



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
UNIDAD PROFESIONAL ADOLFO LÓPEZ
MATEOS

**DETERMINACIÓN DE ÓRBITAS DE
SATÉLITES TERRESTRES EN UN ESPACIO
CILÍNDRICO PARABÓLICO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

CON ESPECIALIDAD EN
INGENIERÍA MECÁNICA
P R E S E N T A:

IVÁN ALTAMIRANO OLGUÍN

DIRECTOR DE TESIS:
DR. SAMUEL ALCÁNTARA MONTES

MÉXICO, D. F.

JUNIO DE 2010



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

SIP-14

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 12:00 horas del día 16 del mes de Junio del 2010 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E. S. I. M. E. para examinar la tesis de titulada:

**“DETERMINACIÓN DE ORBITAS DE SATÉLITES TERRESTRES
 EN UN ESPACIO CILÍNDRICO PARABÓLICO.”**

Presentada por el alumno:

ALTAMIRANO

Apellido paterno

OLGUIN

Apellido materno

IVÁN

Nombre(s)

Con registro:

A	0	7	0	3	0	7
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA MECÁNICA

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

DR. SAMUEL ALCÁNTARA MONTES

Presidente

Segundo Vocal

DR. JOSÉ ÁNGEL LODEGARIO ORTEGA HERRERA
 Tercer Vocal

DR. MARCO ANTONIO GUTIÉRREZ VILLEGAS
 Secretario

M. EN C. CANDIDO PALACIOS MONTUÑAR

DR. GUILLERMO URRIOLAGOITIA CALDERÓN

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. JAIME ROBLES GARCÍA





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, Distrito Federal el día 16 del mes de Junio del año 2010, el (la) que suscribe Iván Altamirano Olguin alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica con número de registro A070307, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Samuel Alcántara Montes y cede los derechos del trabajo intitulado "DETERMINACIÓN DE ÓRBITAS DE SATÉLITES TERRESTRES EN UN ESPACIO CILÍNDRICO PARABÓLICO", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección altamiranoolguinivan@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.


Altamirano Olguin Iván

Nombre y firma

RESUMEN

En el presente trabajo de investigación, se emplean el sistema de coordenadas cilíndricas parabólicas y el método Runge-Kutta de cuarto orden, para el análisis del problema de la predicción del movimiento de satélites artificiales alrededor de la tierra bajo la perturbación del armónico zonal del potencial gravitacional terrestre.

Para realizar este cometido, se desarrolla una formulación matemática en base a la aplicación de la teoría del potencial y su solución mediante los polinomios de Legendre.

El resultado queda representado en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que es analizado mediante el paquete computacional Maple 12.

Por último se realiza la comparación del resultado obtenido en este trabajo con el publicado por John P. Vinti.

ABSTRACT

In the present work, the parabolic cylindrical coordinates system and the fourth order Runge-Kutta method are used in the analysis of the motion's prediction problem of artificial satellites around the earth under J_2 perturbation.

To reach this aim, a mathematic formulation based in the potential theory and it's solution by the Legendre's polynomials is developed.

The result is well represented by a first order differential equations system that is analyzed with Maple 12.

Finally a comparison among the result obtained in the present work and those obtained by John P. Vinti is made.

OBJETIVO

Determinar las órbitas de los satélites bajo la acción del achatamiento de la tierra, manifestada en el desarrollo multipolar J_2 .

JUSTIFICACIÓN

Las órbitas de los satélites terrestres sufren modificaciones como consecuencia del achatamiento terrestre.

Se desea investigar la variación de las órbitas en un espacio cilíndrico parabólico que facilita la solución de las ecuaciones que describen los satélites terrestres bajo la perturbación multipolar J_2 .

INDICE

RESUMEN	i
ABSTRAC	ii
OBJETIVO	iii
JUSTIFICACION	iii
INDICE	iv
INDICE DE FIGURAS	vi
INDICE DE TABLAS	vii
SIMBOLOGIA	viii
ESTADO DEL ARTE	xii
CAPITULO 1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	
1.1 Descripción del problema	1
1.2 Coordenadas curvilíneas	2
1.2.1 Coordenadas curvilíneas ortogonales	3
1.2.2 Vectores unitarios en un sistema de coordenadas curvilíneas	4
1.2.3 Elementos de línea y de volumen	6
1.2.4 Coordenadas cilíndricas parabólicas	7
1.3 Potencial efectivo y clasificación de órbitas	9
1.4 Ecuación diferencial de la órbita	20
1.5 Ley de la fuerza inversa al cuadrado	22
CAPITULO 2	
2.1 Perturbaciones de la órbita de un satélite en el campo gravitacional de un planeta achatado	28

2.2	Análisis de las torcas y momentos angulares	34
CAPITULO 3 SOLUCION DEL PROBLEMA		
3.1	Solución analítica	37
CAPITULO 4		
4.1	Solución Numérica	51
CONCLUSIONES		54
TRABAJOS FUTUROS		55
RECOMENDACIONES		56
REFERENCIAS		57

INDICE DE FIGURAS

- 1.1 Superficies coordenadas.
- 1.2 Sistemas de vectores unitarios.
- 1.3 Elemento de volumen en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal.
- 1.4 Sistema de coordenadas cilíndricas parabólicas.
- 1.5 Área barrida por un radio vector en un tiempo dt .
- 1.6 Potencial unidimensional equivalente para fuerzas atractivas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia.
- 1.7 Movimiento no limitado para energías positivas.
- 1.8 Esquema de la órbita para E_1 , correspondiente a un movimiento no limitado.
- 1.9 Potencial unidimensional equivalente, correspondiente a un movimiento limitado para energías negativas.
- 1.10 Naturaleza de las órbitas características de un movimiento limitado.
- 1.11 Potencial unidimensional equivalente, mostrando la condición correspondiente a órbitas circulares.
- 1.12 Familia de órbitas de energía total diferente.
- 1.13 Diagrama de una órbita elíptica.
- 1.14 Esquema utilizado para representar el potencial.
- 1.15 Conservación del momento angular con respecto al eje Z.

INDICE DE TABLAS

- 1.1 Clasificación de órbitas de acuerdo a la excentricidad y energía total.
- 2.1 Comparación de resultados.

SIMBOLOGIA

P	Punto en el espacio.
(x, y, z)	Coordenadas cartesianas.
(u_1, u_2, u_3)	Coordenadas curvilíneas.
c_1, c_2, c_3	Superficies coordenadas.
\vec{r}	Vector de posición de un punto.
$\partial\vec{r}/\partial u_1$	Vector tangente en P a la línea u_1 .
$\partial\vec{r}/\partial u_2$	Vector tangente en P a la línea u_2 .
$\partial\vec{r}/\partial u_3$	Vector tangente en P a la línea u_3 .
\hat{e}_1	Vector unitario tangente en la dirección y sentido de $\partial\vec{r}/\partial u_1$.
\hat{e}_2	Vector unitario tangente en la dirección y sentido de $\partial\vec{r}/\partial u_2$.
\hat{e}_3	Vector unitario tangente en la dirección y sentido de $\partial\vec{r}/\partial u_3$.
h_1, h_2, h_3	Factores de escala.
∇u_1	Vector normal en P a la superficie c_1 .
∇u_2	Vector normal en P a la superficie c_2 .
∇u_3	Vector normal en P a la superficie c_3 .
\hat{E}_1	Vector unitario normal en P a la superficie c_1 .
\hat{E}_2	Vector unitario normal en P a la superficie c_2 .

\hat{E}_3	Vector unitario normal en P a la superficie c_3 .
\vec{A}	Vector.
A^1, A^2, A^3	Componentes de \vec{A} en la base $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$.
a_1, a_2, a_3	Componentes de \vec{A} en la base $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3$.
C_1, C_2, C_3	Componentes contravariantes del vector \vec{A} .
c_1, c_2, c_3	Componentes covariantes del vector \vec{A} .
$d\vec{r}$	Diferencial total de \vec{r} .
ds	Longitud de arco.
ds^2	Elemento de arco.
dV	Elemento de volumen.
u, v, z	Componentes del espacio cilíndrico parabólico.
v	Velocidad.
L	Lagrangiana.
T	Energía cinética.
V	Energía potencial.
m	Masa.
\dot{r}	Componente polar de la velocidad a lo largo de \vec{r} .
$\dot{\theta}$	Velocidad angular.
θ	Componente angular del sistema de coordenadas polares planas.
p_θ	Momento angular del sistema.

l	Módulo constante del momento angular.
dt	Diferencial de tiempo.
dA	Diferencial de área.
$f(r)$	Fuerza a lo largo de r .
\ddot{r}	Componente radial de la aceleración en coordenadas polares planas.
$g(r)$	Función que depende de r .
E	Energía total.
$U(r)$	Energía potencial efectiva.
t	Tiempo.
f'	Fuerza ficticia.
V'	Energía potencial ficticia.
k	Constante de proporcionalidad.
P	Partícula de masa m .
h	Constante de integración.
G	Constante gravitacional.
ε	Excentricidad de la cónica.
a	Semieje mayor de la elipse.
F_1, F_2	Focos de la elipse.
b	Semieje menor de la elipse.
J_2	Potencial debido al achatamiento de La Tierra.

μ	Parámetro gravitacional.
R_{\oplus}	Radio ecuatorial de la Tierra.
c	Constante asignada al valor de $(J_2 \mu R_{\oplus}^2 / 2)$.
F_x	Componente de fuerza en la dirección del eje x .
F_y	Componente de fuerza en la dirección del eje y .
F_z	Componente de fuerza en la dirección del eje z .
$\vec{\tau}$	Torca debida a la fuerza \vec{F} .
\vec{L}	Momento angular.
L_x	Componente en el eje x del momento angular.
L_y	Componente en el eje y del momento angular.
L_z	Componente en el eje z del momento angular.
S_n	Función que depende de θ y de ϕ .
$P_n(\mu)$	Polinomio de Legendre de orden n .

ESTADO DEL ARTE

En 1974 René Van Dooren [1] realizó el cálculo orbital aplicando el método de Urabe, éste es un criterio completo para el estudio de soluciones periódicas de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, aplicado a variaciones en la órbita lunar y en la de satélites artificiales terrestres, éste método permite calcular aproximaciones de Galerkin de orden superior con gran precisión aplicando el método iterativo de Newton, para determinar la existencia y la estabilidad de una solución periódica exacta y aislada en una vecindad pequeña de una aproximación numérica de Galerkin calculada y para determinar el error de esta aproximación, todo esto considerando que $X(x, \dot{x}, t)$ ya no posee las propiedades de ser un polinomio en x y \dot{x} con coeficientes periódicos. Este es especialmente el caso del movimiento kepleriano bajo perturbación en mecánica celeste. En éste estudio consideró un sistema diferencial periódico de la forma $\ddot{x} = X(x, \dot{x}, t)$ tal que $x, \dot{x}, X(x, \dot{x}, t)$ son vectores de igual dimensión y que $X(x, \dot{x}, t)$ es periódico en $t = 2\pi$. Se busca una solución periódica aproximada con periodo 2π representada por un polinomio trigonométrico, tales polinomios son llamados aproximaciones de Galerkin de orden m . Se reescriben las ecuaciones que determinan los coeficientes del polinomio trigonométrico, se supone una solución aproximada de la nueva ecuación y se aplica el método iterativo de Newton para resolver tales ecuaciones. Para la aplicación del método al movimiento de satélites artificiales terrestres se definen las ecuaciones diferenciales que describen su movimiento bajo la perturbación J_2 y se procede a realizar iteraciones, tal que después de 4 de ellas con $N = 25$ y una precisión de 14 decimales se muestra que las aproximaciones de Galerkin de orden superior para el movimiento kepleriano bajo perturbación es calculado con gran precisión.

En 1986, M. A. Sharaf y M. R. Arafah [2] desarrollaron una formulación recurrente estable para el potencial terrestre y su gradiente mediante la teoría regularizada de Burdet, para cualquier número de coeficientes armónicos zonales (J_n). Para ello obtuvieron las ecuaciones clásicas para la predicción del movimiento de los satélites artificiales en el

campo gravitacional terrestre con simetría axial en términos de las variables de Burdet además de plantear las ecuaciones para determinar el tipo de órbita por medio de la teoría de Burdet, estas ecuaciones obtenidas son utilizadas para establecer el problema de valor inicial de la predicción del estado final del movimiento orbital bajo perturbaciones debidas al achatamiento de la Tierra, para la solución de este problema se establece y aplica un algoritmo computacional recurrente estable en términos de las variables de Burdet a tres órbitas de prueba todas con el mismo vector de posición inicial y tiempo de vuelo. El algoritmo fue aplicado con el método Runge-Kutta de cuarto orden a las tres órbitas de prueba y lograron demostrar la eficiencia y flexibilidad del algoritmo para la predicción del estado final de los satélites artificiales terrestres.

Otro análisis desarrollado por M. A. Sharaf y M. E. Awad [3] consistió en utilizar la transformación KS, que es una generalización de la transformación de Levi-Civita, para la solución del problema del estado final en la predicción del movimiento de los satélites artificiales terrestres bajo perturbaciones debidas al achatamiento de la Tierra. Para ello se obtienen las ecuaciones en términos del vector $u(u_1, u_2, u_3, u_4)$ de acuerdo con la transformación KS, tales ecuaciones obtenidas son las básicas para la predicción de satélites por la teoría KS. Se observa que el movimiento está rigurosamente descrito por cuatro osciladores lineales no acoplados. Para la solución de éstas ecuaciones se desarrolla y aplica un algoritmo computacional en términos de la teoría KS para la predicción de las órbitas. Se obtienen las ecuaciones necesarias para el problema de valor inicial del movimiento orbital bajo perturbación gravitacional zonal para la teoría regularizada KS, estas ecuaciones son expresadas en términos de la energía total en lugar de la energía kepleriana con tal de obtener una mayor precisión numérica. Para la aplicación de este algoritmo se utilizan tres órbitas de prueba todas con el mismo vector de posición inicial y tiempo de vuelo, se utilizó el método Runge-Kutta de cuarto orden a las tres órbitas de prueba y se muestra la precisión del algoritmo para la solución del problema del estado final.

REFERENCIAS

- [1] Van Dooren, R., "ORBIT COMPUTATION IN CELESTIAL MECHANICS BY URABE'S METHOD", Publ. RIMS, Kyoto Univ. 9, 535-542 (1974).
- [2] Sharaf, M. A. y Arafah, M. R., "PREDICTION OF SATELLITES IN EARTH'S GRAVITATIONAL FIELD WITH AXIAL SYMMETRY USING BURDET'S REGULARIZED THEORY", Cairo University, Egypt, 1986.
- [3] Sharaf, M. A. y Awad, M. E., "PREDICTION OF SATELLITE MOTIONS IN THE EARTH'S GRAVITATIONAL FIELD WITH AXIAL SYMMETRY BY THE KS REGULARIZED THEORY", Dept. of Astronomy, Cairo University, Egypt, 1986.

CAPITULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se describen las ventajas de utilizar el sistema de coordenadas cilíndricas parabólicas para el estudio del movimiento de satélites artificiales terrestres bajo la perturbación del segundo armónico zonal del potencial gravitacional de la Tierra. Se consideran los diferentes tipos de órbitas según su geometría, además se estudia la relación entre momentos angulares y torcas existentes en el sistema.

1.1 DESCRIPCION DEL PROBLEMA

El movimiento de los cuerpos celestes en el sistema solar está regido por la ley de Newton que establece que la atracción entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Pero las ecuaciones de movimiento de la mecánica celeste no brindan una adecuada solución al problema de la predicción del movimiento de satélites artificiales alrededor de la Tierra debido a la singularidad que presentan en el origen, ya que la atracción gravitacional del centro de masas es infinita en este punto, o bien, una colisión entre dos cuerpos está marcada por el hecho de que la distancia que los separa se vuelve cero, lo que corresponde a una singularidad en las ecuaciones de Newton, lo que no solo es una dificultad teórica sino práctica.

Esto ha conllevado a diferentes autores a proponer y establecer el uso de herramientas tales como la teoría de la regularización para la solución de este problema, el propósito de dicha teoría es transformar las ecuaciones diferenciales singulares en ecuaciones diferenciales regulares. La técnica estándar para la aplicación de la teoría de la regularización consiste esencialmente de tres pasos; un cambio de coordenadas que implica un cambio en la dimensión del espacio, la introducción de un tiempo ficticio y el uso de la conservación de la energía. O bien, durante una integración numérica la única manera para superar esta dificultad es utilizar un tamaño de paso pequeño y muchas iteraciones durante la fase de

aproximación cercana, pero debido a los errores de interrupción la precisión numérica es pobre.

Otras fuerzas distintas a las de atracción central actúan sobre los satélites artificiales terrestres, tales fuerzas producen perturbaciones en el movimiento de estos. Las principales perturbaciones en el satélite son producidas por el achatamiento de la Tierra y las atracciones gravitacionales del Sol y la Luna.

De las observaciones mencionadas en los párrafos anteriores se muestra que para obtener una predicción adecuada del problema de valor inicial de la predicción del estado final de satélites artificiales terrestres se han empleado técnicas complejas que requieren cambios en la elección de las variables dependientes y/o independientes así como el cambio del sistema de coordenadas de uno en tres dimensiones a uno de cuatro, o de realizar un gran número de iteraciones aunque al final el resultado no sea el deseado debido a los errores que se arrastran durante el proceso de evaluación.

He aquí la relevancia de proponer una técnica que no involucre un cambio en la dimensión del espacio, sino que con una transformación de coordenadas nos permita resolver el problema de la determinación de órbitas de satélites terrestres bajo la perturbación del segundo armónico zonal del potencial gravitacional terrestre, siendo ésta la principal perturbación, para posteriormente aplicar el método Runge-Kutta de paso variable y obtener resultados confiables. De todo lo expuesto anteriormente, se vuelve indispensable conocer el sistema de coordenadas cilíndricas parabólicas, la determinación y clasificación de las órbitas para poder comprender los fenómenos físicos que están involucrados en el sistema y proponer una solución adecuada al problema, por lo tanto en las siguientes secciones se explican a detalle los fenómenos físicos que intervienen en el movimiento de satélites terrestres bajo la perturbación J_2 .

1.2 COORDENADAS CURVILINEAS

Consideremos las coordenadas rectangulares (x, y, z) de un punto expresadas en función de las variables (u_1, u_2, u_3) en la forma

$$x = x(u_1, u_2, u_3), y = y(u_1, u_2, u_3), z = z(u_1, u_2, u_3) \quad (1)$$

o bien, despejando (u_1, u_2, u_3)

$$u_1 = u_1(x, y, z), u_2 = u_2(x, y, z), u_3 = u_3(x, y, z) \quad (2)$$

Las funciones que aparecen en (1) y (2) se suponen uniformes y con derivadas continuas de manera que la correspondencia entre las ternas (x, y, z) y (u_1, u_2, u_3) es biunívoca. En la práctica, puede ocurrir que esta hipótesis no se cumpla en algunos puntos determinados, en cuyo caso deberán hacerse las consideraciones pertinentes.

Dado un punto P de coordenadas rectangulares (x, y, z) se le puede asociar, según (2), un conjunto único de números (u_1, u_2, u_3) que llamaremos coordenadas curvilíneas de P . Los sistemas de ecuaciones (1) o (2) definen las fórmulas de transformación de coordenadas.

1.2.1 COORDENADAS CURVILINEAS ORTOGONALES

Las superficies $u_1 = c_1, u_2 = c_2, u_3 = c_3$ siendo c_1, c_2, c_3 constantes, se llaman superficies coordenadas; la intersección de cada par de estas superficies define las líneas coordenadas correspondientes (Fig. 1.1). Si las superficies coordenadas se cortan en ángulo recto, el sistema curvilíneo es ortogonal. Las líneas coordenadas u_1, u_2 y u_3 de un sistema curvilíneo son análogas a los ejes coordenados x, y y z de un sistema rectangular.

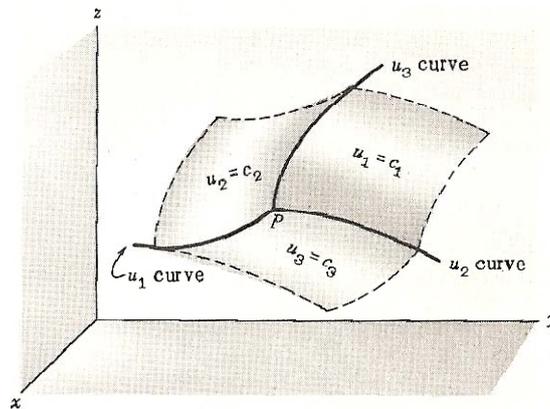


Figura 1.1

1.2.2 VECTORES UNITARIOS EN UN SISTEMA DE COORDENADAS CURVILINEAS

Sea $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ el vector de posición de un punto P . Según (1), podremos expresarlo en la forma $\vec{r} = (u_1, u_2, u_3)$. El vector tangente en P a la línea u_1 , para la cual u_2 y u_3 son constantes, es $\partial\vec{r}/\partial u_1$. Entonces, el vector unitario tangente en la dirección y sentido del

anterior es $e_1 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1} / \left| \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1} \right|$, de donde $\partial\vec{r}/\partial u_1 = h_1 \hat{e}_1$, siendo $h_1 = \left| \partial\vec{r}/\partial u_1 \right|$. Análogamente, si

\hat{e}_2 y \hat{e}_3 son los vectores unitarios tangentes en P a las líneas u_2 y u_3 respectivamente, se tiene $\partial\vec{r}/\partial u_2 = h_2 \hat{e}_2$ y $\partial\vec{r}/\partial u_3 = h_3 \hat{e}_3$, siendo $h_2 = \left| \partial\vec{r}/\partial u_2 \right|$ y $h_3 = \left| \partial\vec{r}/\partial u_3 \right|$. Las magnitudes h_1 , h_2 y h_3 se llaman factores de escala. El sentido de los vectores unitarios \hat{e}_1 , \hat{e}_2 y \hat{e}_3 es el de crecimiento de u_1 , u_2 y u_3 respectivamente.

Como ∇u_1 es un vector normal en P a la superficie $u_1 = c_1$, el vector unitario en esta dirección y sentido viene dado por $\hat{E}_1 = \nabla u_1 / |\nabla u_1|$. Análogamente los vectores unitarios $\hat{E}_2 = \nabla u_2 / |\nabla u_2|$ y $\hat{E}_3 = \nabla u_3 / |\nabla u_3|$ son normales en P a las superficies $u_2 = c_2$ y $u_3 = c_3$, respectivamente.

Por lo tanto, en cada punto P de un sistema de coordenadas curvilíneas se pueden definir dos sistemas de vectores unitarios $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ tangentes a las líneas coordenadas, y $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3$ normales a las superficies coordenadas correspondientes (Fig. 1.2). Ambas ternas solo coincidirán en el caso de que el sistema de coordenadas curvilíneas sea ortogonal y juegan el mismo papel que los vectores unitarios i, j, k del sistema de coordenadas rectangulares, con la única diferencia de que aquellos pueden cambiar de dirección y de sentido de un punto a otro. Además los conjuntos $\partial\vec{r}/\partial u_1, \partial\vec{r}/\partial u_2, \partial\vec{r}/\partial u_3$ y $\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3$ son dos sistemas de vectores recíprocos.

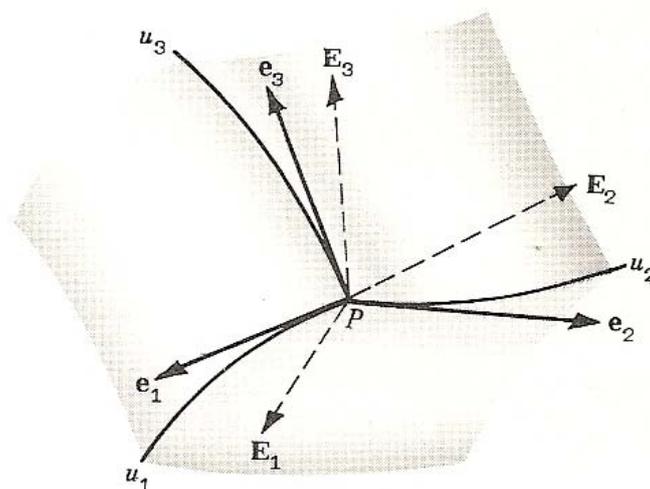


Figura 1.2

Un vector A se puede expresar en función de los vectores unitarios en la base $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ o bien $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3$ en la forma

$$\vec{A} = A^1 \hat{e}_1 + A^2 \hat{e}_2 + A^3 \hat{e}_3 = a_1 \hat{E}_1 + a_2 \hat{E}_2 + a_3 \hat{E}_3$$

Siendo A^1, A^2, A^3 y a_1, a_2, a_3 las respectivas componentes de \vec{A} en cada uno de los sistemas. Todo vector \vec{A} también se puede representar en función de los vectores

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3} \text{ o } \nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3$$

que, aunque también se llaman vectores unitarios en la base, no tienen módulo unidad en general. En este caso

$$\begin{aligned}\vec{A} &= C_1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} + C_2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} + C_3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = C_1 \vec{\alpha}_1 + C_2 \vec{\alpha}_2 + C_3 \vec{\alpha}_3 \\ \vec{A} &= c_1 \nabla u_1 + c_2 \nabla u_2 + c_3 \nabla u_3 = c_1 \vec{\beta}_1 + c_2 \vec{\beta}_2 + c_3 \vec{\beta}_3\end{aligned}$$

Siendo C_1, C_2, C_3 las componentes contravariantes y c_1, c_2, c_3 las componentes covariantes del vector \vec{A} . Obsérvese que $\vec{\alpha}_p = \partial \vec{r} / \partial u_p$, $\vec{\beta}_p = \nabla u_p$ con $p = 1, 2, 3$.

1.2.3 ELEMENTOS DE LÍNEA Y DE VOLUMEN

A partir de la relación: $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$ se obtiene

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 = h_1 du_1 \hat{e}_1 + h_2 du_2 \hat{e}_2 + h_3 du_3 \hat{e}_3$$

La diferencial de la longitud de arco ds es el elemento de línea y viene dada por $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$. En los sistemas ortogonales, $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = 0$, con lo que $ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2$.

A lo largo de la línea coordenada u_1 , son constantes u_2 y u_3 , con lo que $d\vec{r} = h_1 du_1 \hat{e}_1$. El elemento de línea ds_1 , según u_1 en el punto P es $h_1 du_1$. Análogamente, los elementos de línea en P según u_2 y u_3 son $ds_2 = h_2 du_2$ y $ds_3 = h_3 du_3$ respectivamente.

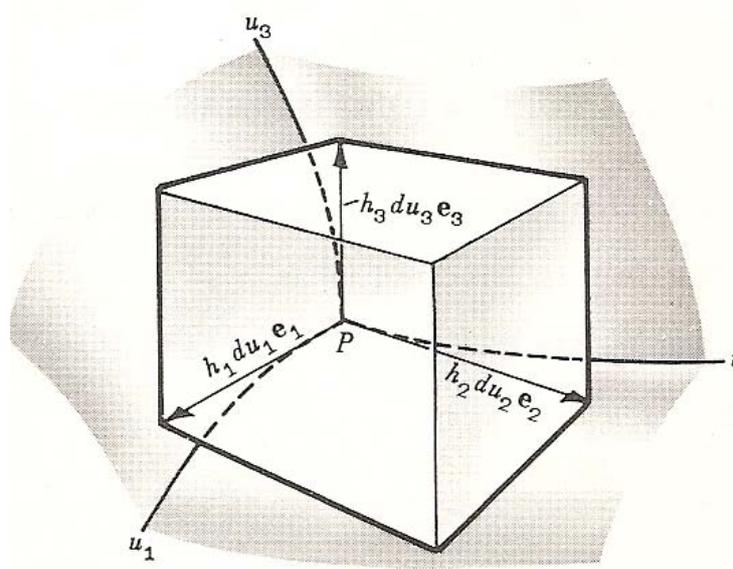


Figura 1.3

Observando la Fig. 1.3, el elemento de volumen en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal viene dado por

$$dV = \left| (h_1 du_1 \hat{e}_1) \cdot (h_2 du_2 \hat{e}_2) \times (h_3 du_3 \hat{e}_3) \right| = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

ya que $|\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \times \hat{e}_3| = 1$.

