

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA
Y ELÉCTRICA UNIDAD ZACATENCO**

“TOPOLOGÍA FRACTAL DE PAPEL ARRUGADO MANUALMENTE”

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON
ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA MECÁNICA

PRESENTA:

ISRAEL MIGUEL ANDRÉS

DIRECTOR: DR. DIDIER SAMAYOA OCHOA

MÉXICO, D.F. JUNIO DE 2010

DEDICATORIA

A mis padres:

Edith y Camerino

Por ser un ejemplo de vida, por confiar en mi y por darme el apoyo necesario para concluir el posgrado.

A mis hermanos:

Ariana, Cristóbal, Anabeli y Juan Carlos

Por estar siempre presentes sin importar la distancia

A Juana:

Por ser un apoyo incondicional, por comprenderme y por ser la razón de mi superación.

AGRADECIMIENTOS

A la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco, por el apoyo académico que me brindaron para mi formación y poder concluir la maestría.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico aportado para el desarrollo de éste trabajo.

A la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación por haberme facilitado las herramientas necesarias para concluir la presente investigación a través del proyecto SIP-20100020 “Simulación numérica de flujo de petróleo en yacimientos con geometría fractal” dirigido por el Dr. Didier Samayoa Ochoa.

Al Dr. Didier Samayoa Ochoa por haberme ayudado a desarrollar esta tesis desde el inicio hasta el final.

Al Dr. Alexander Balankin y al Dr. Orlando Susarrey Huerta por sus asesorías, comentarios y apoyo académico.

Y a todos aquellos compañeros que de alguna manera estuvieron presentes durante estos dos años, GRACIAS.

ÍNDICE

Índice.....	6
Glosario de símbolos.....	8
Índice de tablas.....	9
Índice de figuras.....	9
Resumen.....	11
Abstract.....	11
Justificación.....	12
Objetivos.....	13
Introducción.....	14
Metodología.....	15
Capítulo 1	
Teoría fractal.....	16
1.1 Historia.....	16
1.2 Estudios previos en hojas de papel arrugadas aleatoriamente.....	17
1.3 Concepto de fractal.....	19
1.4 Dimensión fractal y dimensión de Hausdorff.....	19
1.5 Auto-similaridad.....	22
1.6 Tipos de fractales.....	22
1.6.1 Los conjuntos de Julia.....	23
1.6.2 El conjunto de Mandelbrot.....	24
1.6.3 El copo de nieve de Koch.....	24
1.7 Dimensión Fractal.....	26

1.7.1 Método de conteo de caja.....	26
1.8 Referencias bibliográficas.....	27
Capítulo 2	
Metodología experimental.....	29
2.1 Detalles experimentales.....	29
2.2 Dimensión fractal de masa.....	31
2.3 Superficies completas de las bolas.....	33
2.4 Superficies seccionadas de las bolas.....	35
2.5 Referencias bibliográficas.....	37
Capítulo 3	
Análisis de resultados.....	38
3.1 Dimensión fractal de masa.....	38
3.2 Topología fractal de superficie de las bolas sin cortar.....	38
3.2.1 Dimensión fractal de superficie por áreas.....	39
3.2.2 Dimensión fractal por el método conteo de caja.....	41
3.3 Análisis de la topología fractal de las bolas seccionadas.....	43
3.3.1 Distribución de los fragmentos de papel.....	44
3.4 Referencias bibliográficas.....	49
Conclusiones.....	50
Apéndice.....	51
Anexo.....	67

GLOSARIO DE SÍMBOLOS

L	Longitud de las probetas cuadradas de papel.
l	Longitud de un segmento menor a L .
N	Número de divisiones generadas a partir de la relación L/l .
d_f	Dimensión fractal de Hausdorff del objeto.
Z	Número complejo.
D_N	Dimensión fractal universal de las redes generadas por los dobleces en el papel.
D_l	Dimensión fractal local.
D_M	Dimensión fractal de masa.
D_S	Dimensión fractal de superficie.
D_{BF}	Dimensión fractal de caja.
S	Superficie de la bola.
ζ	Exponente de rugosidad universal.
M	Masa de la hoja.
R	Diámetro de la bola.
ρ_A	Densidad del papel.
λ	Factor de escalamiento para el tamaño de las hojas de papel biblia.
h	Espesor del papel.
E_L	Módulo de elasticidad longitudinal.
σ_s	Desviación Estándar
Δ	Tamaño de la malla
n	Número de Fragmentos.
σ_n	Desviación estándar de los fragmentos.
μ	Media.

ÍNDICE DE TABLAS

No. Tabla	Nombre	Página
2.1	Propiedades mecánicas del papel Biblia.	29
2.2	Diámetro y desviación estándar promedios de las probetas.	32
2.3	Datos de la masa de algunas probetas.	32
3.1	Dimensión fractal por el método de la caja para los diferentes tamaños de papel.	45

ÍNDICE DE FIGURAS

No. Figura	Nombre	Página
1	Diagrama de flujo de la metodología.	15
1.1	Geometría fractal, brócoli romanesco.	19
1.2	Línea L dividida entre l .	19
1.3	Hoja de papel de lado L , dividida entre l .	20
1.4	Volumen, dividido en 8 secciones del mismo tamaño.	20
1.5	Triángulo equilátero.	21
1.6	Triángulo de Sierpinski.	21
1.7	Cuasi auto-similitud en el conjunto de Mandelbrot.	22
1.8	Primera iteración para el conjunto de Cantor.	23
1.9	Conjunto de Cantor después de dos iteraciones.	23
1.10	Conjuntos de Julia.	24
1.11	Conjunto de Mandelbrot.	24
1.12	Curva de Koch.	25
1.13	Triángulo de Sierpinski en Excel.	25
1.14	Alfombra de Sierpinski.	25
1.15	Método conteo de caja.	27
2.1	Tamaños de las probetas de papel.	30
2.2	Bolas de papel arrugadas manualmente.	30
2.3	Estimación del diámetro de las probetas.	31
2.4	Obtención de la masa de cada probeta.	32
2.5	Dimensión fractal de las esferas arrugadas.	33
2.6	Proceso de coloreado de las bolas.	34
2.7	a) Bola pintada y b) hoja extendida.	34
2.8	Diferentes tamaños de las probetas.	35
2.9	Probetas seccionadas.	36
2.10	Segmentos de una probeta, a) sin colorear y b) coloreada.	36
2.11	Probetas escaneadas para diferentes tamaños de papel.	37

3.1	Distribución de áreas S_A y S_B .	39
3.2	El área de la superficie S en mm^2 contra R en mm.	40
3.3	Área total de superficie S en mm^2 (1), superficie pintada de un lado de la hoja S_A (2) y S_B el otro lado de superficie de la hoja (3).	41
3.4	Dimensión fractal de la superficie de la esfera.	42
3.5	Dimensión fractal para el tamaño 80 mm.	42
3.6	Dimensión fractal para el tamaño 40, 160, 320, 640 mm.	43
3.7	Hojas de papel reconstruidas con sus dos mitades.	45
3.8	Dimensión fractal de las imágenes por el método conteo de caja.	46
3.9	Dimensión fractal para las bolas seccionadas por el método conteo de caja.	46
3.10	Gráfica del número promedio n y la desviación estándar σ_n .	47
3.11	Distribución estadística de la masa de los fragmentos para el tamaño de 40 mm.	47
3.12	Distribución estadística de la masa de los fragmentos para el tamaño de 80 (1), 160 (2), 320 (3) y 640 (4) mm.	48
3.13	Masa promedio en gramos contra el tamaño de la hoja.	48
3.14	Gráfica de la desviación estándar de la masa de los fragmentos (en gramos) contra el promedio de la masa de los fragmentos (en gramos).	49

RESUMEN

En el presente trabajo se estudia la topología estadística de bolas de papel arrugadas manualmente en forma aleatoria. Específicamente la distribución de los dos lados de la hoja a lo largo de la superficie de la esfera; así como la distribución de los fragmentos cuando la bola es cortada a la mitad. Por lo consiguiente, los experimentos en este trabajo fueron desarrollados con hojas cuadradas de papel biblia de tamaños $L = 40, 80, 160, 320, 640 \text{ mm}$ que posteriormente fueron comprimidas con la mano hasta llegar a una bola casi esférica. El diámetro promedio de las bolas fue tomado de manera aleatoria en 15 posiciones diferentes en la esfera. Luego se pintaron de color negro; posteriormente se desarrugaron extendiendo la hoja tanto como fue posible; para realizar los análisis de la topología fractal.

Se encontró que la dimensión fractal de masa y de superficie son $D_M = 2.2617$ y $D_S = 2.11 \pm 0.05$ respectivamente. Mientras que las masas de los fragmentos de las bolas cortadas a la mitad se ajustan a una distribución inversa de Gauss. Además también se encontró que para las hojas reconstruidas a partir de sus dos mitades correspondientes (una blanca y la otra negra) tiene una dimensión fractal de caja $D_{BF} = 1.68 \pm 0.04$.

ABSTRACT

In this work we study the statistical topology of hand randomly folded paper balls. Specifically, the distribution of two sides of the sheet along the ball surface and in the distribution of sheet fragments when the ball is cut in half. In addition to this, the experiments in this work were performed with square sheets of the biblia paper with edge size $L = 40, 80, 160, 320, \text{ and } 640 \text{ mm}$, after that, it was folded with the hands. The mean diameter of each ball was determined from measurements along 15 directions taken at random. It was painted in black. Finally it was unfolded in order to analyze the fractal topology.

We found the mass fractal dimension $D_M = 2.2617$ and the surface fractal dimension $D_S = 2.11 \pm 0.05$. Meanwhile the mass of the fragments of the ball cut in half obey the inverse distribution Gaussian. Also we found the box fractal dimension for the reconstructed sheets whit its two half (one black and another white) is $D_{BF} = 1.68 \pm 0.04$.

JUSTIFICACIÓN

Como se sabe los materiales han jugado un papel muy importante en el desarrollo, seguridad y calidad de vida del ser humano desde el principio de la historia. Día con día se están generando nuevos tipos de materiales que superan las propiedades mecánicas de los anteriores, esto se ve reflejado en las nuevas estructuras de los edificios, la vestimenta y calzado que se ocupa, los medios de transporte, etc., estos materiales están en gran medida en la vida cotidiana.

Los materiales compuestos (papeles) son una alternativa de estos nuevos materiales, la combinación de varios elementos para formar un material compuesto con mejores propiedades mecánicas que los que lo formaron, representan una oportunidad para sustituir a los materiales ordinarios; sin embargo, existe un pequeño problema para estudiar este tipo de materiales con los métodos tradicionales debido a su compleja geometría, por lo que se han considerado a los fractales como una nueva herramienta de suma importancia para el análisis de materiales que poseen propiedades de escalamiento, esto es de gran ayuda para comprender a estos materiales en mayor o menor escala de amplificación y así poder darles una mejor aplicación.

Recordemos que las hojas de papel tienen mejores características mecánicas cuando están arrugadas, esto es debido a que gran cantidad de energía utilizada para arrugarlas se almacena en los dobleces dándole mejores propiedades mecánicas. Es por ello que la finalidad de este trabajo de investigación es analizar y evaluar la topología fractal que tienen las esferas de papel (en este caso el papel biblia) arrugadas aleatoriamente en forma manual.

OBJETIVO GENERAL:

Realizar un estudio experimental para la caracterización de la topología fractal de bolas de papel arrugadas de forma manual.

OBJETIVOS PARTICULARES:

- ❖ Caracterizar la topología fractal considerando la distribución de los dos lados de la hoja a través de la superficie de la esfera.
- ❖ Caracterizar la topología fractal y la distribución de la masa de los fragmentos de hoja cuando la bola es cortada a la mitad.

INTRODUCCIÓN

Las configuraciones arrugadas de materiales delgados son muy comunes en la naturaleza, que van desde niveles microscópicos como las proteínas y membranas de nano-partículas hasta niveles macroscópicos como papeles arrugados y formaciones de fallas geológicas. Por lo tanto, las propiedades mecánicas y topológicas de configuraciones arrugadas han tenido mucho interés desde el punto de vista fundamental y aplicado.

Estudiar los materiales compuestos como el papel biblia, es uno de los temas que está tomando suma importancia, se sabe que a partir de la segunda mitad del siglo XX, este tipo de materiales comenzó a formar parte del mercado en amplios sectores de la industria como la aeronáutica, la automotriz, entre otros. En la actualidad es muy común encontrar elementos aeronáuticos y de otros medios de transporte fabricados con materiales compuestos. En consecuencia los materiales ordinarios están siendo sustituidos por una amplia variedad de materiales compuestos con mejores propiedades. Por ejemplo, una bola de papel arrugado tiene mejores propiedades mecánicas que una hoja de papel sin arrugar, esto es debido a la concentración de energía que se acumula en los dobleces cuando esta es deformada. Por lo consiguiente, es muy importante caracterizar la topología fractal de las bolas de papel arrugado de forma manual para determinar el comportamiento geométrico que se presenta en las bolas de papel cuando son arrugadas. Se considera a los fractales como una herramienta poderosa para el estudio de diferentes fenómenos de la naturaleza; fenómenos que contienen geometrías irregulares capaces de mantenerse a cualquier escala de amplificación. La ciencia de los fractales surgió a principios del siglo XIX, pero fue hasta el siglo XX que tomó suma importancia; se considera a BENOIT MANDELBROT como el padre de la geometría fractal por ser uno de los mejores investigadores en esta área y por ser el primero en dar una definición formal al término fractal.

El trabajo presentado aquí consta de cuatro capítulos;

El Capítulo 1, está dedicado al estudio de los conceptos fundamentales de los fractales para tener una base generalizada del amplio mundo de los fractales. En este capítulo se presentan temas esenciales como: la historia de los fractales, el concepto de fractal, dimensión de Hausdorff y dimensión fractal, entre otros. Además, se presenta algunos antecedentes que han motivado al estudio de las bolas de papel arrugadas de forma manual bajo la misma fuerza de compresión.

El Capítulo 2, se describe toda la metodología experimental para la caracterización de la topología fractal, también se presentan algunas propiedades del papel biblia.

En tanto en el Capítulo 3, se realiza un análisis estadístico riguroso sobre los resultados obtenidos de forma experimental y por último se establecen las conclusiones a las que se llegaron.

METODOLOGÍA

La metodología utilizada para cumplir el objetivo del presente trabajo se presenta en la figura 1, ahí se puede observar los pasos sistemáticos que se utilizaron desde el inicio hasta el final para cumplir con el propósito establecido en esta investigación.

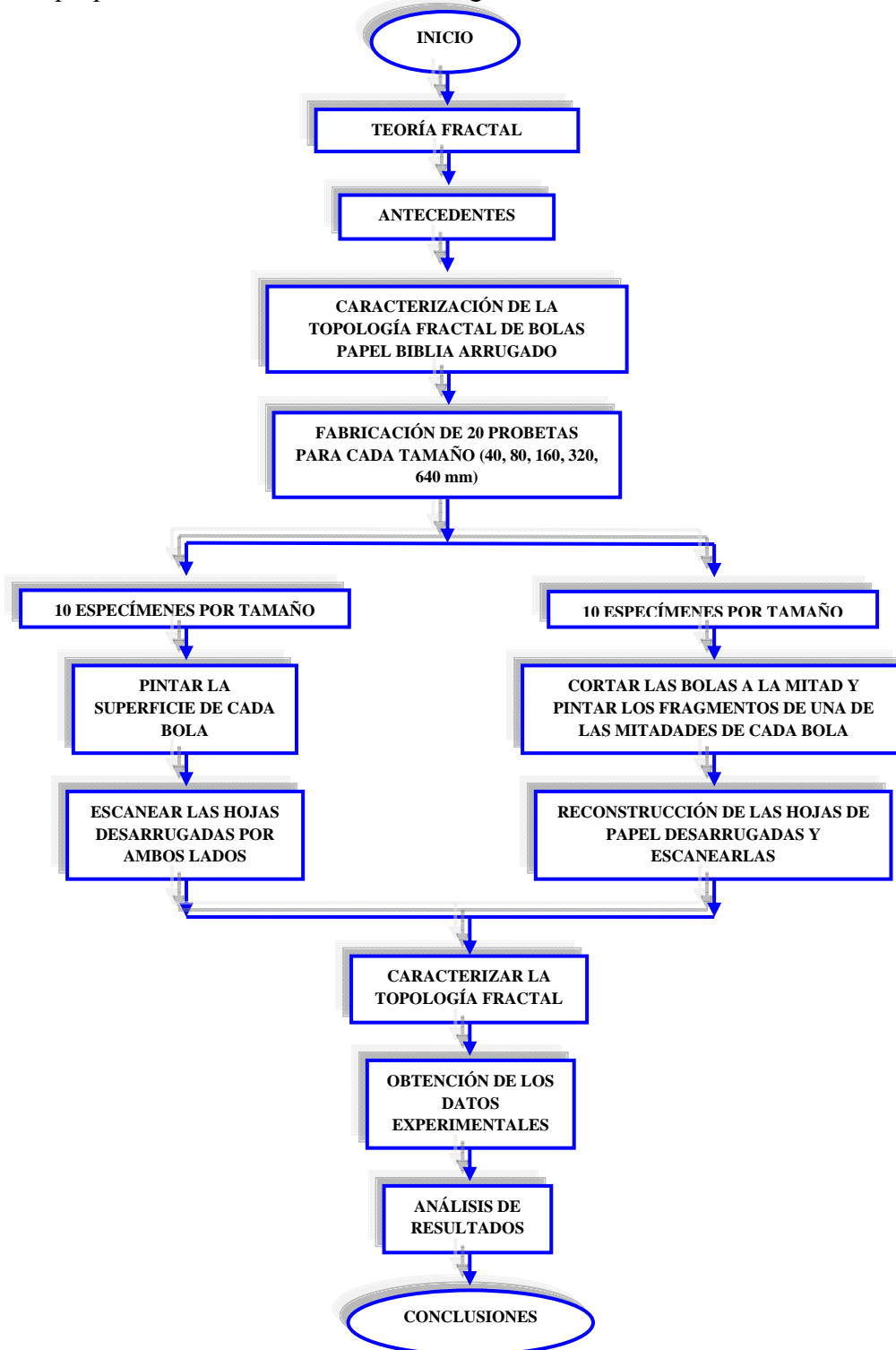


Figura 1, diagrama de flujo de la Metodología.

Capítulo 1

TEORÍA FRACTAL

Desde el inicio de los tiempos el ser humano siempre se ha obsesionado con cuerpos amorfos desde rocas hasta planetas, flujos turbulentos desde ríos a tornados, azar y desorden en un universo aparentemente estructurado. Sin embargo, en este mar de caos, una observación más cuidadosa de la naturaleza muestra que aún dentro de su enorme complejidad existen ciertos patrones que la caracterizan, **los fractales**.

Este capítulo está dedicado al estudio de los fractales, su historia, el concepto de fractal, los diferentes tipos de fractales que existen, la dimensión de Hausdorff y la dimensión fractal, la auto-similaridad, todo esto para fundamentar las bases para el estudio del amplio mundo de los fractales.

1.1 HISTORIA

El estudio de los fractales se ha incrementado en los últimos tiempos a gran escala, las primeras investigaciones se iniciaron a finales del siglo XIX pero fue a partir del siglo XX y en la actualidad que los fractales van cobrando un concepto más significativo debido a las amplias aplicaciones que se le están dando en muchas áreas como son las matemáticas, la computación, la medicina, la geografía, la economía, la música, la astronomía, etc. Todo inicia con el matemático alemán FÉLIX HAUSDORFF quien en 1919 introdujo el concepto de dimensión y que hoy permite caracterizarlos.

Tiempo después, en 1975 BENOIT MANDELBROT denominó fractales (del latín *fractus*, irregular) al conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracteriza por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y por exhibir dimensión fraccional. Adicionalmente, construyó con ellas un conjunto de nuevas reglas para explorar la geometría de la naturaleza, y las reconoció como herramientas potencialmente útiles para analizar un gran número de fenómenos físicos [1].

El interés de Mandelbrot en los fractales nació de su certeza de que “las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, como la corteza de un árbol no es plana ni un rayo viaja en línea recta. La naturaleza no solamente exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad” [2].

1.2 ESTUDIOS PREVIOS EN HOJAS DE PAPEL ARRUGADAS ALEATORIAMENTE

Los estudios realizados sobre membranas arrugadas se han ido incrementando a través del tiempo cada vez en mayor escala. Las técnicas utilizadas para el análisis de este fenómeno se ha ido perfeccionando día con día para obtener mejores resultados. El proceso de arrugado en membranas delgadas (papel, aluminio, cobre, etc.) es un fenómeno complicado de analizar; sin embargo, existen técnicas (geometría fractal) capaces de analizar y comprender el comportamiento de dicho fenómeno. Las hojas de papel después de haber sido arrugadas manualmente sufren deformaciones plásticas que se ven reflejadas en unas pequeñas marcas o huellas sobre el papel, estas marcas se pueden observar después de extender la hoja. Las membranas arrugadas presentan una alta resistencia a la compresión debido a la resistencia que ofrecen los pliegues a ser deformados, así también, presentan una alta eficiencia en la absorción de energía debido a las deformaciones que se generan durante el proceso de arrugado.

