$  es una función de  $x(t)$  y/o  $w(t)$ . por otra parte, las funciones de membresía de la planta difusa y el exosistema satisfacen:

$$\bar{w}_{*,i}(z_*(t)) = \prod_{j=1}^{p^*} M_{*,i,j}(z_{*,j}(t)), \quad (4.9)$$

$$h_{*,i}(z_*(t)) = \frac{\bar{w}_{*,i}(z_*(t))}{\sum_{i=1}^{r^*} \bar{w}_{*,i}(z_*(t))}. \quad (4.10)$$

Para todo  $t \geq 0$ , y el término  $M_{*,i,j}(z_{*,j}(t))$  es el valor de membresía para  $M_{*,i,j}$  en  $(z_{*,j}(t))$ , puesto que.

$$\sum_{i=1}^{r^*} \bar{w}_{*,i}(z_*(t)) > 0 \quad (4.11)$$

$$\bar{w}_{*,i}(z_*(t)) \geq 0 \quad i = 1 \dots, r_*,$$

$$\sum_{i=1}^{r^*} h_{*,i}(z_*(t)) = 1 \quad (4.12)$$

$$h_{*,i}(z_*(t)) \geq 0 \quad i = 1, \dots, r_*,$$

Para todo  $t \geq 0$  y los valores adecuados de "\*" (1 para la planta y 2 para el exosistema).

Es importante observar que el modelo difuso TS (4.6)-(4.8) puede ser reescrito como:

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(t)x(t) + \tilde{B}(t)u(t) + \tilde{P}(t)w(t), \quad (4.13)$$

$$\dot{w}(t) = \tilde{S}(t)w(t), \quad (4.14)$$

$$e(t) = \tilde{C}(t)x(t) - \tilde{Q}(t)w(t). \quad (4.15)$$

Donde:

$$\tilde{A}(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))A_i,$$

$$\tilde{B}(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))B_i,$$

$$\tilde{P}(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))P_i,$$

$$\tilde{C}(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))C_i,$$

$$\tilde{S}(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{2,i}(z_2(t))S_i,$$

$$\tilde{Q}(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{2,i}(z_2(t))Q_i,$$

El motivo de esta representación recae en el hecho de que la función de membresía de la planta y el exosistema dependen en última instancia de  $t$ .

A continuación, esta representación se utilizará para obtener las condiciones de existencia para el regulador de salida exacta de una manera relativamente simple.

Antes de proceder con el principal resultado, se recuerda que, según Isidori la teoría de regulación para sistemas no lineales (4.1)-(4.3) cuya linealización alrededor de  $x = 0$  es esta dada por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Pw(t), \quad (4.16)$$

$$\dot{w}(t) = Sw(t), \quad (4.17)$$

$$e(t) = Cx(t) - Qw(t). \quad (4.18)$$



El Problema de Regulación no-lineal (NRP) consiste en encontrar un controlador.

$$u = \alpha(x(t), w(t)), \quad (4.19)$$

de tal manera que el sistema en lazo cerrado,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\alpha(x(t), 0),$$

tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable, y la solución en lazo cerrado del sistema (4.16), (4.17), (4.18) y (4.19) satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Así, tras recordar que  $\pi(w(t))$  es el mapeo de estado estacionario de error-cero y  $\gamma(w(t))$  es la entrada en estado estacionario, el siguiente teorema da las condiciones de existencia para la solución NRP [(31)],[(5)].

**Teorema 4.1:** Supongamos lo siguiente.

- H1) El exosistema  $\dot{w} = S(w)$  donde el sistema es Poisson estable,
- H2) Existe una ganancia  $K$  de tal manera que la matriz  $A + BK$  es estable
- H3) Existe mapeos  $x_{ss}(t) = \pi(w(t))$ ,  $u_{ss}(t) = \gamma(w(t))$  con  $\pi(0)=0$  y  $\gamma(0) = 0$  que satisface.

$$\frac{\partial \pi(w(t))}{\partial w(t)} S(w(t)) = f\left(\pi(w(t)), w(t), \gamma(w(t))\right), \quad (4.20)$$

$$0 = h\left(\pi(w(t)), w(t)\right). \quad (4.21)$$

Entonces, el problema de regulación no lineal es resuelto y el controlador esta dado por.

$$u(t) = K\left(x(t) - \pi(w(t))\right) + \gamma(w(t)). \quad (4.22)$$



Se puede ver fácilmente que, para el caso lineal los mapeos  $x_{ss}(t) = \pi(w(t))$  y  $u_{ss}(t) = \gamma(w(t))$  se convierte en  $x_{ss}(t) = \Pi w(t)$  y  $u_{ss}(t) = \Gamma w(t)$  respectivamente, por lo tanto las condiciones (4.20)-(4.21) se reducen a las ecuaciones matriciales lineales de Francis:

$$\Pi S = A \Pi + B \Gamma + P, \quad (4.23)$$

$$0 = C \Pi - Q. \quad (4.24)$$

Así, el *Problema de Regulación Difusa de Salida Exacta* (EOFRP) se define como el problema de encontrar, si es posible, un controlador [(31)], [(15)]

$$u = \alpha(x(t), w(t)) \quad (4.25)$$

tal que

**FS)** El punto de equilibrio  $x(t) = 0$  del sistema en lazo cerrado, con ninguna señal externa o perturbación.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) [A_i x(t) + B_i \alpha(x(t), 0)],$$

y es asintóticamente estable

**FR)** La solución del sistema en lazo cerrado de (4.6)-(4.8) y (4.25) satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

cuando la planta este bajo los efectos del exosistema

La señal de control, para (4.6)-(4.8), que se diseñó en este trabajo, no es simplemente dada por la suma de los reguladores locales [(14)].

$$u = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) K_i \left[ x(t) - \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) \Pi_{ij} w(t) \right] + \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) \Gamma_{ij} w(t), \quad (4.26)$$

Si no por un controlador de la forma (4.22), en la que como se esperaba, la ganancia  $K$  sera remplazada por un estabilizador difuso y los mapeos  $\pi(w(t))$  y  $\gamma(w(t))$  son las que solucionan EOFRP para el modelo difuso total (4.6)-(4.8). Es decir en la siguiente sección no serán diseñados varios reguladores locales, si no solo uno totalmente no lineal.

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría

### 4.3 PROBLEMA DE REGULACIÓN DIFUSA DE SALIDA EXACTA

Consideremos de nuevo el modelo difuso por (4.6)-(4.8). Así, desde la sección anterior se deduce que el diseño de un estabilizador difuso es necesario. Por lo tanto, en este capítulo el estabilizador difuso será diseñado sobre la base de una matriz común de Lyapunov (PDC) [(41)], a su vez algunas técnicas más sencillas pueden ser aplicadas para estabilizar los sistemas difusos, sin perder generalidad.

A partir de [(31)], [(5)], [(15)], se deduce que el controlador difuso total es dado por:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))K_i[x(t) - \pi(w(t))] + \gamma(w(t)) \quad (4.27)$$

Sin embargo, en este trabajo el estado estacionario de error-cero es  $x_{ss} = \pi(w(t))$  y la entrada del estado estacionario  $u_{ss} = \gamma(w(t))$  no se aproximan con la sumatoria difusa de los mapeos lineales locales. Alternativamente  $\pi(w(t))$  y  $\gamma(w(t))$  se obtendrán a partir de:

$$e(t) = x(t) - x_{ss}(t) = x(t) - \pi(w(t)). \quad (4.28)$$

Donde  $e(t)$  es el error total en estado estacionario, considerando que

$$y(t) = y_{ref}(t), \quad (4.29)$$

y debe ser cumplido.

Al representar el modelo difuso TS utilizando (4.13)-(4.15), se deduce entonces que en estado estacionario el error-cero se puede definir como:

$$\pi(w(t)) = \tilde{\Pi}(t)w(t). \quad (4.30)$$

Mientras que la entrada en estado estacionario resulta ser:

$$\gamma(w(t)) = \tilde{\Gamma}(t)w(t). \quad (4.31)$$

Donde  $\tilde{\Pi}(t)$  y  $\tilde{\Gamma}(t)$  son matrices continuas variantes en el tiempo de dimensión  $[nxs]$  y  $[mxs]$ , respectivamente.

Por lo tanto, diferenciando la ecuación del error en estado estacionario (4.28) respecto al tiempo y considerando (4.30) y (4.31), resulta

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{\Pi}}(t)w(t) - \tilde{\Pi}(t)\dot{w}(t) \quad (4.32)$$

$$\dot{e}(t) = \tilde{A}(t)e(t) + \tilde{B}(t)u(t) + \tilde{P}(t)w(t) - \dot{\tilde{\Pi}}(t)w(t) - \tilde{\Pi}(t)w(t)\tilde{S}(t)w(t) \quad (4.33)$$

Así, partir de las ecuaciones (4.13)-(4.15), (4.27), (4.28), (4.30), y considerando  $u(t) = u_s(t) + u_{ss}(t)$ , con  $u_{ss} = \tilde{\Gamma}(t)w(t)$  como la entrada en estado estacionario, entonces la siguiente expresión se puede obtener fácilmente.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & \tilde{A}(t)e(t) + \tilde{B}(t)u_s(t) + \tilde{A}(t)\tilde{\Pi}(t)w(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\Gamma}(t)w(t) + \tilde{P}(t)w(t) - \dot{\tilde{\Pi}}(t)w(t) \\ & - \tilde{\Pi}(t)\tilde{S}(t)w(t) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Por lo tanto,  $e(t)$  es asintóticamente estable si y sólo si.

$$\dot{\tilde{\Pi}}(t)w(t) = \tilde{A}(t)\tilde{\Pi}(t)w(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\Gamma}(t)w(t) + \tilde{P}(t)w(t) - \tilde{\Pi}(t)\tilde{S}(t)w(t)$$

Por que  $u_s(t)$  tiene que ser diseñado para estabilizar  $(\tilde{A}(t), \tilde{B}(t))$ , mediante el planteamiento del PDC o un método más simple, desarrollado para estabilizar los sistemas difusos.