1.2.4 COORDENADAS CILINDRICAS PARABOLICAS

En este sistema de coordenadas el punto P se define como $P(u, v, z)$, como se observa en la figura 1.4. El cambio de coordenadas del sistema cartesiano al cilíndrico parabólico queda definido mediante las relaciones

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv, \quad z = z$$

Siendo $-\infty < u < \infty, \quad v \geq 0, \quad -\infty < z < \infty$

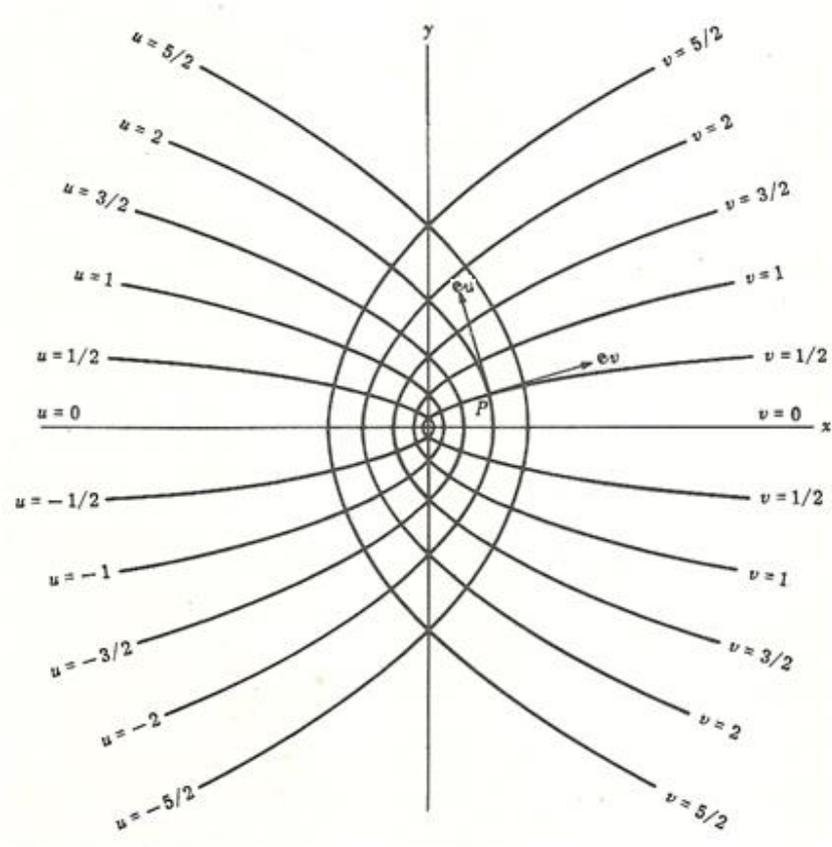


Figura 1.4

Para el cálculo de los factores de escala y de los elementos de línea se tiene

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \Rightarrow \vec{r} = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)\hat{i} + uv\hat{j} + z\hat{k} \\ \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} &= u\hat{i} + v\hat{j}; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -v\hat{i} + u\hat{j}; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{k} \\ \Rightarrow h_1 &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}; \quad h_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{v^2 + u^2}; \quad h_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1 \\ ds^2 &= h_1^2 (du^1)^2 + h_2^2 (du^2)^2 + h_3^2 (du^3)^2 \\ \Rightarrow ds^2 &= (u^2 + v^2) du^2 + (u^2 + v^2) dv^2 + dz^2 \end{aligned}$$

Para determinar la velocidad

$$\begin{aligned}
v &= \left(\frac{ds}{dt} \right) \Rightarrow v^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = h_1^2 (\dot{u}^1)^2 + h_2^2 (\dot{u}^2)^2 + h_3^2 (\dot{u}^3)^2 \\
\Rightarrow v^2 &= (u^2 + v^2) \dot{u}^2 + (u^2 + v^2) \dot{v}^2 + \dot{z}^2 \\
\Rightarrow v^2 &= (u^2 + v^2) (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \dot{z}^2
\end{aligned}$$

1.3 POTENCIAL EFECTIVO Y CLASIFICACION DE LAS ORBITAS

La lagrangiana expresada en coordenadas polares planas es

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r) \quad (3)
\end{aligned}$$

θ es una coordenada cíclica, cuyo momento canónico correspondiente es el momento angular del sistema

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$$

Una de las dos ecuaciones del movimiento será, por tanto

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (4)$$

Cuya integral inmediata es

$$mr^2 \dot{\theta} = l \quad (5)$$

Donde l es el módulo constante del momento angular, además de (4) se deduce que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \right) = 0 \quad (6)$$

Se ha incluido el factor $1/2$, porque $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ es precisamente la velocidad areolar, área barrida por el radio vector en la unidad de tiempo. Esta interpretación se deduce de la figura 1.5 donde el área diferencial barrida en el intervalo dt es

$$dA = \frac{1}{2} r (rd\theta)$$

Y por tanto

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

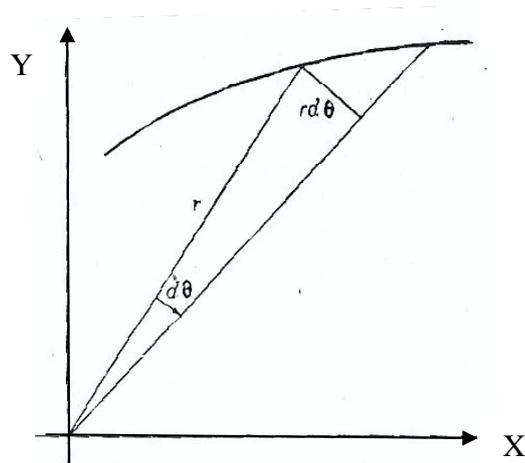


Figura 1.5

La conservación del momento angular es así equivalente a la constancia de la velocidad areolar. Se tiene aquí la prueba de la segunda ley de Kepler del movimiento planetario: el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales. Sin embargo, conviene subrayar que la conservación de la velocidad areolar es una propiedad general del movimiento producido por fuerzas centrales, no estando limitada al caso de fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia.

La ecuación de Lagrange restante, para la coordenada r , es

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (7)$$

Llamando $f(r)$ a la fuerza a lo largo de r , $-\partial V/\partial r$, la ecuación se escribe en la forma

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r) \quad (8)$$

Por medio de la integral primera, ecuación (5), puede eliminarse $\dot{\theta}$ de la ecuación del movimiento, con lo que se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden, en la que solo aparece r :

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r) \quad (9)$$

Hay otra integral primera del movimiento, la de la energía total, ya que las fuerzas son conservativas. A partir del teorema general de conservación de la energía se establece que

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) \quad (10)$$

Es una constante del movimiento, siendo E la energía del sistema. Otra manera de deducir esta integral primera es a partir de las ecuaciones (4) y (9), la última de las cuales se puede escribir como

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right) \quad (11)$$

Si multiplicamos los dos miembros de la ecuación (11) por \dot{r} , el primero de ellos se transforma en

$$m\ddot{r}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right)$$

De modo análogo el segundo miembro puede expresarse como derivada total respecto al tiempo, dado que si $g(r)$ es una función cualquiera de r , la derivada total respecto al tiempo de g tendrá la forma

$$\frac{d}{dt}g(r) = \frac{dg}{dr}\frac{dr}{dt}$$

Por tanto, la ecuación (11) es equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right)$$

o

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V\right) = 0,$$

Y, por tanto

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V = cte \quad (12)$$

Esta ecuación expresa la conservación de la energía total, pues, según (5) el término central se escribe

$$\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} = \frac{1}{2mr^2}m^2r^4\dot{\theta}^2 = \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2},$$

Y (12) se reduce a

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = E \quad (13)$$

Estas dos integrales primeras nos dan, en efecto, dos de las cuadraturas necesarias para completar el problema. Como hay dos variables, r y θ , se necesitan en total cuatro integraciones para resolver las ecuaciones del movimiento. Las dos primeras integraciones han reducido las ecuaciones de Lagrange a otras dos de primer orden, (5) y (12); las dos integraciones restantes pueden efectuarse formalmente de diversos modos. Quizá el procedimiento más sencillo consista en partir de la ecuación (13). Despejando \dot{r}

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)} \quad (14)$$

Ahora bien, (13), es equivalente al movimiento de una partícula de masa m y energía total E bajo una fuerza dada bajo la energía potencial efectiva U como

$$U(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

Como \dot{r} debe ser no negativa, esto es, $\dot{r} \geq 0$, los posibles valores de r para dados E y l están determinados por la desigualdad

$$U(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \leq E$$

Y los valores máximos y mínimos de r , para los que $\dot{r} = 0$ están dados cuando se cumple la igualdad. Ellos son los puntos de retorno o las distancias absidales de la órbita.

Por otro lado integrando (14) se obtiene

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} \quad (15)$$

Supongamos que para $t = 0, r = r_0$. Entonces, la integral de ambos miembros de la ecuación, desde el estado inicial al estado correspondiente al tiempo t , toma la forma

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} \quad (16)$$

La ecuación (16) nos da directamente t como función de r y de las constantes de integración E, l y r_0 . Sin embargo, puede invertirse, al menos formalmente, y dar r como función de t y de las constantes. Una vez hallada la expresión de r , la de θ se deduce inmediatamente de la ecuación (5), que puede escribirse

$$d\theta = \frac{ldt}{mr^2} \quad (17)$$

$$\Rightarrow \theta = \int \frac{ldt}{mr^2} = \int \frac{l \left[\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} \right]}{mr^2} = \int \frac{l dr / r^2}{\sqrt{2m(E - V) - l^2 / r^2}} \quad (18)$$

Como $\dot{\theta} = l/mr^2$, y l es constante en el tiempo, $\dot{\theta}$ nunca puede cambiar de signo, por lo que el ángulo θ siempre varía de manera monótona con el tiempo. Reescribiendo (18) y haciendo el cambio de variable $u = 1/r$, entonces $du = (-1/r^2)dr$ y por lo tanto

$$\theta = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int \frac{-du}{\sqrt{E - V - (l^2/2m)u^2}} \quad (19)$$

Si la fuerza central varía como $f(r) = \alpha r^n$ entonces como $V = -\int f(r)dr = -\alpha r^{n+1}/(n+1)$ dónde α y n son constantes. Por lo que a V en términos de u la escribimos como $V = -\alpha u^{-(n+1)}/(n+1)$ y la ecuación es

$$\theta = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int \frac{-du}{\sqrt{E + \alpha u^{-(n+1)}/(n+1) - (l^2/2m)u^2}} \quad (20)$$

Si θ_0 es el valor inicial de θ , la integral de (17) es simplemente

$$\theta = l \int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0 \quad (21)$$

Las ecuaciones (16) y (21) representan las dos integraciones restantes, por lo que formalmente el problema se ha reducido a cuadraturas, con cuatro constantes de integración E, l, r_0, θ_0 . Estas no son las únicas constantes que cabe considerar. Igual podíamos haber tomado $r_0, \dot{r}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0$, pero siempre E y l quedan determinadas por este conjunto. Sin embargo, para muchas aplicaciones resulta más natural considerar el conjunto que contiene la energía y el momento angular.

En un sistema del que se conozcan la energía y el momento angular se determinan inmediatamente el módulo y dirección de la velocidad de la partícula en función de la distancia r . El módulo de v se deduce del teorema de conservación de la energía, escrito en la forma

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)]} \quad (22)$$

La velocidad radial (componente de \dot{r} según el radio vector) ha sido ya dada en la ecuación (14). Combinada con v , basta para conocer la dirección de la velocidad. La ecuación del movimiento correspondiente a r , con $\dot{\theta}$ en función de l , ecuación (9), está expresada en función solo de r y de sus derivadas. Se obtendría la misma ecuación en un problema ficticio unidimensional en el que una partícula de masa m se hallara sometida a una fuerza

$$f' = f + \frac{l^2}{mr^3} \quad (23)$$

El significado del último término aparece claramente si se expresa en la forma $mr\dot{\theta}^2 = mv_0^2/r$, que es la fuerza centrífuga ordinaria. En virtud de la ecuación (12), la componente r del movimiento de la partícula corresponde a un problema unidimensional con una energía potencial ficticia

$$V' = V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \quad (24)$$

Tomando en cuenta que

$$f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = f(r) + \frac{l^2}{mr^3}$$

Que corresponde con la ecuación (23). Por tanto, el teorema de conservación de la energía, ecuación (12), se podrá escribir en la forma

$$E = V' + \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \quad (25)$$

Ahora examinemos la gráfica de V' en función de r en el caso concreto de una fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia

$$f = -\frac{k}{r^2}$$

(para k positivo el signo menos indica que la fuerza está dirigida hacia el centro de fuerzas). La energía potencial correspondiente es

$$V = -\frac{k}{r}$$

y su potencial ficticio será

$$V' = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

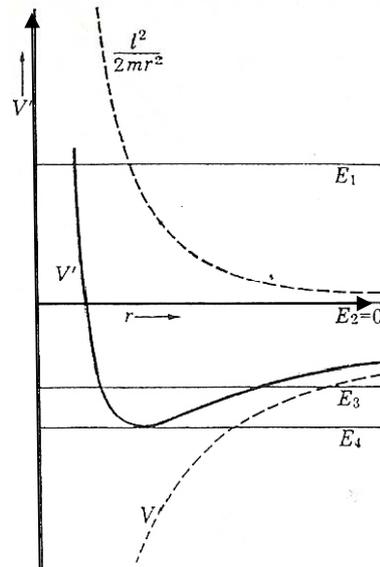


Figura 1.6

En la figura 1.6 aparece la mencionada gráfica; las curvas de trazos representan las componentes separadas $-k/r$ y $+l^2/2mr^2$, y la línea continua es la suma, V' .

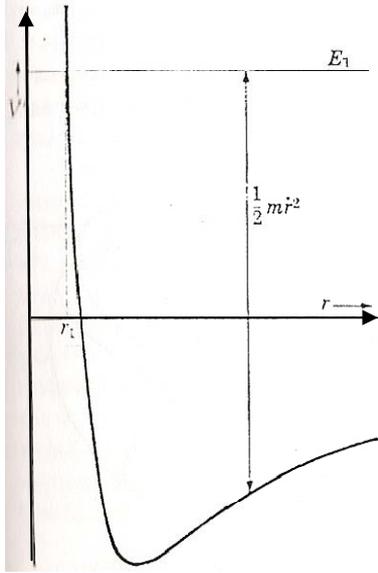


Figura 1.7

Consideremos ahora el movimiento de una partícula de energía E_1 , tal como se ve en las figuras 1.6 y 1.7. Está claro que nunca podrá estar a una distancia menor que r_1 (figura 1.7). De otro modo, si $r < r_1$, V' sería mayor que E_1 y, según la ecuación 25, la energía cinética habría de ser negativa, lo que correspondería a una velocidad imaginaria. Por otra parte, el valor de r no tiene un límite superior, por lo que la órbita no es cerrada.

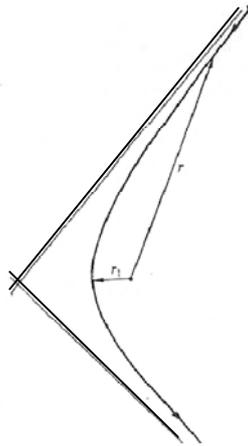


Figura 1.8

Una partícula procedente del infinito rebotaría en la barrera centrífuga, dirigiéndose de nuevo al infinito (figura 1.8). La distancia entre E y V' es $\frac{1}{2}mr^2$, es decir, proporcional al cuadrado de la velocidad radial, anulándose, naturalmente, en el punto de retroceso r_1 . Al mismo tiempo, la distancia entre E y V en el diagrama es la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$, correspondiente al valor dado de r . Por tanto la distancia entre las curvas V y V' es $\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$. Así, pues, estas curvas proporcionan el módulo de la velocidad de la partícula y sus componentes para cualquier distancia r , con una energía y momento angular dados. Basta esa información para formarse una idea aproximada de la forma de la órbita.