El estudio de las membranas arrugadas ha tomado suma importancia en los últimos años y ha sido estudiado por diversos investigadores. La dimensión fractal de membranas arrugadas comenzó a ser estudiada en 1987 con Gomés [3], quien relacionó el tamaño del papel (diámetro de las bolas arrugadas) y su masa; definiendo con esto la dimensión fractal de masa.

Un año después en 1988 Cerda y Mahadevan [4] analizaron la geometría y elasticidad de una hoja de papel arrugada, caracterizando los dobleces que existen en la hoja a través de un modelo analítico; algunas de sus predicciones experimentales se verifican cualitativamente.

En 1989 Gomés [5], determinó la deformación de las bolas de papel aluminio, cuando son sometidas a diferentes cargas. Para este efecto, describe el comportamiento de ocho relaciones escalares, relacionadas con las fuerzas, deformaciones, superficies escalares y variables de la geometría de la superficie arrugada. Al mismo tiempo [6] Gomés en colaboración con Soares proponen el uso de resistencia eléctrica, en función de la deformación de las superficies arrugadas en papel grafito, estos resultados los comparan con predicciones teóricas.

Otra importante investigación realizada sobre superficies arrugadas aleatoriamente fue desarrollada en 1996 por Plouraboué y Roux [7] quienes en su trabajo de investigación presentan un análisis experimental que muestra una geometría auto-afín con un exponente cerca de la unidad. Introduciendo así, un modelo simple que muestra una posible fuente de correlación a lo largo de la geometría que analizaron.

De los estudios mas recientes sobre superficies arrugadas, resalta el realizado por Matan y colaboradores [8] quienes en el año 2003 observaron que las hojas arrugadas tienen una alta resistencia a la compresión. Esto lo llevaron acabo por medio del estudio de hojas delgadas arrugadas de Mylar, bajo diferentes condiciones de carga. Otro trabajo importante, es el presentado por el Dr. Alexander Balankin en el 2006 [9] quien estudió el efecto de los dobleces en hojas delgadas de papel sobre las propiedades de escalamiento, los análisis fueron realizados en papeles arrugados y desarrugados. También en el 2007 [10] el doctor Alexander publicó las

características del escalamiento de las bolas de papel aluminio arrugadas aleatoriamente con diversos espesores y tamaños. Encontrando así; que la dimensión fractal y el exponente de escalamiento son independientes del espesor de la hoja de papel de aluminio.

De acuerdo a las investigaciones realizadas por el Dr. Alexander Balankin y su equipo de colaboradores en el 2007, en bolas de papel de diferentes tamaños, arrugadas manualmente bajo la misma presión, obedecen una ley de escalamiento fractal [11] $M \propto R^D$, donde $M = \rho h L^2$ es la masa de la hoja, ρ es la densidad del material, R es al diámetro de la esfera y D es la dimensión fractal global y el parámetro que deben cumplir las membranas delgadas es $h \ll R < L$.

Continuando con las investigaciones dirigidas por el Dr. Alexander Balankin, en este trabajo nos enfocamos a determinar la topología fractal de hojas de papel arrugadas aleatoriamente con las manos hasta llevarlos a una forma casi esférica. En primera instancia, se tuvieron que pintar las superficies de las bolas con tinta negra para analizar la distribución de la superficie en ambos lados del papel. Por otro lado, se cortaron las bolas a la mitad; cada una de las mitades estaba compuesta por fragmentos que se separaron. Todos los fragmentos de papel que constituían a una de las mitades de cada bola fueron pintados de color negro; posteriormente, la hoja de papel fue reconstruida con sus dos mitades correspondientes, luego se estimó la dimensión fractal. Por último se analizó la distribución de masa de los fragmentos de papel, encontrando que se ajustan a una distribución inversa de Gauss.

1.3 CONCEPTO DE FRACTAL



Figura 1.1 En la naturaleza también aparece la geometría fractal, como en este brócoli romanesco

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas [12]. El término fue propuesto por el matemático Benoit Mandelbrot en 1975 y deriva del Latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado (ver figura 1.1). A un objeto geométrico fractal se le atribuyen las siguientes características [13]:

- ✓ Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales (geometría euclidiana).
- ✓ Posee detalle a cualquier escala de observación.
- ✓ Es auto-similar (exacta, aproximada o estadística).
- ✓ Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.
- ✓ Se define mediante un simple algoritmo recursivo.

No basta con una sola de estas características para definir un fractal. Por ejemplo, la recta real no se considera un fractal, pues a pesar de ser un objeto autosimilar carece del resto de características exigidas.

1.4 DIMENSIÓN FRACTAL Y DIMENSIÓN DE HAUSDORFF

Para poder entender los conceptos y la diferencia entre dimensión Fractal y dimensión de Hausdorff, se comenzó analizando ciertos detalles de algunas figuras de la geometría euclidiana. Tomemos una línea de longitud $L = 1$ m, si se divide en 3 partes iguales se tiene tres segmentos de longitud $l = 1/3$ (ver figura 1.2), en este caso el número de divisiones que se producen (N) se obtiene determinando el número de veces que entra la longitud l en la longitud total L :

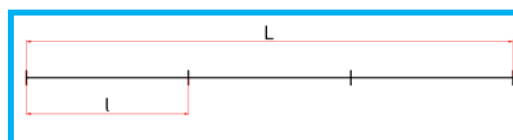


Figura 1.2 Línea L dividida entre l .

$$N = \frac{L}{l} = \left(\frac{L}{l}\right)^1 = \left(\frac{1}{1/3}\right)^1 = 3$$

Realizando el mismo procedimiento pero ahora para una hoja de papel cuadrada de lado $L = 1$ m (ver figura 1.3), a la que ahora se divide en pequeños cuadrados de lado $l = 1/2$ m y área $l^2 = 1/4$ m², ahora el número de divisiones (N) que se produce es:

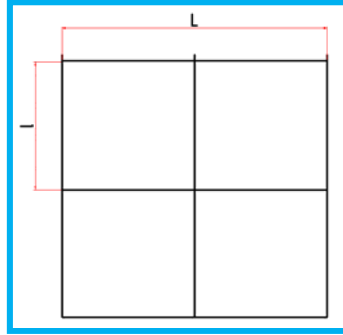


Figura 1.3 Hoja de papel de lado L dividida por l .

$$N = \frac{L^2}{l^2} = \left(\frac{L}{l}\right)^2 = \left(\frac{1}{1/2}\right)^2 = 4$$

Del análisis de los resultados anteriores lleva a la conclusión de que para una figura de tres dimensiones (ver figura 1.4), el número de divisiones (N) generado es:

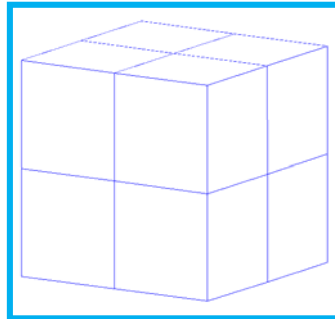


Figura 1.4 Volumen, dividido en 8 secciones del mismo tamaño.

$$N = \frac{L^3}{l^3} = \left(\frac{L}{l}\right)^3 = \left(\frac{1}{1/2}\right)^3 = 8$$

Generalizando las relaciones obtenidas anteriormente, podemos concluir que en un proceso de división como el descrito, el número de elementos generados está dado por:

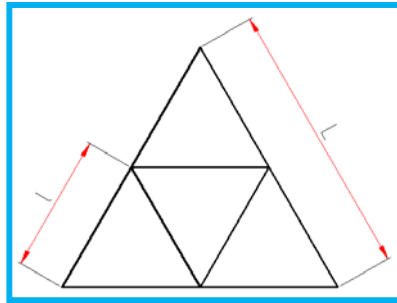
$$N = \left(\frac{L}{l}\right)^{df} \tag{1.1}$$

Donde d_f es lo que se conoce como la dimensión de Hausdorff del objeto. De la relación anterior se establece una metodología para determinar la dimensión de cualquier objeto, despejando d_f tenemos:

$$d_f = \log(N) / \log\left(\frac{L}{l}\right) \quad (1.2)$$

A continuación se presentan dos ejemplos:

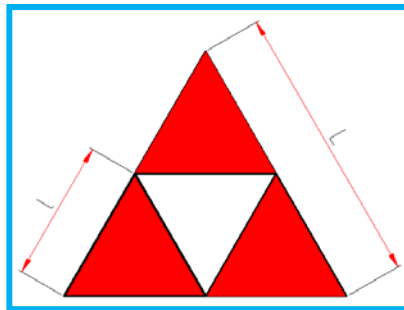
1.- Se tiene un triángulo equilátero como el que se muestra a continuación, de lado $L = 1$ y $l = \frac{1}{2}$, por lo tanto $N = 4$ (ver figura 1.5). De la ecuación 1.2 determinamos la dimensión de Hausdorff para el triángulo equilátero:



$$d_f = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{1}{1/2}\right)} = 2$$

Figura 1.5 Triángulo equilátero en un plano.

2.- Si ahora se tiene el triángulo de Sierpinski (ver figura 1.6), de lado $L = 1$ y $l = \frac{1}{2}$, pero para este caso suprimimos el triángulo central, por lo que $N = 3$ en lugar de 4.



$$d_f = \frac{\log(3)}{\log\left(\frac{1}{1/2}\right)} = 1.5849$$

Figura 1.6 Triángulo de Sierpinski

De los dos ejemplos anteriores se llega a la conclusión que la dimensión de Hausdorff puede ser un número entero (dimensión topológica), 2 para el primer ejemplo que representa una figura en un plano de 2 dimensiones o un número fraccional (*dimensión fractal*) 1.5849 para el segundo ejemplo que representa una geometría que se encuentra entre una dimensión topológica de 1 y 2 esto significa, que no es una línea y tampoco es un plano, ¡es un fractal!

1.5 AUTO-SIMILARIDAD

Según B. Mandelbrot, un objeto es auto-similar o auto-semejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas.

Los fractales pueden presentar tres tipos de auto-similitud:

- ❖ **Auto-similitud exacta:** este es el tipo más restrictivo de auto-similitud: exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas. A menudo se encuentra en fractales definidos por sistemas de funciones iteradas.
- ❖ **Cuasi auto-similitud:** exige que el fractal parezca aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Los fractales de este tipo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos.
- ❖ **Auto-similitud estadística:** Es el tipo más débil de auto-similitud: se exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala.

1.6 TIPOS DE FRACTALES

Los fractales se pueden clasificar de dos maneras, una como fractales lineales y la otra como no lineales. Los fractales lineales son aquellos que presentan en su geometría un patrón de repetición a cualquier escala de amplificación (auto-similitud exacta), por otro lado se encuentra a los fractales no lineales que son todos aquellos que no presentan un patrón de repetición exacto, pero que pueden presentar cuasi auto-similitud o auto-similitud estadística.

Un ejemplo de cuasi auto-similitud se ve representado en el conjunto de Mandelbrot en la siguiente figura 1.7.

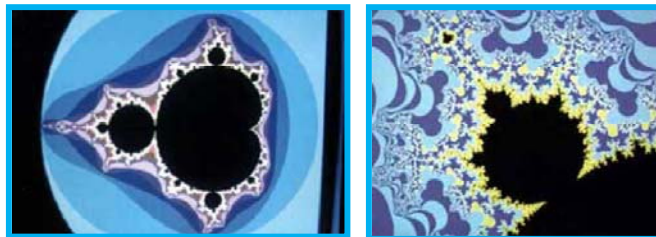


Figura 1.7 [14] Cuasi auto-similitud en el conjunto de Mandelbrot: al variar la escala obtenemos copias del conjunto con pequeñas diferencias.

Los fractales mostraron su utilidad por primera vez cuando se generó con ellos un modelo simple para la aparición de ruido en ciertas líneas de transmisión en sistemas de comunicación digital [15]; esto es, la presencia de breves interrupciones eléctricas que confunden y dificultan la comunicación. El análisis de las señales demostró que las interrupciones aparecían como por paquetes, pero dentro de estos paquetes se distinguían una estructura intermitente. Un registro gráfico de las interrupciones dio lugar a un patrón fractal similar al que se obtiene a través del

siguiente procedimiento: se toma una recta de longitud L y se secciona en tres partes idénticas ($l=L/3$), extrayendo después la sección central nos queda $N=2$ como se muestra en la figura 1.8:

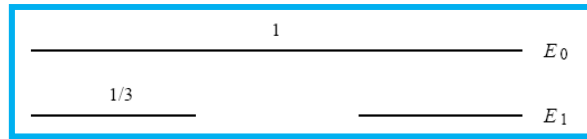


Figura 1.8 Primera iteración para formar el conjunto de Cantor

Cuando el procedimiento se repite a toda escala (ver figura 1.9);

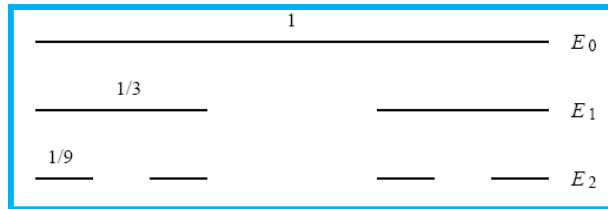


Figura 1.9 Conjunto de cantor después de 2 iteraciones

Se obtiene el fractal conocido como conjunto de Cantor [16] en honor a su creador, el matemático alemán GEORGE CANTOR, famoso por su desarrollo de la teoría de conjuntos.

El conjunto o polvo de cantor tienen una dimensión de Hausdorff menor que la unidad, pues cada vez que la longitud de un segmento se reduce a su tercera parte, solo aparecen dos trozos más $d_f = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{L}{l}\right)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0.6309$. En otras palabras es más que una colección de puntos, pero menos que una línea recta.

1.6.1 LOS CONJUNTOS DE JULIA

El trabajo pionero en el juego de hacer iteraciones con números complejos fue desarrollado por dos matemáticos franceses, GASTON JULIA y PIERRE FATOU. Sus resultados fueron la base sobre la que se construyó la revolución fractal de los ochentas. En particular, BENOIT MANDELBROT recuperó su análisis sobre el comportamiento de los números complejos cuando la iteración consiste en elevarlos al cuadrado y sumar una constante al resultado (ver ecuación 1.3).

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + c \quad (1.3)$$

Donde; c , es la constante y también es un número complejo. Las órbitas que ahora se generan son secuencias de números complejos y sus características dependen fundamentalmente de los valores del punto inicial Z_0 del que se parte y la constante c seleccionada (ver figura 1.10).

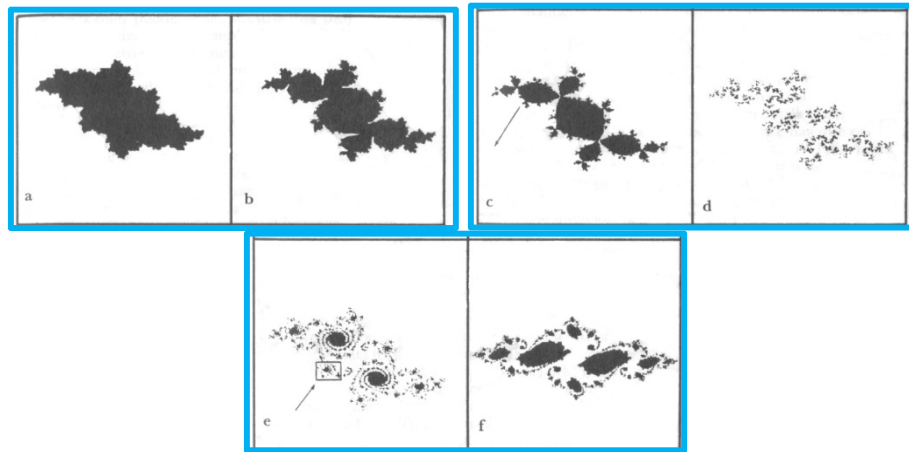


Figura 1.10 [14] Imágenes de los conjuntos de Julia asociados a $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$, a) $c=(0.12, 0.57)$, b) $c=(-0.12, 0.66)$, c) $c=(0.12, 0.74)$, d) $c=(-0.25, 0.74)$, e) $c=(-0.194, 0.6557)$, f) $c=(0.75, 0.11)$

1.6.2 EL CONJUNTO DE MANDELBROT

Del análisis de las figuras anteriores se hace evidente que existen dos clases principales de conjuntos de Julia: aquellos para los cuales el cuerpo está formado por una sola pieza (el área del cuerpo se dice que es *conexa*), figuras 1.10 (a)-(c) y otros en los que los cuerpos están desmembrados en infinitas colecciones de puntos más o menos aisladas (el área del cuerpo es *disconexa*), figuras 1.10 (d)-(f).

Benoit Mandelbrot fue el primero en aprovechar esta propiedad de la iteración cuadrática y se dedicó a buscar los valores de la constante c que dan lugar a conjuntos de Julia conexos. Al hacerlo se encontró con que esta colección de valores de c , que en su honor tienen el nombre de conjunto de Mandelbrot (ver figura 1.11), también tenía una estructura sorprendente cuando se presentaba en el plano complejo [14].

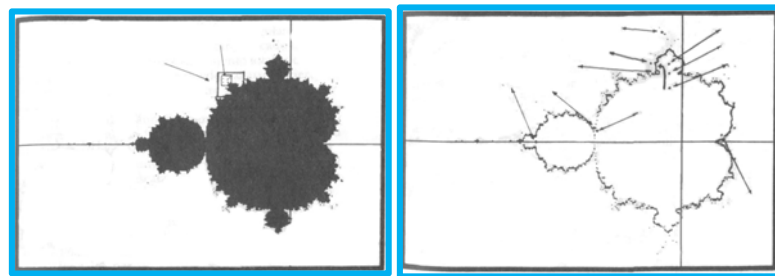


Figura 1.11 [14] Conjunto de Mandelbrot, se indican los puntos de la constante c que dan origen a los conjuntos de Julia.

1.6.3 EL COPO DE NIEVE DE KOCH

Otro importante y muy conocido fractal es la curva de Koch, desarrollado en 1904 por el matemático sueco HELGE VON KOCH. Para generar este fractal solo basta tomar un triángulo equilátero como base (ver figura 1.12 a), después añadir al centro y cada uno de sus lados un triángulo equilátero más pequeño, una tercera parte del triángulo original (ver figura 1.12 b).

Repitiendo esta operación una infinidad de veces se obtiene lo que conocemos como la curva o copo de nieve de Koch (ver figura 1.12 c).



Figura a (base)



Figura b

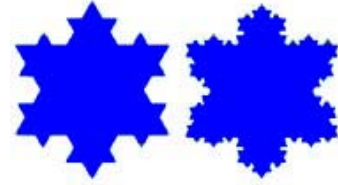


Figura c

Figura 1.12 Construcción de la curva de Koch

En 1915, WACLAW SIERPINSKI construyó su triángulo (ver figura 1.13) y, un año después, su alfombra (ver figura 1.14).



Figura 1.13 Triángulo de Sierpinski generado en Excel



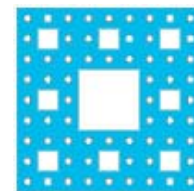
Paso 1 (base)



Paso 2



Paso 3



Paso 4

Figura 1.14 Construcción de la alfombra de Sierpinski:

Estos conjuntos mostraban las limitaciones del análisis clásico, pero eran vistos como objetos artificiales, una "galería de monstruos", como los denominó Poincaré. Pocos matemáticos vieron la necesidad de estudiar estos objetos en sí mismos [17].

1.7 DIMENSIÓN FRACTAL

La *Dimensión Fractal* está representada por un número fraccional que sirve para cuantificar o medir el grado de irregularidad de una geometría o de un objeto. Puede estar entre 0 y 1, como el conjunto de Cantor; entre 1 y 2; como el triángulo de Sierpinski; y entre 2 y 3, como las bolas de papel estudiadas en este trabajo.