Obviamente, la ecuación anterior puede simplificarse a

$$\dot{\tilde{\Pi}}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{\Pi}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\Gamma}(t) + \tilde{P}(t) - \tilde{\Pi}(t)\tilde{S}(t) \quad (4.35)$$

Observar que la expresión (4.35) es una ecuación matricial diferencial con  $[nxs] + [mxs]$  incógnitas y  $[nxs]$  ecuaciones. Sin embargo, considerando el sistema de ecuaciones (4.29), que en estado estacionario se convierte en

$$\tilde{C}(t)\tilde{\Pi}(t)w(t) = \tilde{Q}(t)w(t),$$

ó

$$0 = \tilde{C}(t)\tilde{\Pi}(t) - \tilde{Q}(t). \quad (4.36)$$

Claramente (4.36) tiene  $[nxs]$  incógnitas y  $[mxs]$  ecuaciones. Por consiguiente, la versión dinámica de las ecuaciones de Francis esta formada por (4.35) y (4.36), es decir.

$$\dot{\tilde{\Pi}}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{\Pi}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\Gamma}(t) + \tilde{P}(t) - \tilde{\Pi}(t)\tilde{S}(t) \quad (4.37)$$

$$0 = \tilde{C}(t)\tilde{\Pi}(t) - \tilde{Q}(t) \quad (4.38)$$

En este punto se sugiere la construcción de un controlador dinámico capaz de generar los elementos de la matriz continua variante en el tiempo  $\tilde{\Pi}(t)$  de acuerdo a los valores iniciales apropiados, es decir  $\tilde{\Pi}(0)$  (ver Figura 4.1). Por otro lado la solución de este tipo de ecuaciones variantes en el tiempo ya ha sido resulta en [(52)].

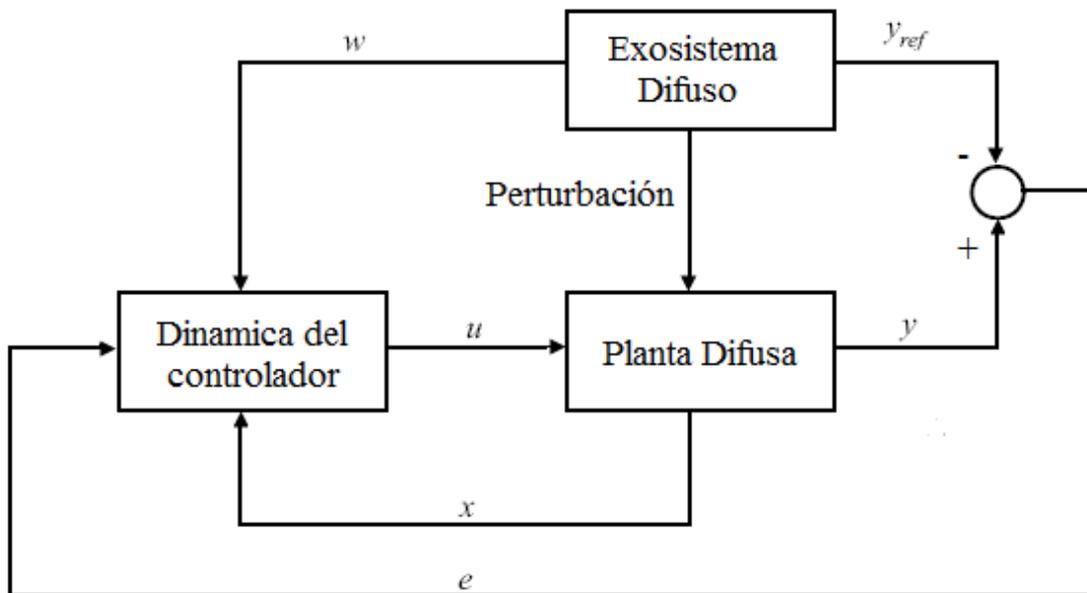


Figura 4.1 Esquema de control

*Observe que el controlador dinámico puede ser fácilmente construido utilizando un software de simulación por computadora, como Matlab, Simulink. En consecuencia un controlador también puede ser descargado en dispositivos electrónicos para aplicaciones en tiempo real.*



En este sentido

$$\tilde{\Pi}(t)\tilde{S}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{\Pi}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\Gamma}(t) + \tilde{P}(t), \quad (4.39)$$

$$0 = \tilde{C}(t)\tilde{\Pi}(t) - \tilde{Q}(t), \quad (4.40)$$

debe ser resuelto de una manera simbólica, es decir, la solución  $\tilde{\Pi}(t)$  y  $\tilde{\Gamma}(t)$ , tiene que ser expresado en términos de las funciones de membresía de la planta difusa y el exosistema difuso, en cualquier momento  $t$ .

Este paso puede realizarse fácilmente por medio de algún software matemático como Matlab, Mathematica o Maple.

A continuación, se supone que  $\dot{\tilde{\Pi}}(0) = 0$ , es decir  $\dot{\tilde{\Pi}}(t) = 0$  en  $t = 0$ . Observe que esta suposición es necesaria para obtener la condición inicial  $\tilde{\Pi}(0)$  y la entrada en estado estacionario  $\tilde{\Gamma}(t)$  de (4.39)-(4.40).

*Si no puede encontrar una solución para las ecuaciones (4.39)-(4.40), entonces se puede concluir que el problema de regulación difusa no puede ser resuelto. Esto es equivalente a la condición de existencia que se define por las ecuaciones de Francis en los casos lineales [(31)], o FIB (Francis-Isidori-Byrnes) ecuaciones para el problema de regulación no lineal [(5)].*

Así, si (4.39)-(4.40) tienen una solución, entonces la expresión para  $\tilde{\Gamma}(t)$  se obtiene directamente, mientras que la condición inicial  $\tilde{\Pi}(0)$  puede ser inmediatamente definida por la sustitución  $x(0)$  y  $w(0)$  en  $\tilde{\Pi}(t)$  dependiendo de las funciones de membresía de la planta difusa y / o las funciones de membresía del exosistema difuso, que al mismo tiempo son definidas por  $x(t)$  y  $w(t)$ , respectivamente.

*En algunos casos particulares, la matriz  $\tilde{\Pi}(t)$  puede resultar una matriz constante. En este caso, no hay necesidad de construir un controlador dinámico y un control (4.27). Ya que es suficiente para resolver el Problema de regulación difuso.*

El siguiente teorema resume las condiciones para la existencia del *regulador difuso con salida exacta*.

**Teorema 4.2** Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

**FH1)** El exosistema  $\dot{w}(t) = \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t))S_i w(t)$  es Poisson estable.

**FH2)** Existen matrices  $K_i$  y  $P$  de tal manera que

$$A_{ii}^{-T} P + P \bar{A}_{ii} < 0 \quad (4.41)$$

Para todo  $i = 1 \dots r$ , y

$$\left( \frac{\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji}}{2} \right) \leq 0 \quad (4.42)$$

Para  $i < j \leq r$ , son asintóticamente estables con

$$\bar{A}_{ij} = (A_i + B_i K_j) \quad (4.43)$$

**FH3)** La siguiente ecuación simultánea se puede resolver para  $\tilde{\Pi}(t)$  y  $\tilde{\Gamma}(t)$  como función de  $h_{*,i}(z_*(t)) \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, r_*$ , para todo  $t \geq 0$  y para los valores adecuados de " $*$ " ( 1 para la planta y 2 para el exosistema)

$$\tilde{\Pi}(t)\dot{S}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{\Pi}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\Gamma}(t) + \tilde{P}(t)w(t) \quad (4.44)$$

$$0 = \tilde{C}(t)\tilde{\Pi}(t) - \tilde{Q}(t) \quad (4.45)$$

tal que  $\tilde{\Gamma}(t)$  se obtiene directamente mientras  $\tilde{\Pi}(t)$  se obtiene sustituyendo  $x(0)$  y  $w(0)$  en  $\tilde{\Pi}(t)$ ,

Entonces el EOFRP es resuelto.

La **FH1)** se incluye con el fin de garantizar que la señal de referencia no tienda a cero a medida que aumenta el tiempo. Evitando de esta manera que el problema de regulación se convierta en un problema de estabilización. EL **FH2)** garantiza la existencia del estabilizador PDC. El resto de la demostración se obtiene del análisis anterior.

La validez del resultado anterior se basa en la similitud entre la ecuación (4.13)-(4.15) y (4.16)-(4.18), y en el hecho de que, a cada instante la dinámica del modelo difuso TS (4.6)-(4.8) se describe por un sistema lineal definido por funciones de membresía de cada instante.

*El software matemático se puede utilizar para resolver (4.44)-(4.45) con el fin de obtener  $\pi(w(t)) = \tilde{\Pi}(t)w(t)$  y  $\gamma(w(t)) = \tilde{\Gamma}(t)w(t)$ . Note que (4.44)-(4.45) deben ser ecuaciones simbólicas en  $h_{1,i}(z_1(t))$  y/o  $h_{2,i}(z_2(t))$ .*



## CAPÍTULO 5

# APLICACIONES DE LA REGULACIÓN DIFUSA EXACTA



En este Capitulo, el método de la regulación difusa basado en reguladores lineales y el método desarrollado en el apartado anterior, se aplican a un modelo difuso TS el cual no contiene perturbación externa.

