



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
UNIDAD PROFESIONAL "ADOLFO LÓPEZ MATEOS"**

**"MODELOS FÍSICO-MATEMÁTICOS PARA FLUJOS MULTIFÁSICOS
EN MEDIOS CON POROSIDAD FRACTAL"**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA DE SISTEMAS**

PRESENTA:

M. EN C. BENJAMIN ALBERTO ESPINOZA ELIZARRARAZ

DIRECTORES DE TESIS:

DR. ALEXANDER BALANKIN

DR. CARLOS LIRA GALEANA

MÉXICO, D.F.

AÑO 2011



A mi familia le dedico este trabajo

Padres:

Juan Espinoza,

Consuelo Elizarraraz,

...quisiera decir muchas cosas, pero me faltan y sobran palabras...los amo.

Agradezco:

A Dios por darme salud y la oportunidad de avanzar un paso más en mi vida profesional.

A mis directores de tesis:

Dr. Alexander Balankin, de quien me siento muy orgulloso y me dio la oportunidad de formar parte de su grupo "Mecánica Fractal" reconocido a nivel Nacional e Internacional, le agradezco su paciencia, apoyo y dedicación.

Al Dr. Carlos Lira Galeana, gracias por su apoyo, sus ideas, su disponibilidad y por darme la oportunidad de participar en el proyecto CONACYT-SENER-Hidrocarburos: "Fracturamiento hidráulico de pozos usando materiales inteligentes".

Al apoyo otorgado por el CONACYT durante mis estudios de Doctorado, el Instituto Politécnico Nacional por la beca PIFI, y el Instituto Mexicano del Petróleo para la terminación de este trabajo de tesis.

ÍNDICE

LISTA DE TABLAS Y FIGURAS.....	I
MOMENCLATURA.....	II
RESUMEN.....	VI
INTRODUCCIÓN.....	VII
DEFINICIÓN DEL PROBLEMA.....	XII
JUSTIFICACIÓN.....	XIII
OBJETIVOS.....	XV
METODOLOGÍA.....	XVI
APORTACIONES.....	XVII
Capítulo 1 Estado del Arte del Flujo en Medios Porosos Fractales.....	1
1.1 Propiedades estadísticas de los poros en el medio poroso.....	3
1.2 La tortuosidad de los caminos de flujo en medios porosos.....	6
1.3 La dimensión fractal para líneas de corrientes o capilares.....	7
tortuosos en medios porosos fractales	
1.4 Dimensión fractal del volumen del poro de un medios porosos.....	10
en una sola fase	
1.5 Dimensiones fractales para medios porosos multifásicos.....	12
1.6 Modelos para el tamaño del poro mínimo y poro máximo.....	14
1.7 Velocidad del fluido en medios porosos fractales.....	15
1.8 Resistencia al flujo.....	16
1.9 Modelo convencional.....	17

1.10	Pérdida de energía por viscosidad a lo largo de la trayectoria..... del flujo a bajos y grandes números de Reynolds	18
1.11	Permeabilidades.....	19
1.11.1	Permeabilidad de medios porosos fractales saturadas.....	20
1.11.2	Permeabilidad de medios porosos fractales no saturados.....	22
1.11.3	Análisis fractal de la ecuación de Kozeny-Carman.....	24
1.11.4	La permeabilidad del flujo de fluidos no Newtonianos en un medio poroso	25
1.12	Dispersión.....	27
1.12.1	Fluctuación de la velocidad.....	30
1.12.2	La dispersión térmica.....	31
	Referencias.....	32
Capítulo 2	Hidrodinámica Para Medios Fractales.....	34
2.1	El medio fractal y la integral fraccional.....	34
2.2	Ecuación de balance de la densidad de masa.....	38
2.3	Ecuación de balance de la densidad de momento.....	42
2.4	Ecuación de balance de la densidad de energía.....	45
2.5	Ecuaciones de Navier-Stokes para medios fractales.....	48

2.6	Ecuaciones de Hidrodinámica fractal en forma matricial.....	50
	Referencias.....	53
Capítulo 3	Modelos Físico-Matemáticos Para Flujos Multifásicos.....	55
	en Medios con Porosidad Fractal	
3.1	Ecuación de difusión de presión para flujo fractal	57
3.1.1	Flujo fractal radial cilíndrico.....	62
3.1.2	Flujo fractal radial esférico.....	68
3.1.3	Casos especiales del flujo fractal.....	73
3.2	Flujo fractal en dos fases.....	77
3.3	Modelo de petróleo negro para flujo fractal.....	80
3.4	Modelo de flujo fractal monofásico con multicomponentes.....	84
3.5	Modelo de flujo fractal composicional.....	88
	Referencias.....	94
Capítulo 4	Modelación Matemática Para Describir Flujos de Agua Subterránea en	95
	Suelos con Porosidad Fractal	
4.1	Definiciones básicas del flujo de no saturado.....	96

4.2	Generalización fraccional de las ecuaciones de Richards.....	99
4.3	Ecuaciones para flujos no saturado.....	100
4.3.1	La forma mixta de la ecuación de infiltración.....	100
4.3.2	Ecuación de cabezas de presión.....	101
4.4	Medios porosos heterogéneos.....	103
	Referencias.....	107
Conclusiones	108
Apéndice A		110
Apéndice B		113
Glosario		125
Anexo I	Publicaciones	131
Anexo II	Congresos	190

LISTA DE TABLAS

1.1	Ecuaciones para algunos flujos de fluido no Newtoniano.	26
-----	---	----

LISTA DE FIGURAS

J.1	Diferentes representaciones geométricas en el espacio Euclidiano.	XIII
J.2	Ejemplos de medios Irregulares en un espacio fraccional.	XIII
M.1	MAPA MENTAL	XVI
1.1	La curva de Koch se ha utilizado para facilitar la representación del camino tortuoso del flujo [54].	8
1.2	Estudio numérico de la simulación tridimensional del flujo no newtoniano (tipo potencial, Bingham y Casson) a través de un medio poroso [55]	26
2.1	Varios tipos de flujos para las ecuaciones de hidrodinámica fractal.	53
3.1.	Esquema de la simulación de un sistema físico, por ejemplo un yacimiento de hidrocarburos o acuífero.	56
3.2	Esquema del medio poroso fractal con geometría cilíndrica	60
3.3	Esquema del medio poroso fractal con geometría esférica	61
3.4	Flujo radia cilíndrico	64
3.5	a) Curvas de presión en escala Log Log. La dimensión fractal de frontera se mantiene fija y la dimensión fractal de masa se varía. b) Curvas de presión en escala Log Log a tiempos largos.	65
3.6	c) Curvas de presión en escala Log Log. La dimensión fractal de masa y la dimensión fractal de frontera se varían. d) Curvas de presión en escala Log Log a tiempos largos.	65
3.7	Comparación con los modelos de Barker y Yortsos, y los obtenidos en este trabajo. e) Curvas de presión en escala Log Log.. f) Curvas de presión en escala Log Log a tiempos largos.	66
3.8	Flujo radia cilíndrico y esférico	69
3.9	Curvas de presión en escala Log Log. La dimensión fractal de frontera se mantiene fija y la dimensión fractal de masa se varía.	71
3.10	g) Curvas de presión en escala Log Log. Tanto la dimensión fractal de masa como la dimensión fractal de frontera varían. h) Curvas de presión en escala Log Log a tiempos largos.	71
3.11	Comparación con los modelos de Barker y Yortsos, y los obtenidos en este trabajo. i) Curvas de presión en escala Log Log.. j) Curvas de presión en escala Log Log a tiempos largos.	72

MOMENCLATURA

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

Magnitud	Unidad	Símbolo Dimensional
Longitud	Metro (m)	L
Masa	Kilogramo (kg)	M
Tiempo	Segundo (s)	t
Temperatura	Kelvin (K)	T
Cantidad de Sustancia	Mol(mol)	mol

Símbolo	Descripción	Unidades
B_o	Factor de volumen de la formación del aceite	$[L^3/L^3]$
B_g	Factor de volumen de la formación del gas	$[L^3/L^3]$
B_w	Factor de volumen de la formación del agua	$[L^3/L^3]$
c_f	Compresibilidad isotérmica del fluido	$[Lt^2/M]$
C_w	Almacenaje específico del agua	$[1/L]$
d	Dimensión Euclidiana	Sin dimensiones
D_b	Dimensión fractal de frontera	Sin dimensiones
D_m	Dimensión fractal de masa	Sin dimensiones
D_T	Dimensión fractal para los caminos tortuosos del flujo	Sin dimensiones
$e = e(\mathbf{R}, t)$	Energía interna	$[ML^2/t^2]$
\mathbf{D}_m	Difusión/Dispersión de la componente m	$[L^2/t]$
$D_{jl,m}$	Tensor de difusión / dispersión de la componente m	$[L^2/t]$
${}_{mm}d$	Coefficiente de difusión molecular de la componente m	$[L^2/t]$
${}_{mL}d$	Coefficiente de dispersión longitudinal de la componente m	$[L]$
${}_{mT}d$	Coefficiente de dispersión transversal de la componente m	$[L]$
$\mathbf{E}(\mathbf{u})$	Proyección ortogonal a lo largo de la velocidad (\mathbf{u})	Sin dimensiones
F	Variable de masa total	$[M/L^3]$
f_{mo}	Funciones de fugacidad de la m -ésima componente en la fase líquida	$[M/Lt^2]$
f_{mg}	Funciones de fugacidad de la m -ésima componente en la fase vapor.	$[M/Lt^2]$
g	Magnitud de la aceleración de la gravedad	$[L/t^2]$
h	Profundidad ó geometría del pozo (Capítulo 3)	$[L]$

h	Cabeza de presión (Capítulo 4)	[L]
$J_{j,m}$	Difusión/Dispersión de la componente m	$[M/L^2t]$
k_{ij}	Tensor de permeabilidad	$[L^2]$
k	Permeabilidad	$[L^2]$
$k_{r\alpha}$	Permeabilidad relativas de la fase α	$[L^2]$
K	Conductividad hidráulica	$[L/t]$
N_c	Número de especies o componentes químicas	Sin dimensiones
n_c	Número de moles de la m -ésima especie en la mezcla	Sin dimensiones
n	Número total de moles	Sin dimensiones
$p_{kl} = p_{kl}(\mathbf{R}, t)$	Tensor de tensión de viscosidad	$[M/Lt^2]$
p	Presión del fluido	$[M/Lt^2]$
p_o	Presión de la fase aceite	$[M/Lt^2]$
p_w	Presión de la fase agua	$[M/Lt^2]$
p_g	Presión de la fase gas	$[M/Lt^2]$
p_c	Presión capilar	$[M/Lt^2]$
p_{cow}	Presión capilar $p_o - p_w$	$[M/Lt^2]$
p_{cgo}	Presión capilar $p_g - p_o$	$[M/Lt^2]$
q_o	Fuente / sumidero de la fase aceite	$[M/L^3t]$
q_w	Fuente / sumidero de la fase agua	$[M/L^3t]$
q_G	Fuente / sumidero de la componente gas	$[M/L^3t]$
q_o	Fuente / sumidero de la componente aceite	$[M/L^3t]$
q_w	Fuente / sumidero de la componente agua	$[M/L^3t]$
q_{gs}	Fuente / sumidero de la fase gas a condiciones estándar	$[M/L^3t]$
q_{os}	Fuente / sumidero de la fase aceite a condiciones estándar	$[M/L^3t]$
q_{ws}	Fuente / sumidero de la fase agua a condiciones estándar	$[1/t]$
Q	Tasa de producción de flujo	$[L^3/t]$
R	Norma Euclidiana en espacio tres dimensional	[L]
\mathfrak{R}_{so}	Proporción de disolver gas/aceite	$[L^3/L^3]$
\mathfrak{R}_{go}	Proporción gas/aceite	$[L^3/L^3]$
\mathfrak{R}_{gl}	Proporción gas/liquido	$[L^3/L^3]$
S_g	Saturación de la fase gas	Fracción
S_o	Saturación de la fase aceite	Fracción

S_w	Saturación de la fase agua	Fracción
$T = T(\mathbf{R}, t)$	Campo de temperatura	[T]
\mathbf{T}_g	Transmisibilidad de la fase gas	[L ³ t/M]
\mathbf{T}_a	Transmisibilidad de la fase aceite	[L ³ t/M]
\mathbf{T}_w	Transmisibilidad de la fase agua	[L ³ t/M]
$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$	Campo de la velocidad	[L/t]
\mathbf{u}_g	Velocidad de la fase gas	[L/t]
\mathbf{u}_o	Velocidad de la fase aceite	[L/t]
\mathbf{u}_w	Velocidad de la fase agua	[L/t]
V_{Gs}	Volumen de la componente gas a condición estándar	[L ³]
V_{Os}	Volumen de la componente aceite a condición estándar	[L ³]
V_p	Volumen del espacio del poro	[L ³]
W_o	Peso molecular del aceite	[M/mol]
W_G	Peso molecular del gas	[M/mol]
Z	Profundidad del acuífero	[L]
γ_g	Gravedad en la fase gas	[M/L ² t ²]
γ_o	Gravedad en la fase aceite	[M/L ² t ²]
γ_w	Gravedad en la fase agua	[M/L ² t ²]
μ	Viscosidad del fluido	[M/Lt]
μ_w	Viscosidad del agua	[M/Lt]
μ_g	Viscosidad de la fase gas	[M/Lt]
μ_o	Viscosidad de la fase aceite	[M/Lt]
μ_w	Viscosidad de la fase agua	[M/Lt]
λ_{\max}	Diámetro máximo del poro.	[L]
λ_{\min}	Diámetro mínimo del poro	[L]
$\rho(\mathbf{R}, t)$	Densidad	[M/L ³]
ρ_g	Densidad de la fase gas	[M/L ³]
ρ_o	Densidad de la fase aceite	[M/L ³]
ρ_w	Densidad de la fase agua	[M/L ³]
ρ_{Go}	Densidad parcial de la componente gas en la fase aceite	[M/L ³]
ρ_{Oo}	Densidad parcial de la componente aceite en la fase aceite	[M/L ³]
ρ_{Os}	Densidad del aceite a condiciones estándar	[M/L ³]
ρ_{Ws}	Densidad del agua a condiciones estándar	[M/L ³]
ρ_{Gs}	Densidad del gas a condiciones estándar	[M/L ³]

τ	Tortuosidad	Sin dimensiones
ξ	Densidad molar del fluido	$[\text{mol/L}^3]$
ξ_m	Densidad molar de la componente m	$[\text{mol/L}^3]$
θ	Contenido volumétrico del agua, o simplemente la Humedad de suelo	Sin dimensiones
ϕ	Porosidad	Fracción

RESUMEN

Partiendo de las leyes de conservación de la hidrodinámica para medios fractales en tres dimensiones, en este trabajo de tesis, se hace un desarrollo de modelos físico-matemáticos para flujos multifásicos en medios porosos con estructura fractal. En general se encontraron modelos tales como: el comportamiento de la presión para pruebas de pozos, modelos de flujos en dos fases, el modelo de aceite negro y de composición. Estos modelos pueden tener grandes aplicaciones en la simulación de yacimientos que es predecir el rendimiento futuro del yacimiento y encontrar los medios de optimizar la recuperación de los hidrocarburos bajo varias condiciones de operación. Por otra parte, los modelos de aguas subterráneas son una herramienta útil en la simulación de acuíferos, aunque se han obtenido buenos resultados con los modelos Euclidianos usados para este fin, estos modelos se pueden mejorar aún más. Por esta razón, en esta tesis, también se obtuvo la generalización para medios porosos con estructura fractal de las ecuaciones de Richards para los procesos dinámicos del flujo del agua subterránea.