1.7.1 MÉTODO DE CONTEO DE CAJA

Cuando una estructura es muy irregular y no es formalmente auto-similar, su dimensión fractal se calcula normalmente por el método conteo de caja. El resultado que se obtiene también da una idea de la capacidad real del objeto para cubrir el espacio en el que está embebido. La manera de proceder es muy sencilla:

Se toma la estructura de interés y se coloca en una caja de lado L , sobre la que se construye una red regular en la que cada segmento tiene una longitud l (ver figura 1.15 (a)). Se cuenta el número de cajas que contiene alguna parte de la estructura, lo que da un número N . Ahora se repite el procedimiento utilizando redes cada vez más finas (l más pequeñas, figuras 1.15 b y c) registrando en cada caso la N que les corresponda. Cuando hacemos esto sobre una figura como la que aquí se presenta es posible construir una tabla como la siguiente, en la que se registra el número de cajas que caben a lo largo del segmento L (L/l) y, del total de cajas en toda la red, sólo cuantas de ellas (N) atraviesan la figura:

L/l	5	10	20
N	18	52	148

Si se toma el logaritmo de ambas cantidades y se grafica $\log(N)$ vs $\log(L/l)$, (figura 1.15 (d)), es posible ajustar sobre los datos una línea recta cuya pendiente es la dimensión fractal d_f de la figura. En realidad, esto nos indica que existe una relación del tipo:

$$N \cong \left(\frac{L}{l}\right)^{d_f} \quad (1.4)$$

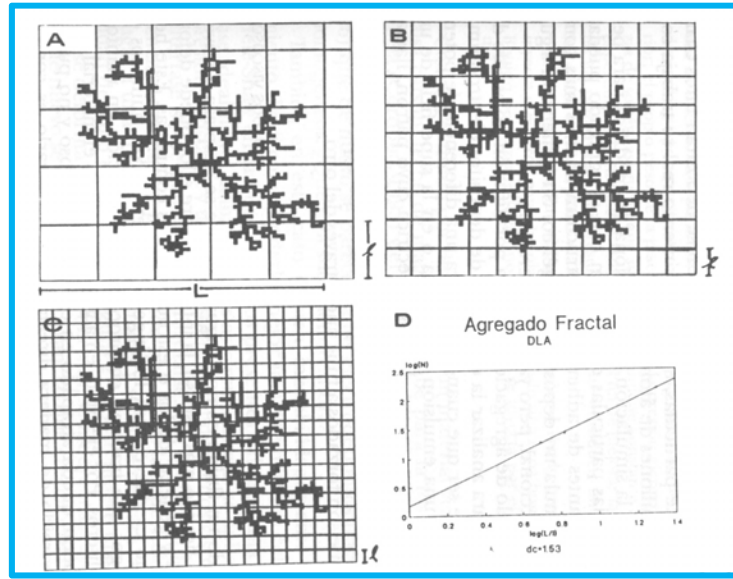


Figura 1.15 [14] Cálculo de la dimensión fractal por el método de la caja. En este caso $L = 10$ cm y (a) $L/l = 5$, $N = 18$; (b) $L/l = 10$, $N = 52$; (c) $L/l = 20$, $N = 148$. La pendiente de la recta en (d) es una medida de la dimensión fractal.

1.8 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] PEITGEN H. O. Y P. H. RICHTER, *“The Beauty of Fractals”*, Springer-Verlag. Alemania, 1986.
- [2] B. MANDELROT, *“An Interview”*, Omni, 5 febrero 1984
- [3] GOMÉS, M. A. F., *“Fractal geometry in crumpled paper balls”*, Am. J. Phys. 55 (7), July, (1987).
- [4] CERDA, E. L. MAHADEVAN, *“Conical surfaces and Crescent Singularities in Crumpled Sheets”*, Physical Review Letters, Volume 80, Number 11, (1998).
- [5] GOMÉS, M. A. F. T. I. JYH, T. I. REN, I. M.RODRIGUES Y C. B. S. FURTADO, *“Mechanically deformed crumpled surfaces”*, J. Phys. D: Appl. Phys. 22, 1217-1221, (1989).
- [6] GOMÉS, M. A. F. Y J. H. P. SOARES, *“Electrical resistance of crumpled surfaces”*, J. Phys. D: Appl. Phys. 22, 989-990, (1989).
- [7] PLOURABOUÉ, F. Y S. ROUX, *“Experimental study of the roughness of crumpled surfaces”*, Elsevier Science B. V., Physica A 227, 173-182, (1995).

- [8] MATAN K., R. WILLIAMS, T. A. WITTEN Y S. R. NAGEL, “*Crumpling a thin Sheet*”, November 5, (2003).
- [9] BALANKIN A. S., ORLANDO SUSARREY HUERTA, ROLANDO CORTES MONTES DE OCA, DIDIER SAMAYOA OCHOA, JOSÉ MARTÍNEZ TRINIDAD Y MARIBEL A. MENDOZA, “*Intrinsically anomalous roughness of randomly crumpled thin sheets*”, Physical Review E74, 061602, 2006.
- [10] BALANKIN, A. S., IVAN CAMPOS SILVA, OMAR ANTONIO MARTÍNEZ Y ORLANDO SUSARREY HUERTA “*Scaling properties of randomly folded plastic sheets*”, Physical Review E75, 051117, 2007.
- [11] BALANKIN ALEXANDER S., ROLANDO CORTES MONTES DE OCA Y DIDIER SAMAYOA OCHOA, “*Intrinsically anomalous self-similarity of randomly folded matter*”, Physical Review E76, 032101, 2007.
- [12] BENOIT MANDELBROT, “*La Geometría Fractal de la Naturaleza*”, Tusquets, ISBN 84-8310 549-7
- [13] FALCONER, KENNETH (2003), “*Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*”, John Wiley & Sons, Ltd., pp. XXV. ISBN 0-470-84862-6
- [14] VICENTE TALANQUER, “**Fractus, fracta, fractal. Fractales, de laberintos y espejos**” 3ª edición México, la ciencia para todos, FCE, SEP, CONACYT, 2003.
- [15] PETERSON, I., “**The Mathematical Tourist**”, W. H. Freeman and Company. Nueva York, 1988.
- [16] PEITGEN, H. O., H. JÜRGENS Y D. SAUPE, “**Fractals for the Classroom**”, Parte 1 Springer-Verlag, EUA, 1992.
- [17] STEWART, IAN, “*De aquí al infinito*”, Crítica, Grijalbo Mondadori, S.A., 1998. ISBN 84-7423-853-6.

Capítulo 2

METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

La metodología experimental para el análisis de la topología fractal de bolas de papel arrugadas de forma manual, es un proceso desarrollado de manera estadística, que considera la distribución de los dos lados de la hoja a través de la superficie de la esfera y los fragmentos de papel cuando la bola es cortada a la mitad. Una de las mitades es pintada de color negro y posteriormente la hoja desarrugada es reconstruida con las dos mitades (blanca y negra) para su estudio fractal. La metodología experimental juega un papel muy importante para el análisis de conclusiones y la comprensión de los fenómenos estudiados.

Los trabajos experimentales realizados en el laboratorio fueron con hojas cuadradas de papel biblia, debido a que tiene muchas ventajas para trabajar el fenómeno de arrugamiento en el laboratorio, es accesible, fácil de adquirir a bajo costo y sobre todo muy maniobrable al usarlo como probeta.

2.1 DETALLES EXPERIMENTALES

Las propiedades mecánicas y geométricas del papel biblia utilizado en los experimentos [1] se presentan en la tabla 2.1; las probetas de papel utilizadas fueron de diferentes tamaños desde $l_0 = 40 \text{ mm}$ hasta 640 mm guardando la siguiente relación $L = \lambda l_0$, donde el factor de escalamiento es $\lambda = 1, 2, 4, 8$ y 16 , como se ilustra en la figura 2.1; cabe destacar que se prepararon 20 hojas para cada tamaño de papel; mismas que fueron arrugadas manualmente hasta convertirlas en una bola casi esférica (ver la figura 2.2).

Tabla 2.1. Propiedades mecánicas y geométricas del papel

PROPIEDADES MECÁNICAS Y GEOMÉTRICAS	PAPEL BIBLIA
h (mm)	0.039 ± 0.002
ρ_A (g/m ²)	35.6 ± 0.5
E_L (MPa)	3931 ± 144
E_T (MPa)	1355 ± 65
σ_{YL} (MPa)	37.5 ± 0.7
σ_{YT} (MPa)	23.4 ± 1

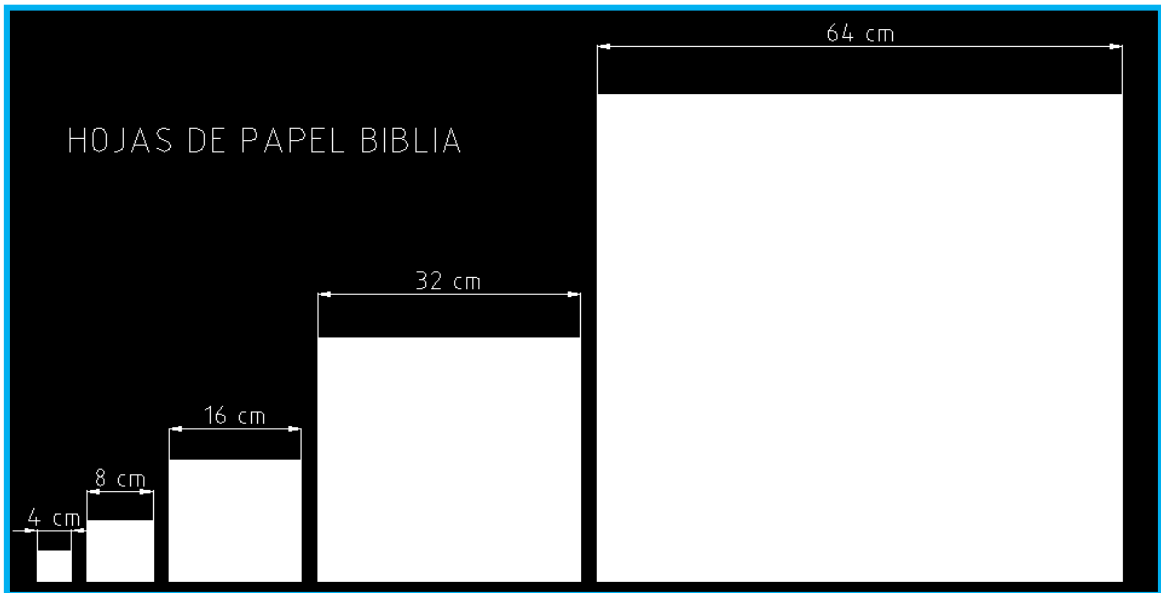


Figura 2.1. Tamaños de las probetas de papel



Figura 2.2. Bolsas de papel arrugadas manualmente

2.2 DIMENSION FRACTAL DE MASA

Como siguiente paso experimental se realizó la estimación de la dimensión fractal de masa D_M , de las bolas de papel. Recuérdese que estas fueron construidas a partir de hojas cuadradas (planas), cuya dimensión topológica es 2, como se observa en la figura 2.1. Las bolas casi esféricas tienden a formar un volumen con dimensión topológica de 3; como se muestra en la figura 2.2; Sin embargo, las bolas generadas no tienen exactamente una dimensión topológica de 3, debido a que cada una de ellas contiene una gran cantidad de poros, donde el papel no llena todo el volumen de la esfera. Considerando lo anterior se puede estimar la dimensión fractal de masa con la relación existente entre sus diámetros y sus masas [2-3]. Para este efecto los diámetros fueron calculados de la siguiente manera:

El diámetro y la desviación estándar promedios de cada bola fueron determinados por la ecuación 2.1 y 2.2 respectivamente [4]. Donde las dimensiones de los diámetros R_i fueron tomadas aleatoriamente en $n = 15$ direcciones diferentes de la esfera, como se observa en la figura 2.3. Los datos promedios obtenidos se presentan en la tabla 2.2

$$\overline{R_j(L)} = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_i^n R_i \quad (2.1)$$

Donde R_i , es el diámetro de la bola de papel; n , representa el número direcciones en que se midió el diámetro de las bolas de manera aleatoria; $\overline{R_j(L)}$, representa el diámetro promedio de la muestra.

$$\sigma_s \propto \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) [\sum_i^n (R_i - R)^2]^{1/2} \quad (2.2)$$

Donde σ_s es la desviación estándar



Figura 2.3 Estimación del diámetro de las probetas.

Tabla 2.2 Diámetro y desviación estándar promedios

BOLA	LONGITUD, mm	MASA, gr	DIÁMETRO, mm	DESV-ESTÁNDAR	VOLUMEN DE LA BOLA, mm ³
1	40	0.0560	6.689377778	0.34	156.73
2	80	0.2197	11.96426667	0.46	896.72
3	160	0.9000	22.95048889	1.41	6,329.57
4	320	3.5960	41.07711111	1.58	36,290.95
5	640	14.4193	77.89081333	2.92	247,432.84

Para obtener la masa de cada probeta se pesaron los especímenes con una balanza de precisión como se muestra en la figura 2.4 y los datos obtenidos se muestran en la tabla 2.3.



Figura 2.4 Obtención de la masa de cada probeta.

Tabla 2.3 Datos de la masa de algunas probetas.

MASAS	40 mm	80 mm	160 mm	320 mm	640 mm
No probeta	masa, gr	masa, gr	masa, gr	masa, gr	masa, gr
1	0.05	0.217	0.88	3.68	14.38
2	0.06	0.227	0.92	3.5	14.17
3	0.06	0.217	0.88	3.62	14.28
4	0.06	0.217	0.9	3.73	14.47
5	0.06	0.227	0.9	3.58	14.48
6	0.06	0.217	0.93	3.59	14.9
7	0.06	0.217	0.92	3.6	14.92
8	0.05	0.217	0.89	3.63	14.39
9	0.06	0.217	0.89	3.63	14.48
10	0.05	0.217	0.93	3.55	14.03
11	0.06	0.217	0.88	3.59	14.17
12	0.06	0.217	0.94	3.5	14.48
13	0.05	0.227	0.88	3.58	14.39
14	0.05	0.217	0.88	3.48	14.28
15	0.05	0.227	0.88	3.68	14.47
promedio	0.0560	0.2197	0.9000	3.5960	14.4193
Desv-Estándar	0.0051	0.0046	0.0220	0.0705	0.2414

Para poder estimar la dimensión fractal de masa de las probetas se graficó la masa y el diámetro promedio de cada probeta como se muestra en la figura 2.5, posteriormente mediante una regresión lineal se obtuvo la línea de tendencia que mejor se ajustó a los datos experimentales y esa fue una relación potencial, la pendiente de la misma es la dimensión fractal o fraccional de masa de las probetas.

Como se mencionó anteriormente la dimensión fractal de las probetas debería estar entre 2 y 3, efectivamente se corroboró que la dimensión fractal de masa de las esferas esta dentro del parámetro preestablecido por el Dr. Alexander Balankin et al [1]. $D_M = 2.2617$

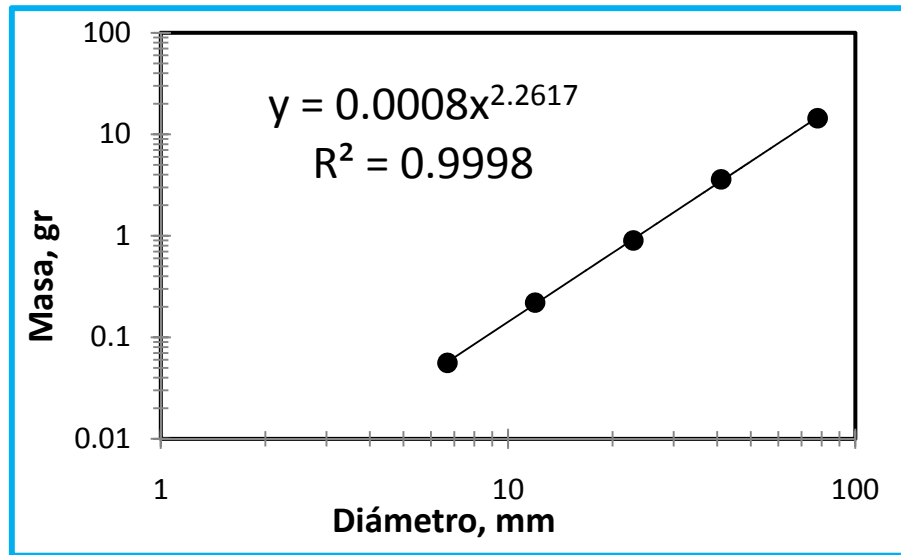


Figura 2.5 Dimensión Fractal de las esferas arrugadas.

2.3 SUPERFICIES COMPLETAS DE LAS BOLAS

Después de haber fabricado las probetas casi esféricas; 10 bolas arrugadas para cada tamaño, fueron pintadas de color negro con un pincel, como se ilustra en la figura 2.6. Una vez que la pintura se secó se procedió a extender la bola, desarrugándola cuidadosamente para no romperla hasta llevarla a su estado original, como se muestra en la figura 2.7 a y b.

Como se puede observar en la figura 2.7.b, la hoja extendida es bicolor (blanco y negro) en ambas caras de la hoja. El color negro en ambas caras, representa la superficie de la bola y la parte blanca corresponde al dominio de la bola.

Con el objeto de analizar la topología fractal de la superficie de las bolas de papel, ambas caras de todos los papeles extendidos se escanearon con una resolución 200 ppp en formato bmp - Imagen de Mapa de Bits, por sus siglas en inglés (ver Figura 2.8, a) 40 mm, b) 80 mm, c) 160 mm, d) 320 mm, e) 640 mm). Los dos colores (negro y gris) presentados en las imágenes de la figura 2.8, representan a la superficie de la bola, el área pintada de color negro representa la

superficie de la bola en la parte anterior de la hoja y el área gris representa la superficie de la bola en la parte posterior de la hoja.



Figura 2.6 Proceso de coloreado de las bolas.

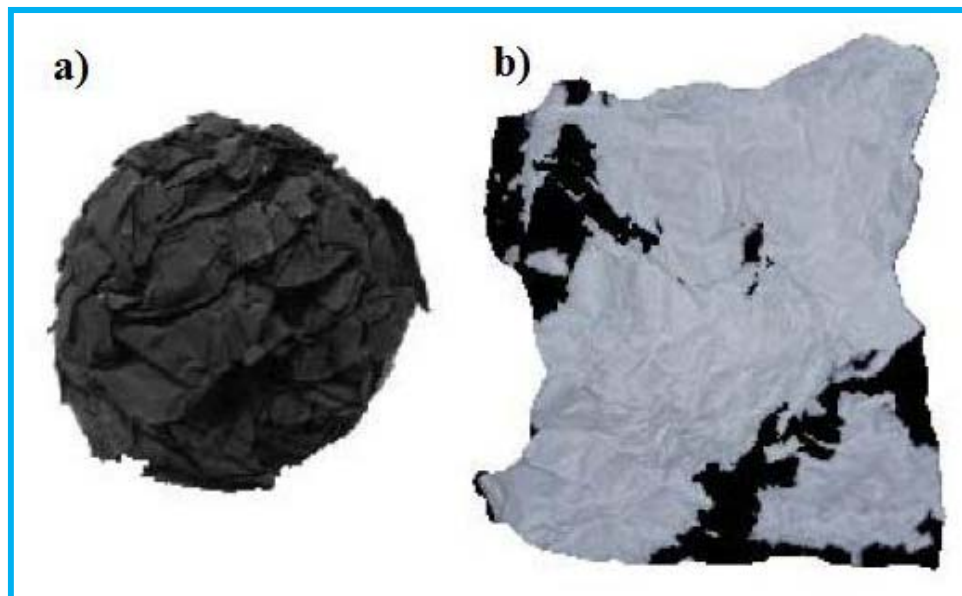


Figura 2.7 a) Bola pintada de color negro, b) hoja desarrugada.

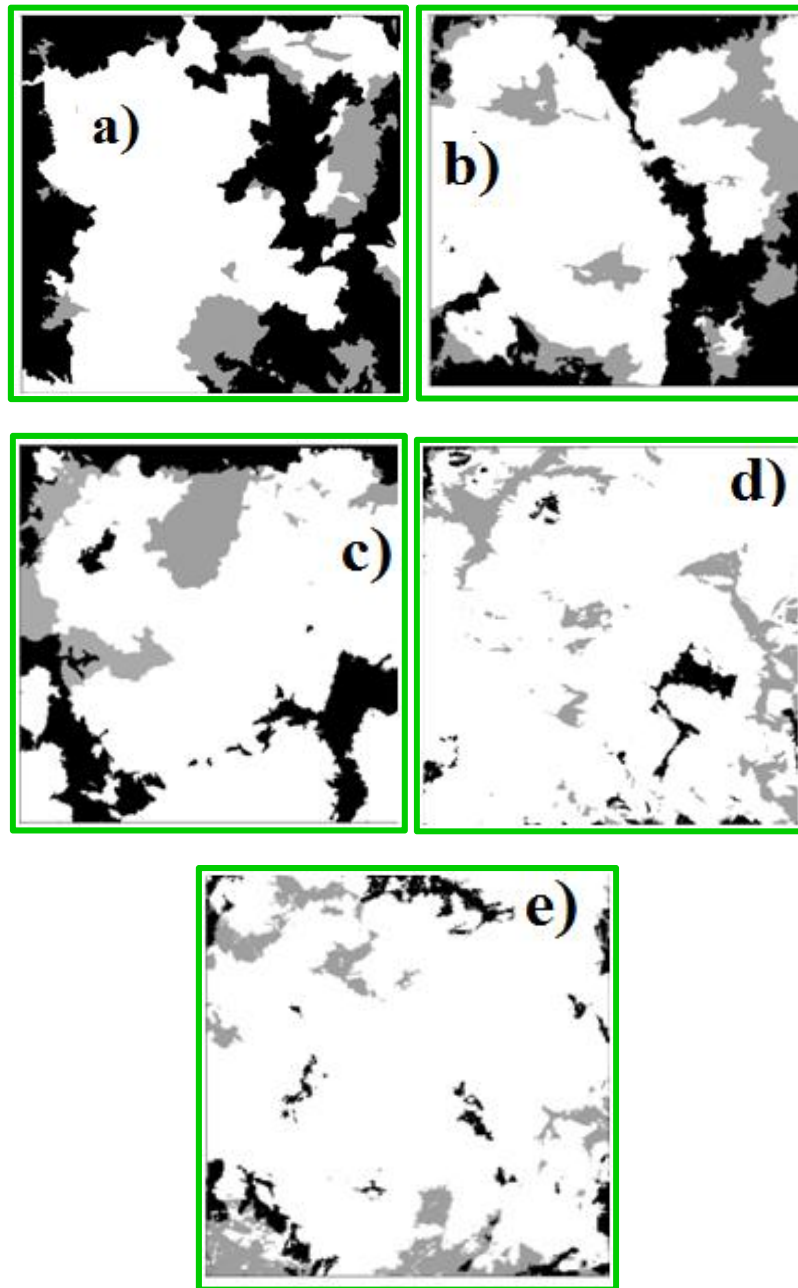


Figura 2.8, Diferentes tamaños de las probetas desarrugadas a) 40 mm, b) 80 mm, c) 160 mm, d) 320 mm, e) 640 mm.