## 5.1 REGULACIÓN DIFUSA CUANDO EL EXOSISTEMA ES PURAMENTE LINEAL.

En el siguiente ejemplo, se aplica el enfoque propuesto a un modelo difuso TS.

Modelo

Regla  $i$ :

$$\text{Si } x_1 \text{ es } M_1^i \text{ ENTONCES } \sum i: \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ \dot{w}(t) = S w(t) \\ e_i(t) = C_i x(t) - Q(w)(t), \end{cases}$$

Con  $i = 1 \dots 2$ , y la dinámica no lineal completa es obtenida por:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)]$$

$$\dot{w}(t) = S w(t)$$

$$e(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) C_i x(t) - Q(w)(t)$$

Y donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = Q = [1 \quad 0], \quad S_1 = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad w(t) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = [0.1 \quad 0.1]^T, \quad y \quad w(0) = [1 \quad 0]^T$$

Las funciones de membresía para este ejemplo son  $h_1(x_1(t)) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_1(t)}{30}\right)$  y  $h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t))$ . Observe que en este caso la señal de referencia es generada por el sistema lineal.

De las matrices  $C_i$ , con  $i = 1, 2$  y  $Q$ , es claro que la salida de la planta difusa es  $y(t) = x_1(t)$ , mientras que la señal de referencia, es decir, la salida del exosistema es  $y_{ref} = w_1(t)$ . En otras palabras, el problema de regulación consiste en buscar una señal de control  $u(t)$  tal que  $x_1(t)$  converja con  $w_1(t)$  conforme el tiempo avanza.

Por lo tanto, después de aplicar el método propuesto en [(15)] Capítulo 3 de esta tesis, puede ser fácilmente derivado que  $x_1 = w_1$ , mientras que el mapeo difuso resulta ser

$$\pi(w(t)) = \Pi_1 w(t) = \Pi_2 w(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w(t) = \Pi w(t), \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \gamma(w(t)) &= \sum_{i=1}^2 h_i(w_1(t)) \Gamma_i w(t) \\ &= \frac{3}{2} h_1(w_1(t)) w_1 + 4 h_2(w_1(t)) w_1(t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Por otra parte, el estabilizador difuso para este sistema, puede ser construido considerando:

$$K_1 = [-1.61 \quad -0.35]$$

$$K_2 = [-4.22 \quad -0.71]$$

Por lo que el siguiente controlador puede ser obtenido de Capítulo 3, [(18)], [(15)].

$$u = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) K_i [x(t) - \Pi w(t)] + \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) \Gamma_i w(t) \quad (5.3)$$

La figura 5.1 muestra los resultados de la simulación después de aplicar el controlador (5.3). Como se observa, el error de seguimiento permanece acotado, pero en este ejemplo simple no satisface las condiciones para el seguimiento difuso exacto, el cual es analizado en Capítulo 3 [(18)], [(15)].

Ahora, el método propuesto en el capítulo 4 es aplicado en el mismo modelo difuso de TS, en este caso, el mapeo difuso es obtenido al resolver la versión dinámica de la ecuación de Francis (4.44) y (4.455) del capítulo anterior.

**Encontrando el estado estacionario del error cero:**  $x_{ss}(t) = \pi(w(t)) = \tilde{\Pi}(t)w(t)$

En este punto, una matriz  $\tilde{\Pi}(t)$  de  $[n \times s]$  debe encontrarse, tal que  $x_{ss}(t) = \tilde{\Pi}(t)w(t)$  en estado estacionario. Si esta matriz no puede ser encontrada, entonces el problema de regulación difusa no tiene solución. Este paso es desarrollado considerando  $\dot{\tilde{\Pi}}(t) = 0$ .

Para este caso, el enfoque para construir  $\tilde{\Pi}(t)$  puede ser resumido como:

En estado estacionario

$$x_1(t) = w_1(t), \tag{5.4}$$

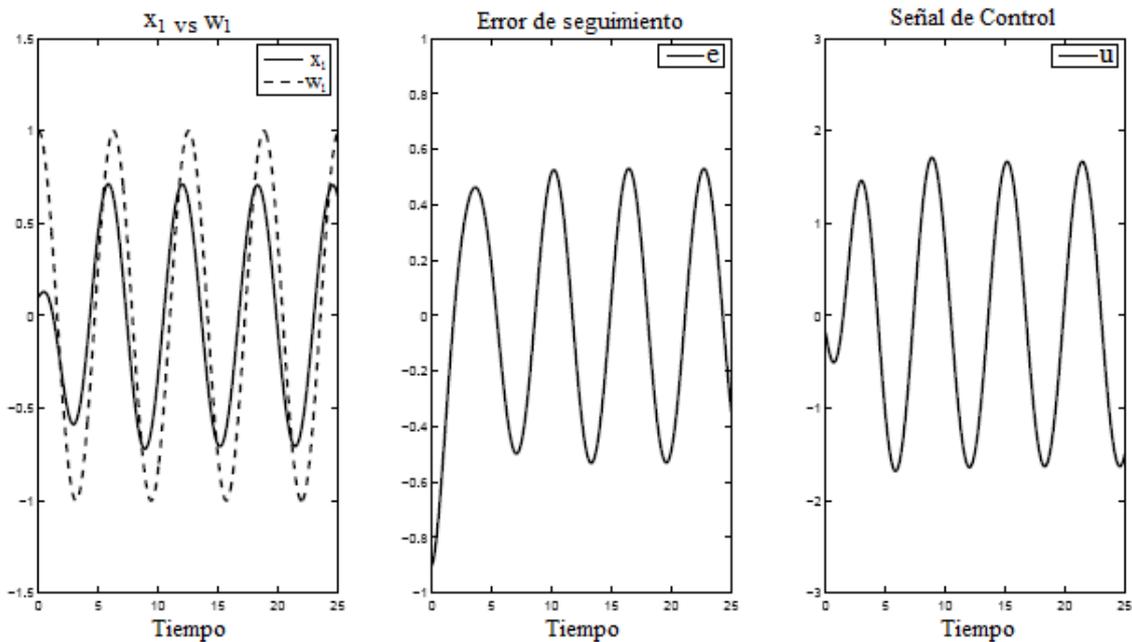


Figura 5.1 La salida vs referencia y el error de seguimiento cuando el controlador difuso es diseñado a base de reguladores lineales



Entonces de derivar (5.4) respecto al tiempo, obtenemos

$$\dot{x}_1(t) = \dot{w}_1(t)$$

Pero a partir del modelo difuso TS y de las matrices que lo definen, se deduce que:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

y

$$\dot{w}_1(t) = w_2(t).$$

Resultando

$$x_2(t) = w_2(t). \quad (5.5)$$

Por consiguiente, de (5.4)-(5.5) resulta.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} = \tilde{\Pi}(t)w(t) = \pi(w(t)) = x_{ss}(t).$$

**Encontrando la entrada en estado estacionario:**  $u_{ss}(t) = \gamma(w(t)) = \tilde{\Gamma}(t)w(t)$

Diferenciando (5.5) respecto al tiempo, y considerando la representación difusa de TS en (4.13)-(4.15), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \dot{w}_2(t), \\ 2h_1(x_1(t)).x_1(t) + 3h_2(x_1(t)).x_1(t) + \\ 2h_1(x_1(t)).u(t) + h_2(x_1(t)).u(t) &= -w_1(t), \end{aligned} \quad (5.6)$$



Pero este análisis debe llevarse a cabo en estado estacionario. Así, de acuerdo con el estado estacionario,  $\pi(w(t))$ , calculado previamente, claro que  $x_1(t) = w_1(t)$  y  $x_2(t) = w_2(t)$ . así, la ecuación (5.6) puede ser rescrita como sigue:

$$\begin{aligned} & 2h_1(w_1(t)).w_1(t) + 3h_2(w_1(t)).w_1(t) + \\ & 2h_1(w_1(t)).u_{ss}(t) + h_2(w_1(t)).u_{ss}(t) = -w_1(t) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} u_{ss}(t) &= -\frac{2h_1(w_1(t)) + 3h_2(w_1) + 1}{2h_1(w_1(t)) + h_2(w_1(t))} w_1(t), \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{2h_1(w_1(t)) + 3h_2(w_1(t)) + 1}{2h_1(w_1(t)) + h_2(w_1(t))} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \\ &= \tilde{\Gamma}(t)w(t) = \gamma(w(t)). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Por consecuente

$$\pi(w(t)) = \tilde{\Pi}(t)w(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w(t) = \Pi w(t), \quad (5.9)$$

$$\gamma(w(t)) = \tilde{\Gamma}(t)w(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2h_1(w_1(t))+3h_2(w_1(t))+1}{2h_1(w_1(t))+h_2(w_1(t))} & 0 \end{bmatrix} w(t) \quad (5.10)$$

Observe que (5.9) y (5.10) son la solución de las ecuaciones (4.37)-(4.38) considerando  $\dot{\tilde{\Pi}}(t) = 0$  en  $t = 0$  de hecho, para este caso  $\dot{\tilde{\Pi}}(t) = 0$ , para  $t > 0$  porque  $\tilde{\Pi}(t)$  es constante. Por lo tanto, no hay necesidad de construir un controlador dinámico para resolver el problema de regulación difusa.