ABSTRACT

From the conservation laws of hydrodynamics for fractal means three-dimensional, in this thesis, is a development of physical-mathematical models for multiphase flow in porous media with fractal structure. It is generally found models such as: pressure-transient behavior for well testing, flow models in two phases, the model of black oil and compositional. These models may have great applications in reservoir simulation is to predict future performance of the reservoir and find means of optimizing the recovery of hydrocarbons under various operating conditions. Moreover, groundwater models are a useful tool in simulating groundwater, although good results were obtained with the models Euclidian used for this purpose, these models can be further improved. For this reason, in this thesis, was also obtained the generalization in porous media with fractal structure of the Richards equation for the dynamic processes of groundwater flow.

INTRODUCCIÓN

El flujo de fluidos en medios porosos ha tenido mucho interés en las últimas décadas, debido a su importancia en la ciencia e ingeniería tales como en geofísica, ciencias de la tierra, flujos de agua subterránea, la propagación de residuos peligrosos, ingeniería/recuperación del petróleo, las tecnologías de filtración, manufactura de compuestos fibrosos, biofísica (tejidos y órganos), entre otros [1-3]. Se ha demostrado que la porosidad y fracturas de formaciones geológicas exhiben características fractales bajo muchas escalas de longitud, desde el rango de escala microscópica hasta escalas de campo [3-10]. También se ha encontrado que la naturaleza fractal del medio influye en sus propiedades de transporte [9-25]. En consecuencia, ha habido muchos intentos de mejorar las ecuaciones hidrodinámicas del flujo de fractal [26-70]. Estos trabajos exploran la invariancia de escala del medio fractal a través del espacio y/o la dependencia de escala de la permeabilidad hidráulica [26-44], o por el uso de las ecuaciones de difusión anómala para modelar el flujo de fractal [45-67].

Un método estándar para caracterizar las propiedades hidráulicas del medio heterogéneo es el análisis de presión transitoria de datos de pruebas de pozos [1, 2, 26]. Un análisis general se basa en la ley de Darcy que relaciona la velocidad del flujo con el gradiente de presión y una permeabilidad hidráulica que a veces depende del espacio y del tiempo [3, 26]. De esta manera, haciendo uso de métodos de lattice-gas para simular el flujo de fluidos en sistemas con superficies fractales, los autores de [13] han encontrado que la permeabilidad de una sola fractura aumenta si la interfase de la fractura tiene características fractales (ver también [9, 22-25]), mientras que la permeabilidad de los medios porosos disminuye cuando la dimensión fractal del espacio de los poros disminuye [27] (véase también las referencias [14-16, 28-31]).

Por otra parte, Barker [45] ha propuesto una ecuación de presión transitoria que introduce la dimensión fraccional de flujo, manteniendo las suposiciones de flujo radial y la homogeneidad del medio fracturado. Sin embargo, la ecuación de la presión transitoria de Barker se hace muy popular, especialmente para las aplicaciones prácticas (ver referencias [46-51]). Más tarde, basándose en el estudio de O'Shaughnessy y Procaccia [11] sobre difusión fractal anómala, Chang y Yortsos [52] han sugerido la ecuación de flujo fractal radial que también toma en cuenta la variación espacial de la permeabilidad hidráulica. En consecuencia, en el modelo [52] el flujo

fractal se caracteriza por dos dimensiones fractales independientes: la dimensión fractal de masa de la red de la fractura D_n y la dimensión fractal espectral $d_s = 2D_n/(1+\theta)$, donde $\theta \geq 0$ es el exponente espectral de la red, también llamado el exponente de transporte anómalo [17]. Alternativamente, una memoria de largo plazo de la permeabilidad hidráulica se puede tomar en cuenta haciendo uso de la derivada del tiempo fraccional de Caputo en la ecuación de difusión [53,54]. En la práctica, el orden de la derivada del tiempo fractal (α) se utiliza como parámetro para ajustar los datos de pruebas experimentales [54]. Además, los modelos [45, 52-54] fueron ampliamente utilizados para describir la presión transitoria radial para flujo de petróleo y agua en los yacimientos fractales (ver [46-51, 55-64]). Hubo algunos intentos de generalizar las ecuaciones transitorias de presión de flujo radial fractal [45,52] para el flujo fractal en dos y tres sistemas de dimensiones [65-67]. Sin embargo, la validez de estos intentos es cuestionable, porque el cumplimiento de las leyes de conservación no ha sido comprobado.

Desde nuestro punto de vista [80], un enfoque más prometedor es el de obtener modelos fisico-matemáticos para flujos multifásicos de la conservación de la masa, la conservación del momento y la conservación de la energía del flujo fractal con una ecuación constitutiva del fluido conocida.

La presente tesis esta comprendida de cuatro capítulos, el estado del arte del flujo en medios porosos con estructura fractal se revisa en el capítulo 1. Después para describir los procesos hidrodinámicos en medios fractales, en el capítulo 2, se revisa el trabajo de Tarasov[69], quien desarrolla la generalización fraccional de las ecuaciones de conservación de la masa, la conservación del momento, y la conservación de la energía. En la presente tesis aplicamos la hidrodinámica fractal para obtener modelos fisico-matemáticos para flujos multifásicos en medios con porosidad fractal para aplicaciones en simulación de yacimientos de petróleo (ver capítulo 3 de la tesis) y de acuíferos (ver capítulo 4 de la tesis). Estos modelos no han sido reportados en la literatura. Finalmente damos las conclusiones de nuestro trabajo.

Referencias

- [1] Ahmed T. and McKinney P. D., *Advanced Reservoir Engineering* (Elsevier, New York) 1989.
- [2] Chen Zh, Huan G. and Ma Y., *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media* (SIAM, Philadelphia) 2006.
- [3] Sahimi M., *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rocks* (VCH, New York) 1995.
- [4] Sahimi M., *Rev. Modern Phys.*, **65** (1993) 1393.
- [5] Cherepanov G. P., Balankin A. S. and Ivanova V. S., *Eng. Fract. Mech.*, **51** (1995) 997.
- [6] Balankin A. S., *Eng. Fract. Mech.*, **57** (1997) 135.
- [7] Brid N. R. A., Perrier E. and Rieu M., *Eur. J. Soil Sci.*, **51** (2000) 55.
- [8] Oleschko K., Korvin G., Figueroa B., Vuelvas M. A., Balankin A. S., Flores L. and Carreon D., *Phys. Rev. E*, **67** (2003) 041403.
- [9] Schmittbuhl J., Steyer A., Jouniaux L., Toussaint R., *Int. J. Rock Mechanics & Mining Sci.*, **45** (2008) 422.
- [10] Köhne J. M., Köhne S. and Šimůnek J., *J. Contaminant Hydrology*, **104** (2009) 4.
- [11] O'Shaughnessy B. and Procaccia I., *Phys. Rev. A*, **32** (1985) 3073.
- [12] Metzler R., Glockle W. G. and Nonnenmacher T. F., *Physica A*, **211** (1994) 13.
- [13] Zhang X., Knackstedt M. and Sahimi M., *Physica A*, **233** (1996) 835.
- [14] Andrade J. S., Almeida M. P., Mendes Filho J., Havlin S., Suki B. and Stanley H. E., *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 3901.
- [15] Almeida M. P., Andrade J. S., Buldyrev S. V., Cavalcante F. S. A., Stanley H. E. and Suki B., *Phys. Rev. E*, **60** (1999) 5486.
- [16] Andrade J. S., Costa U. M. S., Almeida M. P., Makse H. A. and Stanley H. E., *Phys. Rev. Lett.*, **82** (1999) 5249
- [17] Metzler R. and Klafter J., *Phys. Rep.*, 339 (2000) 1.
- [18] Havlin S., Ben-Avraha D., *Adv. Phys.*, **51** (2002) 187.
- [19] Balankin A. S., Ortega A. B. and Matamoros D. M., *Phil. Mag. Lett.*, **80** (2000) 503.
- [20] Balankin A. S., Susarrey O. and Márquez J., *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2003) 096101.
- [21] Balankin A. S., Paredes R. G., Susarrey O., Morales D. and Castrejon F., *Phys. Rev. Lett.*, **96** (2006) 056101.
- [22] Mourzenko V. V., Thovert J.-F. and Adler P. M., *Phys. Rev. E*, 59 (1999) 4265.
- [23] Drazer G. and Koplik J., *Phys. Rev. E*, **62** (2000) 8076.
- [24] Glass R. J., Rajaram H. and Detwiler R. L., *Phys. Rev. E*, **68** (2003) 061110.
- [25] Yan Y. and Koplik J., *Phys. Rev. E*, **77** (2008) 036315.
- [26] Delay F., Kaczmaryk A. and Ackerer P., *Adv. Water Res.*, **30** (2007) 314.
- [27] Makse H. A., Andrade J. S. and Stanley H. E., *Phys. Rev. E*, **61** (2000) 583.
- [28] Makse H. A., Davies G. V., Havlin S., Ivanov P. Ch., King P. R. and Stanley H. E., *Phys. Rev. E* 54 (1996) 3129.
- [29] Jiménez-Hornero F. J., Gutiérrez de Ravé E., Giráldez J. V. and Laguna A. M., *Geoderma*, **150** (2009) 196.
- [30] Coleman S. W. and Vassilicos J. C., *Phys. Rev. Lett.*, **100** (2008) 035504.
- [31] Matyka M., Khalili A. and Koza Z., *Phys. Rev. E*, **78** (2008) 026306

- [32] Hilfer R. and Manwart C., *Phys. Rev. E*, **64** (2001) 021304.
- [33] Zaks M. A. and Straube A. V., *Phys. Rev. Lett.*, **89** (2002) 244101.
- [34] Gioia G. and Bombardelli F. A., *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002) 014501.
- [35] Wang X.-H., Liu Zh.-F., Wu Q.-S. and Li B., *Physica A*, **311** (2002) 320.
- [36] Yu B. and Cheng P., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **45** (2002) 2983.
- [37] Vandersteen K., Carmeliet J. and Feyen J., *Transport in Porous Media*, **50** (2003) 197.
- [38] Yu B., Li J., Li Zh. and Zou M., *Int. J. Multiphase Flow*, **29** (2003) 1625.
- [39] Guarracino L., *J. Hydrology*, **324** (2006) 154.
- [40] Chen J., Yu B., Xu P. and Li Y., *Phys. Rev. E*, **75** (2007) 056301.
- [41] Bogdanov I. I., Mourzenko V. V., Thovert J.-F. and Adler P. M., *Phys. Rev. E*, **76** (2007) 036309.
- [42] Wu J. and Yu B., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **50** (2007) 3925.
- [43] Zhang L. Zh., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **51** (2008) 5288.
- [44] Xu P., Yu B., Qiu Sh. and Cai J., *Physica A*, **387** (2008) 6471.
- [45] Barker J. A., *Water Resour. Res.*, **24** (1988) 1796.
- [46] Bangoy L. M., Bidaux P., Drogue C., Plé gat R. and Pistre S., *J. Hydrology*, **138** (1992) 77.
- [47] Bangoy L. M. and Drogue C., *J. Hydrology*, **158** (1994) 47
- [48] Leveinen J., *J. Hydrology*, **234** (2000) 116.
- [49] Jourde H., Pistre S., Perrochet P. and Drogue C., *Adv. Water Res.*, **25** (2002) 371.
- [50] Walker D. D. and Roberts R. M., *Water Resour. Res.*, **39** (2003) 1349.
- [51] Cloot A. and Botha J. F., *Water SA*, **32** (2006).
- [52] Chang J. and Yortsos Y. C., *SPE Formation Evaluation*, **5** (1990) 31.
- [53] Berkowitz B., Klafter J., Metzler R. and Scher H., *Water Resour. Res.*, **38** (2002) 1191.
- [54] Tian J. and Tong D., *J. Hydrodynamics B*, **18** (2006) 287.
- [55] Acuna J. A., Ershaghi I. and Yortsos Y. C., *SPE Formation Evaluation*, **10** (1995) 173.
- [56] Acuna, J. A. and Yortsos Y. C., *Water Resour. Res.*, **31** (1995) 527.
- [57] Pachepsky Y. and Timlin D., *J. Hydrology*, **204** (1998) 98.
- [58] Herrick M. G., Benson D. A., Meerschaert M. M. and McCall K. R., *Water Resour. Res.*, **38** (2002) 1227.
- [59] Campos D., Fort J. and Méndez V., *Europhys. Lett.*, **68** (2004) 769.
- [60] Bernard S., Delay F. and Porel G., *J. Hydrology*, **328** (2006) 647.
- [61] Frippiat Ch. C. and Holeyman A. E., *J. Hydrology*, **362** (2008) 150.
- [62] Zhang Y. and Tong D., *J. Hydrology*, **20** (2008) 306.
- [63] Wang S., Ma! [, Yao H., *Chem. Eng. Sci.*, **64** (2009) 1318.
- [64] Lei Zh.-D., *J. Hydrodynamics B*, **19** (2007) 494.
- [65] Chon B. and Choi Y.-S., *Mineral ad Energy Resour. Korea*, **34** (1997) 420.
- [66] Chon B. and Choi Y.-S., *Korean J. Chem. Eng.*, **18** (2001) 382.
- [67] Lemaire R. and Adler P. M., *Transp. Porous Med.*, **5** (1990) 325.
- [68] Tarasov V. E., *Phys. Lett. A*, **336** (2005) 167.