2.4 SUPERFICIES SECCIONADAS DE LAS BOLAS.

Las 10 probetas restantes de cada tamaño diferente, se analizaron de una forma distinta a la anterior, cada bola de diferente tamaño fue cortada a la mitad como se indica en la figura 2.9.

Ambas mitades fueron extendidas manualmente y cada mitad estaba compuesta por segmentos debido al corte de la bola. Se obtuvo la masa de cada segmento. A todos los segmentos que

integran una de las mitades de las bolas se pintó de color negro, mientras que la otra mitad se quedó en su estado original como se observa en la figura 2.10 a) mitad sin colorear y b) mitad coloreada. Posteriormente, la hoja de papel fue reconstruida, utilizando cada uno de los fragmentos que integraban cada una de las mitades; después de haber sido reconstruidas todas las hojas desarrugadas se escanearon con el formato bmp con el objeto de determinar de esta otra manera su topología fractal, como se muestra en la figura 2.11, todas las probetas de los diferentes tamaños de papel, utilizadas en este trabajo durante los experimentos se muestran en el apéndice A.



Figura 2.9 Probetas seccionadas a la mitad

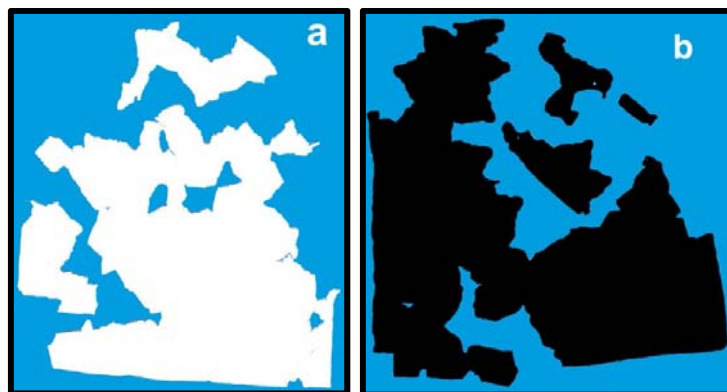


Figura 2.10 Segmentos de una probeta, a) Mitad sin colorear, b) Mitad coloreada.

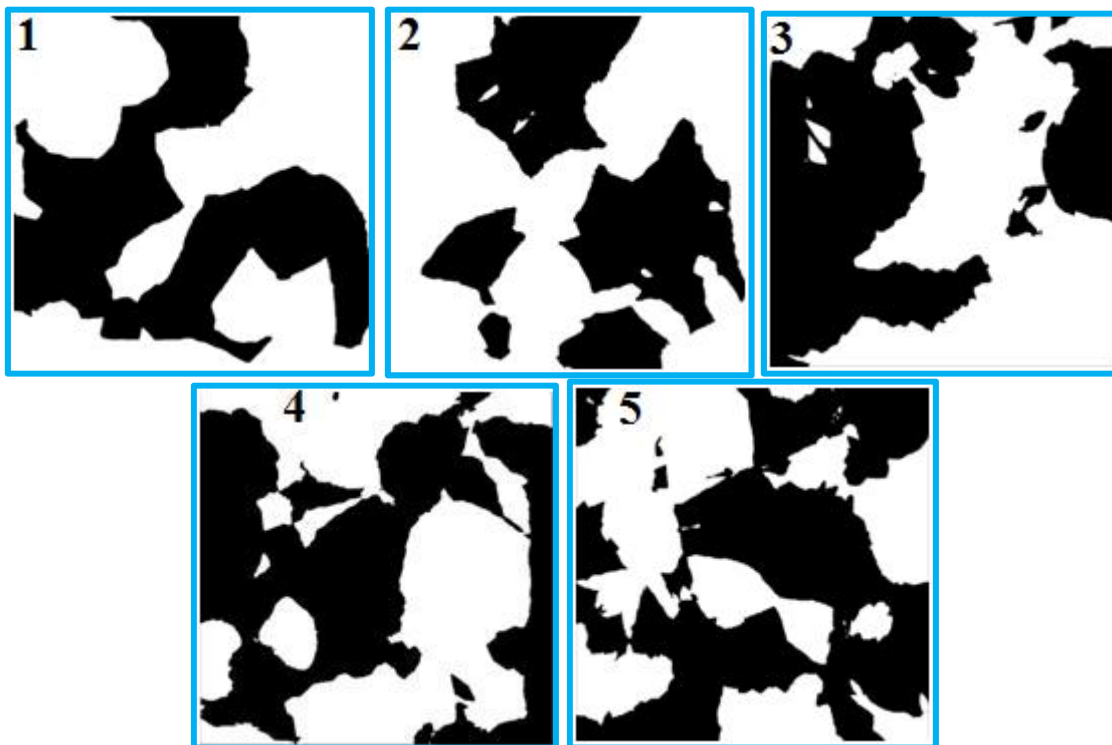


Figura 2.11, Probetas escaneadas para los diferentes tamaños, 1) 40 mm, 2) 80 mm, 3) 160 mm, 4) 320 mm, 5) 640 mm

2.5 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BALANKIN, A. S., SUSARREY O., CORTES M. R., SAMAYOA O. D., MARTÍNEZ T. J. Y MENDOZA M., “*Intrinsically anomalous roughness of randomly crumpled thin sheets*”, Physical Review E74, 061602, 2006.
- [2] GOMES, M.A.F., “*Fractal geometry in crumpled paper balls*”, Am. J. Phys 55 (7), July, 1987.
- [3] GOMES, F.A.F., “*Fractal Dimension*” Am. J. Phys. 55, 649, (1987).
- [4] BALANKIN, A. S., CORTES MONTES DE OCA R. Y SAMAYOA OCHOA, “*Intrinsically anomalous self-similarity of randomly folded matter*”, Physical Review E76, 032101, 2007.

Capítulo 3

ANÁLISIS DE RESULTADOS

El análisis de resultados representa una de las partes más importantes de este trabajo de investigación, ya que a partir de aquí se podrá comprender en un panorama más amplio el fenómeno de arrugado en hojas de papel.

En este capítulo se realiza un análisis y discusión de los resultados obtenidos en las pruebas experimentales (descritas en el capítulo anterior); en primer lugar, se encontró la dimensión fractal de masa [1]; luego se determinó la dimensión fractal de superficie D_S y la dimensión fractal de caja D_{BF} (para bolas completas y para bolas cortadas a la mitad); así como la distribución de la masa de los fragmentos de las bolas cortadas a la mitad.

3.1 DIMENSIÓN FRACTAL DE MASA

Como se describió en capítulo anterior, D_M , fue obtenida del análisis estadístico de los diámetros con las masas de los diferentes tamaños de papel, obtenidas en el laboratorio y descritas en las tablas 2.2, 2.3 y figura 2.5, para estos experimentos $D_M = 2.2617$ se encuentra dentro del rango establecido por el Dr. Alexander Balankin [2-3]. Como se puede observar en la figura 2.5 los datos graficados de las bolas de papel obedecen la siguiente ley de escalamiento fractal:

$$M \propto R^{D_M} \quad (3.1)$$

Donde $M = \rho hL^2$ es la masa de la hoja, ρ es la densidad del material, R es el diámetro de la bola y D_M es la dimensión fractal de masa.

3.2 TOPOLOGÍA FRACTAL DE SUPERFICIE DE LAS BOLAS SIN CORTAR

Para caracterizar la topología fractal del papel, se utilizaron las áreas escaneadas de los papeles extendidos, ilustrados en la figura 2.8, en ambas caras de la hoja; estas áreas fueron etiquetadas como S_A (área negra que representa parte de la superficie de la bola) y S_B (área gris que representa la otra porción de la superficie de la bola) (ver figura 3.1), tales que por definición $S_A \geq S_B$.

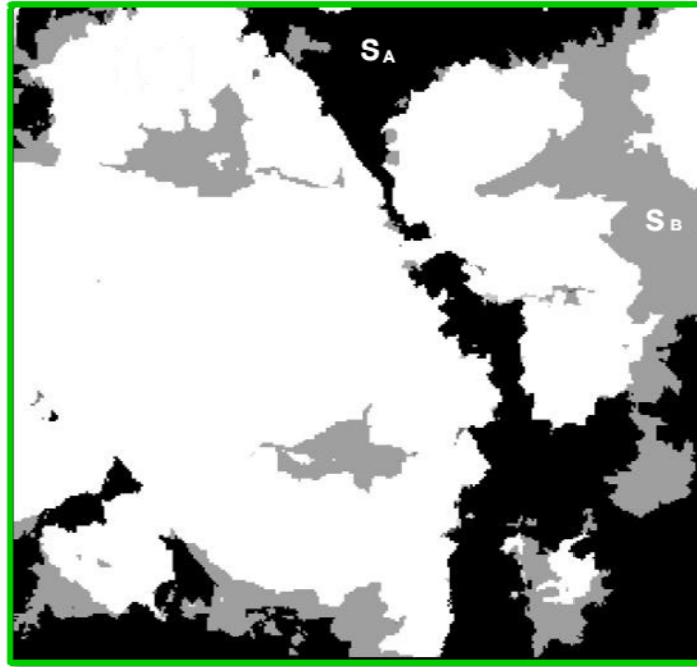


Figura 3.1 Distribución de áreas S_A y S_B

3.2.1 DIMENSIÓN FRACTAL DE SUPERFICIE POR ÁREAS

Las áreas de las superficies pintadas de las bolas sin cortar, obtenidas después de haber sido escaneadas y extendidas o desarrugadas; S_A y S_B , (negro y gris respectivamente en la figura 3.1); fueron medidas con el propósito de determinar la dimensión fractal de superficie D_s ; cuyos datos graficados se presentan en la Figura 3.2, donde se muestra el área promedio total de la superficie de las bolas arrugadas $S = S_A + S_B$ contra el diámetro promedio R ; como se puede observar, la superficie de la bola obedece la siguiente relación de escalamiento fractal:

$$S \propto R^{D_s} \quad (3.2)$$

Además, con estos mismos datos se encontró que $D_s = 2.11 \pm 0.05$, de manera que la relación de escalamiento propuesta en la referencia [3]: $D_s = 3 - 2/D$ se cumple, como se ilustra en la figura 3.2.

Por otro lado, se tiene que en las bolas arrugadas de las hojas de tamaños $L < L_c$ (L_c es el tamaño de una hoja de papel de un metro de longitud) una de las dos superficies de la hoja es dominante sobre la superficie de la esfera (ver Figura 2.8). Así mismo, hallamos que con el incremento del tamaño de las hojas, las áreas pintadas en ambas superficies de la hoja se incrementan con la siguiente relación:

$$S_A = s_a L^\alpha \quad \text{y} \quad S_B = s_b L^\beta, \quad (3.3)$$

Donde: S_a y S_b , representan a las áreas iniciales; S_A y S_B , representan las nuevas áreas formadas por el incremento; y α y β , son los exponentes de escalamiento.

En cambio el área total de la superficie es directamente proporcional al tamaño de la hoja; de la siguiente manera:

$$S \propto L^\gamma \quad (3.4)$$

También se encontró que $\alpha = 1.69 \pm 0.08$, $\beta = 2.56 \pm 0.08$ y $\gamma = 1.85$ (ver Figura 3.3). Entonces uno puede esperar que en una bola arrugada de una hoja de tamaño $L \geq L_C = (s_a/s_b)^{1/(\beta-\alpha)} \approx 1$ m, las áreas en ambos lados de la hoja a lo largo de la superficie de la esfera son estadísticamente iguales $S_A \approx S_B \approx 0.5S(L \geq L_C)$.

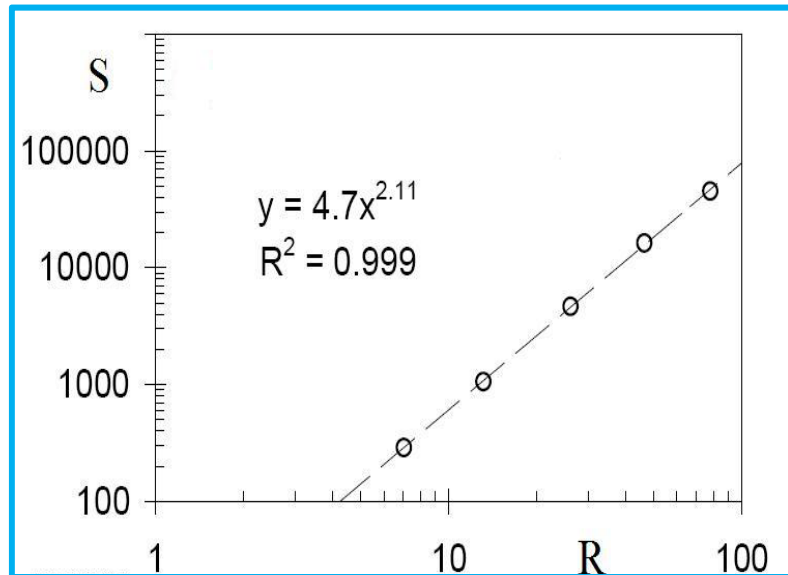


Figura 3.2. El área total de la superficie S en mm^2 contra R en mm .

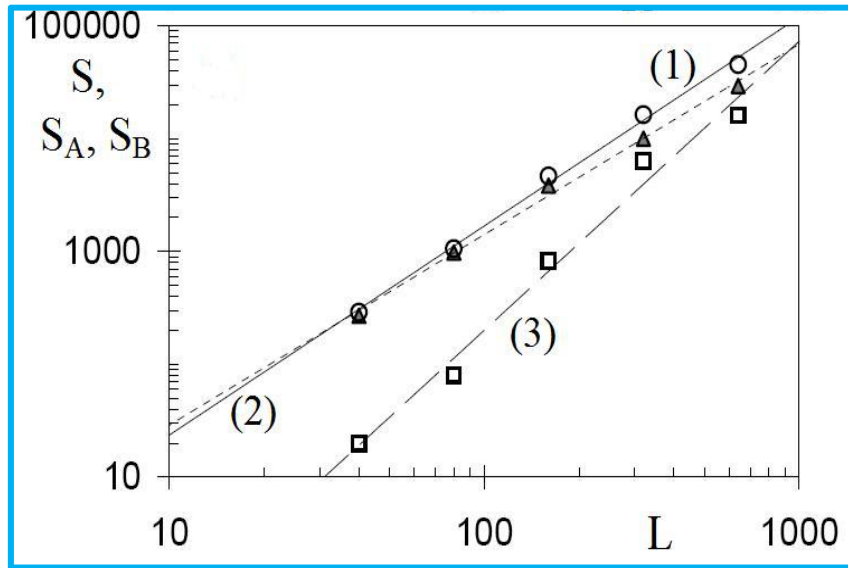


Figura 3.3. El área total de la superficie S en mm^2 (1); las áreas pintadas sobre los dos lados de la hoja S_A en mm^2 (2); y S_B en mm^2 (3); contra el tamaño de la hoja L (en cm).

3.2.2 DIMENSIÓN FRACTAL POR EL MÉTODO CONTEO DE CAJA

Después de haber escaneado todas las hojas desarrugadas por ambos lados (ver figura 2.8), se procedió a caracterizar la dimensión fractal de cada probeta, con la ayuda del software BENOIT 1.3 [4]. El método empleado para estimar de manera estadística la dimensión fractal de cada espécimen es **el método conteo de caja**, éste método fue presentado anteriormente en el capítulo 1 para tener noción de cómo se realiza el proceso de caracterización fractal. En la figura 3.4 se puede observar dos gráficas del método de la caja, en el eje de las abscisas se observa la longitud Δ (tamaño del cuadro ó de la malla), mientras que en el eje de las ordenadas se tiene el número de cuadros ocupados por la geometría irregular procedente de una imagen escaneada. Además también se observa una línea de tendencia potencial que se ajusta a los datos, donde el exponente corresponde a la dimensión fractal de la imagen analizada.

Cabe hacer mención que el software BENOIT 1.3 ejecuta el análisis considerando la parte blanca de la imagen procesada contrario a lo que analiza el método de la caja descrito en el capítulo 1; razón por la cual se invirtieron los colores de imagen escaneada.

Una vez graficados los datos obtenidos con el método de la caja, se encontró que los patrones obtenidos por mapeo o encuadre de la superficie de la bola extendida; exhiben propiedades fractales caracterizadas por dos dimensiones fractales de caja: $D_{BP} = 1.8 \pm 0.1$ para pequeñas escalas $\Delta < l_C$ y $D_{BP} = 1.42 \pm 0.06$ para grandes escalas $l_C < \Delta < L$ (ver Fig. 3.5), que son independientes de L y R (ver Fig. 3.6).

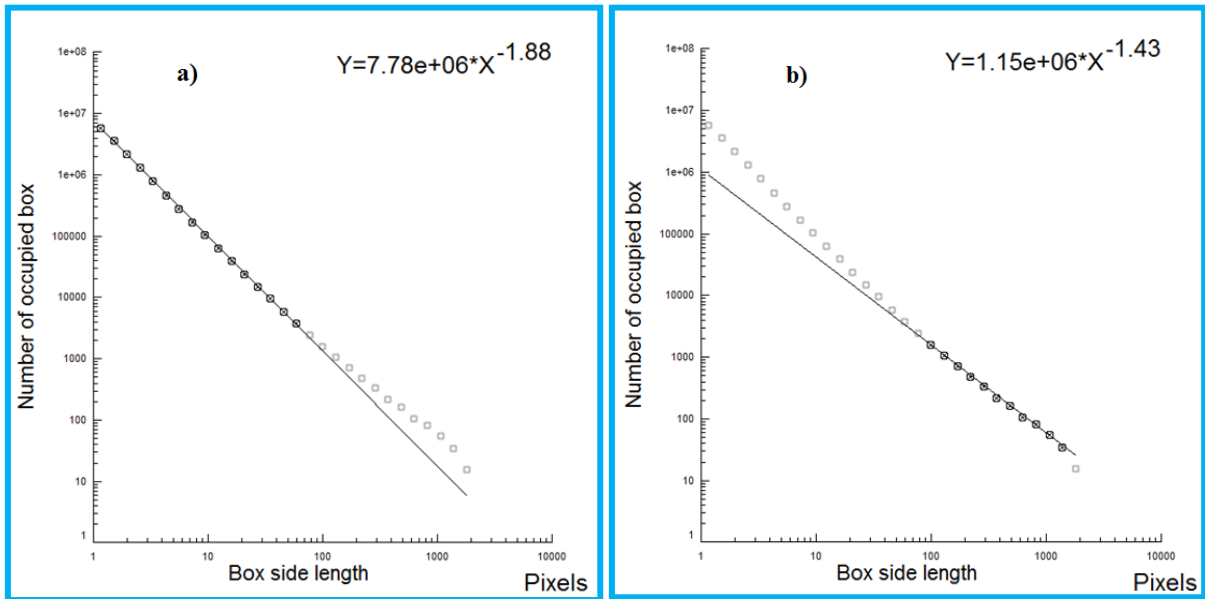


Figura 3.4 Dimensión fractal estadística de la superficie de la esfera, a) representa la dimensión fractal para la superficie S_A , y b) representa la dimensión fractal para la superficie S_B .