Por otra parte, nótese que (5.1) y (5.9) son los mismos, sin embargo (5.2) difiere claramente de (5.10).

El estabilizador se construye como el anterior y el controlador difuso es (4.27), es decir.

$$u(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) K_i [x(t) - \pi(w(t))] + \gamma(w(t)).$$

A continuación los resultados obtenidos de la simulación, después de aplicar este último controlador en el modelo difuso TS, se presentan en la figura 5.2.

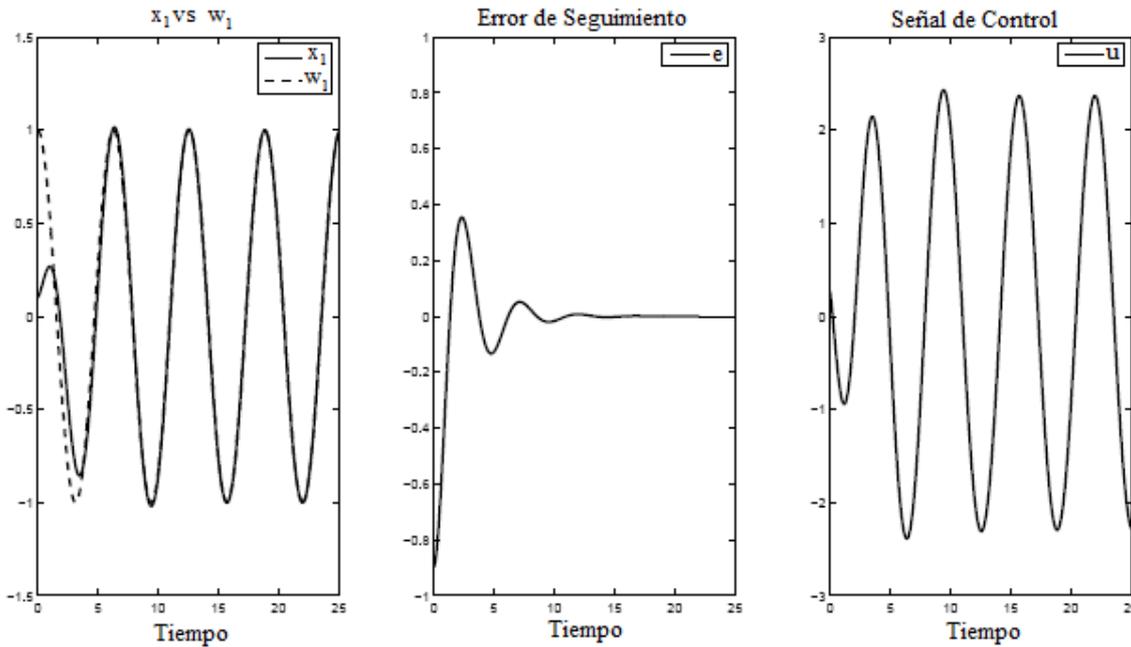


Figura 5.2 Salida vs referencia y el error de seguimiento cuando el controlador difuso se obtiene a partir de las ecuaciones dinámicas de Francis

Como puede verse fácilmente:

El controlador diseñado utiliza matrices continuas variantes en el tiempo para resolver las ecuaciones dinámicas de Francis, que a su vez supera el controlador destinado al regulador lineal.

También es importante observar que (5.2) coincide con (5.10) cuando  $h_1(w_1(t)) = 1$ ,  $h_1(w_2(t)) = 0$  y cuando  $h_1(w_1(t)) = 0$ ,  $h_1(w_2(t)) = 1$ . En otras palabras, ambos, (5.2) y (5.10) resuelven el problema de regulación de salida exacta para los sistemas lineales locales incluyendo el modelo difuso TS. Sin embargo, (5.10) resuelve el problema de regulación de salida exacta en regiones de interpolación, mientras que (5.2) no es capaz de hacer lo mismo, en general [(15)].



## CAPÍTULO 6

# CONCLUSIONES



## 6.1 CONCLUSIONES Y APORTACIONES

Esta investigación ha desarrollado un controlador difuso para sistemas de tiempo continuo basado en la combinación de la teoría de la regulación lineal (ecuaciones dinámicas Francis) y el modelo difuso Takagi-Sugeno. De esta manera, el Problema de Regulación Difusa de Salida Exacta ha sido definido y las condiciones de existencia han sido determinadas.

La ventaja de este método es que la convergencia global o total de la salida del error de seguimiento en la región de interés se puede obtener, en contraste con las propiedades locales del método del regulador no lineal clásico.

Además,  $\pi(w(t))$  y  $\gamma(w(t))$ , garantizan la propiedad de la regulación exacta, a su vez se puede obtener simbólicamente la solución de un conjunto de ecuaciones lineales dinámicas (Ecuaciones dinámicas Francis).

Como consecuencia, puede ser fácilmente observado que el resultado presentado permite que el error de seguimiento tienda a cero en general.

Por desgracia, el regulador difuso exacto es más complejo que el regulador difuso diseñado como la suma difusa de los reguladores lineales locales. Pero, incluso en los casos en los cuales los métodos anteriores sólo podían garantizar error limitado, sin embargo este nuevo método garantiza el seguimiento exacto.

A su vez dos ejemplos son considerados a fin de demostrar la validez, la aplicabilidad y ventajas del método propuesto, cuando se le compara con los métodos anteriores.



## 6.2 RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Como se puede apreciar este trabajo permite desarrollar nuevas líneas de investigación para trabajos futuros en base a que este trabajo puede ser alentador a encontrar más similitudes entre los sistemas lineales variables en el tiempo y los modelos difusos TS.

A su vez alienta al estudiante a aplicar esta Teoría de Regulación Difusa exacta a sistemas mecatronicos como es el caso del Laboratorio de Rotodinámica del Instituto Politécnico Nacional de la SEPI Zacatenco. Como por ejemplo las chumaceras de Levitación Magnética, chumaceras hidrostáticas, hidrodinámicas, híbridas, esto a través de de la gran información de su modelo matemático y comprándolo con los resultados experimentales. Antes y después de aplicar el nuevo modelo propuesto, en el cual se podrá verificar la disminución las vibraciones mecánicas del sistema con el método propuesto.



## REFERENCIAS

1. **J.JE., Slotine.** "*Applied Nonlinear Control*", . New Jersey : prentice Hall, 1991.
2. **K., Khalil H.** *Nonlinear Systems*. s.l. : prentice Hall, 1996. second edition.
3. **Conte G., Perdon A.M.** *Nonlinear Control Systems*. London Berlin : Springer.
4. **Francis., B. A.** *The linear multivariable regulator problem*. s.l. : SIAM J. Cont. Optimiz., , 15:486–505, 1977.
5. **Isidori., A.** *Nonlinear Control Systems*. s.l. : Springer.
6. **J., Huang.** *Evolution of the Internal Model Principle: From Linear to Nonlinear*. Hong Kong : s.n., 2004.
7. *Analisis de la controlabilidad instantanea para sistemas mecatronicos no lineales modelado por sistemas difusos tipo TS.* **Aguilar-Martinez, E.A.** México D.F. : Tesis de Maestría, SEPI-ESIME, IPN, 2010.
8. *Cálculo de la Velocidad Umbral de Estabilidad Utilizando Configuraciones del Modelo Jeffcott para Rotores de Eje Rígido y Rotores de Eje Flexible.* **Antonio-García, A., Gómez-Mancilla, J.C. y Nosov, V.R.** México D.F. : 3° Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, 2002.
9. *Vibration Analysis in the Characterization of the Dynamic Behaviour of Cracked Rotating Shafts.* **García-Illescas, R. y Gómez-Mancilla, J.C.** Sydney : 6th International Conference on Rotor Dynamics, IFToMM, 2002.
10. *The influence of crack-imbalance orientation and orbital evolution for an extended cracked Jeffcott rotor.* **Gomez-Mancilla, J.C., y otros.** 12, Paris : Comptes Rendus Mécanique, 2004, Vol. 332.
11. *Perturbed Pressure Field Solution for Misaligned Short Journal Bearings.* **Gómez-Mancilla, J.C. y Nosov, V.R.** Honolulu, Hawaii : 9th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, ISCORMAC-9, 2002.
12. *New Modeling Approach for Detection and Behavioral Characterization of Cracked Rotating Shafts.* **Gómez-Mancilla, J.C., García-Illescas, R. y Nosov, V.R.** Honolulu, Hawaii : 9th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-9, 2002.
13. *Model Derivation and Numerical Simulation for a Pivoted Rigid Rotor-Bearing System.* **Gómez-Mancilla, J.C., y otros.** s.l. : Applied Mechanics and Materials, 2009, Vol. 15.