Para la energía $E_2 = 0$ (figura 1.6) se obtiene una descripción análoga del comportamiento de la órbita; pero, para una energía inferior, tal como la E_3 de la figura 1.9, el caso es diferente.

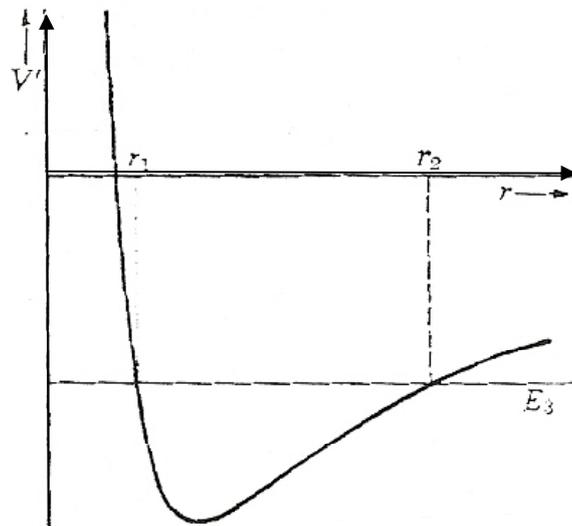


Figura 1.9

A más del límite inferior r_1 , existe un valor máximo r_2 que no puede ser sobrepasado por r con energía cinética positiva. Por tanto, el movimiento está limitado, y existen dos puntos de retroceso, r_1 y r_2 , denominados también distancias absidales. Ello no significa que las

órbitas tengan que ser necesariamente cerradas; lo más que cabe asegurar es que se hallan limitadas por dos circunferencias de radios r_1 y r_2 , estando los puntos absidales en tales circunferencias (figura 1.10).

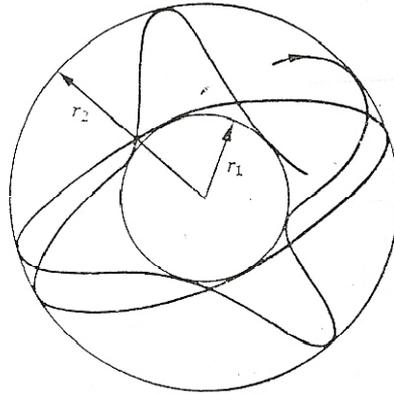


Figura 1.10

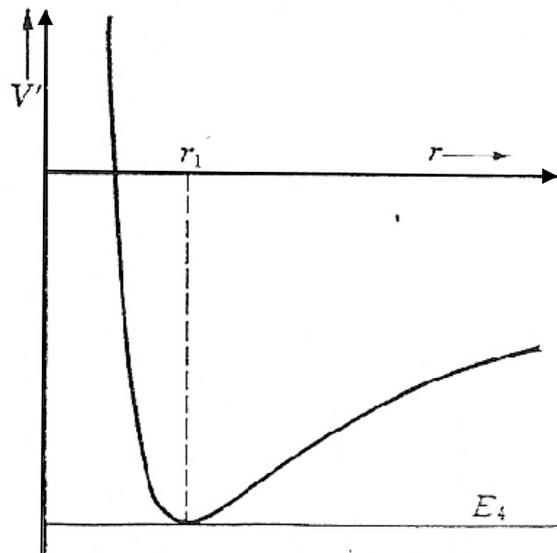


Figura 1.11

Si la energía es E_4 , precisamente en el mínimo de la curva del potencial ficticio, los dos límites coincidirán (figura 1.11). En tal caso, el movimiento es solo posible para un radio; $\dot{r}=0$, y la órbita es una circunferencia. Recuérdese que la fuerza efectiva es igual a la

pendiente de la curva V' cambiada de signo, por lo que la condición para que la órbita sea circular se reduce sencillamente a que f' , sea cero, o

$$f(r) = -\frac{l^2}{mr^3} = -mr\dot{\theta}^2$$

Se ha encontrado, pues, la conocida condición de las órbitas circulares; la fuerza aplicada debe equilibrar la fuerza efectiva invertida de la aceleración centrípeta.

Tomemos en cuenta que todo lo dicho sobre órbitas para diferentes energías corresponde a un solo valor del momento angular. Al cambiar l variarán las características cuantitativas de la curva V' , lo que no afecta a la clasificación general de los tipos de órbitas.

Ahora se verá que la órbita para E_1 es una hipérbola; para E_2 , una parábola, y para E_3 , una elipse. Con otros tipos de fuerzas las órbitas no tendrán formas tan sencillas. Sin embargo, la misma división cualitativa será válida en órbitas abiertas, limitadas y circulares para cualquier potencial atractivo que

- 1) Disminuya con más lentitud que $1/r^2$ cuando $r \rightarrow \infty$
- 2) Tienda a infinito más despacio que $1/r^2$ cuando $r \rightarrow 0$

La primera condición asegura que el potencial predomina sobre el término centrífugo para valores grandes de r , y la segunda es tal que para valores pequeños de r el término más importante es el centrífugo.

La naturaleza cualitativa del movimiento se alterará si el potencial no satisface estas condiciones, pero se puede seguir empleando el método del potencial equivalente para estudiar las características de las órbitas.

1.4 ECUACION DIFERENCIAL DE LA ORBITA

Si una partícula solo se mueve bajo la influencia de una fuerza que tiene una línea de acción dirigida siempre hacia un punto fijo, al movimiento se le llama movimiento con

fuerza central. Este tipo de movimiento se origina por lo común por fuerzas electrostáticas y gravitatorias.

Para determinar el movimiento, consideremos una partícula P de masa m , sobre la cual actúa solo una fuerza central F . Empleando coordenadas polares (r, θ) , las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}\sum F_r &= ma_r \\ \sum F_\theta &= ma_\theta \\ \sum F_z &= ma_z\end{aligned}\quad (26)$$

se transforman en

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \quad (27)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

La segunda de esas ecuaciones puede escribirse como sigue

$$\frac{1}{r} \left[\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] = 0$$

por lo que integrando se obtiene

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = h \quad (28)$$

En este caso h es una constante de integración. Y recordando la definición del momento angular l se observa que

$$l = mr^2 \dot{\theta} \Rightarrow h = \frac{l}{m}$$

Es decir que el momento angular de una partícula es constante cuando ésta se mueve bajo la acción de una fuerza central. Ahora bien, dada una cierta función $f(r)$, en teoría podríamos resolver el par de ecuaciones diferenciales (27) a fin de obtener r y θ como funciones de t . Este es el caso en el que regularmente interesa el recorrido en el espacio (la

órbita) sin considerar el tiempo t . Entonces para encontrar la ecuación de la órbita realicemos el cambio de variable

$$r = \frac{1}{u}$$

Entonces derivando y utilizando (28)

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \dot{u} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{d\theta}{dt} \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{h}{r^2} \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{h}{1/u^2} \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{h} \frac{du}{d\theta} \Rightarrow \dot{r} = -h \frac{du}{d\theta}$$

Tomando la segunda derivada

$$\ddot{r} = -h \frac{d}{dt} \frac{du}{d\theta} = -h \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \frac{du}{d\theta} = -h \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -h(hu^2) \frac{d^2u}{d\theta^2} \Rightarrow \ddot{r} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Ahora volviendo a la primera de las ecuaciones (27) para que con los valores obtenidos de r , $\dot{\theta}$ y \ddot{r} cambiemos su forma, es decir

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \frac{h^2}{r^4} = h^2 u^4 \Rightarrow m \left(-h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - r h^2 u^4 \right) = f(r) \Rightarrow m \left[-h^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + r u^2 \right) \right] = f\left(\frac{1}{u}\right) \\ \Rightarrow -m h^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + r u^2 \right) &= f\left(\frac{1}{u}\right) \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + r u^2 = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{m h^2 u^2} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{m h^2 u^2} - r u^2 \\ \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} &= -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{m h^2 u^2} - \left(\frac{1}{u}\right) u^2 \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{f(u^{-1})}{m h^2 u^2} - u \\ \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= -\frac{f(u^{-1})}{m h^2 u^2} \quad (29) \end{aligned}$$

Esta es la ecuación diferencial de la órbita de una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza central.

1.5 LEY DE LA FUERZA INVERSA AL CUADRADO

El tipo más importante de fuerza central es aquel en el que la fuerza varía de manera proporcional con el inverso del cuadrado de la distancia radial, es decir

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} \text{ o } V(r) = -\frac{k}{r}$$

Donde la constante k es positiva para fuerzas de atracción (por ejemplo, $k = Gm_1m_2$ para una fuerza de atracción gravitacional), y k es negativa para fuerzas de repulsión. Ahora de las ecuaciones (19) y (21), podemos reescribir una nueva expresión para θ como

$$\theta = \theta_0 - \int \frac{du}{\left[(2mE/l^2) + (2mku/l^2) - u^2 \right]^{1/2}} \quad (30)$$

La integración es de la forma

$$\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos \theta \left(-\frac{b+2cx}{\sqrt{q}} \right)$$

Donde $q = b^2 - 4ac$, $a = 2mE/l^2$, $b = 2mk/l^2$, $c = -1$, entonces $q = \left(\frac{2mk}{l^2} \right) \left(1 + \frac{2El^2}{mk} \right)$

Ahora resolviendo (30)

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right] \quad (31)$$

ó

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

donde $\alpha = \frac{l^2}{mk}$ y $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$

Para una fuerza que varía con el inverso del cuadrado $f(1/u) = -ku^2$ la ecuación (29) se convierte en

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{mk}{l^2}$$

Y se puede escribir como

$$\frac{d^2\left(u - \frac{mk}{l^2}\right)}{d\theta^2} + \left(u - \frac{mk}{l^2}\right) = 0$$

Cuya solución es

$$u - \frac{mk}{l^2} = b \cos(\theta - \theta_0) \quad \text{ó} \quad r = \frac{\alpha}{1 + p \cos(\theta - \theta_0)}$$

Donde $\alpha = l^2/mk$, $p = bl^2/mk$, y b y θ_0 son dos constantes de integración.

Ahora bien, la ecuación general de una cónica con un foco en el origen es

$$\frac{1}{r} = C [1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)]$$

Donde ε es su excentricidad. Comparando esta ecuación con (31) se deduce que la órbita es siempre una cónica de excentricidad

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

La naturaleza de la órbita depende de la magnitud de ε , figura 1.12, es decir

$\varepsilon > 1$	$E > 0$	Hipérbola
$\varepsilon = 1$	$E = 0$	Parábola
$\varepsilon < 1$	$E < 0$	Elipse
$\varepsilon = 0$	$E = -mk^2/2l^2$	Circunferencia

Tabla 1.1

Esta clasificación coincide con la discusión cualitativa de las órbitas basada en el diagrama de energía potencial unidimensional equivalente V' .

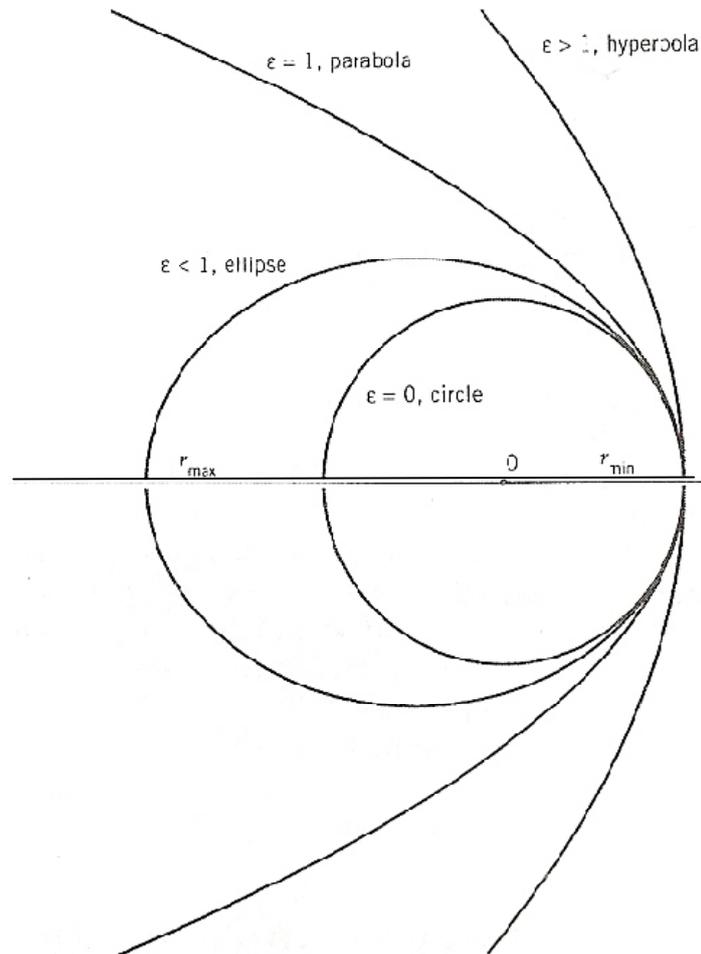


Figura 1.12

El hecho de que los planetas sigan en realidad órbitas elípticas alrededor del Sol fue descubierto por el astrónomo alemán Johannes Kepler en la primera parte del siglo diecisiete. Su descubrimiento fue anterior al desarrollo de las leyes del movimiento realizado por Newton, así como de la ley de la gravitación; por lo tanto, llegado el tiempo, constituyó una prueba importante de la validez de las leyes de Newton. Las leyes de Kepler, enunciadas después de veinte años de observación de los planetas se resumen en los siguientes tres enunciados

- Todo planeta se mueve en su órbita de tal manera que la línea que lo une con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales, independientemente de la longitud de la línea.
- La órbita de todo planeta es una elipse, y el Sol ocupa uno de sus focos.
- El cuadrado del periodo de cualquier planeta es directamente proporcional al cubo del eje menor de su órbita.