- [69] Tarasov V. E., *Ann. Phys.*, **318** (2005) 286.
- [70] Wheatcraft S. W. and Meerschaert M. M., *Adv. Water Res.*, **31** (2008) 1377.
- [71] Harrison, J. and Norton, A., *Duke Math. J.*, **67** (1992) 575.
- [72] Harrison J., *Bull. Am. Math. Soc.*, **29** (1993) 235.
- [73] Harrison J., *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32** (1999) 5317.
- [74] Borodich F. M. and Volovikov A. Yu., *Proc. R. Soc. Lond. A*, **456** (2000) 1.
- [75] Lyons T. J. and Yam P. S. C., *J. Math. Pures Appl.*, **85** (2006) 38.
- [76] Meerschaert M. M., Mortensen J. and Wheatcraft S. W., *Physica A*, **367** (2006) 181.
- [77] Huikun J., Zheng G., *J. Math. Anal. Appl.*, **355** (2009) 164.
- [78] Tarasov V. E., *Ann. Phys.*, **323** (2008) 2756.
- [79] Drazer G., Auradou H., Koplik J. and Hulin J. P., *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2004) 014501.
- [80] A. S. Balankin and B. A. Espinoza Elizarraraz, Pressure-transient behavior of fractal flow – *Europhysics Journal*, in press (2009).
- [81] Yu, B. M., 2008, Analysis of Flow in Fractal Porous Media, *Appl. Mech. Rev.*, **61**, 5, 050801(19pages).

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

La enorme complejidad de los medios porosos y/o fracturas, han provocando la incertidumbre de flujo, presión y distribución de las propiedades de transporte. Investigaciones teórica sobre el flujo, el calor y la transferencia de masa en los medios porosos ha recibido mayor atención durante las últimas tres décadas. Esto se debe a la importancia de esta área de investigación en muchas aplicaciones de ingeniería. Modelos multifásicos convencionales de flujo para medios porosos sólo pueden predecir el flujo y las propiedades de transporte para medios simples y regulares, pero no en medios porosos irregulares / desordenada. Entonces la pregunta natural que surge es: ¿qué pasa con las "leyes que gobiernan al flujo de fluidos" cuando el medio por el cual el fluido transita es en realidad fraccionario, irregular/desordenado? La respuesta a esta pregunta aún sigue abierta, sin embargo, muchos esfuerzos de investigadores se han estado desarrollando por entender las leyes que relacionan el flujo de fluidos a través de los medios fraccionados. Se ha demostrado que la geometría fractal puede tener un potencial muy importante en el análisis de propiedades de flujo y transporte en medios porosos. Nuestra propuesta en este trabajo de tesis es desarrollar modelos matemático para flujos multifásicos en medios porosos con estructura fractal o/y fracturas con superficies fractales. Estos modelos se pueden utilizar para simulación en yacimientos de hidrocarburos y acuíferos.

JUSTIFICACIÓN

La geometría Euclidiana describe objetos ordenados tales como puntos, curvas, superficies, y cubos usando dimensiones enteras 0, 1, 2, y 3, respectivamente ver figura J.1. Sus medidas son invariantes con respecto a la unidad de medida utilizada.

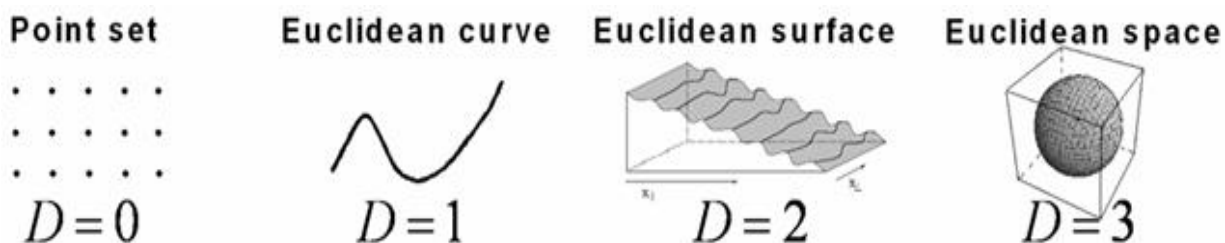


Figura J.1 Diferentes representaciones geométricas en el espacio Euclidiano.

Sin embargo, numerosos objetos encontrados en la naturaleza, tales como las superficies ásperas, las líneas de costa, montañas, ríos, lagos, e islas, son desordenados e irregulares, y no siguen la descripción Euclidiana (figura J.2), debido a mediciones dependientes de la escala.



Figura J.2. Ejemplos de medios Irregulares en un espacio fraccional.

Un fractal son objetos, como los de la figura J.2, que poseen estructura, fragmentada o irregular, a cualquier escala y contiene copias de si mismo, las dimensiones de estos objetos no son enteras y se le conoce como la dimensión de Hausdorff o de simplemente dimensión fractal.

Un yacimiento o un acuífero son altamente heterogéneos, rugosos con fracturas que contiene un sistema de juntas, grietas, microgrietas, fallas y zonas de cizalla distribuidas aleatoriamente, es decir, es un sistema altamente complejo. Para resolver este problema se ha demostrado que la teoría fractal se puede aplicar para expresar geometrías complejas e irregulares utilizando auto-similaridad, la propiedad de que cualquier fenómeno muestra el mismo comportamiento independientemente de la escala. También la teoría fractal puede tener un potencial muy importante en el análisis de propiedades de flujo y transporte en el medio poroso. Los medios porosos, como el suelo y la roca arenisca en yacimientos de petróleo, consisten de numerosos poros irregulares de distintos tamaños que abarcan varios órdenes de magnitud en la escalas de longitud. El tamaño y las fronteras de los poros, en el medio poroso presentan características fractales. Por lo tanto, el poro en el medio poroso desempeña un papel notable en el flujo de fluidos en el medio. Afortunadamente, la naturaleza fractal de los poros puede darnos una mejor comprensión de los mecanismos de flujo y las propiedades de transporte en medios porosos. Entonces utilizando las poderosas herramientas de la teoría fractal en esta tesis se establece el enfoque matemático de los procesos dinámicos que ocurren en un sistema altamente complejo como lo son el yacimiento de petróleo y acuíferos.

OBJETIVO GENERAL

El objetivo de la presente tesis es desarrollar modelos físico-matemático para flujos multifásicos en medios porosos con estructura fractal o/y fracturas con superficies fractales, para aplicaciones en ingeniería del petróleo y aguas subterráneas.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

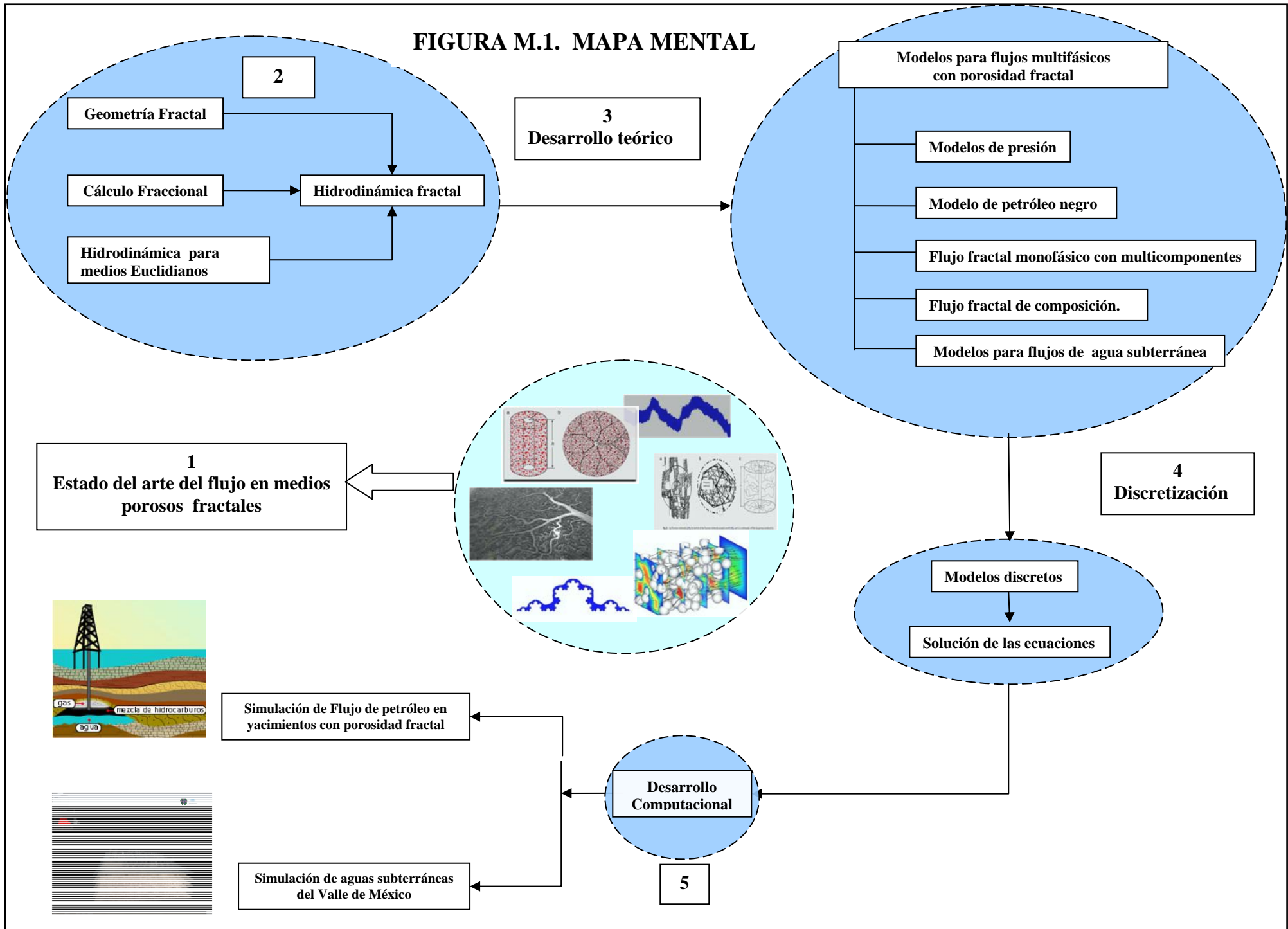
Aplicar las leyes de la hidrodinámica fractal para:

1. Obtener la ecuación de difusión o presión transiente para flujo fractal en tres dimensiones, la cual es considerada como una de las expresiones matemáticas más importantes y que se puede utilizar en ingeniería del petróleo.
 - Para flujo fractal radial con geometría cilíndrica y esférica obtener la solución analítica y comparar con otros modelos de flujo.
2. Obtener modelos matemáticos para una amplia variedad de flujos de fluidos en medios con porosidad fractal: incluyendo dos fases, aceite negro (o de tres fases), de flujo monofásico con multicomponentes y de composición.
3. Establecer el enfoque matemático de modelos de difusión no lineal de flujos de agua subterránea en medios con porosidad fractal.

METODOLOGÍA

Basándonos en la metodología de sistemas duros, para llevar a cabo la presente tesis, primero se analizó y se revisó el estado del arte de aplicar las teorías y técnicas de la geometría fractal en el campo del flujo en medios porosos fractales. Segundo, para hacer un análisis de las propiedades de transporte de flujos en medios porosos fractales, se analizaron a profundidad las ecuaciones de hidrodinámica para medios fractales, es decir, la generalización fractal de las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler. Tercero, a partir de estos modelos fractales, se hizo un desarrollo teórico para obtener modelos para flujos multifásicos en medios fractales tales como la ecuación de presión, modelo de petróleo negro, ecuaciones de infiltración de agua en el suelo. Los modelos de hidrodinámica para medios fractales y los desarrollados en el tercer punto, pueden tener una amplia de aplicación en la ciencia e ingeniería tales como en geofísica, flujos de agua subterránea, ingeniería del petróleo, manufactura de compuestos fibrosos, biofísica (tejidos y órganos). Para trabajos a futuro los modelos encontrados en esta tesis se pueden resolver numéricamente haciendo uso de esquemas numéricos como diferencias finitas, volumen finito o elemento finito, y posteriormente usando algoritmos computacional se puede simular un yacimiento petrolero o acuífero con estructura fractal. Ver figura M.1.