14. **J. A. Meda-Campaña, Castillo-Toledo.** *On the Nonlinear Fuzzy Regulation for under-actuated systems. In Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Fuzzy Systems,*. Vancouver, Canada, : s.n., July 16-21 2006. pages 2195–2202.
15. **J. A. Meda-Campaña, B. Castillo-Toledo, and G. Chen.** *Synchronization of chaotic systems from a fuzzy regulation approach. Fuzzy Sets and Systems.* 2009. 160:2860–2875.
16. **Castillo-Toledo., J. A. Meda-Campana and B.** *The optimal fuzzy robust regulator for TS discrete-time systems: An LMI approach. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing.* 2009. 23:837862.
17. **Castillo-Toledo., A. Meda-Campaña and B.** *On the output regulation for ts fuzzy models using sliding modes. .* Portland, OR, USA, : In Proceedings of the 2005 American Control Conference, June 2005. pages 4062–4067.
18. **Campaña, J.A. Meda.** *On the relaxation for the exact output regulation for Takagi-Sugeno Fuzzy Models.* 6 may 2010.
19. **V.R. Nosov, N. D. Thang.** *Control De Secado De Arroz, Idioma Ruso, Instituto Blagonravov de Máquinas y Mecanismos de Academia de Ciencias de Rusia.* 1996.
20. **V.R. Nosov, N. H. Doahn.** *Método De Lyapunov En La Teoría De Control Adaptivo Idioma Ruso, Instituto Blagonravov de Máquinas y Mecanismos . s.l. : Academia de Ciencias de Rusia.*
21. **V.B. Kolmanovskii, V. R. Nosov.** *Métodos Numéricos Y De Aproximación En Teoría Del Control, Idioma Ruso.* Moscú : Instituto Estatal de Electrónica y Matemáticas , 1989.
22. —. *Estabilidad En Sistemas De Control, Idioma Ruso.* Moscú : Instituto Estatal de Electrónica y Matemáticas de Moscú, 1986. , 1986.
23. **J., Baptiste L.** *Influencia del amortiguamiento en la estabilidad dinamica de los modos característicos en rotores modelados viga continuos.* mexico : IPN, 2010. Vol. 1. 1.
24. **Torres-Cedillo, S.G.** *Experimentación en Laboratorio y análisis del comportamiento del sistema chumacera híbrida presurizada con Control Activo.* México D.F. : Tesis de Maestría, SEPI-ESIME, IPN, 2010.
25. **Machorro-López, J.M.** *Desarrollo de técnicas de Diagnóstico de Rotores Fisurados sólo Monitoreando y Analizando su Dinámica.* México D.F. : Tesis de Doctorado, SEPI-ESIME, IPN, 2009.
26. **Doyle H., Francis B.** *Feedback Control Theory.* s.l. : Macmillan Publishing Co., 1990.
27. **C.T, Chen.** *Introduction to linear system theory.* s.l. : rinehart and wiston Inc.



28. **B.M, Hautus.** *Linear matrix equations with applications to the regulator problem" outlis and models mathematiques pour l' Automatique.* s.l. : (I.D. Landau Ed.) C.N.R.S. , 1983. pp399-412.
29. **M.A., Osorio.** *Control Robust para Reactors por medio de la teoría de l regulación lineal.* 1994.
30. **J., Huang.** *Nonlinear Output Regulation Theory and Applications.* the chinse University of Hong Kong : Siam, , 2004.
31. **Isidori A., Byrnes C.I.** *Output regulati3n of nonlinear systems.* s.l. : IEEE trans. Aut. Control. Vol. 35, pp 131-140.
32. **B., Castillo.** *Applicazioni del la regolazione nei sistemi di controllo non lineare . Tesis Doctorado en ciencias, Univ. De Roma : s.n., 1992.*
33. **Sugeno., T. Takagi and M.** *Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control. .* s.l. : IEEE Trans. on SMC, , 15(1):116-132, 1985.
34. **Sugeno., K. Tanaka and M.** *Stability analysis and design of fuzzy control systems. Fuzzy sets Syst.* 45(2):135-156, 1992.
35. **Zadeh., Lofti A.** *Fuzzy sets. Information and Control.* 8:338-353, 1965.
36. **Kevin M. Passino, S. Yurkovich.** *Fuzzy Control , .* s.l. : Addison Wesley Longman Inc. , 1998.
37. **Wang, L.X.** *A course in fuzzy systems and control.* s.l. : Prentice Hall Inc., 1997.
38. **G.V.S. Raju, J. Zhou.** *Adaptive fuzzy control.* s.l. : IEEE vol 23, No.4, pp 973-980, July/August 1993.
39. **Lee., Chuen Chien.** *Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller part II. .* s.l. : IEEE Transactions on Systems 20(2):419-435, March/April 1990b.
40. **Sugeno., T. Takagi y M.** *Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control.* s.l. : IEEE Transactions on Systems, , 15: 116-132, 1985.
41. **O.Wang., K. Tanaka y Hua.** *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach .* s.l. : John Wiley & Sons, Inc., 2001.
42. **H. O. Wang, K. Tanaka, y M. F. Griffin.** *Parallel distributed copmensation of nonlinear systems by takagi-sugeno fuzzy model. .* s.l. : Proceedings of IEEE/IFES 95, pages 531-538., 1995.
43. **Su., Zhen Cai and Chun-Yi.** *Real-time tracking control of underactuated pendubot using takagi-sugeno fuzzy systems. .* s.l. : In Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation.



44. **Zeng-Qi., M. Xiao-Jun and S.** *Output tracking and regulation on nonlinear system based on Takagi-Sugeno fuzzy model.* . s.l. : IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 30(1):47-59, February 2000.
45. **S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan.** *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory.* . s.l. : SIAM, Philadelphia, PA., 1994.
46. **B. Castillo T., J.A. Meda C., A. Titli.** *A fuzzy output regulator for Takagi-Sugeno fuzzy models.* texas : IEEE, 2003.
47. **L.M. Pecora, T.L. Carroll.** *Synchronization in chaotic systems.* s.l. : Phys. Rev. Lett. 821-824., 1990.
48. **Pikovsky., A.S.** *On the interaction of strange attractors,* . s.l. : Z.Phys. 149-154., 1984.
49. **Pyragas., K.** *Weak and strong synchronization of chaos.* s.l. : Phys. Rev. R4508-R4512., 1996.
50. **N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, H.D.I. Abarbanel.** *General synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems.* s.l. : Phys. Rev. 980-994., 1995.
51. **L. Kocarev, U. Parlitz.** *Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems.* s.l. : Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 1816-1819., 1996.
52. **Katayama., A. Ichikawa and H.** *Output regulation of time-varying systems.* s.l. : Systems and Control Letters, 55:9991005., 2006.



## APÉNDICES

**A1.** Programa realizado en MATLAB® versión 7.0 para la sincronización generalizada del sistema de Lorenz y el sistema de Rössler con error acotado

```
clear all;
clc;
%Lorenz
al=10;
bl=8/3;
cl=28; %99.96;%
dl=30;
A1=[-al al 0;
     cl -1 -dl;
     0 dl -bl];

A2=[-al al 0;
     cl -1 dl;
     0 -dl -bl];

B=[0; 1; 0]; %%LORENZ
%B=[0; 0; 1]; %%ROSSLER

%Rössler
ar=0.34; %0;%0.1;%
br=0.4;
cr=0;
dr=10;
S1=[0 -1 -1;
     1 ar 0;
     br 0 -dr];

S2=[0 -1 -1;
     1 ar 0;
     br 0 dr];
%S1=10*[0 1 0;-1 0 0;0 0 0];
%S2=-S1;
Bs=[0; 0; 1];

C=[1 0 0];% Matriz de salida para Lorenz
R=[1 0 0];% Matriz de salida para Rössler

%LMI para el controlador A'Q+QA+N'B'+BN<0
%Tamaño de Q
[renq unUse]=size(A1);
%Tamaño de R
[unUse coln]=size(B);

%LMI para el observador A'P+PA+C'M'+MC<0
%Tamaño de P para el observador
%[renp unUse]=size(Ae1);
%[renm unUse]=size(C)
```

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría



```
%Inicio de la lmi
setlmiis([]);
%Definición de matrices incógnitas
Q=lmivar(1,[renq 1]);
N1=lmivar(2,[coln renq]);
N2=lmivar(2,[coln renq]);
N3=lmivar(2,[coln renq]);

%controladores
%1er lmi
lmi_1=newlmi;
lmiterm([lmi_1,1,1,Q],1,A1','s');
lmiterm([lmi_1,1,1,N1],B,1,'s');
lmiterm([lmi_1,1,1,0],0*eye(4));

%2do lmi
lmi_2=newlmi;
lmiterm([lmi_2,1,1,Q],1,A2','s');
lmiterm([lmi_2,1,1,N2],B,1,'s');
lmiterm([lmi_2,1,1,0],0*eye(4));

%4to lmi
lmi_4=newlmi;
lmiterm([lmi_4,1,1,Q],1,A1','s');
lmiterm([lmi_4,1,1,N2],B,1,'s');
lmiterm([lmi_4,1,1,Q],1,A2','s');
lmiterm([lmi_4,1,1,N1],B,1,'s');
lmiterm([lmi_4,1,1,0],0*eye(4));

%7mo lmi
lmi_Qpos=newlmi;
lmiterm([-lmi_Qpos,1,1,Q],1,1);

lmisys=getlmiis;

disp('Número de Lmis');
disp(lminbr(lmisys));

disp('Número de matrices variables');
disp(matnbr(lmisys));

%lmiinfo(lmisys);

%Solución de la LMI
[tmin,xopt]=feasp(lmisys);
%[copt xopt]=mincx(lmisys,[ones(1,25)]);

%Ordenar el resultado en la forma requerida de P
Qf=dec2mat(lmisys,xopt,Q);
disp('Matriz Obtenida Q');
disp(Qf);
disp('Valores propios de Q');
disp(eig(Qf));
Pc=inv(Qf);
```