De lo expuesto anteriormente no es difícil deducir estas leyes. La segunda ley viene del hecho de que el campo gravitacional del Sol es central. Mientras que las otras dos leyes son consecuencia del hecho de que la fuerza gravitacional varía con el inverso del cuadrado de la distancia. Los planetas están sujetos a la fuerza gravitacional del Sol y sus órbitas son elipses. De la definición de excentricidad

$$\varepsilon = \frac{\text{distancia entre focos}}{\text{eje mayor}} = \frac{2\overline{OF}}{2a}$$

o

$$\overline{OF_2} = a\varepsilon = \overline{OF_1}$$

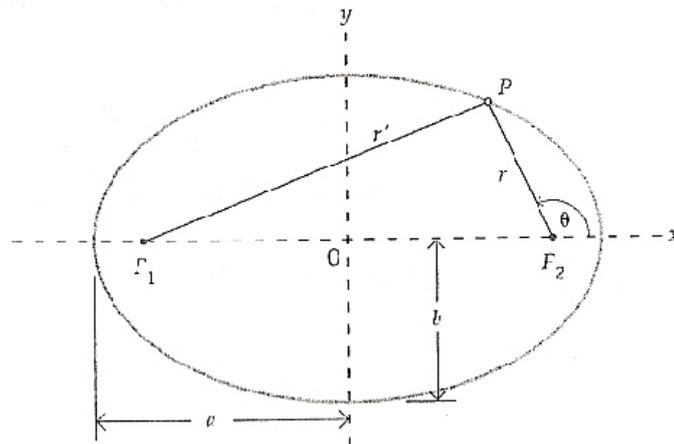


Figura 1.13

Una inspección a la figura 1.13 revela que el valor mínimo de r ocurre cuando $\theta = 0$:

$$r_{\min} = a - \overline{OF_2} = a(1 - \varepsilon)$$

Recordando que

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

El valor de θ_0 determina la orientación de la órbita y sin pérdida de generalidad podemos elegir $\theta_0 = 0$. Además es obvio que $r = r_{\min}$ cuando $\cos \theta$ es máximo, esto es cuando $\theta = 0$.

Por lo que la última ecuación se convierte en

$$r_{\min} = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon}$$

Igualando términos se tiene

$$\frac{\alpha}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon) \Rightarrow a = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon^2} = -\frac{k}{2E} = \frac{k}{2|E|}$$

Donde hemos demostrado que el eje mayor depende únicamente de la energía de la partícula o cuerpo.

El semieje menor b está dado por

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{l}{\sqrt{2m|E|}}$$

De donde se observa que depende tanto de E como de l . Por lo tanto todas las órbitas elípticas con el mismo eje mayor tienen la misma energía.

Falta por determinar el periodo del movimiento en órbitas elípticas. Del teorema de conservación del momento angular, la velocidad areolar es constante y viene dada por

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{2m}$$

De donde se puede determinar el área de la órbita

$$dA = \frac{ldt}{2m} \Rightarrow \int dA = \frac{l}{2m} \int_0^T dt \Rightarrow A = \frac{lT}{2m}$$

Por otro lado el área de una elipse es $A = \pi ab$, por lo tanto

$$a = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon^2} \Rightarrow 1 - \varepsilon^2 = \frac{\alpha}{a} \Rightarrow \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{a}}$$

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \Rightarrow b = a\sqrt{\frac{\alpha}{a}} = \frac{\cancel{a}\sqrt{a}\sqrt{\alpha}}{\cancel{a}} = \sqrt{a\alpha} = \sqrt{a\frac{l^2}{mk}} \Rightarrow b = a^{1/2}\sqrt{\frac{l^2}{mk}}$$

$$\pi ab = \frac{lT}{2m} = \frac{2m}{l}\pi ab = \frac{2m}{l}\pi a a^{1/2}\sqrt{\frac{l^2}{mk}} = \frac{2m\cancel{l}}{\cancel{l}}\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{1}{mk}} = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m^{\cancel{2}}}{\cancel{m}k}} \Rightarrow T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\Rightarrow T^2 = 4\pi^2 a^3 \frac{m}{k}$$

Esta ecuación establece que el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del eje mayor, lo que como vimos anteriormente es la tercera ley de Kepler.

Además de predecir la trayectoria de la órbita de los satélites artificiales terrestres, la teoría desarrollada es válida, con una aproximación sorprendentemente estrecha, para predecir el movimiento real de los planetas que giran alrededor del Sol.

CAPITULO 2

2.1 PERTURBACIONES DE LA ÓRBITA DE UN SATÉLITE EN EL CAMPO GRAVITACIONAL DE UN PLANETA ACHATADO

La elección del sistema de coordenadas cilíndricas parabólicas para la determinación de órbitas de satélites terrestres se debe a que pueden ser despreciados los armónicos zonales de orden mayor a 2, es decir, es suficiente considerar al armónico zonal de orden 2 (perturbación debida al achatamiento de la tierra) conocido como J_2 , una consideración

análoga es la que se presenta dentro de la electrodinámica en el desarrollo multipolar. Por lo que es de importancia proceder a su determinación.

Como una primera aproximación, la órbita de un satélite artificial puede ser asumida como kepleriana. Lo que implica que no hay perturbaciones de ningún tipo actuando sobre el satélite, aunque de una manera más rigurosa se deben de tomar en cuenta otros factores que pueden perturbar su órbita. Para satélites cercanos a la superficie de la tierra los mayores efectos de perturbación son los debidos a la falta de simetría esférica de la tierra y la resistencia atmosférica. Aunque un tratamiento más riguroso de la teoría de satélites terrestres debería incluir los efectos simultáneos del achatamiento de la Tierra y de la resistencia atmosférica, estos factores son secundarios comparados con la fuerza central. Consideremos el caso de un satélite girando alrededor de un planeta achatado, en el plano de su ecuador, tal como sucede con la Tierra. La atracción bajo estas circunstancias es siempre mayor que la de una esfera concéntrica de igual masa, pero que las dos atracciones se aproximan cuando el satélite regresa. El exceso de la atracción del esferoide sobre aquel de una esfera será considerada como la perturbación, que actúa en la línea del radio vector y está siempre dirigida hacia el planeta. Entonces la componente normal es siempre positiva, y es igual en valor en puntos que se encuentran simétricamente situados con respecto al semieje mayor. Si la excentricidad de la órbita no es grande la componente tangencial es relativamente pequeña. Los efectos sobre el periodo son más fácilmente observables cuando la órbita es un círculo. La atracción será constante y mayor de lo que sería si el planeta fuera una esfera. Los efectos serán mayores entre más achatado sea el planeta y más cercano sea el satélite. En el caso de la Tierra el achatamiento es pequeño.

Los cuerpos celestes no son homogéneos, sus densidades internas se incrementan debido a la presión, luego entonces no podemos aplicar los resultados para cuerpos homogéneos cuando estudiamos sus campos. Alguna ley de densidades debería de ser utilizada, el potencial puede ser calculado por integración, además debe satisfacer una de las dos ecuaciones diferenciales siguientes; para regiones fuera del cuerpo atrayente $\nabla^2 V = 0$ que es la ecuación de Laplace, y para regiones dentro del cuerpo atrayente $\nabla^2 V = 4\pi G\rho$ que es la ecuación de Poisson. En este caso se considerará únicamente la primera de estas ecuaciones, la que en coordenadas polares esféricas puede ser escrita de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\text{sen}\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (37)$$

Una función armónica de grado n que sea solución de (37) tendrá la forma $r^n S_n(\theta, \phi)$, entonces sustituyendo $V = r^n S_n(\theta, \phi)$ y resolviendo miembro a miembro el lado izquierdo de (37)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= nr^{n-1} S_n(\theta, \phi) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 nr^{n-1} S_n(\theta, \phi) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[nr^{n+1} S_n(\theta, \phi) \right] = n(n+1)r^n S_n(\theta, \phi) \\ \frac{1}{\text{sen}\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) &= \frac{1}{\text{sen}\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\text{sen}\theta \frac{\partial r^n S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{\text{sen}\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\text{sen}\theta r^n \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right] \\ &= \frac{1}{\text{sen}\theta} \left[r^n \cos\theta \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} + \text{sen}\theta r^n \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} \right] = \cot\theta r^n \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} + r^n \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} \\ \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} &= \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{\partial r^n S_n(\theta, \phi)}{\partial \phi} \right] = \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \cdot r^n \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

Ahora podemos reescribir a (37) como sigue

$$n(n+1)r^n S_n(\theta, \phi) + \cot\theta r^n \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} + r^n \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} r^n \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} = 0 \quad (38)$$

De donde se observa que multiplicando por $1/r^n$ y haciendo $\cos\theta = \mu \Rightarrow \cos^2\theta = \mu^2 \Rightarrow 1 - \text{sen}^2\theta = \mu^2 \Rightarrow 1 - \mu^2 = \text{sen}^2\theta$, (38) se transforma en

$$\begin{aligned} n(n+1)S_n(\theta, \phi) + \cot\theta \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} &= 0 \\ n(n+1)S_n(\theta, \phi) + \cot\theta \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} &= 0 \quad (39) \end{aligned}$$

Por lo que utilizando la regla de la cadena en el segundo y tercer término de (39)

$$\begin{aligned}
\cot \theta \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} &= \cot \theta \left(-\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \operatorname{sen} \theta \right) = -\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \cos \theta = -\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \mu \\
\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} &= \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} = \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \frac{\partial \cos^{-1} \mu}{\partial \mu} = \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \frac{-1}{\sqrt{1-\mu^2}} = -\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} \\
&= -\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta}} = -\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \Rightarrow -\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \operatorname{sen} \theta = \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \operatorname{sen} \theta \right] = -\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \cos \theta + \left[-\frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta \partial \mu} \operatorname{sen} \theta \right] \\
&= -\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \operatorname{sen} \theta = -\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \mu - \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta \\
&= -\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \mu - \frac{\partial}{\partial \mu} \left[-\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta \right] = -\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \mu - \frac{\partial}{\partial \mu} \left[-\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \operatorname{sen}^2 \theta \right] \\
&= -\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \mu - \frac{\partial}{\partial \mu} \left[-\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} (1-\mu^2) \right] = -\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \mu + \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu^2} (1-\mu^2) \\
\Rightarrow -\frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \mu - \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \mu + \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu^2} (1-\mu^2) &= -2 \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \mu + \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu^2} (1-\mu^2)
\end{aligned}$$

De donde obviamente se observa la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \right\} = -2 \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \mu + \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu^2} (1-\mu^2)$$

Por lo que (39) queda escrita de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \mu} \right\} + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 S_n(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} + n(n+1) S_n(\theta, \phi) = 0 \quad (40)$$

Suponiendo que la distribución de la masa atrayente tiene simetría axial y que θ es medido desde el eje de simetría, entonces ϕ no aparece más y si $r^n P_n(\mu)$ es armónica, entonces

$P_n(\mu)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} \right\} + n(n+1) P_n(\mu) = 0 \quad (41)$$

Que es conocida como ecuación de Legendre. Si (41) se resuelve mediante series, la solución es de la forma

$$P_n(\mu) = (a_0 + a_2\mu^2 + a_4\mu^4 + \dots) + (a_1\mu + a_3\mu^3 + a_5\mu^5 + \dots)$$

Pero en ambas series se tienen problemas en la convergencia para $|\mu| \leq 1$, por lo que no serán consideradas como solución. La solución relevante para $P_n(\mu)$ es un polinomio en μ , conocido como polinomio de Legendre de orden n . La serie que genera a $P_n(\mu)$ es

$$P_n(\mu) = A_n \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left\{ \mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - \dots \right\} \quad (42)$$

Donde A_n , que es una constante arbitraria, es tomada como uno, nótese que las series terminan en una constante si n es par, y en un término de μ si n es impar.

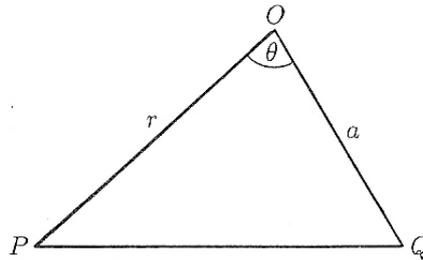


Figura 1.14

De la figura 1.14 se observa que el potencial en el punto P debido a la masa m en el punto Q viene dado por $-mG/PQ$, y que la función $1/PQ$ es armónica. Si un punto O cualquiera es fijado como origen, entonces debido a que

$$PQ^2 = r^2 - 2ra \cos \theta + a^2 = r^2 - 2ra\mu + a^2$$

La función

$$V = \frac{1}{(r^2 - 2ra\mu + a^2)^{1/2}}$$

satisface la ecuación de Laplace, además se puede expandir en potencias de a/r para $r > a$ y r/a para $r < a$. Ahora denotando el coeficiente de r^n/a^{n+1} o a^n/r^{n+1} por P_n , se tiene para cada caso

$$V = \frac{1}{a} \left\{ 1 + \frac{r}{a} P_1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2 + \dots + \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n + \dots \right\}$$

$$V = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{a}{r} P_1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2 + \dots + \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n + \dots \right\}$$

Recordado que P_n representa polinomios en μ , y tales polinomios satisfacen la ecuación de Legendre, por lo que deben ser generados por (42) para algún A_n , que en este caso será igual a uno. De tal manera

$$P_0(\mu) = A_0 \frac{(0)!}{2^0 (0!)^2} \left\{ \mu^0 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \dots \right\} = 1$$

$$P_1(\mu) = A_1 \frac{(2 \cdot 1)!}{2^1 (1!)^2} \left\{ \mu^1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \dots \right\} = \mu$$

$$P_2(\mu) = A_2 \frac{(2 \cdot 2)!}{2^2 (2!)^2} \left\{ \mu^2 - \frac{2(2-1)}{2(2 \cdot 2 - 1)} \mu^{2-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - \dots \right\} = \frac{3}{2} \mu^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(\mu) = A_3 \frac{(2 \cdot 3)!}{2^3 (3!)^2} \left\{ \mu^3 - \frac{3(3-1)}{2(2 \cdot 3 - 1)} \mu^{3-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - \dots \right\} = \frac{5}{2} \mu^3 - \frac{3}{2} \mu$$

Y así sucesivamente, cabe destacar que Olindo Rodrigues desarrolló la fórmula

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n$$

para expresar a los polinomios de Legendre, así utilizando ésta para determinar $P_4(\mu)$

$$\begin{aligned}
P_4(\mu) &= \frac{1}{2^4 \cdot 4!} \frac{d^4}{d\mu^4} (\mu^2 - 1)^4 \\
\Rightarrow \frac{d}{d\mu} (\mu^2 - 1)^4 &= 8\mu(\mu^2 - 1)^3 \Rightarrow \frac{d}{d\mu} [8\mu(\mu^2 - 1)^3] = 8(\mu^2 - 1)^3 + 48\mu^2(\mu^2 - 1)^2 \\
\frac{d}{d\mu} [8(\mu^2 - 1)^3 + 48\mu^2(\mu^2 - 1)^2] &= 48\mu(\mu^2 - 1)^2 + 96\mu(\mu^2 - 1)^2 + 192\mu^5 - 192\mu^3 \\
\Rightarrow \frac{d}{d\mu} [48\mu(\mu^2 - 1)^2 + 96\mu(\mu^2 - 1)^2 + 192\mu^5 - 192\mu^3] &= 1680\mu^4 - 1440\mu^2 + 144 \\
\Rightarrow P_4(\mu) &= \frac{1}{384} \{1680\mu^4 - 1440\mu^2 + 144\} = \frac{1}{8} \{35\mu^4 - 30\mu^2 + 3\}
\end{aligned}$$

Pero en general los $P_n(\mu)$ vienen dados por (42) con $A_n = 1$. Asumiendo que la Tierra tiene simetría con respecto a los polos norte y sur, y que θ es medida desde el polo norte, el potencial debe ser de la forma

$$V = -\frac{MG}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{r^2} J_2 P_2 - \frac{1}{r^3} J_3 P_3 - \dots \right\} \quad (43)$$

Donde MG/r es denominado término kepleriano y describe el potencial de una esfera homogénea, los términos restantes constituyen el potencial perturbador en el cual las J 's son constantes y son llamadas "armónicos zonales". J_2 recibe el nombre de factor de la forma dinámica de la tierra, es con mucho el más importante de los coeficientes del potencial terrestre y es una de las constantes de mayor importancia en la mecánica celeste, la astronomía y la geodesia, su valor es de 1.0826157×10^{-3} , los cuatro siguientes armónicos zonales tienen los valores de $J_3 = -2.54 \times 10^{-6}$, $J_4 = -1.62 \times 10^{-6}$, $J_5 = -0.23 \times 10^{-6}$ y $J_6 = -0.55 \times 10^{-6}$. En (43) se ha despreciado el término P_1 , ya que con el origen del sistema de coordenadas en el centro de masas de la Tierra $J_1 = 0$.