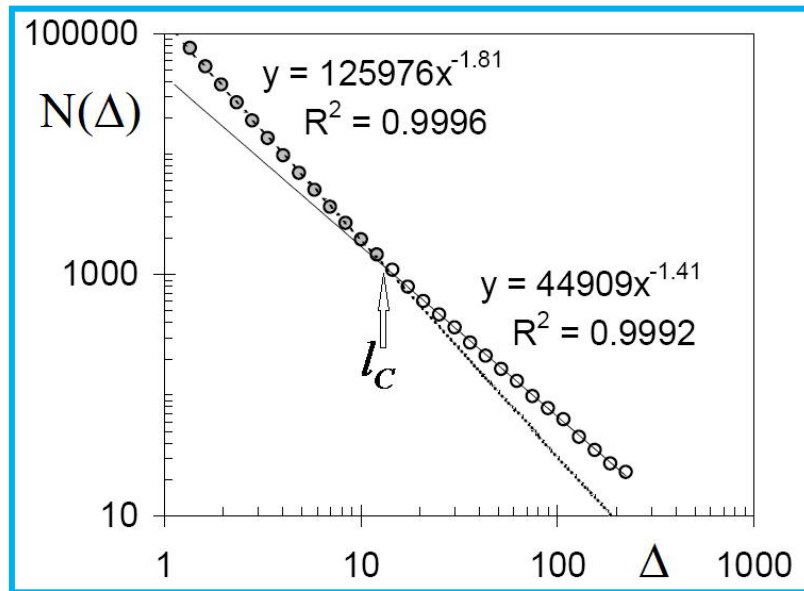


Figura 3.5. Número de cuadros $N(\Delta)$ que cubren el patrón negro en hojas desarrugadas de tamaño $L = 80$ mm (círculos)

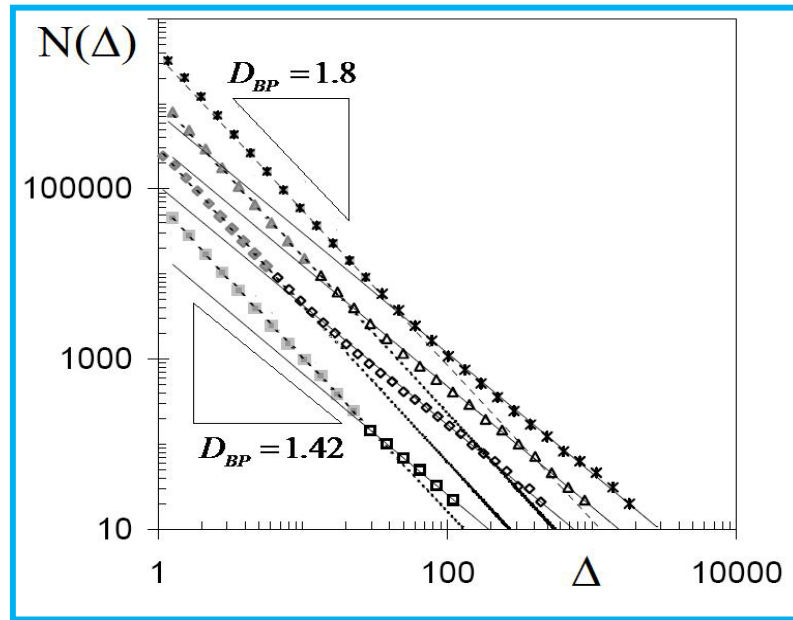


Figura 3.6. Número de cuadros $N(\Delta)$ que cubren el patrón negro en hojas desarrugadas de tamaño, $L = 40$ (cuadros), 160 (rombos), 320 (triángulos), y 640 mm (cruces) contra el tamaño del cuadro Δ (en pixeles).

3.3 ANÁLISIS DE LA TOPOLOGÍA FRACTAL DE LAS BOLAS SECCIONADAS

Se sabe de antemano que los fractales se clasifican de dos maneras, lineales y no lineales. Los lineales son aquellos en los que se puede observar la misma geometría a cualquier escala de amplificación (auto-similares); sin embargo, en los fractales no lineales no se puede observar la misma geometría a cualquier escala, pero sí se puede observar que algunas geometrías se repiten, comparándolas con algunos otros especímenes de la misma clase; como se observa en la figura 3.7, a este tipo de fractales también se le conoce como fractales estadísticos o auto-afines.

Después de que las hojas de papel fueron reconstruidas con sus respectivas mitades (blanca y negra) y escaneadas como se observa en la figura 2.11 se procedió a estimar la dimensión fractal por el método conteo de caja, los datos obtenidos se muestran en la tabla 3.1 y en la figura 3.8; se muestra una gráfica generada por el método conteo de caja, donde se puede observar la dimensión fractal ajustando una línea de tendencia a los datos graficados de las hojas de papel reconstruidas. Las demás gráficas obtenidas para los experimentos realizados se presentan en el apéndice B

Además, se encontró que los patrones de imágenes de los fragmentos de hoja (ver Fig. 2.11) poseen una escala fractal invariante caracterizada por la dimensión fractal de caja $D_{BF} = 1.68 \pm 0.04$, que es independiente del tamaño de la hoja (ver Fig. 3.9). Así, se notó que el valor universal de D_i coincide con la dimensión fractal de masa $D = 8/3$ de unas hojas ideales de diferentes tamaños arrugadas bajo la misma fuerza ($F = \text{constante}$) [5].

3.3.1 DISTRIBUCIÓN DE LOS FRAGMENTOS DE PAPEL

Por otro lado, se encontró que el número de fragmentos n (figura 2.10) de la bola de papel cortada a la mitad, escala con el tamaño de la hoja L , con la siguiente relación:

$$n \propto L^\nu \quad (3.5)$$

Donde: el exponente de escalamiento encontrado es $\nu = 0.26 \pm 0.03$ (ver Figura 3.10 a).

En cambio la desviación estándar σ_n del número de fragmentos (ver Figura 3.10 b), escala de la siguiente manera:

$$\sigma_n \propto L^{0.3} \quad (3.6)$$

La distribución [6] de los fragmentos de masa de la hoja después de que la bola es cortada a la mitad tienen un mejor ajuste con la distribución inversa de Gauss (ver Fig. 3.11), la media μ y la desviación estándar σ_μ de las cuales (ver Figura 3.12) ambas incrementan con el tamaño de la hoja L como:

$$\mu \propto \sigma_\mu \propto L^\theta \quad (3.7)$$

Donde: $\theta = 1.74 \pm 0.07$ es el exponente de escalamiento (ver Fig. 3.13 y 3.14). Por lo tanto, la masa promedio de los fragmentos de las bolas de papel arrugadas a mano cortadas a la mitad obedece la relación de escalamiento

$$\mu \propto R^{D\theta/2} \propto R^2. \quad (3.8)$$

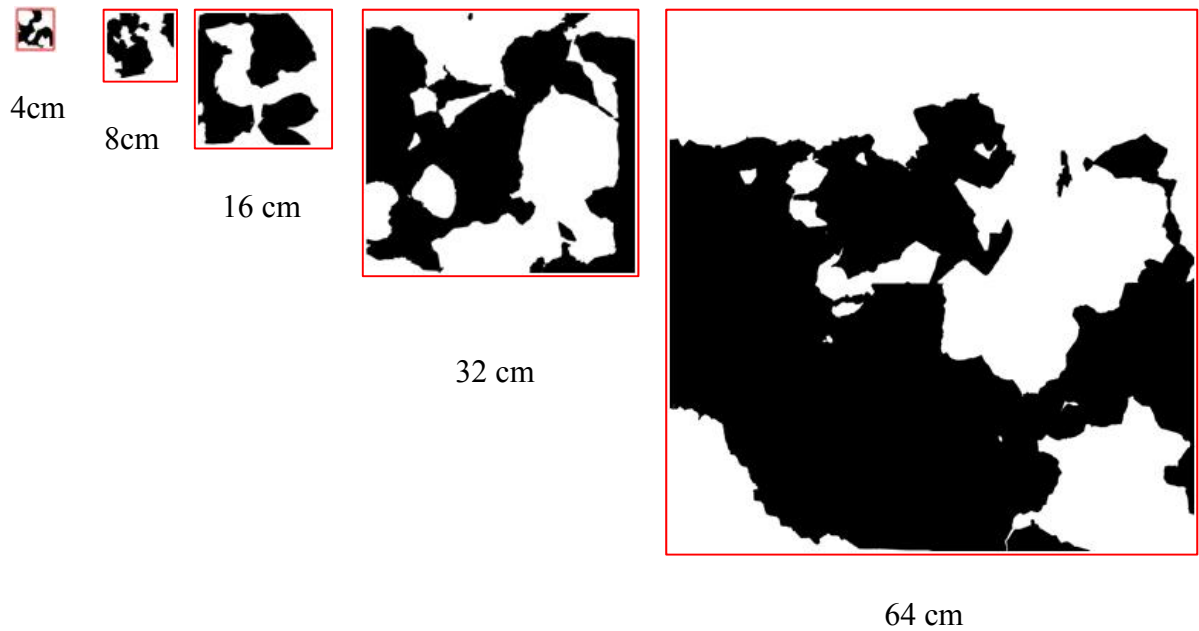


Figura 3.7 Hojas de papel reconstruidas con sus dos mitades (blanca y negra) de diferentes tamaños.

Tabla 3.1 Dimensión fractal por el método conteo de caja para los diferentes tamaños de papel.

DIMENSIÓN FRACTAL CONTEO DE CAJA					
4 cm	8 cm	16 cm	32 cm	64 cm	
1.69	1.65	1.69	1.7	1.67	
1.69	1.59	1.57	1.69	1.75	
1.62	1.63	1.54	1.77	1.67	
1.62	1.66	1.67	1.58	1.69	
1.68	1.69	1.65	1.73	1.63	
1.62	1.59	1.68	1.67	1.72	
1.75	1.61	1.67	1.67	1.69	
1.6	1.65	1.69	1.7	1.68	
1.69	1.67	1.73	1.73	1.7	
1.62	1.69	1.71	1.66	1.7	
1.66	1.67	1.66	1.69	1.68	
1.56	1.75	1.76	1.7	1.71	
1.72	1.66	1.73	1.7	1.75	
1.69	1.63	1.76	1.66	1.69	
1.72	1.61	1.64	1.72	1.75	
1.59	1.69	1.65	1.58	1.64	
1.64	1.68	1.66	1.65	1.7	
1.67	1.66	1.61	1.71	1.73	
1.62	1.66	1.69	1.72	1.65	
1.75	1.61	1.67	1.58	1.59	
1.58	1.66	1.76	1.66	1.62	
1.7	1.69	1.69	1.66	1.64	
1.64	1.68	1.63	1.68	1.68	
1.69	1.63	1.66	1.64	1.69	
Promedio	1.65875	1.65458333	1.67375	1.67708333	1.68416667
Desv-Est	0.052611166	0.03741415	0.05459834	0.048047	0.04138017

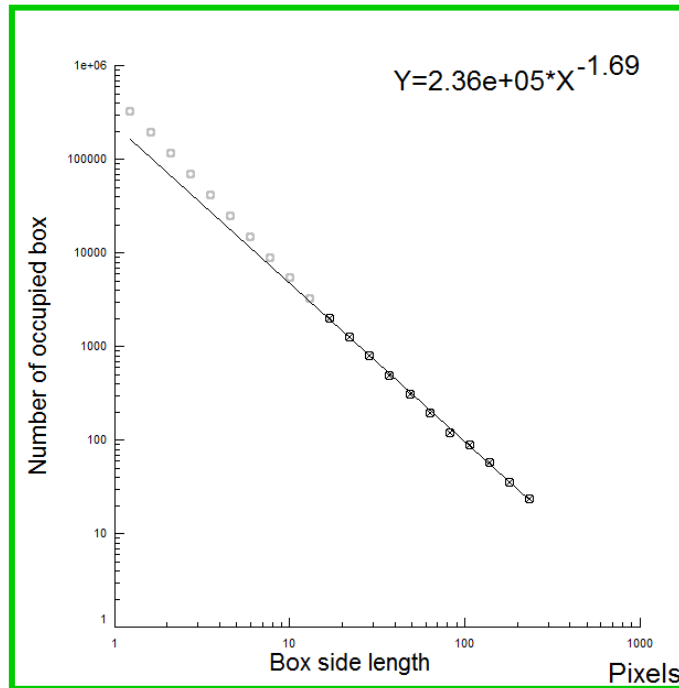


Figura 3.8, Dimensión fractal de los patrones de mosaico a través del método conteo de caja.

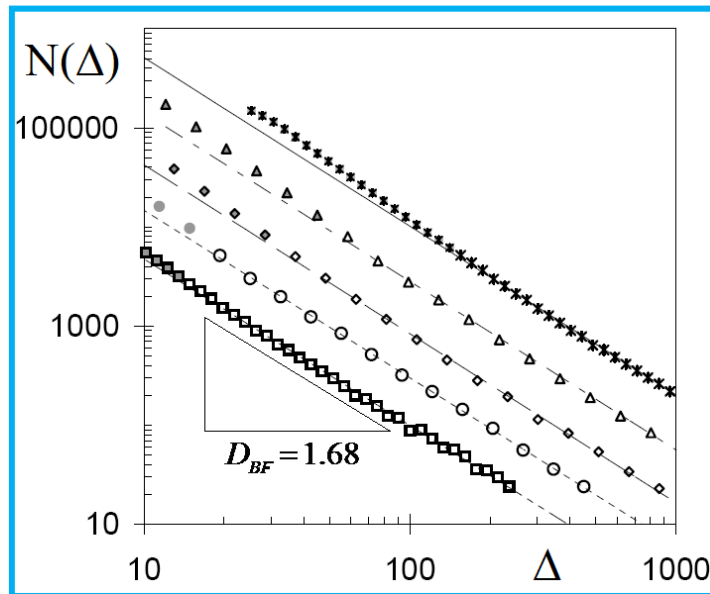


Figura 3.9 Gráfica fractal log-log del número de cuadros $N(\Delta)$ que cubren los patrones negros (blancos) en las hojas reconstruidas de tamaño $L = 40$ (cuadros), 80 (círculos), 160 (rombos), 320 (triángulos), y 640 mm (cruces) contra el tamaño del cuadro Δ (en pixeles).

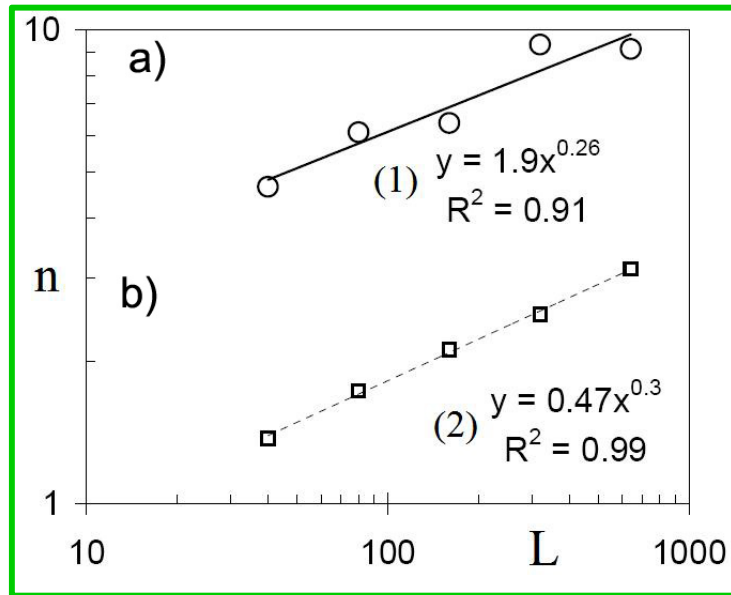


Figura 3.10. Gráfica Log-log del número promedio n a) y la desviación estándar σ_n b) de los fragmentos de la bola de papel cortada a la mitad contra el tamaño de la hoja L en mm.

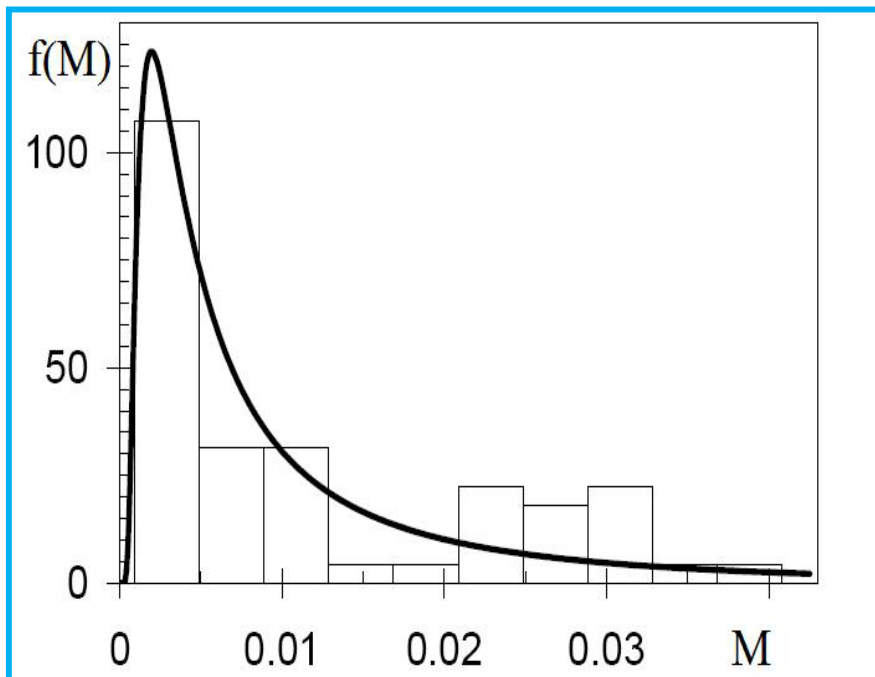


Figura 3.11. Distribución estadística de la masa de los fragmentos de 10 bolas de papel arrugado cortado a la mitad, de cuadros de hoja de tamaño 40 mm

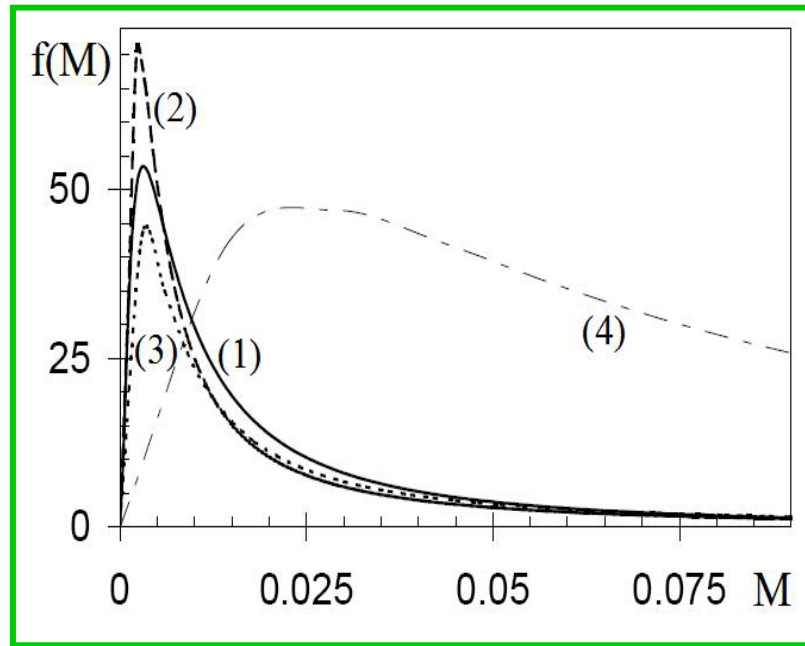


Figura 3.12. Distribución estadística de la masa de los fragmentos de 10 bolas de papel arrugado cortado a la mitad, de cuadros de hoja de tamaño 80 (1), 160 (2), 320 (3), y 640 mm (4).

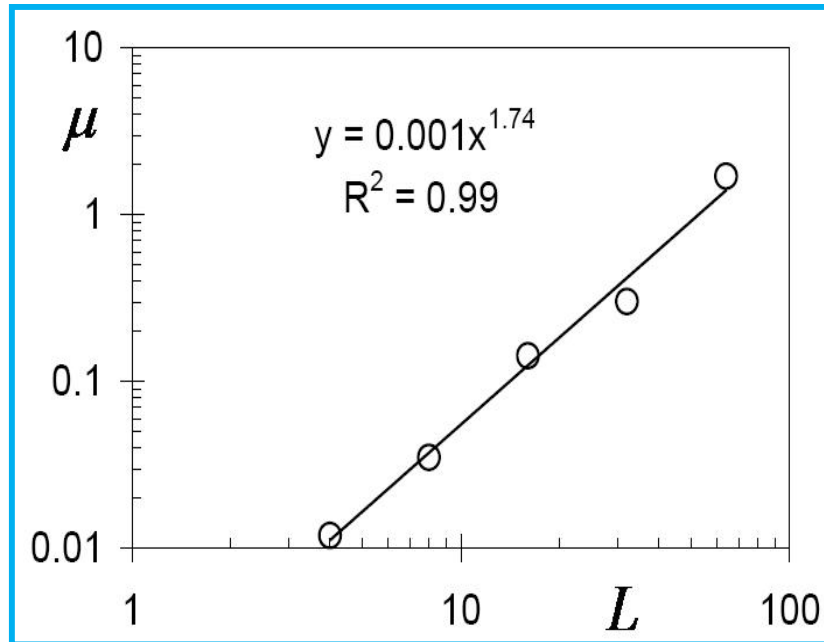


Figura 3.13 Masa promedio (en gramos) de los fragmentos contra el tamaño de la hoja (en mm)

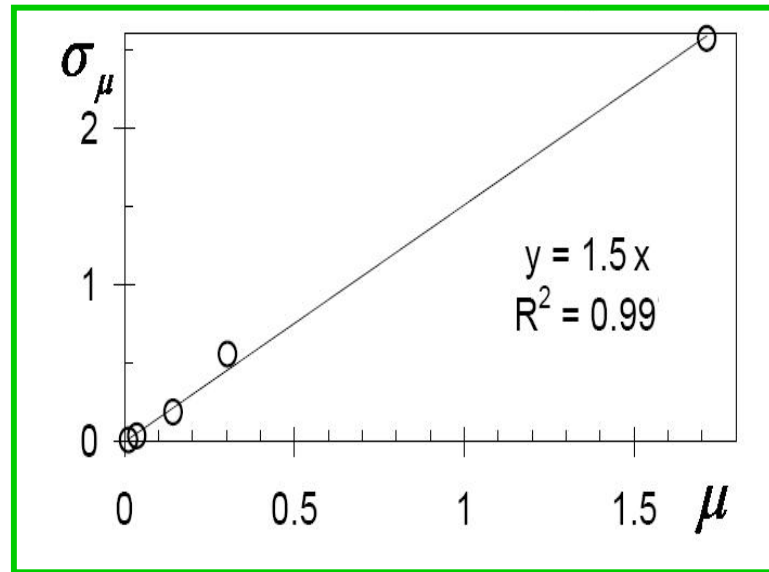


Figura 3.14 Gráfica de la desviación estándar de la masa de los fragmentos (en gramos) contra el promedio de la masa de los fragmentos (en gramos).