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría



```
disp('Matriz Obtenida P para los controladores');
disp(Pc);
disp('Valores propios de P para los controladores');
disp(eig(Pc));

disp('Valores de K1');
Nf1=dec2mat(lmisys,xopt,N1);
Nf2=dec2mat(lmisys,xopt,N2);

K1=Nf1*Pc
K2=Nf2*Pc

% K1=-acker(A1,B,[-10 -11 -12])
% K2=-acker(A2,B,[-10 -11 -12])

BK1=B*K1;
BK2=B*K2;

%Mapeos
%Inicio de la lmi
setlmis([]);
%Definición de matrices incógnitas

Q11=lmivar(1,[3 1]);
Q12=lmivar(1,[3 1]);
P11=lmivar(2,[3 3]);
G11=lmivar(2,[1 3]);

Q21=lmivar(1,[3 1]);
Q22=lmivar(1,[3 1]);
P21=lmivar(2,[3 3]);
G21=lmivar(2,[1 3]);

Q31=lmivar(1,[3 1]);
Q32=lmivar(1,[3 1]);
P31=lmivar(2,[3 3]);
G31=lmivar(2,[1 3]);

Q41=lmivar(1,[3 1]);
Q42=lmivar(1,[3 1]);
P41=lmivar(2,[3 3]);
G41=lmivar(2,[1 3]);

%1er lmi (C*P-R)'*(C*P-R)<Q1
lmi_11=newlmi;
lmiterm([-lmi_11,1,1,Q11],1,1);
lmiterm([-lmi_11,2,1,P11],C,1);
lmiterm([-lmi_11,2,1,0],-R);
lmiterm([-lmi_11,2,2,0],eye(1));

%2do lmi (A*P+B*G-P*S)'*(A*P+B*G-P*S)<Q2
lmi_12=newlmi;
lmiterm([-lmi_12,1,1,Q12],1,1);
lmiterm([-lmi_12,2,1,P11],A1,1);
```

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría



```
%lmiterm([-lmi_2,2,1,G],B1,1);

lmiterm([-lmi_12,2,1,G11],B,1); %

lmiterm([-lmi_12,2,1,P11],-1,S1);
lmiterm([-lmi_12,2,2,0],eye(1));

%7mo lmi
lmi_Q11=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q11,1,1,Q11],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q11,1,1,0],.01*eye(3));

%8vo lmi
lmi_Q12=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q12,1,1,Q12],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q12,1,1,0],.01*eye(3));

%1er lmi (C*P-R)'*(C*P-R)<Q1
lmi_21=newlmi;
lmiterm([-lmi_21,1,1,Q21],1,1);
lmiterm([-lmi_21,2,1,P21],C,1);
lmiterm([-lmi_21,2,1,0],-R);
lmiterm([-lmi_21,2,2,0],eye(1));

%2do lmi (A*P+B*G-P*S)'*(A*P+B*G-P*S)<Q2
lmi_22=newlmi;
lmiterm([-lmi_22,1,1,Q22],1,1);
lmiterm([-lmi_22,2,1,P21],A2,1);

%lmiterm([-lmi_2,2,1,G],B1,1);

lmiterm([-lmi_22,2,1,G21],B,1); %

lmiterm([-lmi_22,2,1,P21],-1,S2);
lmiterm([-lmi_22,2,2,0],eye(1));

%7mo lmi
lmi_Q21=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q21,1,1,Q21],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q21,1,1,0],.01*eye(3));

%8vo lmi
lmi_Q22=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q22,1,1,Q22],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q22,1,1,0],.01*eye(3));

%1er lmi (C*P-R)'*(C*P-R)<Q1
lmi_31=newlmi;
lmiterm([-lmi_31,1,1,Q31],1,1);
lmiterm([-lmi_31,2,1,P31],C,1);
lmiterm([-lmi_31,2,1,0],-R);
lmiterm([-lmi_31,2,2,0],eye(1));

%2do lmi (A*P+B*G-P*S)'*(A*P+B*G-P*S)<Q2
lmi_32=newlmi;
lmiterm([-lmi_32,1,1,Q32],1,1);
```

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría



```
lmiterm([-lmi_32,2,1,P31],A1,1);

%lmiterm([-lmi_2,2,1,G],B1,1);

lmiterm([-lmi_32,2,1,G31],B,1); %

lmiterm([-lmi_32,2,1,P31],-1,S2);
lmiterm([-lmi_32,2,2,0],eye(1));

%7mo lmi
lmi_Q31=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q31,1,1,Q31],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q31,1,1,0],.01*eye(3));

%8vo lmi
lmi_Q32=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q32,1,1,Q32],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q32,1,1,0],.01*eye(3));

%1er lmi (C*P-R)'*(C*P-R)<Q1
lmi_41=newlmi;
lmiterm([-lmi_41,1,1,Q41],1,1);
lmiterm([-lmi_41,2,1,P41],C,1);
lmiterm([-lmi_41,2,1,0],-R);
lmiterm([-lmi_41,2,2,0],eye(1));

%2do lmi (A*P+B*G-P*S)'*(A*P+B*G-P*S)<Q2
lmi_42=newlmi;
lmiterm([-lmi_42,1,1,Q42],1,1);
lmiterm([-lmi_42,2,1,P41],A2,1);

%lmiterm([-lmi_2,2,1,G],B1,1);

lmiterm([-lmi_42,2,1,G41],B,1); %

lmiterm([-lmi_42,2,1,P41],-1,S1);
lmiterm([-lmi_42,2,2,0],eye(1));

%7mo lmi
lmi_Q41=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q41,1,1,Q41],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q41,1,1,0],.01*eye(3));

%8vo lmi
lmi_Q42=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q42,1,1,Q42],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q42,1,1,0],.01*eye(3));

lmisys=getlmis;

disp('Número de Lmis');
disp(lminbr(lmisys));

disp('Número de matrices variables');
```

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría



```
disp(matnabr(lmisys));

%lmiinfo(lmisys);

%Solución de la LMI
[tmin,qfeas]=feasp(lmisys);

%Ordenar el resultado en la forma requerida de P
Qf1=dec2mat(lmisys,qfeas,Q11);
Qf12=dec2mat(lmisys,qfeas,Q12);
Pi11=dec2mat(lmisys,qfeas,P11);
Gamma11=dec2mat(lmisys,qfeas,G11);

Qf2=dec2mat(lmisys,qfeas,Q21);
Qf22=dec2mat(lmisys,qfeas,Q22);
Pi22=dec2mat(lmisys,qfeas,P21);
Gamma22=dec2mat(lmisys,qfeas,G21);

Qf3=dec2mat(lmisys,qfeas,Q31);
Qf32=dec2mat(lmisys,qfeas,Q32);
Pi12=dec2mat(lmisys,qfeas,P31);
Gamma12=dec2mat(lmisys,qfeas,G31);

Qf4=dec2mat(lmisys,qfeas,Q41);
Qf42=dec2mat(lmisys,qfeas,Q42);
Pi21=dec2mat(lmisys,qfeas,P41);
Gamma21=dec2mat(lmisys,qfeas,G41);

[rws lns]=size(Pi11);
for i=1:rws
    for j=1:lns
        if abs(Pi11(i,j))<1e-3
            Pi11(i,j)=0;
        end;
        if abs(Pi12(i,j))<1e-3
            Pi12(i,j)=0;
        end;
        if abs(Pi21(i,j))<1e-3
            Pi21(i,j)=0;
        end;
        if abs(Pi22(i,j))<1e-3
            Pi22(i,j)=0;
        end;
    end;
end;

[rws lns]=size(Gamma11);
for i=1:rws
    for j=1:lns
        if abs(Gamma11(i,j))<1e-3
            Gamma11(i,j)=0;
        end;
        if abs(Gamma12(i,j))<1e-3
            Gamma12(i,j)=0;
        end;
        if abs(Gamma21(i,j))<1e-3
            Gamma21(i,j)=0;
        end;
    end;
end;
```

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría

```

if abs(Gamma22(i,j)) < 1e-3
    Gamma22(i,j) = 0;
end;
end;
end;