2.2 ANÁLISIS DE LAS TORCAS Y MOMENTOS ANGULARES

Dado el potencial debido al achatamiento de los polos (J_2) como

$$V(x, y, z) = \frac{\mu}{r} + \frac{c}{r^3} \left(3 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \quad (32)$$

Se pueden calcular las componentes de las fuerzas sobre un satélite terrestre como

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (33)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\mu x}{r^3} + 3c \left(\frac{x}{r^5} \right) \left(1 - \frac{5z^2}{r^2} \right) \quad (34)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\mu y}{r^3} + 3c \left(\frac{y}{r^5} \right) \left(1 - \frac{5z^2}{r^2} \right) \quad (35)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\mu z}{r^3} + 3c \left(\frac{z}{r^5} \right) \left(3 - \frac{5z^2}{r^2} \right) \quad (36)$$

Es claro de (34) y (35) que al multiplicar (34) por y , (35) por x y tomar la diferencia da cero

$$\begin{aligned} x \frac{\partial V}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\ \Rightarrow -xF_y + yF_x &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, la torca de la fuerza \vec{F} cuyas componentes están dadas por (34), (35) y (36), es

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{\tau} = \hat{i}(yF_z - zF_y) - \hat{j}(xF_z - zF_x) + \hat{k}(xF_y - yF_x)$$

Como: $xF_y - yF_x = 0$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \hat{i}(yF_z - zF_y) + \hat{j}(zF_x - xF_z) + 0\hat{k} \Rightarrow \vec{\tau} = \hat{i}(yF_z - zF_y) + \hat{j}(zF_x - xF_z) \\ \Rightarrow \vec{\tau}_z &= 0 \end{aligned}$$

El momento angular \vec{L} y $\vec{\tau}$ están conectados por la ecuación $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$

$$\Rightarrow \frac{dL_x}{dt} = \tau_x ; \frac{dL_y}{dt} = \tau_y ; \frac{dL_z}{dt} = \tau_z$$

$$\Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = \tau_z = 0$$

$$\Rightarrow L_z = cte \quad (36')$$

Lo que representa un resultado de gran importancia dentro de la mecánica celeste, porque se ha logrado determinar una constante de movimiento. Es decir, como $\vec{L} = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} + L_z \hat{k}$ tenemos que $L_x \hat{i}$ varía, $L_y \hat{j}$ varía y $L_z \hat{k}$ no varía, permanece constante. En otras palabras el movimiento conserva al momento angular L_z constante.

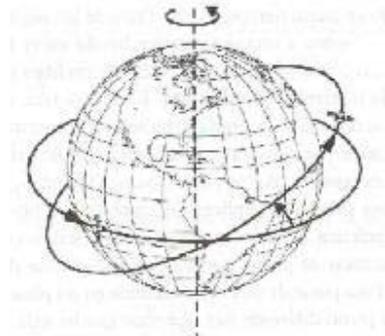
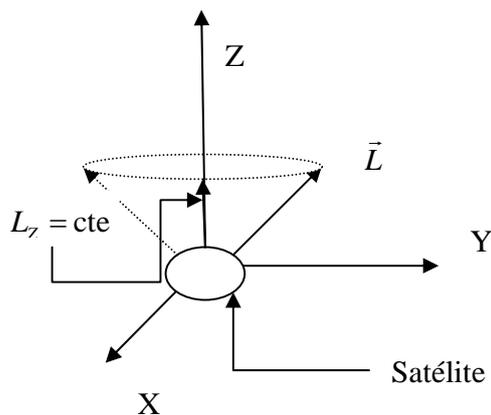


Figura 1.15

CAPITULO 3

SOLUCION DEL PROBLEMA

Para la solución del problema procederemos en dos partes, la primera será de manera analítica, utilizando el material expuesto en el capítulo anterior para establecer un sistema de ecuaciones que describan totalmente el movimiento de un satélite artificial terrestre bajo la perturbación del armónico zonal J_2 . La segunda parte tratará el planteamiento y aplicación de un algoritmo para la solución de las ecuaciones del movimiento obtenidas en la solución analítica, haciendo uso del programa computacional Maple 12.

3.1 SOLUCION ANALITICA

Para comenzar con la solución debemos realizar el cambio de sistema de coordenadas rectangulares a cilíndricas parabólicas

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2); y = uv; z = z$$

Por lo que un vector en este sistema queda definido de la forma

$$\vec{r} = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)\hat{i} + uv\hat{j} + z\hat{k}$$

Los vectores tangentes correspondientes

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = u\hat{i} + v\hat{j}; \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -v\hat{i} + u\hat{j}; \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{k}$$

Y los factores de escala

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}; h_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{v^2 + u^2}; h_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1$$

Nos permiten calcular el elemento de arco

$$ds^2 = h_1^2 (du)^2 + h_2^2 (dv)^2 + h_3^2 (dz)^2$$

$$\Rightarrow ds^2 = (u^2 + v^2) du^2 + (u^2 + v^2) dv^2 + dz^2$$

De donde encontramos que la velocidad queda expresada de la siguiente manera

$$v^2 = (u^2 + v^2) \dot{u}^2 + (u^2 + v^2) \dot{v}^2 + \dot{z}^2$$

De la mecánica clásica sabemos que para un sistema conservativo y como $V(u, v, z)$ solo depende de las coordenadas

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q^j} (T - V) = 0$$

Donde $T - V$ se define como función de Lagrange, tal que $L(q, \dot{q}, t) = T - V$, reescribiendo la ecuación anterior

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0$$

Que es la bien conocida ecuación de Lagrange. Procedamos a ponerla en términos del sistema de coordenadas cilíndricas parabólicas como sigue

$$q^1 \equiv u; q^2 \equiv v; q^3 \equiv z$$

$$\dot{q}_1 \equiv \dot{u}; \dot{q}_2 \equiv \dot{v}; \dot{q}_3 \equiv \dot{z}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial L}{\partial v} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

Ahora determinaremos la lagrangiana del sistema a partir de la velocidad que hemos calculado en el sistema de coordenadas cilíndricas parabólicas

$$L = \frac{1}{2} mu^2 \dot{u}^2 + \frac{1}{2} mu^2 \dot{v}^2 + \frac{1}{2} mv^2 \dot{u}^2 + \frac{1}{2} mv^2 \dot{v}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - V$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} &= mu^2 \dot{u} + mv^2 \dot{u} - \frac{\partial V}{\partial \dot{u}} \\ \frac{\partial L}{\partial u} &= mu\dot{u}^2 + mu\dot{v}^2 - \frac{\partial V}{\partial u} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(mu^2 \dot{u} + mv^2 \dot{u} - \frac{\partial V}{\partial \dot{u}} \right) - mu\dot{u}^2 - mu\dot{v}^2 + \frac{\partial V}{\partial u} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (mu^2 \dot{u} + mv^2 \dot{u}) - mu\dot{u}^2 - mu\dot{v}^2 + \frac{\partial V}{\partial u} &= 0 \quad (37)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} &= mu^2 \dot{v} + mv^2 \dot{v} - \frac{\partial V}{\partial \dot{v}} \\ \frac{\partial L}{\partial v} &= mv\dot{u}^2 + mv\dot{v}^2 - \frac{\partial V}{\partial v} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(mu^2 \dot{v} + mv^2 \dot{v} - \frac{\partial V}{\partial \dot{v}} \right) - mv\dot{u}^2 - mv\dot{v}^2 + \frac{\partial V}{\partial v} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (mu^2 \dot{v} + mv^2 \dot{v}) - mv\dot{u}^2 - mv\dot{v}^2 + \frac{\partial V}{\partial v} &= 0 \quad (38)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z} - \frac{\partial V}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -\frac{\partial V}{\partial z} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(m\dot{z} - \frac{\partial V}{\partial \dot{z}} \right) + \frac{\partial V}{\partial z} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} &= 0 \quad (39)\end{aligned}$$

De donde se observa que los términos

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial V}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial V}{\partial \dot{z}} = 0$$

Y esto es debido a que obviamente V no depende de \dot{u} , \dot{v} ni de \dot{z} .

Ahora podemos proceder a determinar las ecuaciones del movimiento, recordando que este se encuentra sujeto a un potencial gravitacional, tomando masas unitarias

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(mu^2 \dot{u} + mv^2 \dot{v} - \frac{\partial V}{\partial \dot{u}} \right) - mu \dot{u}^2 - mv \dot{v}^2 + \frac{\partial V}{\partial u} = 0 \\
& \Rightarrow mu^2 \ddot{u} + 2m u \dot{u}^2 + 2m v \dot{v} \dot{u} + mv^2 \ddot{u} - mu \dot{u}^2 - mv \dot{v}^2 + \frac{\partial V}{\partial u} = 0 \\
& \Rightarrow mu^2 \ddot{u} + mu \dot{u}^2 + 2m v \dot{v} \dot{u} + mv^2 \ddot{u} - mv \dot{v}^2 + \frac{\partial V}{\partial u} = 0 \\
& \Rightarrow mu^2 \ddot{u} + mv^2 \ddot{u} + mu \dot{u}^2 - mv \dot{v}^2 + 2m v \dot{v} \dot{u} + \frac{\partial V}{\partial u} = 0 \\
& \Rightarrow \ddot{u} (mu^2 + mv^2) + mu (\dot{u}^2 - \dot{v}^2) + 2m v \dot{v} \dot{u} + \frac{\partial V}{\partial u} = 0 \\
& \Rightarrow \ddot{u} (mu^2 + mv^2) = -mu (\dot{u}^2 - \dot{v}^2) - 2m v \dot{v} \dot{u} - \frac{\partial V}{\partial u} \\
& \Rightarrow \ddot{u} = \frac{-mu (\dot{u}^2 - \dot{v}^2) - 2m v \dot{v} \dot{u} - \frac{\partial V}{\partial u}}{mu^2 + mv^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{u} = \frac{1}{u^2 + v^2} \left(-u (\dot{u}^2 - \dot{v}^2) - 2v \dot{v} \dot{u} + \frac{\partial V}{\partial u} \right) \quad (37')$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(mu^2 \dot{v} + mv^2 \dot{v} - \frac{\partial V}{\partial \dot{v}} \right) - mv \dot{u}^2 - mv \dot{v}^2 + \frac{\partial V}{\partial v} = 0 \\
& \Rightarrow 2m u \dot{u} \dot{v} + mu^2 \ddot{v} + 2m v \dot{v}^2 + mv^2 \ddot{v} - mv \dot{u}^2 - mv \dot{v}^2 + \frac{\partial V}{\partial v} = 0 \\
& \Rightarrow 2m u \dot{u} \dot{v} + mu^2 \ddot{v} + mv \dot{v}^2 + mv^2 \ddot{v} - mv \dot{u}^2 + \frac{\partial V}{\partial v} = 0 \\
& \Rightarrow mu^2 \ddot{v} + mv^2 \ddot{v} + mv \dot{v}^2 - mv \dot{u}^2 + 2m u \dot{u} \dot{v} + \frac{\partial V}{\partial v} = 0 \\
& \Rightarrow \ddot{v} (mu^2 + mv^2) + mv (\dot{v}^2 - \dot{u}^2) + 2m u \dot{u} \dot{v} + \frac{\partial V}{\partial v} = 0 \\
& \Rightarrow \ddot{v} (mu^2 + mv^2) = -mv (\dot{v}^2 - \dot{u}^2) - 2m u \dot{u} \dot{v} - \frac{\partial V}{\partial v} \\
& \Rightarrow \ddot{v} = \frac{-mv (\dot{v}^2 - \dot{u}^2) - 2m u \dot{u} \dot{v} - \frac{\partial V}{\partial v}}{mu^2 + mv^2} \\
& \Rightarrow \ddot{v} = \frac{1}{u^2 + v^2} \left(-v (\dot{v}^2 - \dot{u}^2) - 2u \dot{u} \dot{v} + \frac{\partial V}{\partial v} \right) \quad (38')
\end{aligned}$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (39')$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial V}{\partial u}$, $\frac{\partial V}{\partial v}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ están dadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial u} &= u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial v} &= -v \frac{\partial V}{\partial x} + u \frac{\partial V}{\partial y} \quad (40) \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

Para trayectorias bajo la perturbación J_2 el potencial V en coordenadas cartesianas está dado por

$$V \equiv V(x, y, z) = \frac{\mu}{r} + \frac{c}{r^3} \left[3 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 1 \right] \quad (41)$$

Donde $c = \frac{J_2 \mu R_{\oplus}^2}{2}$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ y μ es el parámetro gravitacional, luego entonces

para (41) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{\mu x}{r^3} + 3c \left(\frac{x}{r^5} \right) \left(1 - \frac{5z^2}{r^2} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\mu y}{r^3} + 3c \left(\frac{y}{r^5} \right) \left(1 - \frac{5z^2}{r^2} \right) \quad (42) \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{\mu z}{r^3} + 3c \left(\frac{z}{r^5} \right) \left(3 - \frac{5z^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Por lo que ahora podemos reescribir las ecuaciones (40) utilizando (42) como sigue