FIGURA M.1. MAPA MENTAL



APORTACIONES

En este trabajo de tesis por primera vez se desarrollaron modelos matemático para flujos multifásicos en medios porosos con estructura fractal o/y fracturas con superficies fractales. Estos modelos se pueden utilizar en la industria petrolera y en acuíferos.

Cabe mencionar que los modelos reportados en la presente tesis fueron parte de los entregables en los siguientes proyectos:

PEMEX-Exploración y Producción



“Desarrollo de un Prototipo de Simulador de Flujo de Petróleo en Yacimientos con Geometría Fractal” con clave 420409842

Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal



“Desarrollo de Modelos de Procesos Geofísicos Basados en la Mecánica de sistemas complejos. Aplicaciones para Programas de Monitoreo y Previsión de Riesgos en el Valle de México” con clave PICCT08-38

Y se implementaran en los proyectos en curso CONACYT-SENER-Hidrocarburos:

Instituto Mexicano del Petróleo



“Fracturamiento hidráulico de pozos usando materiales inteligentes”

TEMPLE *“Modelos Fractales para la Caracterización de Yacimientos en Sistemas Heterogéneos de Difusión Lenta OrionEarth (Oil Reservoir Integration on Earth)”*; con número de registro 143927

Por otra parte, a lo largo de mis estudios de doctorado y de este trabajo de tesis, surgieron cuatro artículos internacionales de investigación: 2 aceptados y 2 en revisión. Ver anexo I.

CAPÍTULO 1

ESTADO DEL ARTE DEL FLUJO EN MEDIOS POROSOS CON ESTRUCTURA FRACTAL

En años recientes, el flujo y las propiedades macroscópicas de transporte en medios porosos han recibido considerable atención en la ciencia y la tecnología, por ejemplo, en la industria petrolera y recuperación de hidrocarburos [1-15], en la fabricación de compuestos fibroso [16-27], en ciencias de la tierra [28-39] y en sistemas biológicos como tejidos y órganos [40-47], entre otros. Un medio poroso se define generalmente como una estructura que consta de poros con diferentes tamaños, y estos poros están distribuidos aleatoriamente en el espacio del sólido. Se ha demostrado que algunos medios porosos naturales y sintéticos son fractales, y estos medios se pueden llamar medios porosos con estructura fractal. En este capítulo, basado en [1], resume las teorías, métodos, modelos matemáticos, logros, sobre la aplicación de la teoría y las técnicas de la geometría fractal en el campo del flujo en medios porosos fractales. La geometría fractal tiene un potencial muy importante en el análisis del flujo y las propiedades de transporte en los medios porosos fractales. En el capítulo 2 hablaremos acerca de los modelos hidrodinámicos para medios fractales [2].

El flujo y las propiedades de transporte macroscópicas en medios porosos, tales como la resistencia al flujo, la permeabilidad, y la conductividad de dispersión pueden estar estrechamente relacionados con las microestructuras del medio. Estas propiedades de transporte se pueden determinar por: Mediciones experimentales [1-3,7,11,12,16-18,20-24], simulaciones numéricas tales como lattice gas (LG) [48,49], el método de Lattice Boltzmann (MLB) [26,50-60], la aproximación medio eficaz [61,62], métodos de elementos finitos [63-65], la reconstrucción de medios porosos reales [8,9,66-71], simulación de Monte Carlo [14,15,72], así como de soluciones analíticas [1,6,7,11,22-24,34,37,46,47]. Darcy [73] llevó a cabo las primeras mediciones experimentales para el flujo de líquido de una sola fase a través de un medio poroso. Desde entonces, numerosos experimentos sobre el flujo y las propiedades macroscópicas de transporte se llevaron a cabo tanto para el flujo de una sola fase y multifase en medios porosos, y muchas correlaciones empíricas fueron reportadas [1,4,5,7,8]. Sin embargo, los logros teóricos

obtenidos convencionalmente hasta ahora sólo podían predecir el flujo y las propiedades macroscópicas de transporte del medio poroso con microestructuras simples y regulares, pero no en situaciones de medios porosos irregulares y desordenados. El problema se puede atribuir a la enorme complejidad del medio poroso, con estructura y distribución al azar del poro, y capilaridad tortuosa azarosa, que causan las incertidumbres del flujo, presión y distribución de las propiedades de transporte en el medio. Con el rápido desarrollo de las computadoras y los métodos computacionales, numerosos estudios se han centrado en las simulaciones de flujo en el medio poroso. En particular, el MLB, ha sido ampliamente utilizado para simular los flujos individuales y multifásico a través del medio poroso asociadas a la recuperación mejorada de petróleo. El MLB es particularmente útil para el flujo y transporte en medios porosos con condiciones de geometría de frontera compleja, tales como una variedad de poros y fracturas con distribución amplia de tamaños y formas. Con este método, los campos de velocidad en el medio poroso son resueltos, también se pueden encontrar la resistencia al flujo, tortuosidad, así como propiedades hidráulicas, tales como la permeabilidad. Recientemente, el MLB, junto con técnicas de visualización y la imagen digital computacional [8,9, 67-71] se utiliza para simular el flujo y el transporte en medios porosos reales. Sin embargo, la exactitud del MLB se ha debatido [52,74]. Con el fin de obtener una mejor comprensión de los mecanismos para el flujo en medios porosos, es deseable la solución analítica para el flujo y las propiedades de transporte en el medio poroso pero se convierte en un desafío difícil.

Los poros en el medio poroso real pueden ser muy grandes (en el orden de metros) o muy pequeños (en el orden de los nanómetros), y pueden estar en tres dimensiones y algunos de ellos están conectados. Los poros se pueden formar debido a reacciones físicas y químicas. Las formas de los poros suelen ser muy diferentes dependiendo de los materiales, tales como pantalla de acero inoxidable, chips de computadoras y móviles, espuma de poliuretano, preformas fibrosa, piedra arenisca en los embalses de agua y aceite y los suelos, etc. A pesar de la extrema complejidad del medio poroso real, un modelo macroscópico equivalente es posible a condición de que existe una separación de escalas entre la longitud característica de heterogeneidad y una longitud característica macroscópica relacionada con la muestra investigada macroscópicamente y / o el fenómeno físico a escala macroscópica. Los medios porosos fractales pueden satisfacer

esta condición y las propiedades macroscópicas de transporte en el medio por lo tanto se pueden estudiar con la teoría de la geometría fractal.

Por otro lado, Katz y Thompson [76], fueron los primeros en presentar la evidencia experimental que indica que los poros de un conjunto de muestras de piedra arenisca porosa son fractales y auto similares bajo tres a cuatro órdenes de magnitud en la longitud que se extiende desde 10 \AA a $100 \text{ }\mu\text{m}$. Los trabajos reportados en [4, 8, 99] y el libro [5] dan una revisión de la teoría de la percolación y fenómenos críticos en medios porosos.

A continuación se revisan los modelos de flujo y transporte macroscópicas en medios porosos con estructura fractal, en los que los poros están conectados para formar canales o capilares irregulares o tortuosos, a través del cual los fluidos pueden fluir de un lado a otro. Los poros aislados son llamados poros muertos y no contribuyen al flujo de fluido. Los poros en el medio poroso son por lo general no uniforme en tamaño y se distribuyen al azar, y siguen las leyes de potencia fractales. Las bases teóricas para el análisis fractal de flujo y transporte basado en los características fractales del medio poroso también se revisan.

1.1 Propiedades estadísticas de los poros en el medio poroso.

La distribución acumulada del tamaño de los poros en un medio poroso sigue la siguiente ley de escalamiento fractal,

$$N(L \geq \lambda) = \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda} \right)^{D_m}. \quad (1.1)$$

donde N es el número total de poros de tamaño L mayor o igual al diámetro del poro λ , y D_m es la dimensión fractal para el espacio de poro. La Ec. (1.1) es la base del método de box-counting (ó conteo de cajas) [8]. Para dos dimensiones, en la Ec. (1), D_m varia de $0 < D_m < 2$ y en tres dimensiones $0 < D_m < 3$, y λ_{\max} es el diámetro máximo del poro. En general, el diámetro mínimo del poro λ_{\min} es mucho mas pequeño que el tamaño del poro máximo λ_{\max} , y la razón

$\lambda_{\min}/\lambda_{\max}$, para medios porosos en general, es menor que a dos órdenes de magnitud. La Ec. (1.1) también implica que hay solamente un poro mas grande en un conjunto de poros fractales.

Diferenciando la Ec. (1.1) con respecto a λ se obtiene el número de poros cuyos tamaños están dentro del rango infinitesimal λ a $\lambda + d\lambda$,

$$-dN = D_m \lambda_{\max}^{D_m} \lambda^{-(D_m+1)} d\lambda \quad (1.2)$$

El signo negativo en la Ec. (1.2) implica que el número poros decrece con el aumento en el diámetro del poro, y $-dN > 0$. La Ec. (1.1) describe la relación de escalamiento del número de poros acumulativo. El numero total de poros, desde el diámetro más pequeño λ_{\min} al diámetro más grande λ_{\max} , se puede obtener de la Ec. (1.1) como

$$N_t(L \geq \lambda_{\min}) = \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right)^{D_m} \quad (1.3)$$

Dividiendo Ec. (1.3) por Ec. (1.4) se obtiene

$$-\frac{dN}{N_t} = D_m \lambda_{\min}^{D_m} \lambda^{-(D_m+1)} d\lambda = f(\lambda) d\lambda \quad (1.4a)$$

donde

$$f(\lambda) = D_m \lambda_{\min}^{D_m} \lambda^{-(D_m+1)} \geq 0 \quad (1.4b)$$

es la función de densidad de probabilidad, donde $f(\lambda)$ satisface la siguiente relación de normalización:

$$-\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{dN}{N_t} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} f(\lambda) d\lambda = 1 - \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right)^{D_m} \equiv 1 \quad (1.5)$$

Es claro que la Ec. (1.5) se cumple si y solo si se satisface

$$\left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)^{D_m} \cong 0, \quad (1.6)$$

La Ecuación. (1.6) implica que $\lambda_{\min} \ll \lambda_{\max}$ se debe satisfacer para el análisis fractal del medio poroso. Sin embargo, la Ec. (1.6) no implica que λ_{\min} debe tender a cero. La Ecuación (1.6) se puede considerar como un criterio si un medio poroso puede ser caracterizado por la geometría fractal y técnicas fractales. En general, en un medio poroso, $\lambda_{\min} \ll \lambda_{\max} \sim 10^{-2}$; entonces la ecuación (1.6) se cumple aproximadamente para un medio poroso. La geometría fractal y técnicas fractales se pueden usar para analizar y caracterizar al medio poroso.

Partiendo de la función de densidad de probabilidad $f(\lambda) = D_m \lambda_{\min}^{D_m} \lambda^{-(D_m+1)}$, se tienen algunas propiedades estadísticas del medio poroso, por ejemplo, el diámetro promedio del poro

$$\lambda_{prom} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \lambda f(\lambda) d\lambda = \frac{D_m}{D_m - 1} \lambda_{\min} \left[1 - \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)^{D_m-1} \right]. \quad (1.7)$$

La Ecuación (1.7) muestra la relación entre la dimensión fractal, el diámetro promedio del poro, y los diámetros máximo y mínimo de los poros.

Si la Ec. (1.5) se expresa como

$$R(\lambda) = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda} f(\lambda) d\lambda = 1 - \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}\right)^{D_m}, \quad (1.8)$$

ó

$$1 - R = \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}\right)^{D_m}, \quad (1.9)$$

de la Ec. (1.9) el diámetro del poro λ se puede expresar como

$$\lambda = \frac{\lambda_{\min}}{(1-R)^{1/D_m}} = \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right) \frac{\lambda_{\max}}{(1-R)^{1/D_m}}, \quad (1.10)$$

donde $\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$. La ecuación (1.10) es un modelo de probabilidad para el tamaño de los poros. Para el i -ésimo poro o tubo capilar elegido aleatoriamente, la Ec. (1.10) se puede escribir como

$$\lambda_i = \frac{\lambda_{\min}}{(1-R_i)^{1/D_m}} = \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right) \frac{\lambda_{\max}}{(1-R_i)^{1/D_m}}, \quad (1.11)$$

donde R_i está en el rango de 0-1 y $i=1,2,3,\dots$. La ecuación (1.11) se puede usar para modelar el tamaño del poro en un medio poroso. La Ec. (1.10) y Ec. (1.11) presentan un modelo explícito para la distribución del tamaño del poro en el medio poroso. Estas técnicas pueden tener un interés general en el análisis del transporte tal como térmico y eléctrico en el medio poroso fractal.

1.2 La tortuosidad de los caminos de flujo en medios porosos.

Las características del transporte de materiales en un medio poroso, tales como la permeabilidad hidráulica, la conductividad eléctrica, la difusividad, y la dispersión-conductividad, han recibido mucha atención debido a muchos problemas sin resolver en la ciencia y aplicaciones en ingeniería. Estos parámetros de transporte macroscópicos suelen estar relacionados con la tortuosidad de las trayectorias (vías) de flujo seguido por el material transportado. La definición de tortuosidad es dada por

$$\tau = L_i/L, \quad (1.12)$$

donde L_i y L son la longitud real de la trayectoria del flujo y la longitud recta o el espesor de una muestra/celda unitaria a lo largo del gradiente de presión macroscópico.