3.4 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALEXANDER S. BALANKIN, DIDIER SAMAYOA OCHOA, ISRAEL MIGUEL ANDRÉS, JULIÁN PATIÑO ORTIZ, MIGUEL ÁNGEL MARTÍNEZ CRUZ, “*Fractal topology of hand crumpled paper*”, Physical Review E (2010).
- [2] BALANKIN, A. S. Y SUSARREY O., “*Fractal geometry and mechanics of randomly folded thin sheets*”, Springer science Business Media B. V. 2009.
- [3] BALANKIN A. S., ORLANDO SUSARREY HUERTA, ROLANDO CORTES MONTES DE OCA, DIDIER SAMAYOA OCHOA, JOSÉ MARTÍNEZ TRINIDAD Y MARIBEL A. MENDOZA, “*Intrinsically anomalous roughness of randomly crumpled thin sheets*”, Physical Review E74, 061602, 2006.
- [4] BENOIT 1.3, <http://www.trusoft-international.com>; W. Seffens, Science 285, 1228 (2000).
- [5] BALANKIN ALEXANDER S., ROLANDO CORTES MONTES DE OCA Y DIDIER SAMAYOA OCHOA, “*Intrinsically anomalous self-similarity of randomly folded matter*”, Physical Review E76, 032101, 2007.
- [6] Las mejores pruebas de distribución estadísticas, Kolmogorov-Smirnov y Anderson fueron realizados con la ayuda del software @RISK (<http://www.palisade.com>).

CONCLUSIONES

El objetivo trazado al inicio de la presente investigación fue cumplido, debido a que se caracterizó la topología fractal de las bolas de papel, con las siguientes características:

- Del análisis estadístico se determinó la dimensión fractal de masa de 2.2617.
- Se determinó que la superficie pintada de color negro presenta un patrón donde el color en un lado de la hoja es dominante sobre el otro cuando $L < L_C$, mientras que en una hoja de papel arrugado de tamaño $L > L_C$, las áreas coloreadas de ambos lados de la hoja a lo largo de la superficie son estadísticamente iguales.
- El área total de la bola escala con el diámetro de la bola con la siguiente relación; $S \propto R^{D_s}$, con la dimensión fractal D_s satisfaciendo la relación de escalamiento $D_s = 3 - 2 / D_M$, donde D_M es la dimensión fractal de masa del conjunto de esferas. Los patrones obtenidos por mapeo de la superficie de la esfera en hojas planas desenvueltas exhiben las propiedades fractales caracterizadas por dos dimensiones fractales, que son independientes de L y R .
- También se encontró que la distribución de la masa de los fragmentos de hoja después de que la bola es cortada a la mitad obedece a una distribución inversa de Gauss; el promedio y la desviación estándar se ajustan a leyes de potencia de acuerdo al tamaño de la hoja L .
- Los patrones de mosaico obtenidos por la reconstrucción de la hoja, con los fragmentos de las dos partes de la bola cortada a la mitad posee una escala invariante fractal caracterizada por la dimensión fractal de caja $D_{BF} = 1.68 \pm 0.04$.
- Todos estos resultados proveen una mejor comprensión en la naturaleza del fenómeno de arrugado. La pregunta abierta: ¿es la igualdad $D_{BF} = D_l - 1 = 5/3$ accidental, o esto es una propiedad intrínseca de las configuraciones arrugadas? Esperamos que nuestros resultados estimularan más adelante investigaciones en esta área.

Apéndice A

BOLAS PARTIDAS A LA MITAD Y UNA LAS MITADES PINTADAS DE COLOR NEGRO.

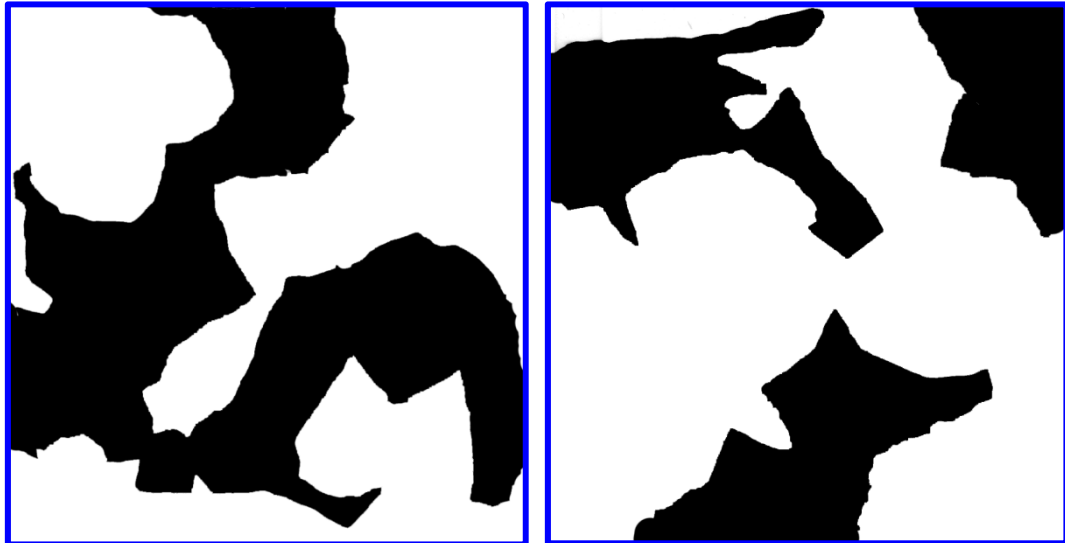


Figura A.1 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 1 y 2, tamaño de 4x4 cm

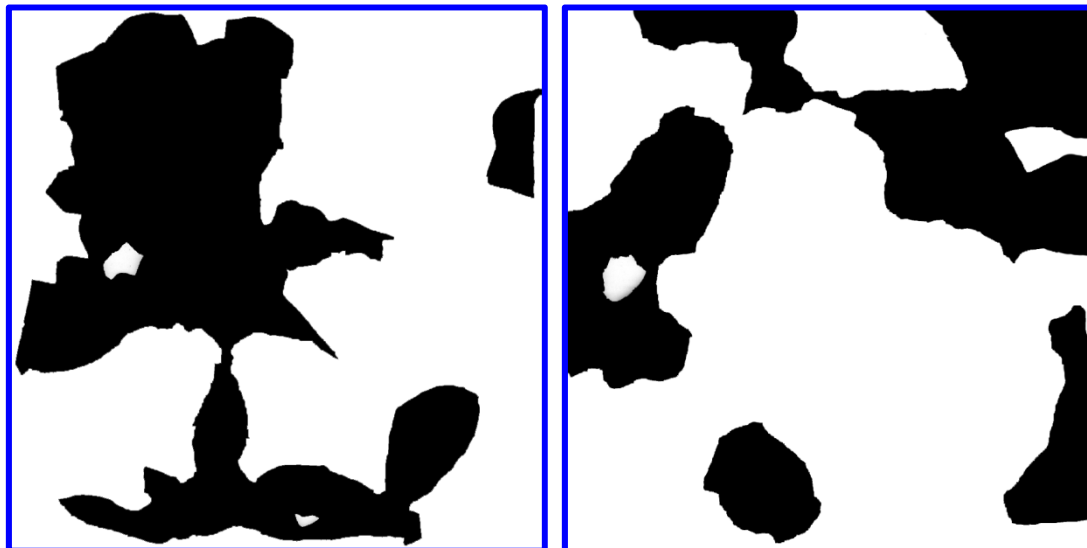


Figura A.2 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 3 y 4, tamaño de 4x4 cm

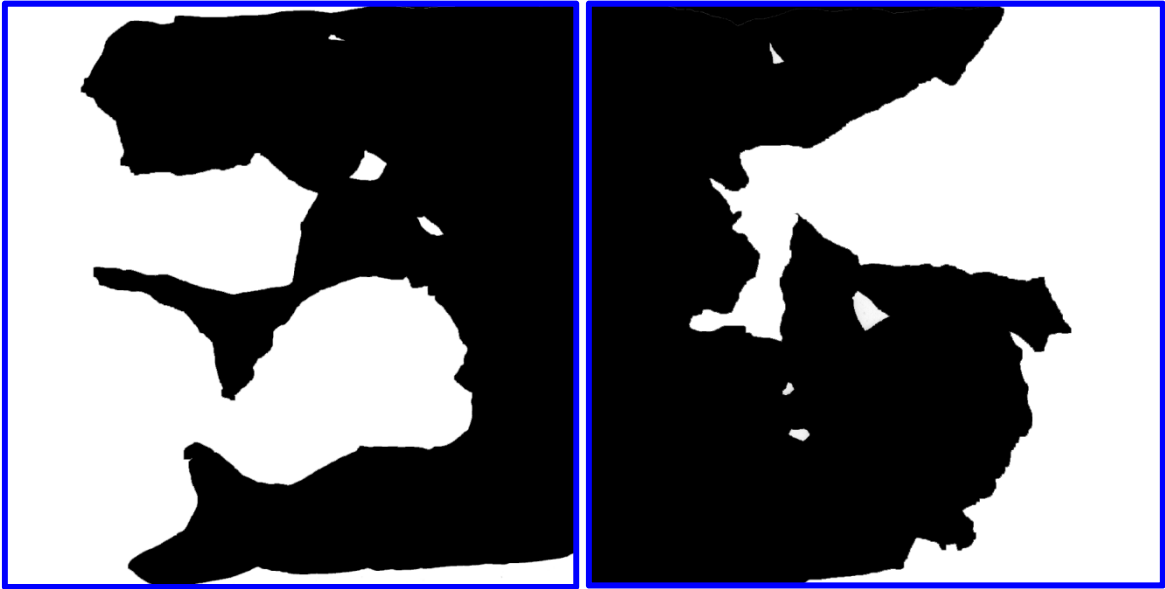


Figura A.3 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 5 y 6, tamaño de 4x4 cm



Figura A.4 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 7 y 8, tamaño de 4x4 cm

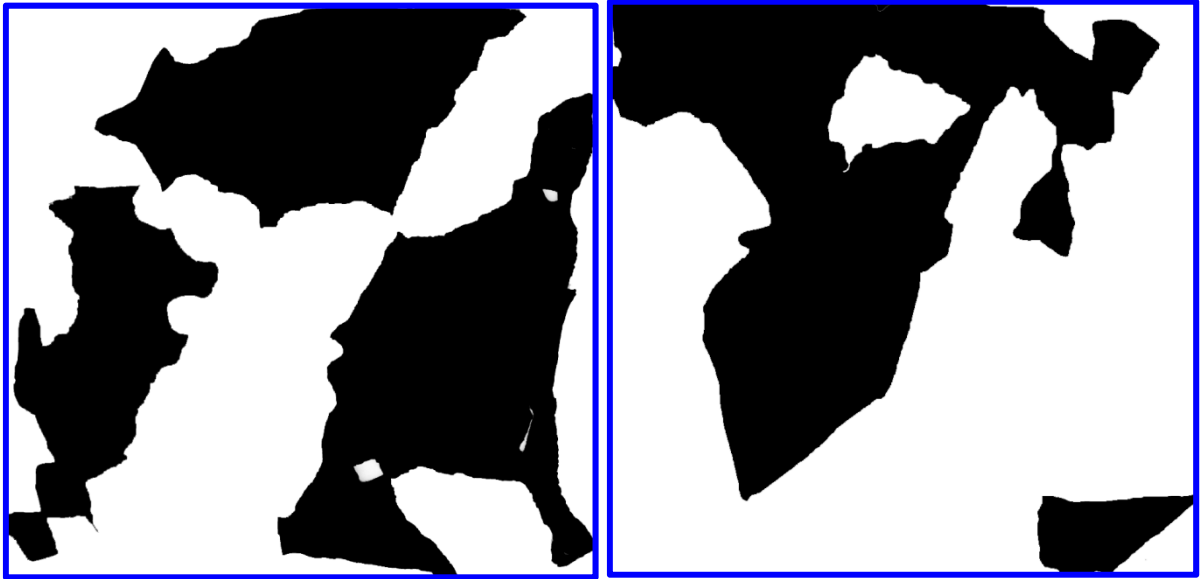


Figura A.5 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 9 y 10, tamaño de 4x4 cm

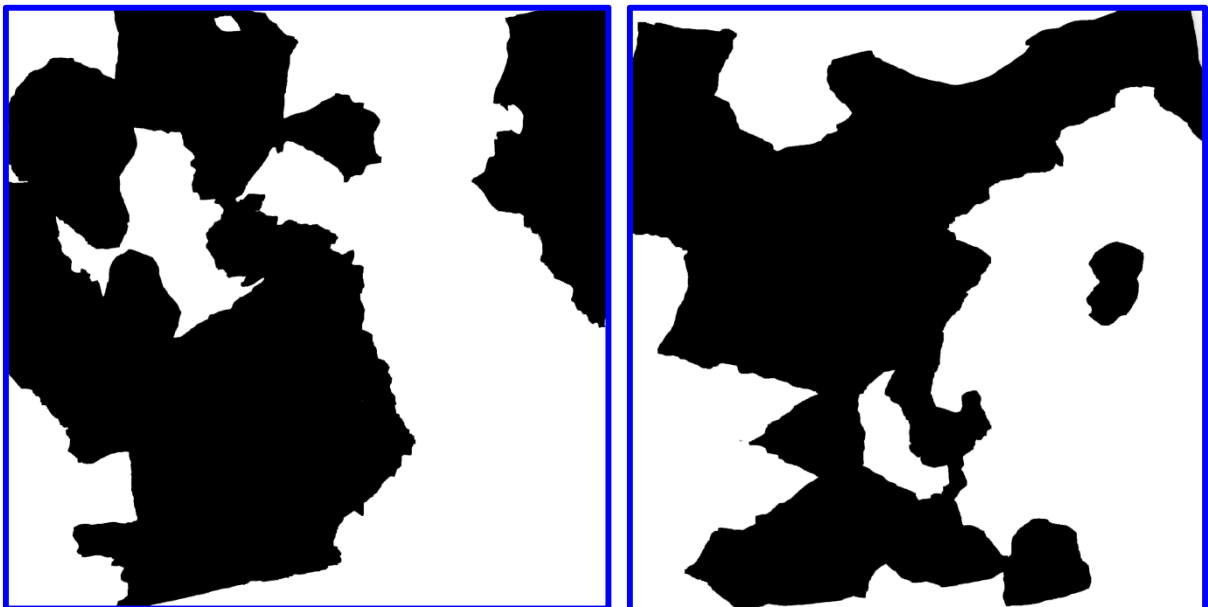


Figura A.6 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 1 y 2, tamaño de 8x8 cm



Figura A.7 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 3 y 4, tamaño de 8x8 cm



Figura A.8 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 5 y 6, tamaño de 8x8 cm

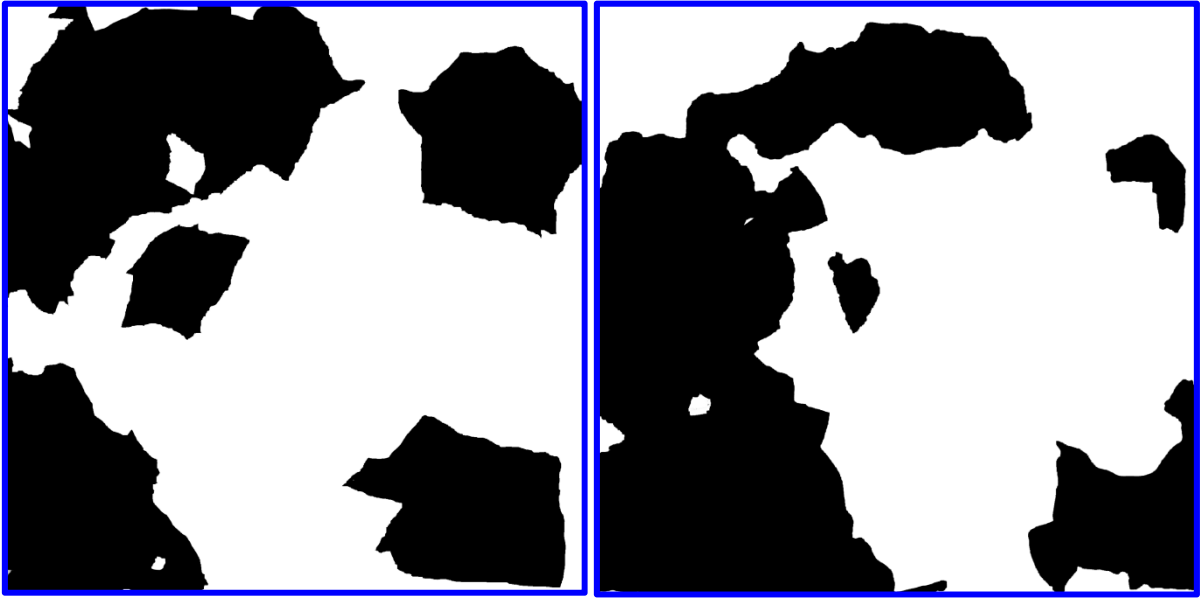


Figura A.9 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 7 y 8, tamaño de 8x8 cm

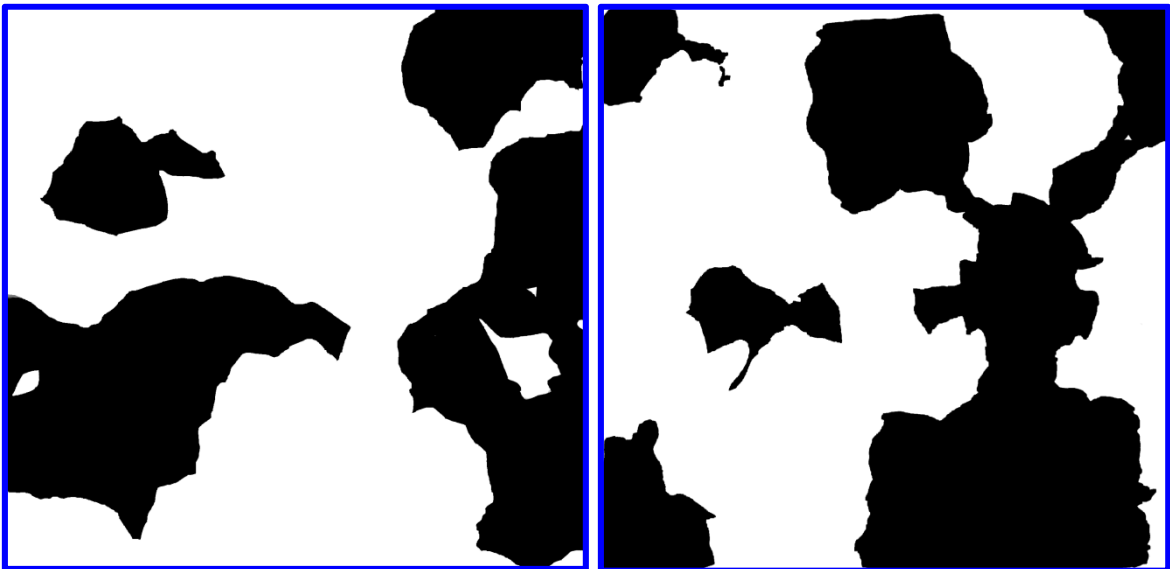


Figura A.10 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 9 y 10, tamaño de 8x8 cm