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial u} &= u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} \\
\Rightarrow u \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) &= u \left[\left(-\frac{\mu \left(\frac{1}{2} \right) (u^2 - v^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) + 3c \left(\frac{\frac{1}{2} (u^2 - v^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) \left(1 - \frac{5z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \right] \\
&= u \left[\left(-\frac{\mu (u^2 - v^2)}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) + \left(\frac{3c(u^2 - v^2)}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) \left(1 - \frac{5z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \right] \\
&= u \left[\left(-\frac{\mu (u^2 - v^2)}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) + \frac{3c(u^2 - v^2)}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{15cz^2(u^2 - v^2)}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}} \right] \\
&= \frac{-u\mu(u^2 - v^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 3cu(u^2 - v^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 15cz^2u(u^2 - v^2)}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}} \\
&= \frac{-u\mu(u^2 - v^2) \left(\left[\frac{1}{2}(u^2 - v^2) \right]^2 + u^2v^2 + z^2 \right) + 3cu(u^2 - v^2) \left(\left[\frac{1}{2}(u^2 - v^2) \right]^2 + u^2v^2 + z^2 \right) - 15cz^2u(u^2 - v^2)}{2 \left(\left[\frac{1}{2}(u^2 - v^2) \right]^2 + u^2v^2 + z^2 \right)^{7/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) &= v \left[\frac{-\mu uv}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^{3/2}} + \frac{3cuv}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^{5/2}} \left(1 - \frac{5z^2}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]} \right) \right] \\
&= v \left[\frac{-\mu uv}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^{3/2}} + \frac{3cuv}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^{5/2}} - \frac{15cuvz^2}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^{7/2}} \right] \\
&= \frac{-\mu uv^2}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^{3/2}} + \frac{3cuv^2}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^{5/2}} - \frac{15cuv^2z^2}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^{7/2}} \\
&= \frac{-\mu uv^2 \left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^2 + 3cuv^2 \left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right] - 15cuv^2z^2}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^{7/2}} \\
\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial u} &= \frac{-u\mu(u^2 - v^2) \left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^2 + 3cu(u^2 - v^2) \left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right] - 15cz^2u(u^2 - v^2)}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^{7/2}} \\
&= \frac{\mu uv^2 \left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^2 - 3cuv^2 \left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right] + 15cuv^2z^2}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^{7/2}} \\
&= \frac{-\mu uv^2 \left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^2 + 3cuv^2 \left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right] - 15cuv^2z^2}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^{7/2}} \\
\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial u} &= \frac{-u\mu(u^2 - v^2) \left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^2 + 3cu(u^2 - v^2) \left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right] - 15cz^2u(u^2 - v^2)}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^{7/2}} \\
&= \frac{\mu uv^2 \left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^2 - 3cuv^2 \left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right] + 15cuv^2z^2}{\left[\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2 \right]^{7/2}}
\end{aligned}$$

Haciendo $U^2 = (u^2 + v^2)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial u} &= \frac{-\mu u(u^2 - v^2) \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^2 + 3cu(u^2 - v^2) \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right] - 15cz^2u(u^2 - v^2)}{2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^{\frac{7}{2}}} \\
&= \frac{\mu uv^2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^2 - 3cuv^2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right] + 15cuv^2 z^2}{\left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^{\frac{7}{2}}} \\
&= \frac{-u\mu(u^2 - v^2) \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^2 + 3cu(u^2 - v^2) \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right] - 15cz^2u(u^2 - v^2) - 2 \left[\mu uv^2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^2 - 3cuv^2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right] + 15cuv^2 z^2 \right]}{2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^{\frac{7}{2}}} \\
&= \frac{-u\mu(u^2 - v^2) \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^2 + 3cu(u^2 - v^2) \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right] - 15cz^2u(u^2 - v^2) - 2\mu uv^2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^2 + 6cuv^2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right] - 30cuv^2 z^2}{2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^{\frac{7}{2}}} \\
&= \frac{-u\mu v^2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^2 - u^3 \mu \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^2 + 3cuv^2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right] + 3cu^3 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right] - 15cuv^2 z^2 - 15cz^2 u^3}{2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^{\frac{7}{2}}} \\
&= \frac{-u\mu v^2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^2 - u^3 \mu \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^2 + 3cuv^2 \left(\frac{1}{4}U^4 \right) - 12cuv^2 z^2 + 3cu^3 \left(\frac{1}{4}U^4 \right) - 12cz^2 u^3}{2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^{\frac{7}{2}}} \\
&= \frac{\left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^2 (-u\mu v^2 - u^3 \mu) + \frac{1}{4}U^4 (3cuv^2 + 3cu^3) - 12cuz^2 (v^2 + u^2)}{2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^{\frac{7}{2}}} \\
&= \frac{-\mu u \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^2 (v^2 + u^2) + \frac{3}{4}U^4 cu (v^2 + u^2) - 12cuz^2 (v^2 + u^2)}{2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^{\frac{7}{2}}} \\
\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial u} &= \frac{uU^2 \left[-\mu \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right)^2 + \frac{3}{4}U^4 c - 12z^2 c \right]}{2 \left[\frac{1}{4}U^4 + z^2 \right]^{\frac{7}{2}}}
\end{aligned}$$

Simplificando y agrupando términos

$$\begin{aligned}
& -\mu\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 + \frac{3}{4}U^4c - 12z^2c = -\mu\left(\frac{1}{16}U^8 + \frac{1}{2}U^4z^2 + z^4\right) + \frac{3}{4}U^4c - 12z^2c \\
& = \left(-\frac{\mu}{16}U^8 + \frac{3}{4}U^4c\right) + \left(-12z^2c - \mu\frac{1}{2}U^4z^2\right) - \mu z^4 \\
& 2\left[\frac{1}{4}U^4 + z^2\right]^{\frac{7}{2}} = \frac{2}{2^7}(U^4 + 4z^2)^{\frac{7}{2}} = \frac{1}{2^6}(U^4 + 4z^2)^{\frac{7}{2}} \\
& \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial u} = \frac{2^6 u U^2 \left[\left(-\frac{\mu}{16}U^8 + \frac{3}{4}U^4c\right) + \left(-12z^2c - \frac{\mu}{2}U^4z^2\right) - \mu z^4 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{\frac{7}{2}}} \\
& = \frac{u U^2 \left[(-4\mu U^8 + 48U^4c) + (-768z^2c - 32\mu U^4z^2) - 64\mu z^4 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{\frac{7}{2}}} \\
& = \frac{4u U^2 \left[(-\mu U^8 + 12U^4c) + (-192z^2c - 8\mu U^4z^2) - 16\mu z^4 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{\frac{7}{2}}} \\
& \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial u} = \frac{4u U^2 \left[(12c - \mu U^4)U^4 - 8(24c + \mu U^4)z^2 - 16\mu z^4 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{\frac{7}{2}}} \\
& \frac{\partial V}{\partial v} = -v \frac{\partial V}{\partial x} + u \frac{\partial V}{\partial y} \\
& \Rightarrow -v \frac{\partial V}{\partial x} = -v \left[\frac{-\mu \frac{1}{2}(u^2 - v^2)}{\left(\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] + 3c \left[\frac{\frac{1}{2}(u^2 - v^2)}{\left(\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \right] \left[1 - \frac{5z^2}{\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -v \left[\frac{-\mu(u^2 - v^2)}{2\left(\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2\right)^{3/2}} + \frac{3c(u^2 - v^2)}{2\left(\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2\right)^{5/2}} - \frac{15cz^2(u^2 - v^2)}{2\left(\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2\right)^{7/2}} \right] \\
&= -v \left[\frac{-\mu(u^2 - v^2)\left(\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2\right)^2 + 3c(u^2 - v^2)\left(\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2\right) - 15cz^2(u^2 - v^2)}{2\left(\frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 + z^2\right)^{7/2}} \right] \\
\Rightarrow -v \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{v\mu(u^2 - v^2)\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 - 3cv(u^2 - v^2)\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right) + 15vcz^2(u^2 - v^2)}{2\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{7/2}} \\
u \frac{\partial V}{\partial y} &= u \left[\frac{-\mu uv}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{3/2}} + \frac{3cu v}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{5/2}} - \frac{15cu v z^2}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{7/2}} \right] \\
&= \frac{-\mu u^2 v}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{3/2}} + \frac{3cu^2 v}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{5/2}} - \frac{15cu^2 v z^2}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{7/2}} \\
&= \frac{-\mu u^2 v \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 + 3cu^2 v \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right) - 15cu^2 v z^2}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{7/2}} \\
\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial v} &= \frac{v\mu(u^2 - v^2)\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 - 3cv(u^2 - v^2)\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right) + 15cvz^2(u^2 - v^2)}{2\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{7/2}} \\
&+ \frac{-\mu u^2 v \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 + 3cu^2 v \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right) - 15cu^2 v z^2}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{7/2}} \\
&= \frac{v\mu(u^2 - v^2)\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 - 3cv(u^2 - v^2)\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right) + 15cvz^2(u^2 - v^2) + 2\left(-\mu u^2 v \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 + 3cu^2 v \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right) - 15cu^2 v z^2\right)}{2\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{7/2}} \\
\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial v} &= \frac{-\mu u^2 v \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 - \mu v^3 \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 + 3cu^2 v \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right) + 3cv^3 \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 - 15cu^2 v z^2 - 15cv^3 z^2}{2\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{7/2}} \\
\Rightarrow -\mu u^2 v \left(\frac{1}{16}U^8 + \frac{1}{2}U^4 z^2 + z^4\right) &- \mu v^3 \left(\frac{1}{16}U^8 + \frac{1}{2}U^4 z^2 + z^4\right) + \frac{3}{4}cu^2 v U^4 + 3cu^2 v z^2 + 3cv^3 \left(\frac{1}{16}U^8 + \frac{1}{2}U^4 z^2 + z^4\right) - 15cu^2 v z^2 - 15cv^3 z^2 \\
&= -\mu v \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 (u^2 + v^2) + 3cv \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right) (u^2 + v^2) - 15cvz^2 (u^2 + v^2) \\
&= vU^2 \left[-\mu \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 + 3c \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right) - 15cz^2 \right] \\
&= \frac{vU^2 \left[-\mu \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 + \frac{3}{4}U^4 c - 12cz^2 \right]}{2\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{7/2}}
\end{aligned}$$

Simplificando y agrupando términos

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -\mu\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 + \frac{3}{4}U^4c - 12cz^2 = -\mu\left(\frac{1}{16}U^8 + \frac{1}{2}U^4z^2 + z^4\right) + \frac{3}{4}U^4c - 12cz^2 \\
&= \left(-\frac{\mu}{16}U^8 + \frac{3}{4}U^4c\right) + \left(-12cz^2 - \frac{\mu}{2}U^4z^2\right) - \mu z^4 \\
&\Rightarrow 2\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{7/2} = \frac{2}{2^7}(U^4 + 4z^2)^{7/2} = \frac{1}{2^6}(U^4 + 4z^2)^{7/2} \\
&= \frac{2^6 v U^2 \left[\left(-\frac{\mu}{16}U^8 + \frac{3}{4}U^4c\right) + \left(-12cz^2 - \frac{\mu}{2}U^4z^2\right) - \mu z^4 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{7/2}} \\
&= \frac{v U^2 \left[(-4\mu U^8 + 48U^4c) + (-768z^2c - 32\mu U^4z^2) - 64\mu z^4 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{7/2}} \\
&= \frac{4v U^2 \left[(-\mu U^8 + 12U^4c) + (-192z^2c - 8\mu U^4z^2) - 16\mu z^4 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{7/2}} \\
&\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial v} = \frac{4v U^2 \left[(-\mu U^8 + 12c)U^4 - 8(24c + \mu U^4)z^2 - 16\mu z^4 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{7/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{-\mu z}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{3/2}} + \frac{3cz}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{5/2}} \left(3 - \frac{5z^2}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)} \right) \\
&= \frac{-\mu z}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{3/2}} + \frac{9cz}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{5/2}} - \frac{15cz^3}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{7/2}} \\
&= \frac{-\mu z \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 + 9cz \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right) - 15cz^3}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{7/2}} \\
&= \frac{z \left[-\mu \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 + 9c \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right) - 15cz^2 \right]}{\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{7/2}}
\end{aligned}$$

Simplificando y agrupando términos

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -\mu\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^2 + 9c\left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right) - 15cz^2 \\
&= -\mu\left(\frac{1}{16}U^8 + \frac{1}{2}U^4z^2 + z^4\right) + \frac{9}{4}cU^4 + 9cz^2 - 15cz^2 \\
&= -15cz^2 + \left(\frac{9}{4}cU^4 + 9cz^2\right) - \frac{\mu}{16}(U^4 + 4z^2)^2 \\
&\Rightarrow \left(\frac{1}{4}U^4 + z^2\right)^{7/2} = \frac{1}{2^7}(U^4 + 4z^2)^{7/2} \\
&\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{2^7 z \left[-15cz^2 + \left(\frac{9}{4}cU^4 + 9cz^2\right) - \frac{\mu}{16}(U^4 + 4z^2)^2 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{7/2}} \\
&= \frac{z \left[-1920cz^2 + 288cU^4 + 1152cz^2 - 8\mu(U^4 + 4z^2)^2 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{7/2}} \\
&\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{8z \left[-240cz^2 + 36cU^4 + 144cz^2 - \mu(U^4 + 4z^2)^2 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{7/2}}
\end{aligned}$$

Por lo que las parciales $\frac{\partial V}{\partial u}$, $\frac{\partial V}{\partial v}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ quedan definidas de la forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial u} &= \frac{4uU^2 \left[(12c - \mu U^4)U^4 - 8(24c + \mu U^4)z^2 - 16\mu z^4 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{7/2}} \\
\frac{\partial V}{\partial v} &= \frac{4vU^2 \left[(-\mu U^4 + 12c)U^4 - 8(24c + \mu U^4)z^2 - 16\mu z^4 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{7/2}} \quad (43) \\
\frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{8z \left[-240cz^2 + 36cU^4 + 144cz^2 - \mu(U^4 + 4z^2)^2 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{7/2}}
\end{aligned}$$

Ahora que conocemos los términos de las ecuaciones (37'), (38') y (39') podemos ponerlas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\ddot{u} &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left(-u(\dot{u}^2 - \dot{v}^2) - 2v\dot{v}\dot{u} + \frac{4uU^2 \left[(12c - \mu U^4)U^4 - 8(24c + \mu U^4)z^2 - 16\mu z^4 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{7/2}} \right) \\
\ddot{v} &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left(-v(\dot{v}^2 - \dot{u}^2) - 2u\dot{u}\dot{v} + \frac{4vU^2 \left[(-\mu U^4 + 12c)U^4 - 8(24c + \mu U^4)z^2 - 16\mu z^4 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{7/2}} \right) \\
\ddot{z} &= \frac{8z \left[-240cz^2 + 36cU^4 + 144cz^2 - \mu(U^4 + 4z^2)^2 \right]}{(U^4 + 4z^2)^{7/2}}
\end{aligned} \tag{44}$$

Este conjunto de ecuaciones representa completamente a nuestro sistema.