Modelo analítico

Un modelo de geometría simple de tortuosidad de las trayectorias del flujo en medios porosos basados en dos configuraciones, una es para partículas cúbicas dispuestos en triángulos superpuestos sin y otro con superponen sin restricciones. La tortuosidad se obtiene haciendo un promedio sobre las dos configuraciones y se expresa como una función de la porosidad de la siguiente manera:

$$\tau_{prom} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \sqrt{1-\phi} + \sqrt{1-\phi} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\phi}} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4}}}{1 - \sqrt{1-\phi}} \right] \quad (1.13)$$

1.3 La dimensión fractal para líneas de corrientes o capilares tortuosos en medios porosos fractales.

Un medio poroso se define generalmente como una estructura que consta de poros con diferentes tamaños, y estos poros están distribuidos aleatoriamente en el espacio del sólido. Los poros pueden ser conectados para formar capilares tortuosos por los que fluye líquido. Los caminos o vías del flujo tortuosos pueden ser similares a la curva de Koch, ver figura 1.1, que es un fractal exactamente auto-similar con dimensión fractal 1.26. Por lo tanto, los caminos tortuosos de flujo en medios porosos pueden ser descritos por una nueva dimensión fractal, $D_T (\geq 1)$; que se utiliza para caracterizar una forma complicada de describir los caminos capilares en el medio poroso. Esto significa que las dos dimensiones fractales, D_m y D_T , son necesarias para describir la geometría de los medios porosos. Si el efecto de la rugosidad de las superficies de los capilares o partículas sólidas en el flujo se toma en cuenta, la dimensión fractal de la rugosidad de las superficies se debe introducir. Tarasov [2], deriva las ecuaciones de hidrodinámica para medios fraccionarios, la cuales incluyen las dimensiones fractales de masa y de superficie. Estos modelos se muestran en el capítulo 2 de este trabajo de tesis.

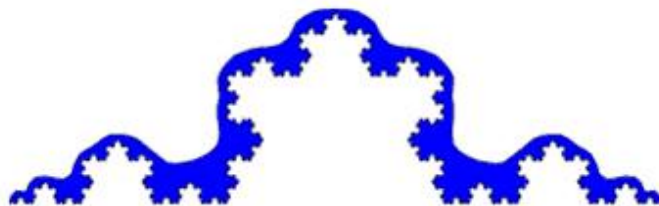


Figura 1.1. La curva de Koch se ha utilizado para facilitar la representación del camino tortuoso del flujo [54].

Según Majumdar [7], “Ya que la tortuosidad depende de la escala de medición y de la dimensión fractal de una línea de flujo, parece que la dimensión fractal es más fundamental. La caracterización fractal de un medio poroso por lo tanto será capaz de proporcionar la tortuosidad y la permeabilidad”. Por lo tanto, un modelo teórico para la dimensión fractal de la tortuosidad de los caminos o líneas de flujo es deseable.

La dimensión fractal D_T para los caminos o capilares tortuosos del flujo en el medio poroso está dada como,

$$D_T = 1 + \frac{\ln \tau_{prom}}{\ln \frac{L}{\lambda_{prom}}} \quad (1.14)$$

con $1 < D_T < 2$ y $1 < D_T < 3$ en dos y tres dimensiones, representando la complejidad de los caminos capilares para el flujo de líquidos a través de un medio poroso. Tenga en cuenta que $D_T = 1$ representa un camino capilar recto, y un valor mayor de D_T corresponde a una capilaridad muy tortuosa. En el caso límite de $D_T = 2$ o 3 , se tiene una capilaridad altamente tortuosa que llena el plano o un volumen. El diámetro promedio del poro λ_{prom} se puede determinar por la ecuación (1.7), y la tortuosidad promedio τ_{prom} de los capilares se puede determinar por experimentos o de algún modelo simplificado como la ecuación (1.13) u otros modelos complicados [22,24]. La ecuación (1.14) indica que la dimensión fractal para los capilares tortuosos es analíticamente relacionada con la porosidad, la distancia L de línea recta entre dos puntos a lo largo de la trayectoria del flujo, y las microestructuras. Feng y Yu [28]

obtuvieron D_T usando la definición de la tortuosidad media, de acuerdo con la teoría de la probabilidad de la integración del capilar mínimo y el capilar mayor en una serie de capilares fractal tortuosos, de la siguiente manera:

$$\tau_{prom} = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \tau(\lambda) f(\lambda) d\lambda = \frac{D_m}{D_m + D_T - 1} \left(\frac{L}{\lambda_{min}} \right)^{D_T - 1} \quad (1.15)$$

De la ecuación (1.15), la dimensión fractal D_T se expresa como

$$D_T = 1 + \frac{\ln \left[\frac{\tau_{av} (D_m + D_T - 1)}{D_m} \right]}{\ln \left[\frac{L}{\lambda_{min}} \right]} \quad (1.16)$$

La ecuación (1.16) presenta una expresión implícita de la dimensión fractal de D_T . En la ecuación (1.16), L/λ_{min} , se puede determinar por [28]

$$\frac{L}{\lambda_{min}} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{D_m}{2 - D_m} \frac{(1 - \phi)}{\phi}} \quad (1.17)$$

Luego, la dimensión fractal D_T se puede encontrar mediante un simple algoritmo de iteración de la ecuación (1.17). En las ecuaciones (1.15)–(1.17), L se define por la ecuación (1.12) y la relación L/λ_{min} es un parámetro microestructural del medio poroso.

Se ve que aunque λ_{min} y λ_{max} son parámetros independientes, estos están relacionados con las dimensiones fractales D_m y D_T de un conjunto de poros o capilares fractales.

1.4 Dimensión fractal del volumen del poro de un medios porosos en una sola fase.

Katz y Thompson [9] realizaron las mediciones pioneras en los poros de la piedra arenisca (sandstone) y encontraron que los poros de piedra arenisca son fractales con dimensiones fractales entre 2.57 a 2.87 para el espacio del poro. Yu y Li [12] derivaron una relación para la dimensión fractal para el volumen de los poros de un medio poroso saturado monofásico. Esta relación analítica relaciona la dimensión fractal D_m con la porosidad y los parámetros microestructurales, λ_{\max} y λ_{\min} , la relación está dada por

$$D_m = d_E - \frac{\ln \phi}{\ln \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} \quad (1.18a)$$

ó

$$\phi = \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right)^{d_E - D_m} \quad (1.18b)$$

donde d_E es la dimensión Euclidiana y $d_E = 2$ y 3 en el espacio bidimensional y tridimensional, respectivamente. Las ecuaciones (1.18a) y (1.18b) se han demostrado válidas, no sólo para geometrías fractales auto-similares (como la carpeta de Sierpinski y el triangulo de Sierpinski), sino también para fractales estadísticamente auto-similares, como un medio poroso saturado aleatorio o desordenado. Sin embargo, cabe señalar que para un medio poroso al azar/desordenado, λ_{\max} y λ_{\min} son los diámetros máximo y mínimo de los poros en una unidad de celda (o de una muestra o un conjunto fractal). Esto implica que la auto-similitud estadística existe en el rango de $\lambda_{\min} - \lambda_{\max}$. Para geometrías fractales exactamente auto-similar, como la carpeta de Sierpinski y el triangulo de Sierpinski, λ_{\max} es la longitud del lado de tales estructuras y $\lambda_{\min} = 1$.

Si la fase sólida en un medio poroso son fractales, las ecuaciones (1.18a) y (1.18b) se cambian como

$$D_s = d_E - \frac{\ln \phi_s}{\ln \frac{\lambda_{\min,s}}{\lambda_{\max,s}}} \quad (1.19a)$$

ó

$$\phi_s = \left(\frac{\lambda_{\min,s}}{\lambda_{\max,s}} \right)^{d_E - D_s} \quad (1.19b)$$

En las ecuaciones (1.19a) y (1.19b), ϕ_s es la porosidad (fracción de volumen de la fase sólida), D_s es dimensión fractal de la fase sólida, λ_{\max} es el máximo diámetro de la partícula sólida, y λ_{\min} es mínimo diámetro de la partícula sólida.

Las ecuaciones (1.19a) y (1.19b) muestran que cuando la dimensión fractal D_s se aproxima a 3, la fracción de volumen sólido tiende a la unidad. Esto tiene una explicación física coherente, cuando la dimensión fractal D_s tiende a 3, implica que el volumen está completamente lleno de la fase sólida y el volumen se vuelve compacto. Ecuaciones (1.18a-1.19b), también implican que si una imagen o muestra bidimensional y tridimensional tienen la misma fracción de volumen de poro (fase sólida) y la misma proporción del tamaño mínimo de poro (partículas sólidas) que el tamaño máximo de poro (partículas sólidas), sus dimensiones fractales en dos y tres dimensiones difieren en exactamente por 1.

Si tanto la fase de poro y la fase sólida en un medio poroso son fractales, el medio puede ser llamado medio fractal bifásico. Entonces, de las ecuaciones (1.18b) y (1.19b), las siguientes relaciones se incluyen:

$$\phi + \phi_s = 1 \quad (1.20a)$$

ó

$$\phi = 1 - \phi_s = 1 - \left(\frac{\lambda_{\min,s}}{\lambda_{\max,s}} \right)^{d_E - D_s} = \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right)^{d_E - D_m} \quad (1.20b)$$

Las ecuaciones (1.20a) y (1.20b) muestran las relaciones entre las dimensiones fractales de las fases de los poros y sólidos, la porosidad y la fracción de volumen del sólido, y las microestructuras de los poros y partículas sólidas. Está claro que en general $D_m \neq D_s$, y $D_m = D_s$ puede ser de ayuda sólo cuando se cumple $\phi = \phi_s = 1/2$ y $\lambda_{\min}/\lambda_{\max} = \lambda_{\min,s}/\lambda_{\max,s}$.

1.5 Dimensiones fractales para medios porosos multifásicos.

Los poros, dentro de una muestra porosa cúbica de lado L , se suponen que sean esféricos, y el volumen total del poro en la muestra se puede encontrar como

$$V_p = - \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\pi}{6} \lambda^3 dN = \frac{\pi D_m}{6(3-D_m)} \lambda_{\max}^3 \left[1 - \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right)^{3-D_m} \right] \quad (1.21)$$

donde el subíndice p representa los poros. Debido a la ecuación. (1.19b), la ecuación (1.21) se reescribe como

$$V_p = \frac{\pi D_m}{6(3-D_m)} \lambda_{\max}^3 [1 - \phi] \quad (1.22)$$

donde V_p , D_m y ϕ se miden en tres dimensiones.

En medios porosos no saturados, hay al menos dos diferentes líquidos tales como agua y gas. Cada poro se llena con dos fluidos diferentes. Se supone que las dos fases agua y gas, o agua y aceite son fractales. Las dimensiones fractales para medios porosos no saturados se pueden obtener mediante las siguientes relaciones [32]

$$D_{m,w} = d_E - \frac{\ln(S_w \phi)}{\ln\left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)} \quad (1.23a)$$

$$D_{m,g} = d_E - \frac{\ln[(1 - S_w)\phi]}{\ln\left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)} \quad (1.23b)$$

donde $D_{m,w}$ y $D_{m,g}$ son las dimensiones fractales de agua (fase mojante) y de gas (fase no mojante), y S_w es la saturación.

Si varias fases, como el petróleo, el agua y el gas llenan de forma conjunta cada poro, tenemos un medio con cuatro fases (o medios multifasicos), gas-agua-aceite-partícula.

Entonces las dimensiones fractales para medios porosos multifasicos no saturados son [31]

$$D_{m,w} = d_E - \frac{\ln[S_w\phi]}{\ln\left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)} \quad (1.24a)$$

$$D_{m,g} = d_E - \frac{\ln[S_g\phi]}{\ln\left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)} \quad (1.24b)$$

$$D_{m,j} = d_E - \frac{\ln[S_j\phi]}{\ln\left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)} \quad (1.24c)$$

donde $D_{m,w}$, $D_{m,g}$, y $D_{m,j}$ son las dimensiones fractales para la fase mojante, la fase no mojante, y la fase j. Mientras S_w , S_g , S_j son las saturaciones de la fase agua (ó fase mojante), gas (ó fase no mojante) y de la fase j, y que se definen por

$$S_w = \frac{V_w}{V_p} \quad (1.25a)$$

$$S_g = \frac{V_g}{V_p} \quad (1.25b)$$

$$S_j = \frac{V_j}{V_p} \quad (1.25c)$$

donde V_p , V_w , V_j son los volúmenes de la fase del poro, la fase mojanante, la fase no mojanante, y la fase j. Es evidente que

$$S_w + S_g + S_j = 1 \quad (1.26a)$$

ó

$$\sum_{i=1}^m S_i = 1 \quad (1.26b)$$

donde m es el número total de fases en un medio.

1.6 Modelos para el tamaño del poro mínimo y poro máximo. .

Para los tejidos porosos, la distribución de tamaño de poro se ha demostrado ser fractal, y el tamaño del poro mínimo en un cabo de fibra es del orden en tamaño a un filamento, $\sim 10^{-6} m$, y el tamaño del poro máximo entre los cabos de fibra se encuentra en el orden de $\sim 10^{-3} m$ [6]. Para medios porosos corpusculares, el tamaño del poro mínimo se puede encontrar de la estructura de la geometría de las partículas. El tamaño de poro mínimo se encuentra por [31]

$$\lambda_{\min} = \frac{2r}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}} \quad (1.27)$$

donde r es el radio de una partícula.

Para los tejidos textiles, de la estructura geométrica Yu et al. [6] propusieron que el tamaño de poro máximo se puede encontrar de

$$\lambda_{\max} = \frac{2W_g H_g}{W_g + H_g} \quad (1.28)$$

donde H_g y W_g son el grosor y la anchura de una banda o gap. Los parámetros de H_g y W_g están relacionadas con la porosidad [6].