```

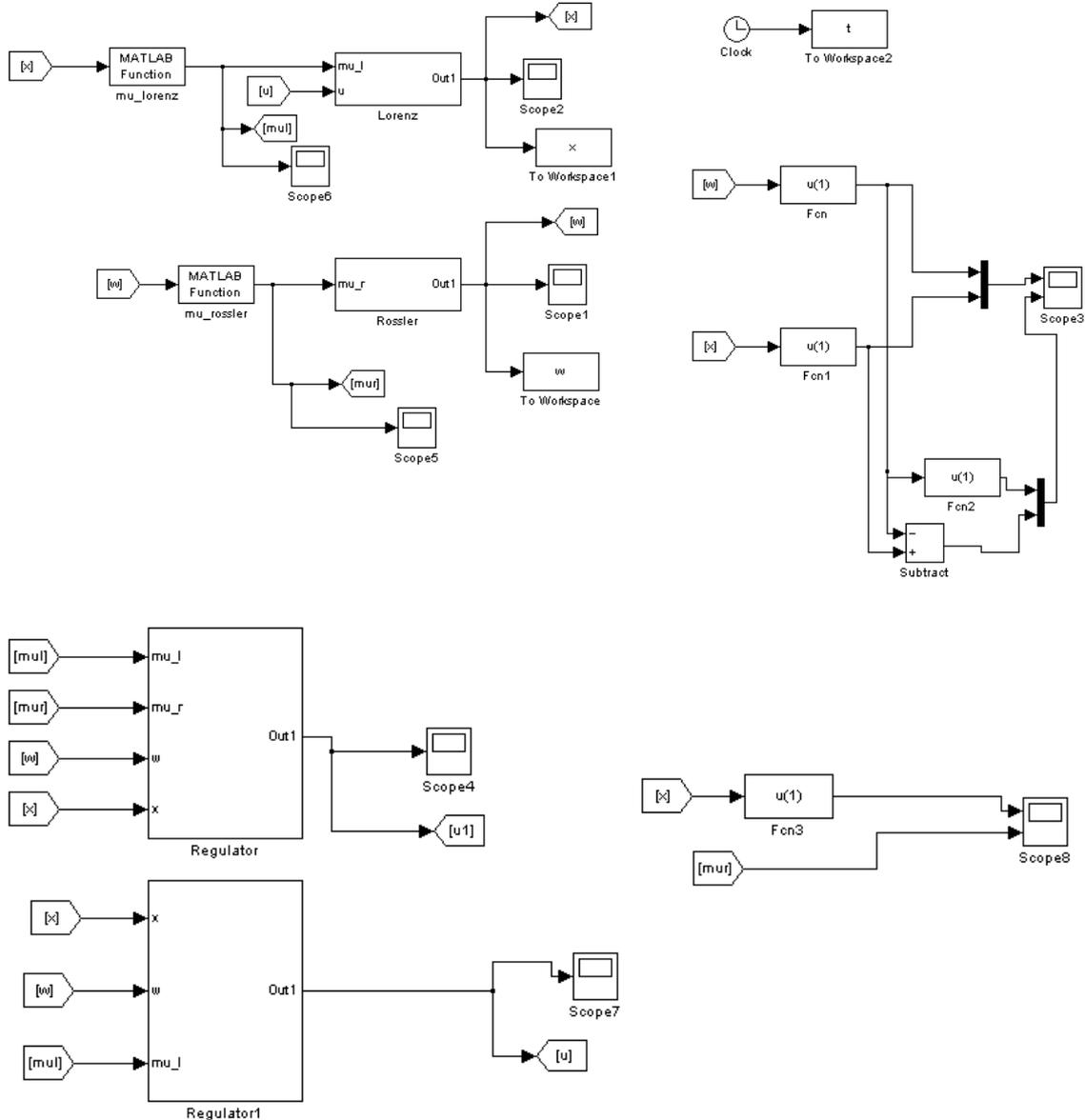
```

disp('subsistemas')
A1*Pi11+B*Gamma11-Pi11*S1
A2*Pi22+B*Gamma22-Pi22*S2

A1*Pi12+B*Gamma12-Pi12*S2
A2*Pi21+B*Gamma21-Pi21*S1

```

**A2.** Programa realizado en MATLAB® versión 7.0 para complementar el apéndice A1.



Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría



**B1.** Programa realizado en MATLAB® versión 7.0 para la regulación difusa cuando el exosistema es puramente lineal con error acotado

```
clear;
clc;
echo off;
%Definicion de subsistemas
A1=[0 1;2 0];
B1=[0;2];

K1=-acker(A1,B1, [-1 -1]);

S1=[0 1;-1 0];

A2=[0 1;3 0];
B2=[0;1];

C=[1 0];
K2=-acker(A2,B2, [-1 -1]);

S2=[0 1;-1 0];
R=[1 0];

%LMI para el controlador  $A'Q+QA+N'B'+BN<0$ 
%Tamaño de Q
[renq unUse]=size(A1);
%Tamaño de R
[unUse coln]=size(B1);

%LMI para el observador  $A'P+PA+C'M'+MC<0$ 
%Tamaño de P para el observador
%[renp unUse]=size(Ae1);
%[renm unUse]=size(C)

%Inicio de la lmi
setlmis([]);
%Definición de matrices incógnitas
Q=lmivar(1,[renq 1]);
N1=lmivar(2,[coln renq]);
N2=lmivar(2,[coln renq]);
N3=lmivar(2,[coln renq]);

%controladores
%1er lmi
lmi_1=newlmi;
lmiterm([lmi_1,1,1,Q],1,A1','s');
lmiterm([lmi_1,1,1,N1],B1,1,'s');
lmiterm([lmi_1,1,1,0],0*eye(4));

%2do lmi
lmi_2=newlmi;
lmiterm([lmi_2,1,1,Q],1,A2','s');
lmiterm([lmi_2,1,1,N2],B2,1,'s');
lmiterm([lmi_2,1,1,0],0*eye(4));
```

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría



```
%4to lmi
lmi_4=newlmi;
lmiterm([lmi_4,1,1,Q],1,A1,'s');
lmiterm([lmi_4,1,1,N2],B2,1,'s');
lmiterm([lmi_4,1,1,Q],1,A2,'s');
lmiterm([lmi_4,1,1,N1],B1,1,'s');
lmiterm([lmi_4,1,1,0],0*eye(4));

%7mo lmi
lmi_Qpos=newlmi;
lmiterm([-lmi_Qpos,1,1,Q],1,1);

lmisys=getlmis;

disp('Número de Lmis');
disp(lminbr(lmisys));

disp('Número de matrices variables');
disp(matnbr(lmisys));

%lmiinfo(lmisys);

%Solución de la LMI
[tmin,xopt]=feasp(lmisys);
%[copt xopt]=mincx(lmisys,[ones(1,25)]);

%Ordenar el resultado en la forma requerida de P
Qf=dec2mat(lmisys,xopt,Q);
disp('Matriz Obtenida Q');
disp(Qf);
disp('Valores propios de Q');
disp(eig(Qf));
Pc=inv(Qf);
disp('Matriz Obtenida P para los controladores');
disp(Pc);
disp('Valores propios de P para los controladores');
disp(eig(Pc));

disp('Valores de K1');
Nf1=dec2mat(lmisys,xopt,N1);
Nf2=dec2mat(lmisys,xopt,N2);

K1=Nf1*Pc
K2=Nf2*Pc

%Mapeos
%Inicio de la lmi
setlmis([]);
%Definición de matrices incógnitas

Q11=lmivar(1,[2 1]);
```

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría



```
Q12=lmivar(1,[2 1]);
P11=lmivar(2,[2 2]);
G11=lmivar(2,[1 2]);

Q21=lmivar(1,[2 1]);
Q22=lmivar(1,[2 1]);
P21=lmivar(2,[2 2]);
G21=lmivar(2,[1 2]);

Q31=lmivar(1,[2 1]);
Q32=lmivar(1,[2 1]);
P31=lmivar(2,[2 2]);
G31=lmivar(2,[1 2]);

Q41=lmivar(1,[2 1]);
Q42=lmivar(1,[2 1]);
P41=lmivar(2,[2 2]);
G41=lmivar(2,[1 2]);

%1er lmi (C*P-R)'*(C*P-R)<Q1
lmi_11=newlmi;
lmiterm([-lmi_11,1,1,Q11],1,1);
lmiterm([-lmi_11,2,1,P11],C,1);
lmiterm([-lmi_11,2,1,0],-R);
lmiterm([-lmi_11,2,2,0],eye(1));

%2do lmi (A*P+B*G-P*S)'*(A*P+B*G-P*S)<Q2
lmi_12=newlmi;
lmiterm([-lmi_12,1,1,Q12],1,1);
lmiterm([-lmi_12,2,1,P11],A1,1);

%lmiterm([-lmi_2,2,1,G],B1,1);

lmiterm([-lmi_12,2,1,G11],B1,1); %

lmiterm([-lmi_12,2,1,P11],-1,S1);
lmiterm([-lmi_12,2,2,0],eye(1));

%7mo lmi
lmi_Q11=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q11,1,1,Q11],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q11,1,1,0],.01*eye(2));

%8vo lmi
lmi_Q12=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q12,1,1,Q12],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q12,1,1,0],.01*eye(2));

%1er lmi (C*P-R)'*(C*P-R)<Q1
lmi_21=newlmi;
lmiterm([-lmi_21,1,1,Q21],1,1);
lmiterm([-lmi_21,2,1,P21],C,1);
lmiterm([-lmi_21,2,1,0],-R);
lmiterm([-lmi_21,2,2,0],eye(1));

%2do lmi (A*P+B*G-P*S)'*(A*P+B*G-P*S)<Q2
```

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría



```
lmi_22=newlmi;
lmiterm([-lmi_22,1,1,Q22],1,1);
lmiterm([-lmi_22,2,1,P21],A2,1);

%lmiterm([-lmi_2,2,1,G],B1,1);

lmiterm([-lmi_22,2,1,G21],B2,1); %

lmiterm([-lmi_22,2,1,P21],-1,S2);
lmiterm([-lmi_22,2,2,0],eye(1));

%7mo lmi
lmi_Q21=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q21,1,1,Q21],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q21,1,1,0],.01*eye(2));

%8vo lmi
lmi_Q22=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q22,1,1,Q22],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q22,1,1,0],.01*eye(2));

%1er lmi (C*P-R)'*(C*P-R)<Q1
lmi_31=newlmi;
lmiterm([-lmi_31,1,1,Q31],1,1);
lmiterm([-lmi_31,2,1,P31],C,1);
lmiterm([-lmi_31,2,1,0],-R);
lmiterm([-lmi_31,2,2,0],eye(1));

%2do lmi (A*P+B*G-P*S)'*(A*P+B*G-P*S)<Q2
lmi_32=newlmi;
lmiterm([-lmi_32,1,1,Q32],1,1);
lmiterm([-lmi_32,2,1,P31],A1,1);

%lmiterm([-lmi_2,2,1,G],B1,1);

lmiterm([-lmi_32,2,1,G31],B1,1); %

lmiterm([-lmi_32,2,1,P31],-1,S2);
lmiterm([-lmi_32,2,2,0],eye(1));

%7mo lmi
lmi_Q31=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q31,1,1,Q31],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q31,1,1,0],.01*eye(2));

%8vo lmi
lmi_Q32=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q32,1,1,Q32],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q32,1,1,0],.01*eye(2));

%1er lmi (C*P-R)'*(C*P-R)<Q1
lmi_41=newlmi;
lmiterm([-lmi_41,1,1,Q41],1,1);
lmiterm([-lmi_41,2,1,P41],C,1);
lmiterm([-lmi_41,2,1,0],-R);
lmiterm([-lmi_41,2,2,0],eye(1));
```