Para que este sistema tenga solución única, es decir para que éste sea un sistema determinado de acuerdo con el álgebra lineal, es necesario convertirlo en un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, para lo cual, de manera clara se realizan los cambios de variable $\dot{u}_1 = u_4$, $\dot{u}_2 = u_5$, $\dot{u}_3 = u_6$, por lo que el sistema a resolver será

$$\dot{u}_1 = u_4$$

$$\dot{u}_2 = u_5$$

$$\dot{u}_3 = u_6$$

$$\dot{u}_4 = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \left(-u_1(u_4^2 - u_5^2) - 2u_2u_3u_4 + \frac{4u_1(u_1^2 + u_2^2) \left[-(u_1^2 + u_2^2)^2 (-1.053298 \times 10^{11} + 398600.8(u_1^2 + u_2^2)^2) - 8(2.106596 \times 10^{11} + 398600.8(u_1^2 + u_2^2)^2)u_3^2 - 6.377613 \times 10^6 u_3^4 \right]}{\left((u_1^2 + u_2^2)^2 + 4u_3^2 \right)^{7/2}} \right)$$

$$\dot{u}_5 = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \left(-u_2(u_5^2 - u_4^2) - 2u_1u_4u_5 + \frac{4u_2(u_1^2 + u_2^2) \left[-(u_1^2 + u_2^2)^2 (-1.053298 \times 10^{11} + 398600.8(u_1^2 + u_2^2)^2) - 8(2.106596 \times 10^{11} + 398600.8(u_1^2 + u_2^2)^2)u_3^2 - 6.377613 \times 10^6 u_3^4 \right]}{\left((u_1^2 + u_2^2)^2 + 4u_3^2 \right)^{7/2}} \right)$$

$$\dot{u}_6 = \frac{8u_3 \left[-8.42638191 \times 10^{11} u_3^2 + 3.159895 \times 10^{11} (u_1^2 + u_2^2)^2 - 398600.8 \left((u_1^2 + u_2^2)^2 + 4u_3^2 \right)^2 \right]}{\left((u_1^2 + u_2^2)^2 + 4u_3^2 \right)^{7/2}} \quad (45)$$

Para determinar las velocidades en el sistema de coordenadas cilíndrico parabólico tomamos las relaciones

$$\dot{u}_1 = \frac{u_1 \dot{x} + u_2 \dot{y}}{u_1^2 + u_2^2}, \dot{u}_2 = \frac{u_1 \dot{y} + u_2 \dot{x}}{u_1^2 + u_2^2}, u_3 = \dot{z}$$

Por lo que ahora podemos proceder a dar solución al sistema de ecuaciones diferenciales.

CAPITULO 4

4.1 SOLUCION NUMERICA.

Para dar solución numérica al conjunto de ecuaciones (45) se optó por emplear el software computacional Maple 12, del cual se utilizó la rutina *x_rkf45*, la cual, mediante el método Runge-Kutta de cuarto orden da solución numérica al problema de valor inicial de sistemas de ecuaciones diferenciales. Se realizaron 475 iteraciones, se observó que a partir de la número 144 los resultados empezaban a aproximarse a los deseados, por otro lado se observó que a partir de la iteración número 200 los resultados empezaban a divergir de manera significativa. Finalmente se realiza el cambio a coordenadas cartesianas.

```
>
sys4:=D(u1)(t)=u4(t),D(u2)(t)=u5(t),D(u3)(t)=u6(t),D(u4)(t)=(1/(u1(t)^2+u
2(t)^2))*(-u4(t)^2*u1(t)+u1(t)*u5(t)^2-
2*u2(t)*u4(t)*u5(t)+((4*u1(t)*(u1(t)^2+u2(t)^2)*(-(u1(t)^2+u2(t)^2)^2*(-
12*(8.7774811577*10^9)+(398600.8)*(u1(t)^2+u2(t)^2)^2)-
8*(24*(8.7775*10^9)+(398600.8)*(u1(t)^2+u2(t)^2)^2)*u3(t)^2-
16*(398600.8)*u3(t)^4))/(((u1(t)^2+u2(t)^2)^2+4*u3(t)^2)^(7/2))),D(u5)(t
)=(1/(u1(t)^2+u2(t)^2))*u4(t)^2*u2(t)-u2(t)*u5(t)^2-
2*u1(t)*u4(t)*u5(t)+((4*u2(t)*(u1(t)^2+u2(t)^2)*(-(u1(t)^2+u2(t)^2)^2*(-
12*(8.7774811577*10^9)+(398600.8)*(u1(t)^2+u2(t)^2)^2)-
8*(24*(8.7775*10^9)+(398600.8)*(u1(t)^2+u2(t)^2)^2)*u3(t)^2-
16*(398600.8)*u3(t)^4))/(((u1(t)^2+u2(t)^2)^2+4*u3(t)^2)^(7/2))),D(u6)(t
)=(8*u3(t)*(-
240*(8.7774811577*10^9)*u3(t)^2+36*(8.7774811577*10^9)*((u1(t)^2+u2(t)^2
^2+4*u3(t)^2)-
(398600.8)*((u1(t)^2+u2(t)^2)^2+4*u3(t)^2)^2))/((u1(t)^2+u2(t)^2)^2+4*u3(
t)^2)^(7/2);

> init144:=u1(0)=-51.4906968076679804,u2(0)=44.9860895244606312,u3(0)=-
7227.35396695101918,u4(0)=.749690583873506706e-1,u5(0)=-
.464538159818765548e-1,u6(0)=-3.73230340514824111;

init144 := u1(0) = -51.4906968076679804 , u2(0) = 44.9860895244606312 ,
u3(0) = -7227.35396695101918 , u4(0) = 0.0749690583873506706 ,
u5(0) = -0.0464538159818765548 , u6(0) = -3.73230340514824111

> g:=dsolve({init144, sys4}, {u1(t), u2(t), u3(t), u4(t), u5(t), u6(t)},
numeric);

g := proc(x_rkf45) ... end proc
```

> **g(10000);**

[$t = 10000.$, $u1(t) = -50.9463561384559612$, $u2(t) = -61.8445995525383198$,
 $u3(t) = 5669.79184912108668$, $u4(t) = 0.0554658306948068726$,
 $u5(t) = 0.0813469746129173721$, $u6(t) = 2.33939759640797362$]

Condiciones iniciales	Solución de la referencia	Solución obtenida
$x_0 = 2328.96594$	$x_R = -516.450939$	$x = -614.65$
$y_0 = -5995.21600$	$y_R = -3026.5115474$	$y = -3150.8$
$z_0 = 1719.97894$	$z_R = 5848.117544$	$z = 5669.7918$
$\dot{x}_0 = 2.911101130$	$\dot{x}_R = 3.96659$	$\dot{x} = 2.2051$
$\dot{y}_0 = -0.98164053$	$\dot{y}_R = -6.121618$	$\dot{y} = -7.5746$
$\dot{z}_0 = -7.090499220$	$\dot{z}_R = -2.754866$	$\dot{z} = -2.3393$
$t_f = 10000$ s	$\Delta R = 238.5185m$	$\Delta v = 2.3208m/s$

> **init178:=u1(0)=42.9234865642527268,u2(0)=-40.0925658893934553,u3(0)=-7072.97612004342682,u4(0)=-.953482380130943330e-1,u5(0)=.580799359449826261e-1,u6(0)=-3.44143092329805400;**

init178 := u1(0) = 42.9234865642527268 , $u2(0) = -40.0925658893934553$,
 $u3(0) = -7072.97612004342682$, $u4(0) = -0.0953482380130943330$,
 $u5(0) = 0.0580799359449826261$, $u6(0) = -3.44143092329805400$

> **g:=dsolve({init178, sys4}, {u1(t), u2(t), u3(t), u4(t), u5(t), u6(t)}, numeric);**

g := proc(x_rkf45) ... end proc

> **g(10000);**

[$t = 10000.$, $u1(t) = 51.2200753680744327$, $u2(t) = 60.3618548646282420$,
 $u3(t) = 6075.35566961593032$, $u4(t) = -0.0552466231020345145$,
 $u5(t) = -0.0793985837670495992$, $u6(t) = 1.82158183068373547$]

Condiciones iniciales	Solución de la referencia	Solución obtenida
$x_0 = 2328.96594$	$x_R = -516.450939$	$x = -510.0287$
$y_0 = -5995.21600$	$y_R = -3026.5115474$	$y = -3091.7$
$z_0 = 1719.97894$	$z_R = 5848.117544$	$z = 6075.3556$
$\dot{x}_0 = 2.911101130$	$\dot{x}_R = 3.96659$	$\dot{x} = 1.9629$
$\dot{y}_0 = -0.98164053$	$\dot{y}_R = -6.121618$	$\dot{y} = -7.4016$
$\dot{z}_0 = -7.090499220$	$\dot{z}_R = -2.754866$	$\dot{z} = -1.8215$
$t_f = 10000 \text{ s}$	$\Delta R = 236.4908m$	$\Delta v = 2.5542m/s$

```
> init199:=u1(0)=48.7123302401168560,u2(0)=-43.9619697963545022,u3(0)=-
6523.84764611829542,u4(0)=-.851300719877258194e-
1,u5(0)=.549469380201062924e-1,u6(0)=-4.14528343351725592;
```

```
init199 := u1(0) = 48.7123302401168560 , u2(0) = -43.9619697963545022 ,
u3(0) = -6523.84764611829542 , u4(0) = -0.851300719877258194 ,
u5(0) = 0.0549469380201062924 , u6(0) = -4.14528343351725592
```

```
> g:=dsolve({init199, sys4}, {u1(t), u2(t), u3(t), u4(t), u5(t), u6(t)},
numeric);
```

```
g := proc(x_rkf45) ... end proc
```

```
> g(10000);
```

```
[t = 10000., u1(t) = 56.5268218928867512 , u2(t) = 66.6978701452120788 ,
u3(t) = 6148.69686086982256 , u4(t) = -0.0470619469259589002 ,
u5(t) = -0.0661514394357956282 , u6(t) = 2.24468586292852202 ]
```

Condiciones iniciales	Solución de la referencia	Solución obtenida
$x_0 = 2328.96594$	$x_R = -516.450939$	$x = -626.6621$
$y_0 = -5995.21600$	$y_R = -3026.5115474$	$y = -3770.2$
$z_0 = 1719.97894$	$z_R = 5848.117544$	$z = 6148.6968$
$\dot{x}_0 = 2.911101130$	$\dot{x}_R = 3.96659$	$\dot{x} = 1.7519$
$\dot{y}_0 = -0.98164053$	$\dot{y}_R = -6.121618$	$\dot{y} = -6.8783$
$\dot{z}_0 = -7.090499220$	$\dot{z}_R = -2.754866$	$\dot{z} = -2.24468$
$t_f = 10000 \text{ s}$	$\Delta R = 809.6687m$	$\Delta v = 2.3953m/s$

CONCLUSIONES

El análisis del problema de la determinación de órbitas de satélites terrestres utilizando el espacio cilíndrico parabólico evita la complejidad del cambio en la dimensión del espacio, ya que las transformaciones van de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, lo cual permite hallar las ecuaciones de movimiento de una manera menos complicada y por lo tanto facilitar su solución numérica, la cual, como se observó, brinda resultados precisos para el problema de la predicción del estado final para trayectorias bajo la perturbación J_2 .

TRABAJOS FUTUROS

Tomar en cuenta los armónicos zonales de orden mayor a 2 en el análisis del problema del estado final, es decir $J_3, J_4, J_5, J_6, \dots$

Realizar un programa para la solución del problema del estado final en algún lenguaje de programación, como podrían ser C++ ó Fortran.

RECOMENDACIONES

Considerar el uso del sistema de coordenadas cilíndricas parabólicas para evitar la aplicación de métodos matemáticos complejos que impliquen el cambio de la dimensión del espacio.

REFERENCIAS

- [1.1] Van Dooren, R., "ORBIT COMPUTATION IN CELESTIAL MECHANICS BY URABE'S METHOD", Publ. RIMS, Kyoto Univ. 9, 535-542 (1974).
- [1.2] Sharaf, M. A. y Arafah, M. R., "PREDICTION OF SATELLITES IN EARTH'S GRAVITATIONAL FIELD WITH AXIAL SYMMETRY USING BURDET'S REGULARIZED THEORY", Cairo University, Egypt, 1986.
- [1.3] Sharaf, M. A. y Awad, M. E., "PREDICTION OF SATELLITE MOTIONS IN THE EARTH'S GRAVITATIONAL FIELD WITH AXIAL SYMMETRY BY THE KS REGULARIZED THEORY", Dept. of Astronomy, Cairo University, Egypt, 1986.
- [1.4] French, A.P., "MECANICA NEWTONIANA", MIT Physics Course, Editorial Reverté, 1978.
- [1.5] Chow, Tai L., "CLASSICAL MECHANICS" California State University, Stanislaus, John Wiley & Sons, 1995.
- [1.6] Landau y Lifshitz, "FISICA TEORICA VOLUMEN 1 MECANICA", Segunda Edición, Editorial Reverté, 1994.
- [1.7] Goldstein, H, "MECANICA CLASICA" Columbia University, Editorial Reverté, 2000.
- [1.8] McCall, Martin W., "CLASSICAL MECHANICS A MODERN INTRODUCTION", Department of Physics, Imperial College of Science, Technology and Medicine, John Wiley & Sons, 2001.

- [1.9] Hand, Louis N. y Finch, Janet D., “ANALYTICAL MECHANICS”, Cambridge University Press, 1998.
- [1.10] Marion, Jerry B, “DINAMICA CLASICA DE LAS PARTICULAS Y SISTEMAS”, Editorial Reverté, 2000.
- [1.11] Burden, Richard L. y Faires, J. Douglas “ANALISIS NUMERICO”, Thomson Learning, Séptima Edición, 2002.
- [1.12] Bugrov, Ya. S. y Nikolski S. M. “MATEMATICAS SUPERIORES”, Editorial Mir, Moscú, 1981.
- [1.13] Margenau, H. & Murphy, G. M., “THE MATHEMATICS OF PHYSICS AND CHEMISTRY”, D. Van Nostrand Co., 1966.
- [1.14] Stiefel, E. L. & G. Scheifele, “LINEAR AND REGULAR CELESTIAL MECHANICS”, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [1.15] Vinti, P. J., “ORBITAL AND CELESTIAL MECHANICS”, Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol.177, Institute of Astronautics and Aeronautics, Inc., Virginia, USA, 1998.