El poro máximo también se puede obtener de

$$\lambda_{\max} = R \sqrt{2 \left(\frac{1 - \phi_i}{1 - \phi} - 1 \right)} \quad (1.29)$$

donde R , $\phi_i = 0.342\phi$, y ϕ son el radio de un promedio de cúmulos, la porosidad en de los cúmulos, y la porosidad efectiva de un medio poroso dispersado.

Recientemente, Wu y Yu [33] proponen un modelo simple para el tamaño de poro máximo en medios porosos.

$$\lambda_{\max} = d_p \sqrt{\frac{\phi}{1 - \phi}} \quad (1.30)$$

donde d_p es el diámetro de la partícula.

1.7 Velocidad del fluido en medios porosos fractales.

Wheatcraft and Tyler [26] aplicando simples argumentos de escala para describir las líneas de flujo tortuoso en medios porosos por la geometría fractal y desarrollando una relación de escalamiento para la distancia de viaje fractal frente a escala de observación

$$L_t(\lambda) = \lambda^{1-D_T} L^{D_T} \quad (1.31)$$

donde D_T es la dimensión fractal para la tortuosidad.

Diferenciando la Ec. (1.31) con respecto al tiempo t se tiene

$$v_t(\lambda) = \frac{dL_t}{dt} = \lambda^{1-D_T} D_T L^{D_T-1} v_0, \quad (1.32)$$

donde $v_t(\lambda)$ y $v_0 = dL/dt$ son, la velocidad real (velocidad fractal) en un capilar tortuoso de diámetro λ y la velocidad de línea recta (velocidad del poro) en un tubo recto/ capilaridad recta, sobre la cual una caída de presión se impone. La Ec. (1.32) describe la velocidad de flujo en un medio poroso fractal. La ecuación (1.32) indica que si $D_T = 1$, $v_t(\lambda) = v_0$. Un valor más alto de D_T induce a una mayor velocidad capilar v_t .

1.8 Resistencia al flujo.

La ley de Darcy obtenida experimentalmente para un fluido incompresible a través de un medio poroso, limitada a flujo en una dimensión, es

$$Q = A \frac{k \Delta P}{\mu L} \quad (1.33a)$$

ó

$$u = \frac{Q}{A} = \frac{k \Delta P}{\mu L} \quad (1.33b)$$

donde Q es la tasa de flujo (volumen por unidad de tiempo), A es el área de una sección transversal, μ es la viscosidad del fluido, u es la velocidad de Darcy, ΔP es la caída de presión a través de la longitud L , $\Delta P/L$ es la pérdida de presión (ó resistencia al flujo) por descripción

de la pérdida de energía cuando un líquido fluye a través de una distancia L en un medio poroso, y K es un coeficiente de proporcionalidad, llamada permeabilidad

1.9 Modelo convencional

Es bien sabido que la pérdida de presión de flujo en medios porosos fue dado por Ergun [34] en 1952. La ecuación para la pérdida de presión se llama ecuación de Ergun, que es la suma de los dos siguientes términos:

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{150\mu(1-\phi)^2 v_s}{d_p^2 \phi^3} + 1.75 \frac{1-\phi}{\phi^3} \frac{\rho v_s^2}{d_p} \quad (1.34)$$

en donde v_s es la velocidad superficial (definida por $v_s = Q/A$, donde Q es el flujo total a través de una sección transversal de área A), d_p es el promedio del diámetro de las partículas, y ρ es la densidad del fluido. El primer término en el lado derecho de la ecuación (1.34) se llama la ecuación de Blake-Kozeny, es decir

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{150\mu(1-\phi)^2 v_s}{d_p^2 \phi^3},$$

representa la pérdida de energía viscosa principalmente en el flujo laminar y es proporcional a la velocidad del fluido. La caída de presión para el flujo a baja velocidad (a bajo Número de Reynolds, $Re_p = (D_p \rho v_s / \mu) < 10$) está determinado principalmente por la pérdida de energía viscosa. El segundo término en la ecuación (1.34)

$$\frac{\Delta P}{L} = 1.75 \frac{1-\phi}{\phi^3} \frac{\rho v_s^2}{d_p},$$

se llama la ecuación de Burke - Plummer y es proporcional a la velocidad al cuadrado. La ecuación de Burke-Plummer denota la pérdida de energía cinética en el flujo turbulento. La

perdida de energía cinética /local domina la caída de presión cuando el número de Reynolds es muy grande ($Re_p > 100$). La ecuación de Ergun indica que la caída de presión a lo largo del contenedor depende de la velocidad de flujo, la viscosidad y la densidad del fluido, en la proximidad y la orientación del contenedor, y del tamaño, la forma y la superficie de los materiales empaquetados [34]. La ecuación (1.34) indica que la pérdida de presión se obtiene sumando las pérdidas de energía cinética y viscosa.

1.10 Pérdida de energía por viscosidad a lo largo de la trayectoria del flujo a bajos números de Reynolds y la pérdida de energía cinética a grandes números de Reynolds.

Wu y Yu [33] derivaron un modelo fractal para el flujo a través de medios porosos. Este modelo supone que el medio poroso se compone de un conjunto de capilares tortuosos, cuya los tamaños siguen la ley de escalamiento fractal (1.2). La tasa de flujo a través de un capilar tortuoso está dada por la modificación de la bien conocida ecuación de Hagen-Poiseulle, [35]

$$q(\lambda) = \frac{\pi}{128} \frac{\Delta P_1}{L_t} \frac{\lambda^4}{\mu} \quad (1.35)$$

La ecuación 54 se basa en el flujo a través de un canal/capilar circular. La tasa de flujo total Q a través de una celda unidad se puede obtener mediante la integración de la tasa de flujo individual, q , en toda la gama de los poros/capilares desde el mínimo tamaño de los poros λ_{\min} hasta el máximo de tamaño de poro λ_{\max} . De acuerdo con las ecuaciones (1.2), (1.31), y (1.35), la tasa total del flujo se puede obtener de

$$Q = - \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} q(\lambda) dN(\lambda) \quad (1.36)$$

Entonces, la velocidad superficial se puede obtener $v_s = Q/A$. Desde la velocidad superficial obtenida, la caída de presión a través de una longitud L entre dos puntos se puede obtener. La caída de presión que se obtiene, es proporcional a la velocidad, la porosidad, a la dimensiones

fractales D_m y D_T , longitud L , la viscosidad del fluido, así como al máximo de diámetro de poro. También se encuentra que la caída de presión causada por la pérdida de energía viscosa, basada en la teoría de la geometría fractal, es similar a la ecuación de Blake-Kozeny.

Este modelo [33] asume que la pérdida de energía cinética/local es causada por las gargantas de los poros en los capilares. Sobre la base de las relaciones entre la velocidad fractal en capilares, la velocidad superficial v_s , y la velocidad poral en un capilaridad recta, la pérdida de energía cinética se puede derivar y se encuentra que es proporcional a v_s^2 . La pérdida de energía cinética/local basada en la teoría de geometría fractal es similar a la ecuación de Burke-Plummer. El modelo fractal para la pérdida de energía cinética/local se expresa como una función de la relación de la garganta de poro, la porosidad, propiedad del fluido, el tamaño medio de poro, la velocidad y la dimensión fractal de la tortuosidad. La ecuación de Burke-Plummer sólo está relacionada con la porosidad, la propiedad del fluido, la velocidad y el tamaño de las partículas, y algunos otros mecanismos (como la relación de la garganta de poro y efecto de la tortuosidad) que afectan a la resistencia al flujo se ignoran. El modelo fractal para la caída de presión total por unidad de longitud se puede obtener sumando las pérdidas de energía cinética/local y viscosa a lo largo de la trayectoria del flujo.

1.11 Permeabilidades

La permeabilidad es la medida de la conductividad hidráulica, que generalmente aparece en diversas formas como en la bien conocida ley de Darcy

$$\vec{V} = -\frac{\hat{K}}{\mu} \nabla P \quad (37)$$

donde $[\hat{K}]$, $\hat{V} = [u, v, w]^T$, μ , y ∇P son el tensor de la permeabilidad, la velocidad promedio, la viscosidad, y el gradiente de presión en el medio poroso. En $\hat{V} = [u, v, w]^T$, u , v y w son las componentes de velocidad en las direcciones x , y , z . El tensor de la permeabilidad \hat{K} se expresa generalmente en términos de un tensor simétrico de segundo rango como sigue:

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

Para el flujo en un medio isótropo, la ecuación (1.38) se convierte en

$$[\hat{K}] = K \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

1.11.1 Permeabilidad de medios porosos fractales saturadas.

Chang y Yortsos [36], tal vez, fueron los primeros en aplicar la geometría fractal de los medios porosos y propuso un modelo de permeabilidad fractal

$$K(r) = \left(\frac{aV_s}{G} \right) m r^{D-d_E-\theta} \quad (1.40)$$

donde r es la distancia radial de un pozo, a es una correlación constante, m es el parámetro densidad de un sitio (constante empírica), G es un factor de la geometría, D es la dimensión fractal de masa, V_s es el volumen por sitio, y θ representa la conductividad anormal en el medio fractal, también llamado exponente espectral, que depende de la estructura de un medio fractal.

Más tarde, Yortsos y compañeros de trabajo, [37, 38] modificaron la ecuación (1.40) como

$$K(r) = K_w \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D-d-\theta} \quad (1.41)$$

donde $K_w = (aV_s/G)m r_w^{D-d-\theta}$ y K_w es la permeabilidad en $r = r_w$. $\theta = (\mu - \beta)/\nu$. μ , β , y ν son los exponentes fractales y representan la conductividad, la percolación, y longitud de correlación. Adler [11] simuló numéricamente el problema de transporte mediante la aplicación

de un modelo de precolación en un objeto fractal. Después de diez años, Alder [39] señaló que la permeabilidad en el medio poroso fractal se puede expresar como

$$K = K(\phi, D_m, \dots) \quad (1.42)$$

Sin embargo, no se le dio expresión explícita.

Asumiendo que un medio poroso consiste de un conjunto de capilares tortuosas, Yu et al. [6,10] rigurosamente derivaron un modelo de permeabilidad fractal

$$K = \frac{\pi}{128} \frac{L^{1-D_r}}{A} \frac{D_m}{3 + D_r - D_m} \lambda_{\max}^{3+D_r}. \quad (1.43)$$

este modelo se demostró ser válido no sólo para medio porosos corpusculares [10] si no también para medios fibrosos [6].

La ecuación (1.43) indica que la permeabilidad es una función de la dimensión fractal D_m del espacio de poros, la dimensión fractal de la capilaridad tortuosa D_r y de los parámetros estructurales, A , L , y λ_{\max} .

Si un modelo capilar es recto ($D_r = 1$), la ecuación (1.43) se reducirá a

$$K = \frac{\pi}{128} \frac{1}{A} \frac{D_m}{4 - D_m} \lambda_{\max}^4 \quad (1.44)$$

En las ecuaciones de la permeabilidad (1.43) y (1.44), las dimensiones fractales D_r y D_m se pueden determinar por las ecuaciones (1.14), (1.18a), y (1.18b), respectivamente, y el área total A de una celda unitaria, que contiene un conjunto de poros/capilares fractales, se pueden calcular por $A = A_p / \phi$. La longitud L de la ecuación (1.43) se puede aproximar por

$$L = \sqrt{A} \quad (1.45)$$

Entonces, la permeabilidad se puede expresar también así [40]

$$K = \frac{(\pi D_m)^{(1-D_T)/2} [4(2-D_m)]^{(1+D_T)/2}}{128(3+D_T-D_m)} \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right)^{(1+D_T)/2} \lambda_{\max}^2 \quad (1.46)$$

La ecuación (1.46) indica que la permeabilidad es una función de las dimensiones fractales (D_T y D_m), la porosidad (ϕ), y el máximo diámetro del poro/capilar, y son cuatro parámetros por determinar, mientras que en la ecuación (1.43) hay cinco parámetros para resolverla.

1.11.2 Permeabilidad de medios porosos fractales no saturados.

La única diferencia entre los medios porosos saturados e insaturados es que en los medios porosos saturados sólo hay un único fluido como el agua que llena los poros o capilares. En los medios porosos insaturados, hay al menos dos fluidos diferentes, como el agua o aceite y el gas. Cada poro está de forma conjunta con agua o aceite y el gas.

Para medios porosos no saturados, por lo general uno está interesado en la permeabilidad relativa, que se define como la relación de la permeabilidad de la fase con la permeabilidad absoluta (es decir, la permeabilidad para medio poroso saturado).

La ecuación modificada de Hagen-Poiseuille para cada fase en un único capilar tortuoso se expresa como

$$q_w(\lambda_w) = G \frac{\Delta P_w}{L_t(\lambda_w)} \frac{\lambda_w^4}{\mu_w} \quad (1.47a)$$

$$q_g(\lambda_g) = G \frac{\Delta P_g}{L_t(\lambda_g)} \frac{\lambda_g^4}{\mu_g} \quad (1.47b)$$

donde los subíndices w y g representan la fase mojante (por ejemplo, el agua) y la fase no mojante (por ejemplo el gas), y $G = \pi/128$ es el factor geométrico. La tasa de flujo total para

cada fase se puede obtener mediante la integración de las tasas de flujo individuales, $q_w(\lambda_w)$ y $q_g(\lambda_g)$, en todo el rango del canal capilar desde el canal capilar o poro mínimo $\lambda_{\min,w}$ (y $\lambda_{\min,g}$) hasta el canal capilar o poro máximo $\lambda_{\max,w}$ (y $\lambda_{\max,g}$), en un conjunto de canales capilares o poros fractales. De acuerdo con las ecuaciones (1.2), (1.31), (1.47a) y (1.47b),

$$Q_w = - \int_{\lambda_{\min,w}}^{\lambda_{\max,w}} q(\lambda_w) dN(\lambda_w) \quad (1.48)$$

Utilizando la ley de Darcy, la expresión de la permeabilidad para la fase mojante en un medio poroso no saturado es

$$K_w = G \frac{L_0^{1-D_T}}{A} \frac{D_{m,w}}{3 + D_T - D_{m,w}} \lambda_{\max,w}^{3+D} \quad (1.49a)$$

Del mismo modo, la expresión de la permeabilidad para la fase no mojante en un medio poroso no saturado se pueden obtener como

$$K_g = G \frac{L_0^{1-D_T}}{A} \frac{D_{m,g}}{3 + D_T - D_{m,g}} \lambda_{\max,g}^{3+D} \quad (1.49b)$$

donde las dimensiones fractales D_T , $D_{m,w}$ y $D_{m,g}$ son determinados por las ecuaciones (1.14), (1.23a), y (1.23b).