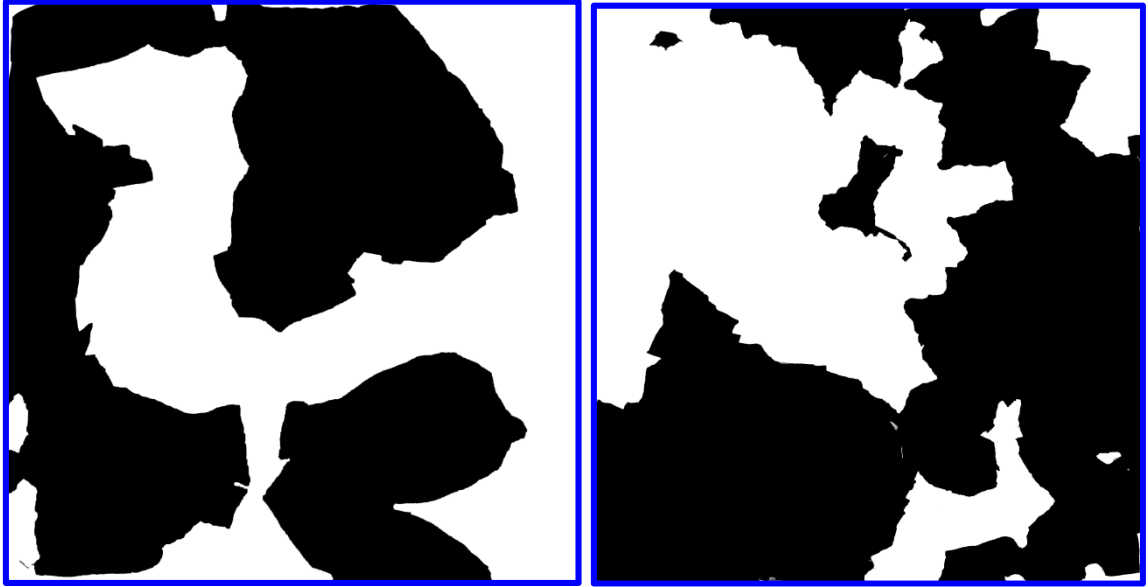


Figura A.11 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 1 y 2, tamaño de 16x16 cm



Figura A.12 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 3 y 4, tamaño de 16x16 cm



Figura A.13 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 5 y 6, tamaño de 16x16 cm

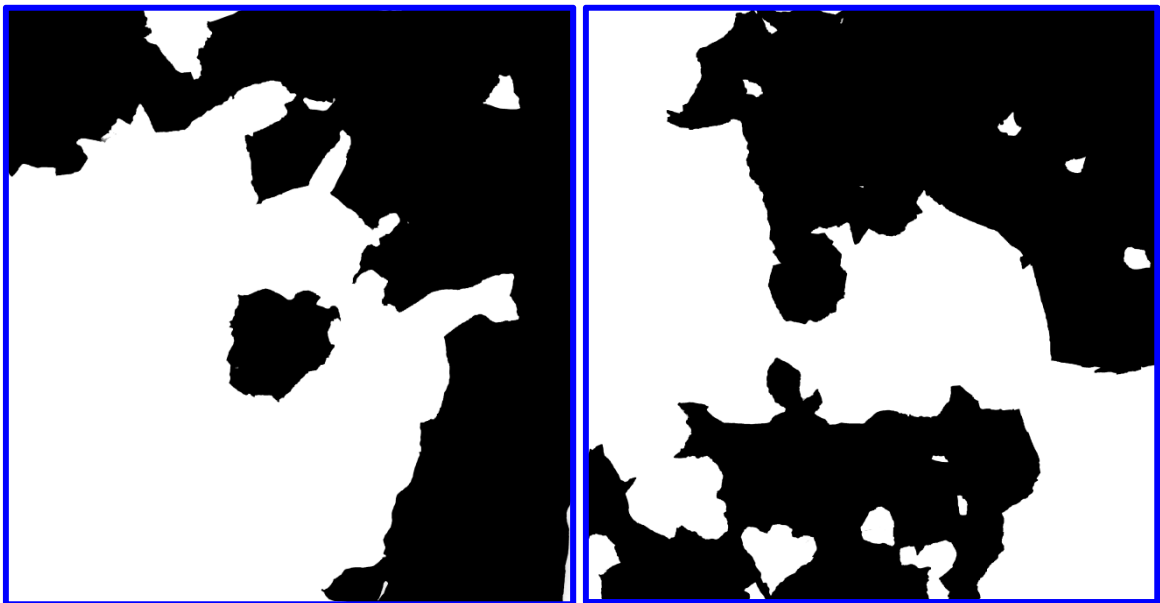


Figura A.14 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 7 y 8, tamaño de 16x16 cm

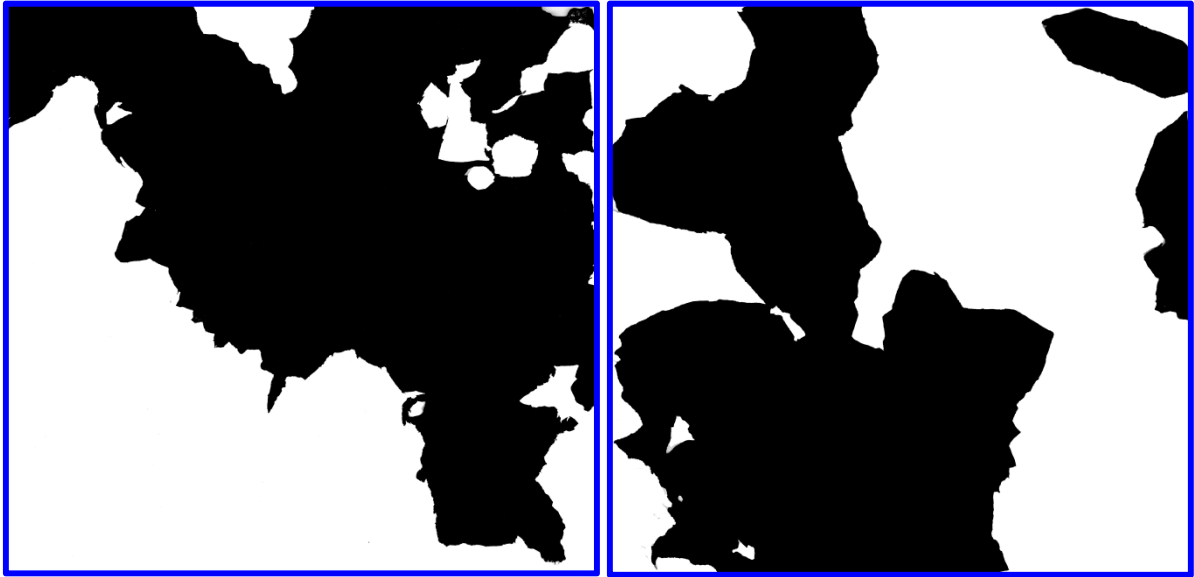


Figura A.15 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 9 y 10, tamaño de 16x16 cm

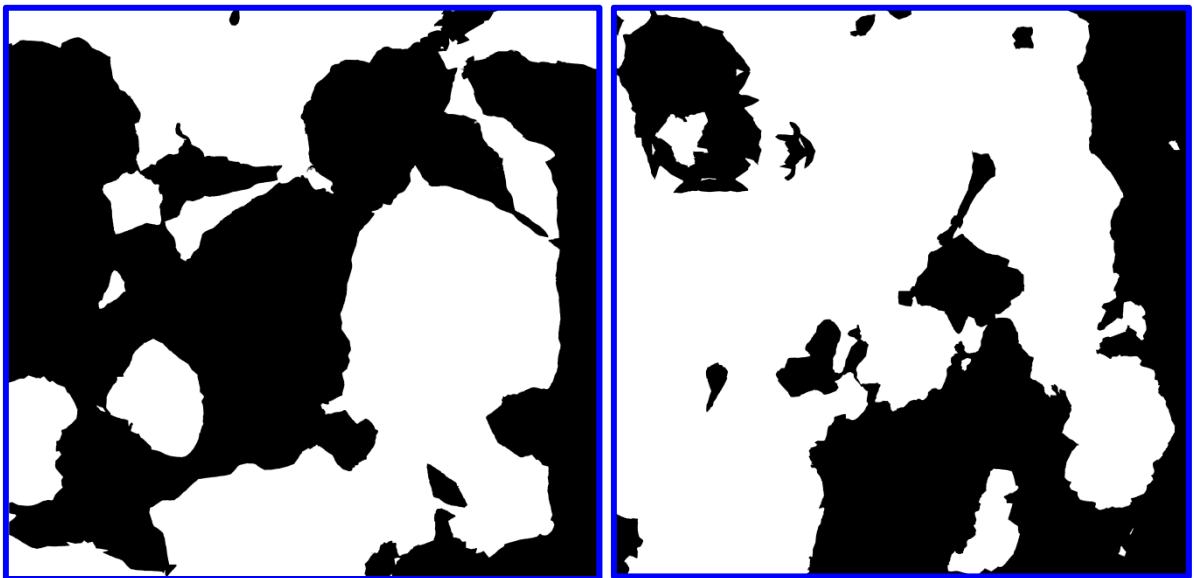


Figura A.16 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 1 y 2, tamaño de 32x32 cm

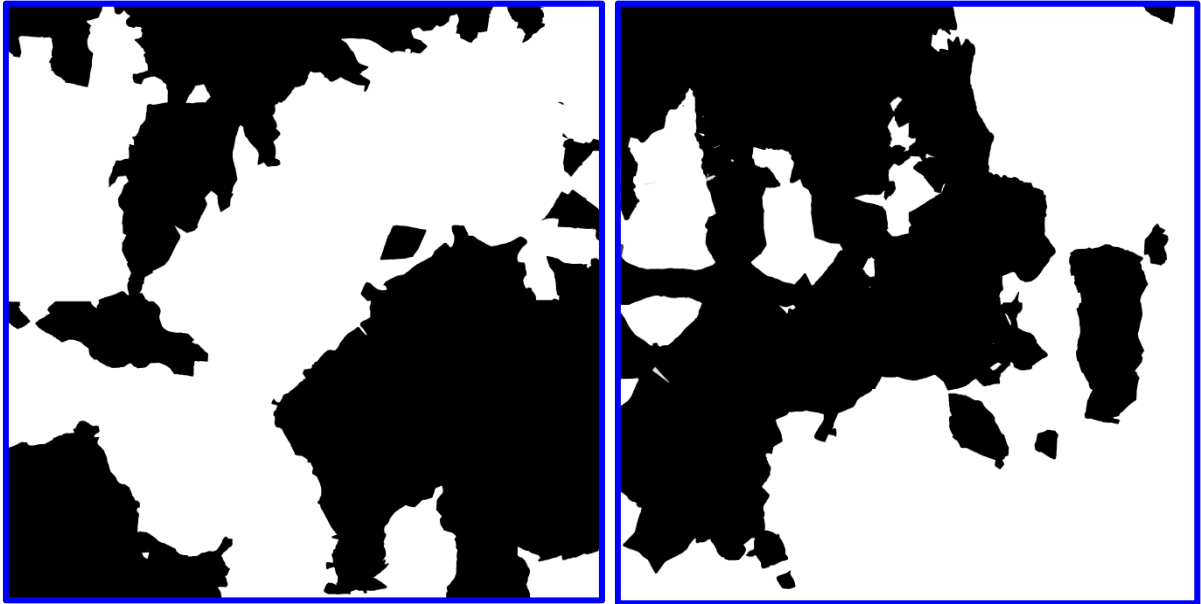


Figura A.17 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 3 y 4, tamaño de 32x32 cm

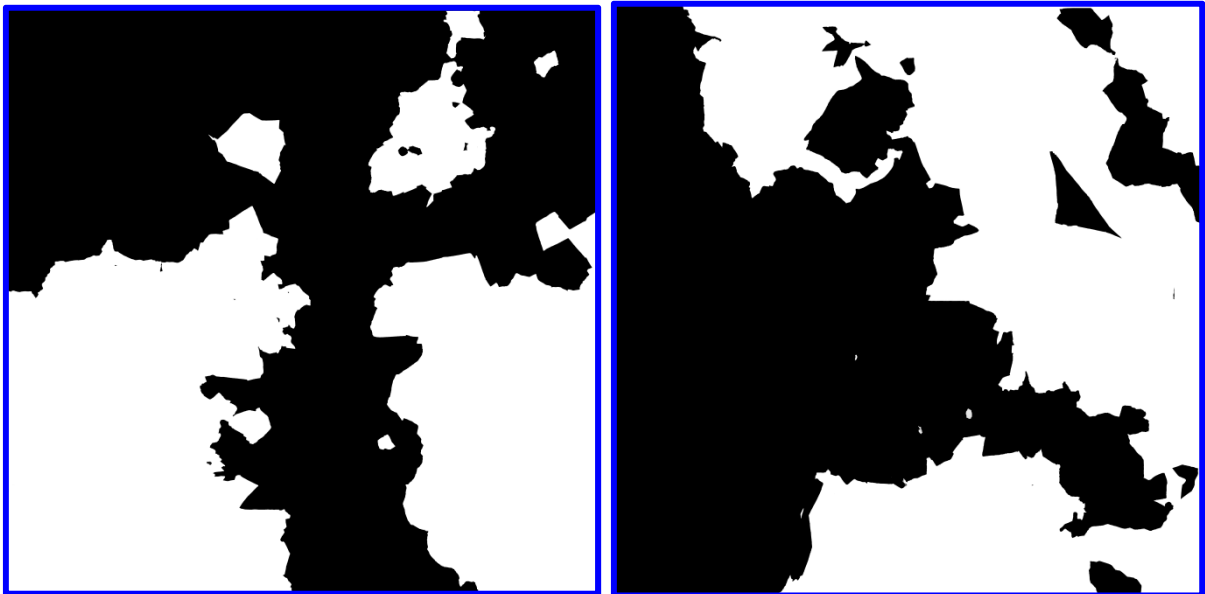


Figura A.18 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 5 y 6, tamaño de 32x32 cm

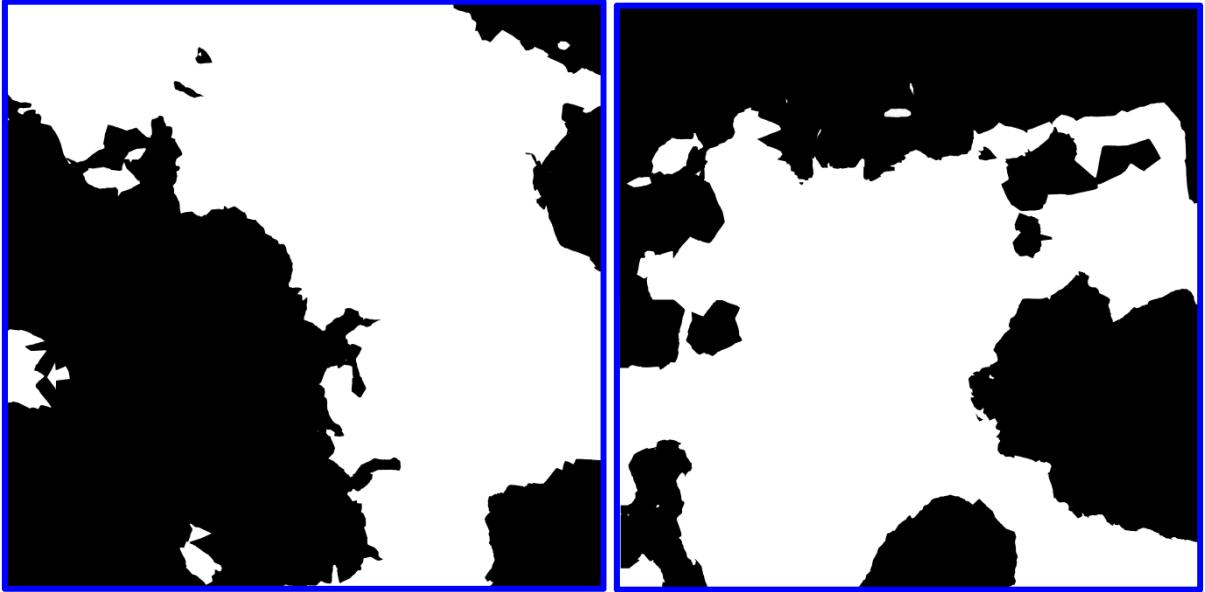


Figura A.19 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 7 y 8, tamaño de 32x32 cm

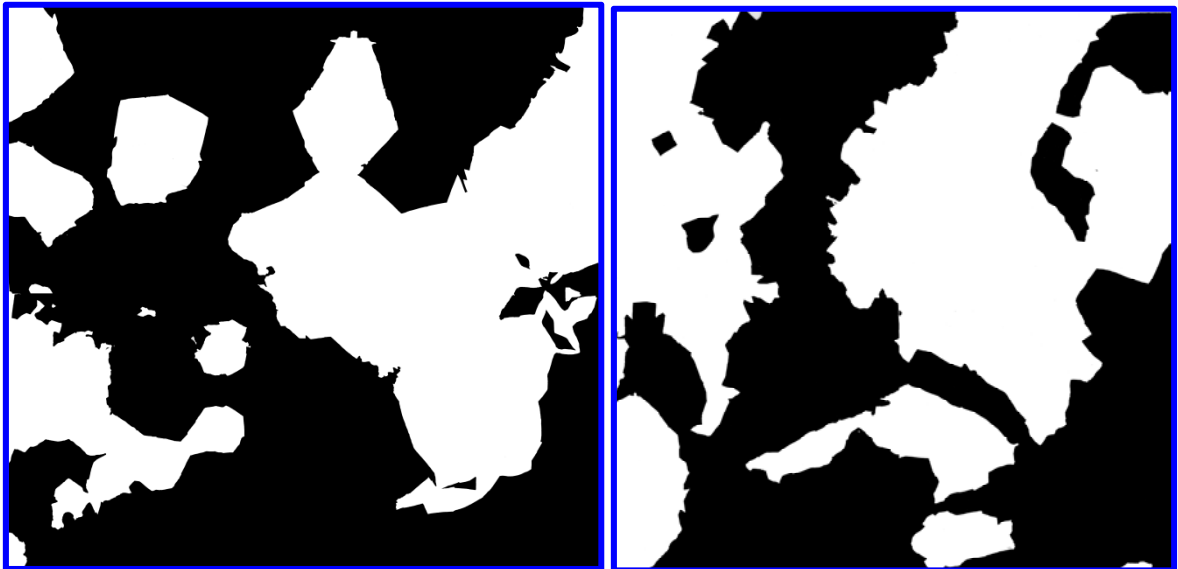


Figura A.20 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 9 y 10, tamaño de 32x32 cm



Figura A.21 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 1 y 2, tamaño de 64x64 cm

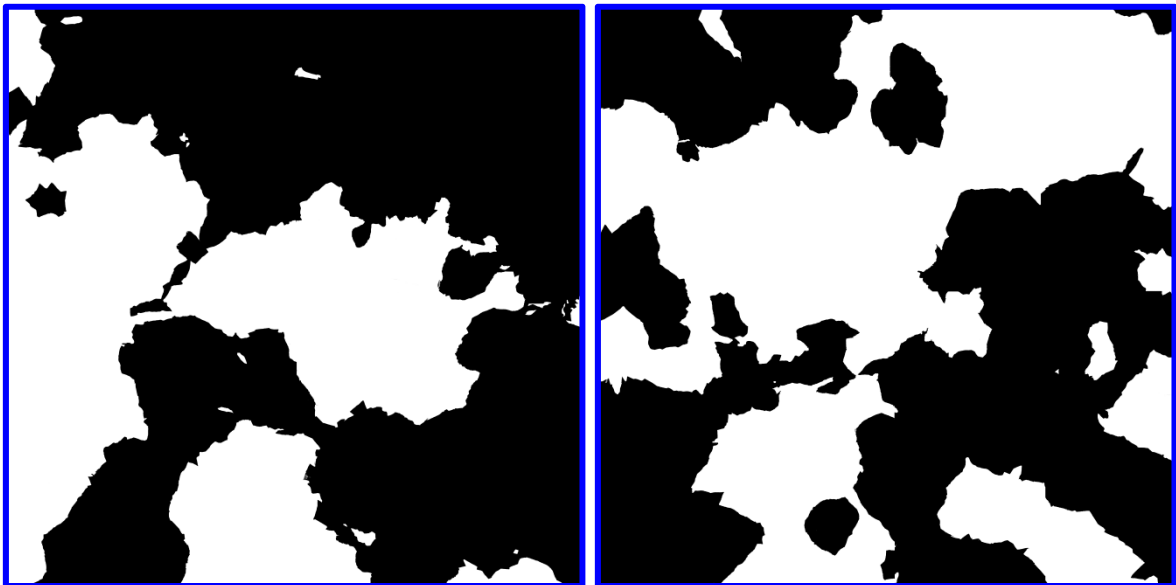


Figura A.22 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 3 y 4, tamaño de 64x64 cm