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría



```
%2do lmi (A*P+B*G-P*S)'*(A*P+B*G-P*S)<Q2
lmi_42=newlmi;
lmiterm([-lmi_42,1,1,Q42],1,1);
lmiterm([-lmi_42,2,1,P41],A2,1);

%lmiterm([-lmi_2,2,1,G],B1,1);

lmiterm([-lmi_42,2,1,G41],B2,1); %

lmiterm([-lmi_42,2,1,P41],-1,S1);
lmiterm([-lmi_42,2,2,0],eye(1));

%7mo lmi
lmi_Q41=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q41,1,1,Q41],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q41,1,1,0],.01*eye(2));

%8vo lmi
lmi_Q42=newlmi;
lmiterm([-lmi_Q42,1,1,Q42],-1,1);
lmiterm([-lmi_Q42,1,1,0],.01*eye(2));

lmisys=getlmis;

disp('Número de Lmis');
disp(lminbr(lmisys));

disp('Número de matrices variables');
disp(matnbr(lmisys));

%lmiinfo(lmisys);

%Solución de la LMI
[tmin,qfeas]=feasp(lmisys);

%Ordenar el resultado en la forma requerida de P
Qf1=dec2mat(lmisys,qfeas,Q11);
Qf12=dec2mat(lmisys,qfeas,Q12);
Pi11=dec2mat(lmisys,qfeas,P11);
Gamma11=dec2mat(lmisys,qfeas,G11);

Qf2=dec2mat(lmisys,qfeas,Q21);
Qf22=dec2mat(lmisys,qfeas,Q22);
Pi22=dec2mat(lmisys,qfeas,P21);
Gamma22=dec2mat(lmisys,qfeas,G21);

Qf3=dec2mat(lmisys,qfeas,Q31);
Qf32=dec2mat(lmisys,qfeas,Q32);
Pi12=dec2mat(lmisys,qfeas,P31);
Gamma12=dec2mat(lmisys,qfeas,G31);

Qf4=dec2mat(lmisys,qfeas,Q41);
Qf42=dec2mat(lmisys,qfeas,Q42);
```

Ing. Carlos Fernando Rojas Alegría



```
Pi21=dec2mat(lmisys,qfeas,P41);
Gamma21=dec2mat(lmisys,qfeas,G41);

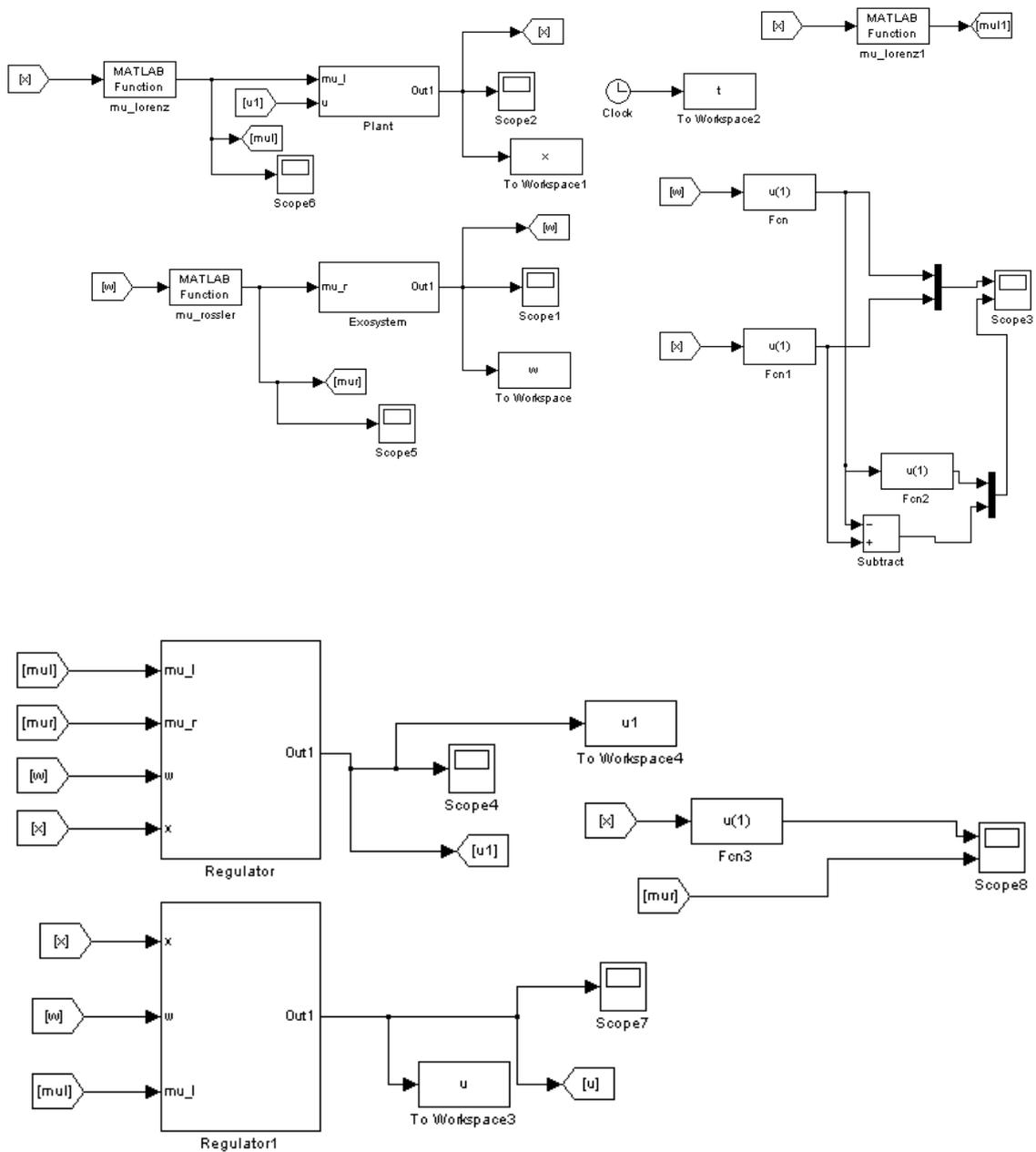
[rws lns]=size(Pi11);
for i=1:rws
    for j=1:lns
        if abs(Pi11(i,j))<1e-3
            Pi11(i,j)=0;
        end;
        if abs(Pi12(i,j))<1e-3
            Pi12(i,j)=0;
        end;
        if abs(Pi21(i,j))<1e-3
            Pi21(i,j)=0;
        end;
        if abs(Pi22(i,j))<1e-3
            Pi22(i,j)=0;
        end;
    end;
end;

[rws lns]=size(Gamma11);
for i=1:rws
    for j=1:lns
        if abs(Gamma11(i,j))<1e-3
            Gamma11(i,j)=0;
        end;
        if abs(Gamma12(i,j))<1e-3
            Gamma12(i,j)=0;
        end;
        if abs(Gamma21(i,j))<1e-3
            Gamma21(i,j)=0;
        end;
        if abs(Gamma22(i,j))<1e-3
            Gamma22(i,j)=0;
        end;
    end;
end;

disp('subsistemas')
A1*Pi11+B1*Gamma11-Pi11*S1
A2*Pi22+B2*Gamma22-Pi22*S2

A1*Pi12+B2*Gamma12-Pi12*S2
A2*Pi21+B1*Gamma21-Pi21*S1
syms m1 m2 p1 p2 p3 p4 g1 g2;
A=m1*A1+m2*A2;
B=m1*B1+m2*B2;
S=[0 1;-1 0];
P=[p1 p2;p3 p4];
G=[g1 g2];
PG=solve('p1=1',...
        'p2=0',...
        A(1,:) * P(:,1)+B(1)*G(1)-P(1,:)*S(:,1),...
        A(1,:) * P(:,2)+B(1)*G(2)-P(1,:)*S(:,2),...
        A(2,:) * P(:,1)+B(2)*G(1)-P(2,:)*S(:,1),...
        A(2,:) * P(:,2)+B(2)*G(2)-P(2,:)*S(:,2),...
        'p1,p2,p3,p4,g1,g2')
```

**B2.** Programa realizado en MATLAB® versión 7.0 para complementar el apéndice B1.





**B3.** Programa realizado en MATLAB® versión 7.0 para la regulación difusa cuando el exosistema es puramente lineal con seguimiento exacto

```
function valores=exact_p_g2x2(w)

%%PI y GAMMA DIFUSAS EXACTAS

m1=membl(w);
PI(1,1)=1;
PI(1,2)=0;
PI(2,1)=0;
PI(2,2)=1;
GAMMA(1)=-
(2*m1(1)^2+5*m1(1)*m1(2)+3*m1(2)^2+1)/(2*m1(1)^2+3*m1(1)*m1(2)+m1(2)^2
);
GAMMA(2)=0;

PIw=PI*w;

GAMMAw=GAMMA*w;

valores=[PIw(1);PIw(2);GAMMAw ];
```

**B4.** Programa realizado en MATLAB® versión 7.0 para complementar el apéndice B3.