Las permeabilidades relativas para medios porosos no saturados se pueden encontrar de la combinación de las ecuaciones (1.43), (1.48), (1.49a), y (1.49b)

$$k_{rw} = \frac{K_w}{K} = \left(\frac{3 + D_T - D_f}{3 + D_T - D_{f,w}} \right) \left(\frac{D_{m,w}}{D_m} \right) \left(\frac{\lambda_{\max,w}}{\lambda_{\max}} \right)^{3+D_T} \quad (1.50)$$

$$k_{rg} = \frac{K_g}{K} = \left(\frac{3 + D_T - D_f}{3 + D_T - D_{f,g}} \right) \left(\frac{D_{m,g}}{D_m} \right) \left(\frac{\lambda_{\max,g}}{\lambda_{\max}} \right)^{3+D_T} \quad (1.51)$$

Las ecuaciones (1.50) y (1.51) muestran que las permeabilidades relativas dependen de las razones de $\lambda_{\max,w}/\lambda_{\max}$ y $\lambda_{\max,g}/\lambda_{\max}$, que están relacionados con la saturación

$$\frac{\lambda_{\max,w}}{\lambda_{\max}} = \sqrt{S_w} \quad (1.52)$$

$$\frac{\lambda_{\max,g}}{\lambda_{\max}} = \sqrt{1 - S_w} \quad (1.53)$$

Cabe señalar que los modelos fractales (1.50) y (1.51) son válidos solamente para fluidos newtonianos incompresibles en un medio poroso no saturado.

1.11.3 Análisis fractal de la ecuación y la constante de Kozeny-Carman.

Se sabe que la ecuación semi-empírica de Kozeny-Carman (KC) [41] es la más famosa que relaciona la permeabilidad con la porosidad, y es ampliamente utilizada como punto de partida para los modelos de permeabilidad. La ecuación de KC es

$$K = \frac{\phi^3}{c(1-\phi)^2 S^2} \quad (1.54)$$

donde S es el área de la superficie específica. Debido a la tortuosidad de los capilares, la ecuación de KC se puede modificar como

$$K = \frac{\phi^3}{k(1-\phi)^2 S^2} = \frac{\phi^3}{36k(1-\phi)^2} d_p^2 \quad (1.55)$$

donde $k = c\tau^2$, es la constante de KC, $\tau = L_t/L$ es la tortuosidad, y $d_p = 6/S$ para las hipotéticas partículas esféricas sólidas con la misma S . En la ecuación (1.55), τ se aproxima por $2^{1/2}$ y c se considera alrededor de 2.5 para camas compactadas (beds packed) con partículas esféricas, entonces la constante de KC empírica ($k = c\tau^2$) se aproxima a 5. Las predicciones de KC con la constante de $k = 5$ dada por Carman [42] están de acuerdo con sus resultados experimentales.

Más recientemente, Xu y Yu [40] derivaron una expresión analítica para la constante de KC basada en la teoría de la geometría fractal. Este modelo relaciona la constante de KC, no sólo con la porosidad, sino también con las microestructuras de los medios porosos. Con base en las ecuaciones (1.46) y (1.55), el modelo fractal para la constante de KC se pueden obtener como

$$k = \frac{\phi^{(3-D_T)/2}}{36C_f^*(1-\phi)^{(1-D_T)/2}} \quad (1.56a)$$

donde el parámetro $C_f^* = C_f/2$ para el triángulo equilátero de celda unitaria para el diámetro del poro máximo y $C_f^* = C_f$ para una celda unitaria cuadra para el diámetro del poro máximo. El parámetro C_f está dado por

$$C_f = \frac{(\pi D_m)^{(1-D_T)/2} [4(2-D_m)]^{(1+D_T)/2}}{128(3+D_T-D_m)} \quad (1.56b)$$

Las ecuaciones (1.56a) y (1.56b) presentar un nuevo modelo para la constante de KC, que se basa en la geometría fractal de poros/capilares.

1.11.4 La permeabilidad del flujo de fluidos no newtonianos en un medio poroso.

Los fluidos que obedecen la ley de Newton de la viscosidad se llaman fluidos newtonianos. La ley de Newton de la viscosidad se expresa como $\tau = -\mu \nabla v$, donde τ es el esfuerzo cortante, μ es la viscosidad, y ∇v es el gradiente de velocidad, sin embargo no todos los fluidos siguen la relación esfuerzo-tensión Newtoniana. Los fluidos que no siguen la relación Newtoniana se llaman fluidos no-Newtonianos. La sangre en el cuerpo y el petróleo crudo de alta viscosidad, por ejemplo, son fluidos no-newtonianos figura 1.2.

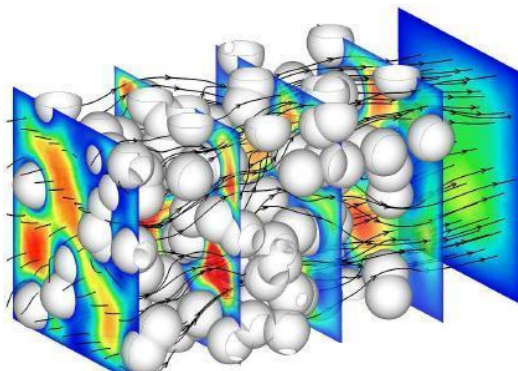


Figura 1.2. Estudio numérico de la simulación tridimensional del flujo no newtoniano (tipo potencial, Bingham y Casson) a través de un medio poroso [55]

Hay diferentes categorías de fluidos no newtonianos tales como fluidos de ley de potencia, fluidos elásticos, fluidos de Bingham, fluidos de Ellis, etc, ver tabla 1.1.

Tabla 1.1 Ecuaciones para algunos flujos de fluido no Newtoniano.

Modelo	Tasa de flujo en un tubo capilar
Newtoniano	$q = \frac{\pi r^4}{8\mu} \frac{dp}{dL}$
Ley de potencia	$q = \pi \left(-\frac{1}{2C} \frac{dp}{dL} \right)^{1/n} \frac{n}{1+3n} r^{3+1/n}$
Ellis	$q(r) = \pi r^3 \left[\frac{\phi_0}{4} \left(-\frac{1}{2} r \frac{dp}{dL} \right) + \frac{\phi_1}{\alpha+3} \left(-\frac{1}{2} r \frac{dp}{dL} \right)^\alpha \right]$
Bingham	$q = \frac{\pi r^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dL} \right) \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{2\tau_0/r}{-dp/dL} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2\tau_0/r}{-dp/dL} \right)^4 \right]$

Por otra parte, si se aplica la geometría fractal para analizar la permeabilidad para el flujo de fluidos no Newtonianos en medios porosos, soluciones analíticas para la permeabilidad se pueden obtener. De acuerdo a la ecuación (1.2) y a las ecuaciones que se muestra en la tabla de arriba, resulta que la permeabilidad efectiva, para el fluido de ley de potencia [43] a través del medio poroso fractal, se obtiene comparando con la ley de Darcy,

$$K_e = 2^{D_T-2} D_m^{n-1} \frac{n^2 \phi L^{1-D_T}}{(1+3n)D_T} \left(\frac{n}{D_T - nD_m} \right)^{n-1} \times \frac{(2-D_m)r_{\max}^{1-D_T}}{(D_T - nD_m + 3n)(1-\phi)} \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{D_T/n-D_m} \right]^{n-1} \quad (1.57)$$

Para fluido Ellis a través del medio poroso fractal, la permeabilidad efectiva se expresa como [44]

$$K_e = \frac{\frac{\phi(2-D_m)}{1-\phi} \left[\frac{\phi_0}{4} \frac{2^{D_T-2} L^{1-D_T}}{D_T(D_T+3-D_m)} r_{\max}^{D_T+1} + \frac{\phi_1}{\alpha+3} \frac{(2^{D_T-2} L^{1-D_T})^\alpha}{D_T^\alpha(\alpha D_T+3-D_m)} \left(-\frac{dp}{dL} \right)^{\alpha-1} r_{\max}^{\alpha D_T+1} \right]}{\phi_0 + \phi_1 \left\{ 2^{(D_T-2)} L^{1-D_T} \frac{D_m}{D_T} \left(-\frac{dp}{dL} \right) \frac{r_{\max}^{D_T}}{D_T - D_m} \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{D_T-D_m} \right] \right\}^{\alpha-1}} \quad (1.58)$$

La ecuación (1.58) describe la permeabilidad efectiva para el flujo de fluido de Ellis en medios porosos.

La permeabilidad eficaz para un fluido de Bingham a través de un medio poroso fractal se puede obtener por [45]

$$K_e = 2^{D_T-4} \frac{\phi L^{1-D_T}}{D_T} \frac{(2-D_m)r_{\max}^{1-D_T}}{(D_T - D_m + 3n)(1-\phi)} \quad (1.59)$$

La ecuación (1.59) indica que la permeabilidad efectiva para flujo de Bingham en medios porosos es igual a la permeabilidad del flujo de fluidos newtonianos en medios porosos, y esto es consistente con otras observaciones [46].

1.12 Dispersión

Se sabe que la dispersión térmica juega un importante papel en la convección forzada sobre medios porosos. La dispersión térmica surge de la velocidad del fluido microscópico y de las

desviaciones de la temperatura, de los valores promedio y por lo tanto mejora la transferencia de calor en medios porosos. Los experimentos [47] muestran que la magnitud de la dispersión térmica es a menudo mucho mayor que la de la difusión molecular. Para la convección forzada, la contribución axial es insignificante en comparación con el flujo de convección del bulto [5,48,49].

El coeficiente de dispersión térmica/conductividad suele ser incorporado en la ecuación de balance de energía con el fin de tener en cuenta la convección microescala alrededor de las partículas debido a la velocidad de fluctuación que no está incluido en la velocidad de Darcy. Cuando el coeficiente de transferencia de calor entre la fase sólida y líquida es grande y el flujo de fluido es lento, el equilibrio térmico local se puede asumir. Entonces, la ecuación global o ecuación de energía-temperatura, sin generación de calor, se puede escribir como [5,48,49]

$$\left[\phi(\rho C_p)_m + (1-\phi)(\rho C_p)_s \right] \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C_p)_m \langle \mathbf{v}_m \rangle \cdot \nabla T = \nabla \cdot [(\hat{K}_e + \hat{K}_D) \cdot \nabla T] \quad (1.60)$$

donde \hat{K}_e es el tensor de conductividad térmica efectiva, también llamado conductividad estancada. Para la conducción de calor a través de la fase sólida y la fase líquida, \hat{K}_D es el tensor de dispersión térmica debido a las variaciones/fluctuaciones locales de velocidad en la ecuación (1.60), ρ y es la densidad del fluido, C_p es el calor específico a presión constante, T es el volumen promedio de la temperatura, y los subíndices f y s representan las fases de líquidos y sólidos, respectivamente. Para el flujo unidimensional a través de un medio poroso, la dispersión de la conductividad térmica es generalmente representado por k_d , una cantidad escalar.

Existen numerosos informes sobre modelos de dispersión de la conductividad térmica en la literatura. Los primeros estudios [50] obtuvieron la dispersión de la conductividad térmica transversal en la región central de flujo, aproximado por

$$k_d = \gamma(\rho C_p)_m u_D d_p \quad (1.61a)$$

o

$$\frac{k_d}{k_m} = \gamma \text{Pe} \quad (1.61b)$$

donde $\gamma (=0.1)$ es la constante empírica obtenida mediante el ajuste de datos experimentales en el rango de porosidad 0.3-0.5 para camas de relleno (packed beds), $\text{Pe} = (\rho C_p)_m u_D d_p / k_m$ es el número de Peclet, u_D es la velocidad de Darcy o la velocidad media en medios porosos, y k_m es la conductividad térmica del líquido.

Hsu y Cheng [48] derivaron la dispersión de la conductividad térmica transversal para un casi flujo paralelo para la convección forzada en la región central (núcleo) de flujo por

$$\frac{k_d}{k_f} = \frac{D(1-\phi)\text{Pe}}{\phi} \quad (1.62)$$

donde $D = 0,04$ es la constante de ajuste (combinada de dos constantes empíricas, una de las fluctuaciones de velocidad y el otro de fluctuación de la temperatura) obtenida al comparar la teoría con los datos experimentales. Kamiuto y Saitoh [51] numéricamente resolvieron las ecuaciones de Navier-Stokes y la de energía para totalmente desarrollar la transferencia de calor por convección forzada en cilíndricas camas de relleno (packed beds) con constante temperaturas de la pared. Los resultados numéricos se compararon con disponibles datos experimentales y se correlacionan por

$$\frac{k_d}{k_f} = 0.3519(1-\phi)^{2.3819} \text{PrRe}^* \quad (1.63)$$

donde Pr es el número de Prandtl, $\text{Re}^* = u(r)d_p/\nu$ es el Número de Reynolds de partículas locales, y $u(r)$ es la velocidad axial en la coordenada radial r . Se pueden consultar las referencias [5,52] para más correlaciones empíricas de la conductividad térmica de dispersión en medios porosos.