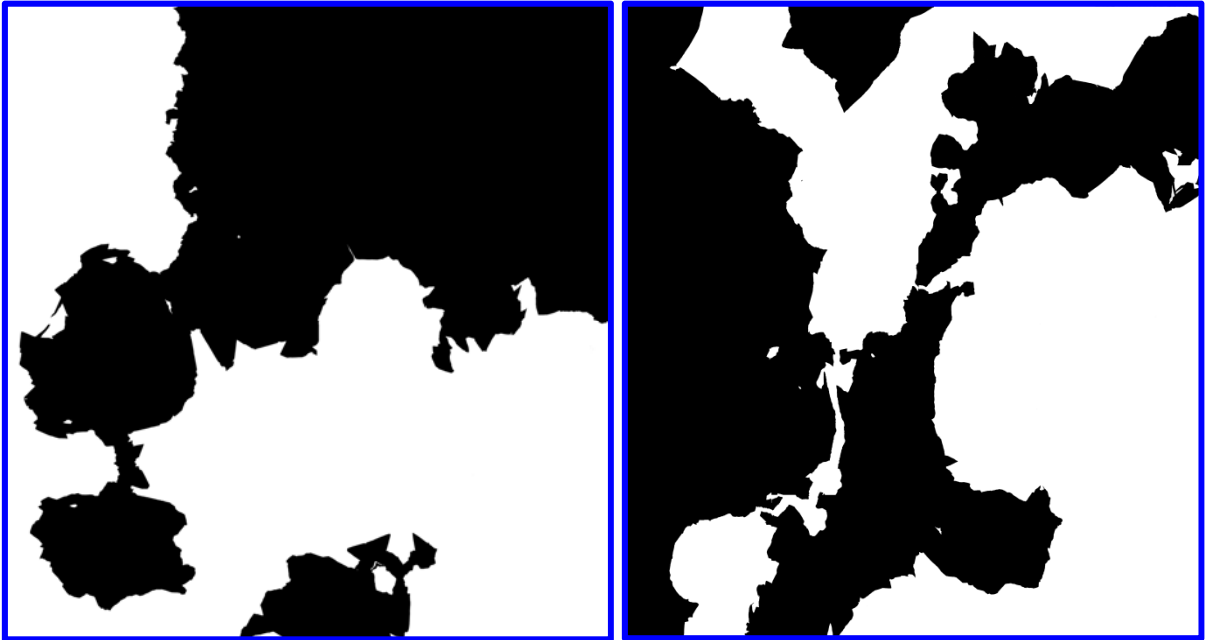


Figura A.23 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 5 y 6, tamaño de 64x64 cm

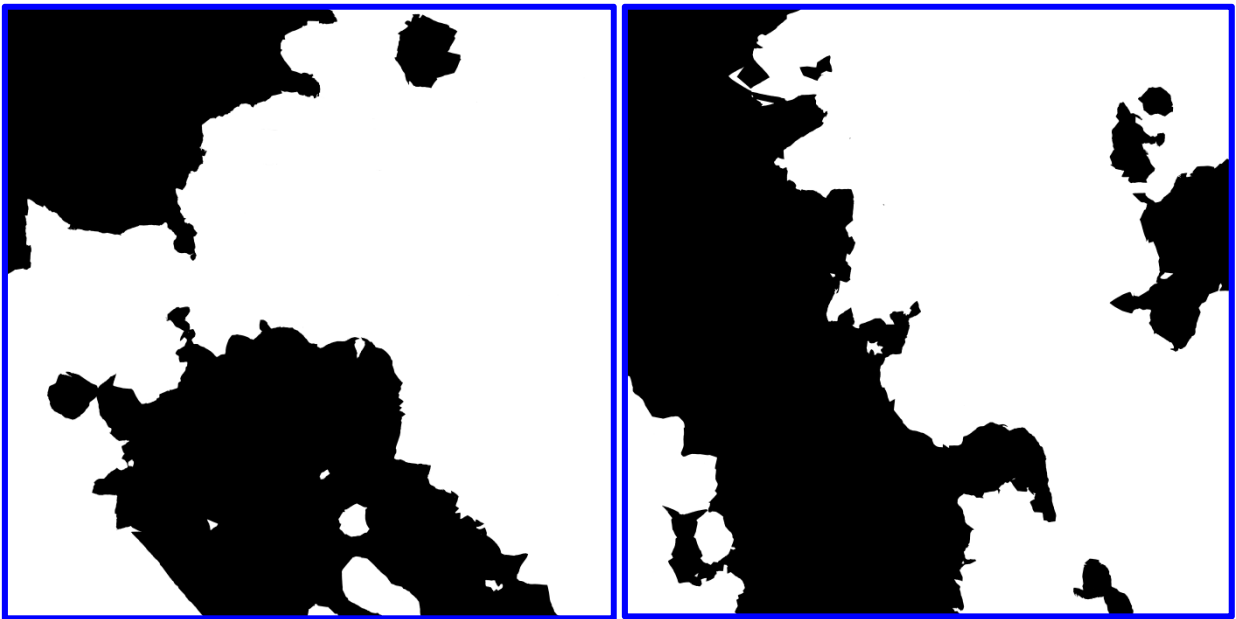


Figura A.24 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 7 y 8, tamaño de 64x64 cm

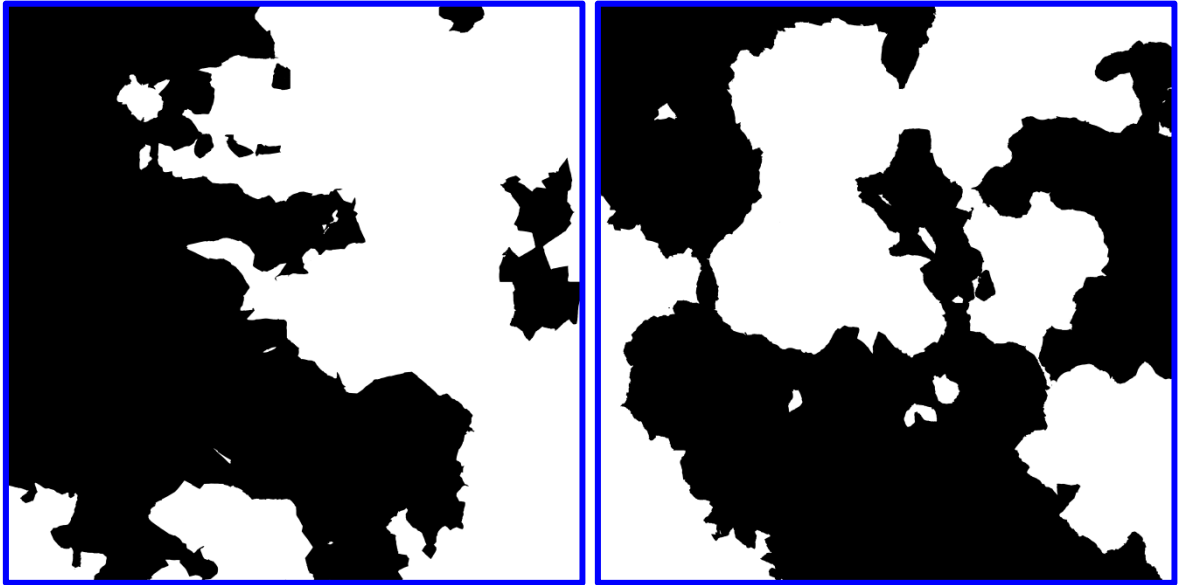


Figura A.25 muestra las hojas de papel biblia reconstruidas 9 y 10, tamaño de 64x64 cm

Apéndice B

GRÁFICAS QUE MUESTRAN LA DIMENSIÓN FRACTAL DE CONTEO DE CAJA PARA LAS BOLAS DE PAPEL CORTADAS A LA MITAD.

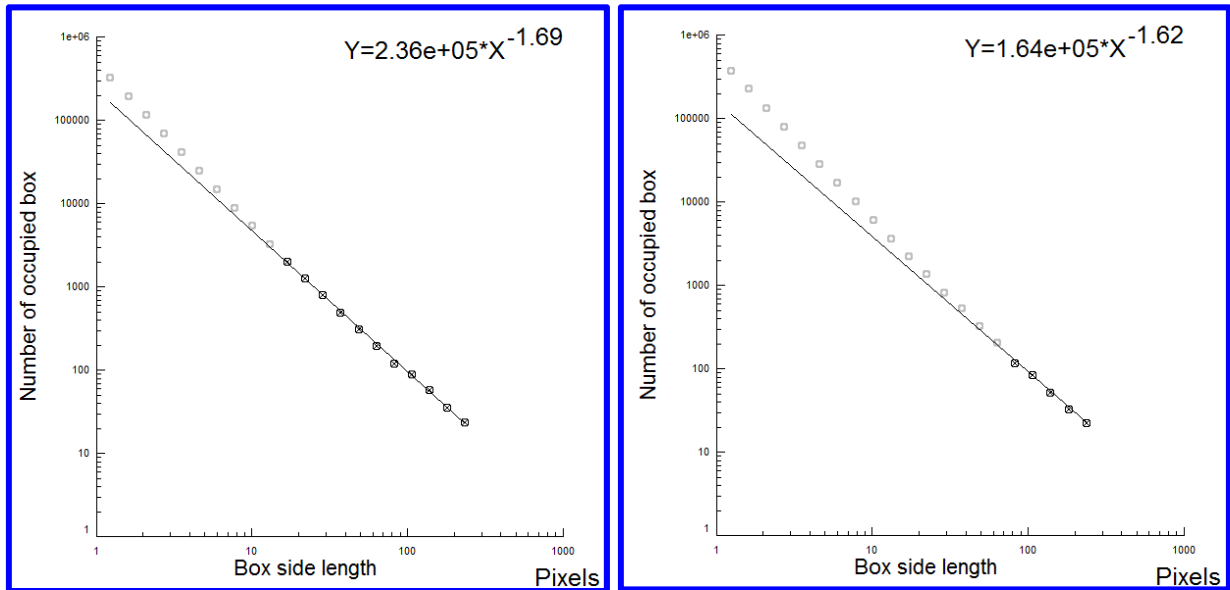


Figura B.1 Dimensión fractal de conteo de caja de la hoja 1 y 2 de tamaño 4x4 cm

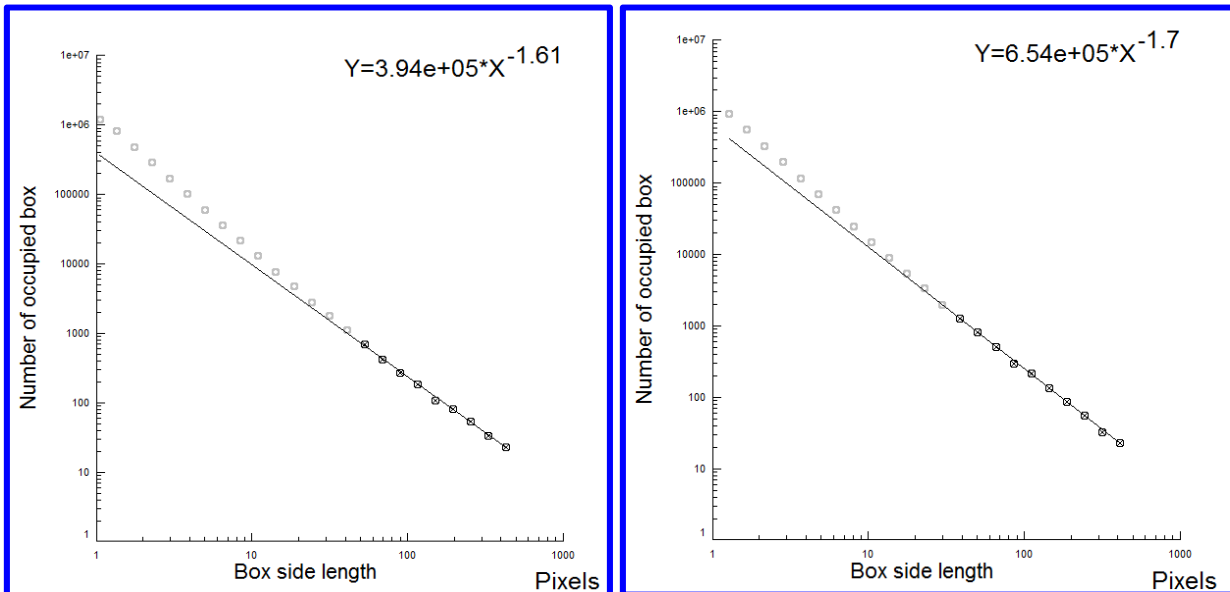


Figura B.2 Dimensión fractal de conteo de caja de la hoja 1 y 2 de tamaño 8x8 cm

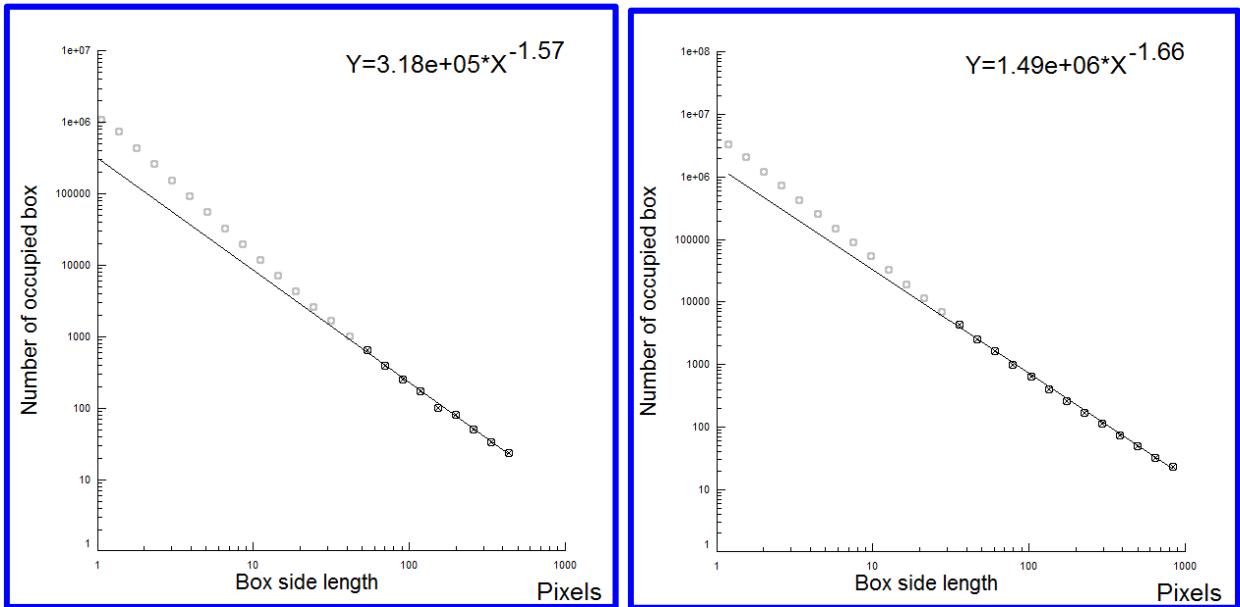


Figura B.3 Dimensión fractal de conteo de caja de la hoja 1 y 2 de tamaño 16x16 cm

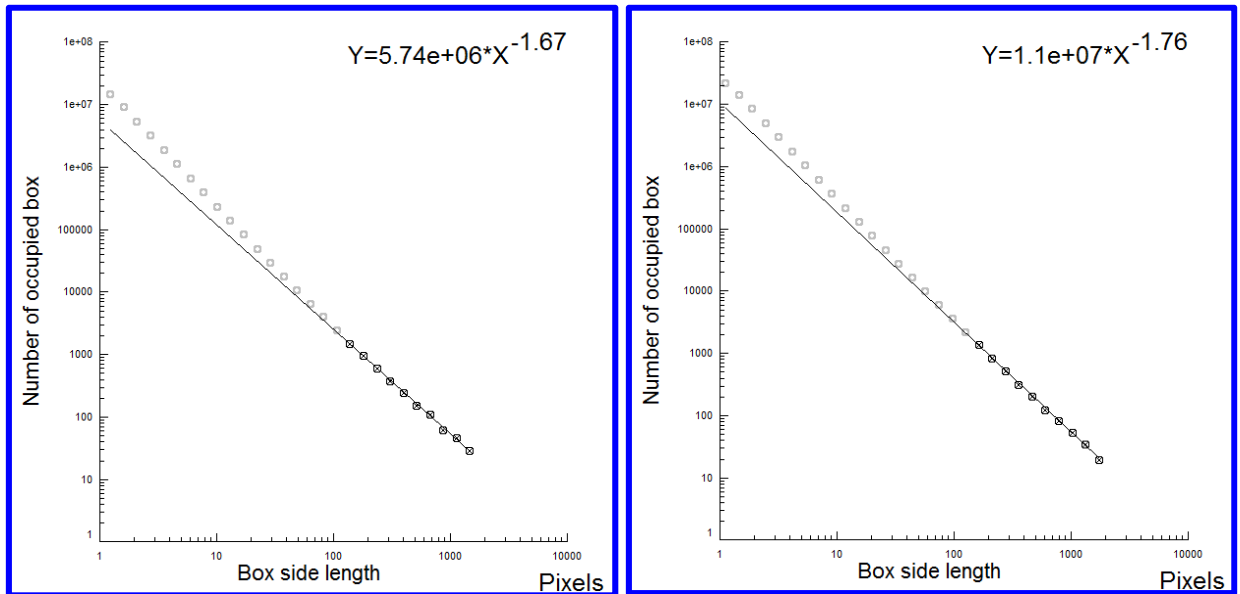


Figura B.4 Dimensión fractal de conteo de caja de la hoja 1 y 2 de tamaño 32x32 cm

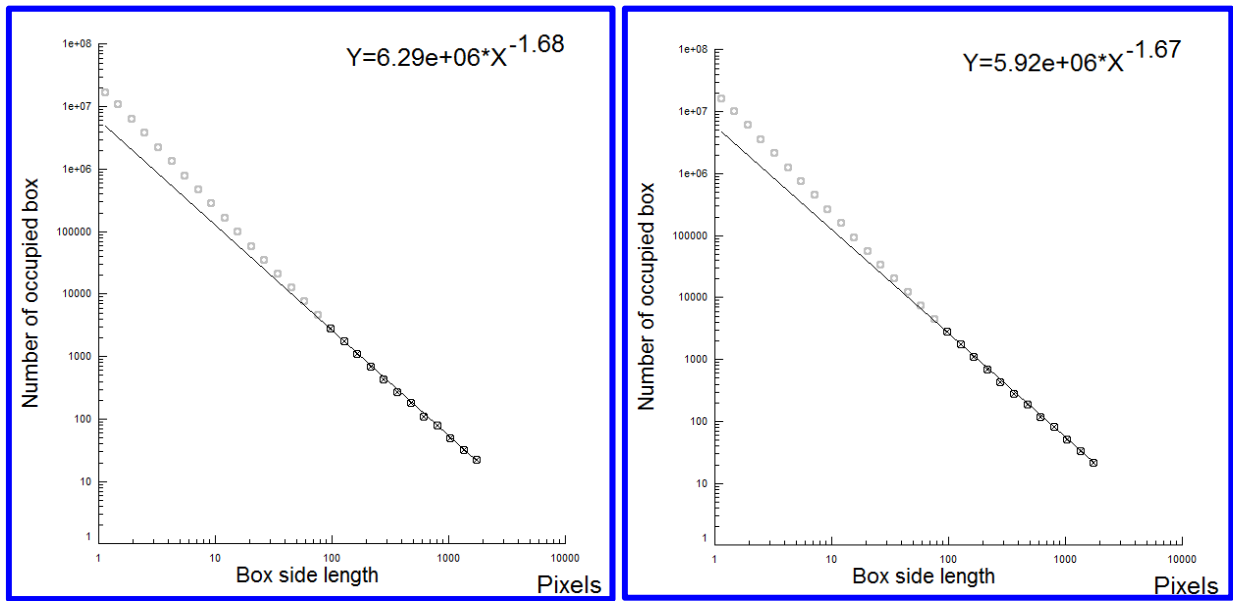


Figura B.5 Dimensión fractal de conteo de caja de la hoja 1 y 2 de tamaño 64x64 cm

Anexo

ARTÍCULO PUBLICADO

Como resultado del presente trabajo, se publicó un artículo en la revista Physical Review E.

abalankin@ipn.mx

De: <pre@aps.org>
Fecha: miércoles, 02 de junio de 2010 10:16 a.m.
Para: <abalankin@ipn.mx>
Asunto: Acceptance EQ10706 Balankin

Re: EQ10706

Fractal topology of hand-crumpled paper
by Alexander S. Balankin, Didier Samayoa Ochoa, Israel Andr\{e}s Miguel, et al.

Dear Dr. Balankin,

We are pleased to inform you that your manuscript has been accepted for publication as a Regular Article in Physical Review E.

Your manuscript will now be prepared for the production process. If any issues arise we will contact you, otherwise your manuscript will be forwarded directly to our production department. Please do not send a revised manuscript or figures at this time unless requested.

Yours sincerely,

Gary S. Grest
Editor
Physical Review E
Email: pre@ridge.aps.org
Fax: 631-591-4141
<http://pre.aps.org/>