1.12.1 Fluctuación de la velocidad.

Yu y Li [53] presentaron un modelo cuasi-analítico para la conductividad de dispersión transversal térmica en medios porosos basa en el hecho de que las líneas de flujo/capilar en el medio poroso es fractal, véase la ecuación (1.31). La diferencia L' entre la longitud real de L_r y la distancia recta L es

$$L' = L_r - L = \lambda_{\min}^{1-D_T} L^{D_T} - L \quad (1.64)$$

Diferenciando la ecuación (1.64) con respecto al tiempo t , se tiene

$$u' = \frac{dL'}{dt} = \left[D_T \left(\frac{L}{\lambda_{\min}} \right)^{D_T-1} - 1 \right] v_s \quad (1.65)$$

donde u' se define como la velocidad de la desviación espacial a lo largo de la dirección perpendicular a la dirección del flujo macroscópico y representa el efecto de dispersión, $v_s = dL/dt$ es la velocidad en línea recta o la velocidad de poro, y satisface $v_s = u_D/\phi$.

Entonces, la ecuación (1.65) se puede reescribir como

$$u' = \left[D_T \left(\frac{L}{\lambda_{\min}} \right)^{D_T-1} - 1 \right] \frac{v_D}{\phi} \quad (1.66)$$

La ecuación (1.66) indica que si la porosidad $\phi = 1$, las líneas de flujo son rectas y $D_T = 1$, y entonces se tiene $u' = 0$, esto significa que no hay un efecto de dispersión debido a la fluctuación causada por el flujo tortuoso. La ecuación (1.66) proporciona la solución analítica para la desviación espacial de la velocidad para el flujo en medios porosos fractal.

1.12.2 La dispersión térmica

De la conductividad térmica de la dispersión se define a menudo por

$$(\rho C_p)_f \langle u'T' \rangle = -k_d \nabla T \quad (1.67)$$

donde $\langle \cdot \rangle$ representa una cantidad del volumen promedio, T' es la desviación espacial de la temperatura, y $\langle u'T' \rangle$ es el vector de dispersión. Dado que para la fuerza de convección la contribución axial a la dispersión térmica es insignificante en comparación con el flujo de convección del bulto [48], Yu y Li [53] siguieron el tratamiento por Hsu y Cheng [48] y solamente se considera la dispersión térmica en la dirección y . La ecuación (1.67) se puede aproximadamente expresar como la forma escalar de

$$(\rho C_p)_f u'T' = -k_d \frac{dT}{dy} \quad (1.68)$$

donde la desviación espacial de la temperatura a lo largo de la dirección y es dada por [5,48]

$$T' = -Cd_p \frac{dT}{dy} \quad (1.69)$$

De las ecuaciones (1.68) y (1.69), la conductividad de dispersión térmica transversal se obtiene como

$$k_d = C(\rho C_p)_f d_p u' \quad (1.70)$$

donde C es una constante empírica, que se podría sustituir a través de la geometría fractal, y una solución analítica completa para la conductividad de dispersión térmica se puede resolver.

Referencias

- [1] Yu B. M., *Appl. Mech. Rev.*, **61** (2008) 050801.
- [2] Tarasov V. E., *Ann. Phys.*, **318** (2005) 286.
- [3] Bear, J., *Dynamics of Fluids in Porous Media* (Elsevier, New York) 1972.
- [4] Sahimi, M., *Rev. Mod. Phys.*, **65** (1993)1393.
- [5] Kaviany, M., *Principles of Heat Transfer in Porous Media*, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York)1995.
- [6] Yu, B. M., Lee, L. J., and Cao, H. Q., *Polym. Compos.*, **23** (2002) 201.
- [7] Majumdar, A., *Annual Review of Heat Transfer*, **4** (1992) 51.
- [8] Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman, San Francisco CA.) 1982.
- [9] Katz, A. J., and Thompson, A. H., *Phys. Rev. Lett.*, **54** (1985) 1325.
- [10] Yu, B. M., and Cheng, P., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **45** (2002) 2983.
- [11] Adler, P. M., *Int. J. Multiphase Flow*, **11** (1985) 91.
- [12] Yu, B. M., and Li, J. H., *Fractals*, **9** (2001) 365.
- [13] Xu, J., Yu, B. M., Zou, M. Q., and Xu, P., *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **39** (2006) 4486.
- [14] Wyllie, M. R. J., and Gregory, A. R., *Ind. Eng. Chem.*, **47** (1955)1379.
- [15] Dullien, F. A. L., *Porous Media, Fluid Transport and Pore Structure* (Academic, San Diego) 1979.
- [16] Comiti, J., and Renaud, M., *Chem. Eng. Sci.*, **44** (1989) 1539.
- [17] Hsu, C. T., and Cheng, P., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **33** (1990) 1587.
- [18] Westhuizen, J. V., and Pless, J. P. D., *J. Compos. Mater*, **28** (1994) 619.
- [19] Moldrup, P., Oleson, T., Komatsu, T., SchJønning, P., and Rolston, D. E., *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **65** (2001) 613.
- [20] Gerasimos, S., Armatas, P., and Pomonis, J., *Chem. Eng. Sci.*, **59** (2004) 5735.
- [21] Yu, B. M., and Li, J. H., *Chin. Phys. Lett.*, **21** (2004) 1569.
- [22] Yu, B. M., and Li, J. H., *Chin. Phys. Lett.*, **21_1_**, (2004) 117.
- [23] Yun, M. J., Yu, B. M., Zhang, B., and Huang, M. T., *Chin. Phys. Lett.*, **22** (2005) 1464.
- [24] Yun, M. J., Yu, B. M., Xu, P., and Wu, J. S., *Can. J. Chem. Eng.*, **84** (2006) 301.
- [25] Yu, B. M., Feng, Y. J., Zou, M. Q., and Huang, M. T., *Heat Transfer Eng.*, **27** (2006) 54.
- [26] Wheatcraft, S. W., and Tyler, S. W., *Water Resour. Res.*, **24** (1988) 566.
- [27] Yu, B. M., *Chin. Phys. Lett.*, **22_1_**(2005) 158.
- [28] Feng, Y. J., and Yu, B. M., *Fractals*, **15** (2007) 386.
- [29] Yu, B. M., and Cheng, P., *ASME J. Heat Transfer*, **124** (2002) 1117.
- [30] Xiao, B. Q., and Yu, B. M., *Int. J. Therm. Sci.*, **46** (2007) 426.
- [31] Yu, B. M., *Fractals*, **14** (2006) 111.
- [32] Yu, B. M., and Li, J. H., *Fractals*, **12**(1) (2004) 17.

- [33] Wu, J. S., and Yu, B. M., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **50** (2007) 3925.
- [34] Ergun, S., *Chem. Eng. Prog.*, **48** (1952) 89.
- [35] Denn, M. M., *Process Fluid Mechanics* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ) 1980
- [36] Chang, J. and Yortsos Y. C., *SPE Formation Evaluation*, **5** (1990) 31.
- [37] Acuna, J. A., and Yortsos, Y. C., *Water Resour. Res.*, **31** (1995) 527.
- [38] Acuna J. A., Ershaghi I. and Yortsos Y. C., *SPE Formation Evaluation*, **10** (1995) 173.
- [39] Adler, P. M., *J. Hydrol.*, **187** (1996)195.
- [40] Xu, P., and Yu, B. M., *Adv. Water Resour.*, **31** (2008)74.
- [41] Kozeny, J., *Sitzungsberchte Akademie Wisselkoers Wiener*, **136**, (1927) 271.
- [42] Carman, P. C., *Flow of Gases Through Porous Media* (Butterworths, London) 1956.
- [43] Zhang, B., Yu, B. M., Wang, H. X., and Yun, M. J., *Fractals*, **14** (2006) 171.
- [44] Li, Y. H., Yu, B. M., Chen, J., and Wang, C. Y., *Chem. Eng. Commun.*, **195** (2008) 1240.
- [45] Yun, M. J., Yu, B. M., and Cai, J. C., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **51** (2008) 1402.
- [46] Kong, X. Y., *Advanced Mechanics of Fluids in Porous Media* (Press of University of Science and Technology of China, Hefei, China) 1999.
- [47] Wakao, N., and Kaguei, S., *Heat and Mass Transfer in Packed Beds* (Gordon and Breach Science Publ., New York) 1982.
- [48] Hsu, C. T., and Cheng, P., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **33** (1990) 1587.
- [49] Dessemberger, R. B., and Tucker, C. T., *Polym. Compos.*, **16** (1995) 495.
- [50] Wen, C. Y., and Fan, L. T., *Models for Flow Systems and Chemical Reactors* (Dekker, New York) 1975.
- [51] Kamiuto, K., and Saitoh, S., *JSME Int. J., Ser. B*, **37** (1994) 554–559.
- [52] Chiu, H.-T., Yu, B. M., Chen, S. C., and Lee, L. J., *Chem. Eng. Sci.*, **55** (2000) 3365.
- [53] Yu, B. M., and Li, J. H., *Chin. Phys. Lett.*, **21** (2004) 117.
- [54] Coleman S. W. and Vassilicos J. C., *Phys. Rev. E*, **78** (2008) 016308.
- [55] Morais A. F. Seybold H., Herrmann H. J., Andrade J. S., *Physical Review Letters*, **103** (2009) 194502

CAPÍTULO 2

HIDRODINÁMICA PARA MEDIOS FRACTALES

Con el fin de describir los procesos dinámicos en el medio fractal, se revisa el trabajo de Tarasov [1], quien desarrolla la generalización fraccional de las ecuaciones de conservación de la masa, del momento, y la energía. En resumen Tarasov [1], obtiene la generalización fraccional de las ecuaciones de Navier-Stokes. En los capítulos 3 y 4 de la presente tesis, se utilizan estas ecuaciones para obtener los modelos matemáticos para flujos multifásicos en medios con porosidad fractal para aplicaciones en simulación de yacimientos de petróleo y aguas subterráneas.

2.1 El medio fractal y la integral fraccional

La piedra angular de los fractales es la dimensión fractal. El cálculo de la dimensión fractal se basa en el método Box-Counting [2,3]. Este método consiste en la medición del número de cajas necesarias para cubrir un determinado conjunto (línea, superficie o volumen) $N(L)$ en función de la escala L de los recubrimientos (o cajas).

Las propiedades del medio fractal como la masa obedece a una relación de ley de potencia

$$M(R) = kR^{D_m} \quad (D < 3), \quad (2.1)$$

donde M es la masa del medio de fractal, R es el tamaño de una caja (o radio de una esfera), y D_m es la dimensión fractal de masa. La cantidad de masa de un medio dentro de una caja de tamaño R tiene una relación de ley de potencia (2.1).

Considerar la región de W_A en el espacio Euclidiano tridimensional E^3 , donde A es el punto medio de esta región. El volumen de la región de W_A se denota por $V(W_A)$. Si la región de W_A es una bola de radio R_A , entonces el punto medio de A es el centro de la bola, y el volumen

$V(W_A) = (4/3)\pi R_A^3$. La masa de la región de W_A en el medio fractal se denota por $M_{D_m}(W_A)$, donde D_m es la dimensión de masa del medio.

La fractalidad del medio significa que la masa de este medio en cualquier región de W_A del espacio Euclidiano E^3 aumenta más lentamente que el volumen de esta región.

El medio fractal es llamado medio fractal homogéneo, si la ley de potencia (2.1) no depende de la traslación y la rotación de la región. La propiedad de homogeneidad del medio se puede formular en la forma: para todas las regiones W_A y W_B del medio fractal homogéneo tal que los volúmenes son iguales, $V(W_A) = V(W_B)$, se tiene que la masa de estas regiones son iguales $M_{D_m}(W_A) = M_{D_m}(W_B)$.

Para describir el medio fractal, debemos utilizar el modelo de medios continuos de tal manera que la fractalidad y las propiedades de la homogeneidad se puedan realizar en la forma:

(1) Fractalidad: La masa de la región de una bola W del medio fractal obedece a una relación de ley de potencia

$$M_{D_m}(W) = M_0 \left(\frac{R}{R_p} \right)^{D_m}, \quad (2.2)$$

donde $D_m < 3$ y R es el radio una bola. En el caso general, tenemos la relación de escalamiento

$$dM_{D_m}(\lambda W) = \lambda^{D_m} dM_{D_m}(W),$$

donde $\lambda W = \{\lambda x, x \in W\}$.

(2) Homogeneidad: La densidad local del medio de fractal es un valor invariante ante traslaciones y rotaciones que tiene la forma $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 = cte$.

Se pueden realizar estos requisitos por la generalización fraccional de la ecuación,

$$M_3(W) = \int_W \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (2.3)$$

Se define la integral fraccional en el espacio Euclidiano E^3 en la forma de Riesz [4] por la ecuación

$$(I^{D_m} \rho)(\mathbf{r}_0) = \int_W \rho(\mathbf{r}) dV_{D_m}, \quad (2.4)$$

donde $dV_{D_m} = c_3 d^3\mathbf{r}$, y

$$c_3 = c_3(D_m, r, r_0) = \frac{2^{3-D_m} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D_m/2)} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{D_m-3}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_k - x_{k0})^2}.$$

El punto $\mathbf{r}_0 \in W$ es el punto inicial de la integral fraccional. Para operaciones a futuro ponemos, $\mathbf{r}_0 = 0$. El factor numérico de la ecuación. (2.4), tiene esta forma a fin de obtener integral usual en el límite $D_m \rightarrow (3-0)$.

Usando la notación de la ecuación (2.4), podemos escribir la ecuación. (2.3) en la forma de $M_3(W) = (I^3 \rho)(\mathbf{r}_0)$. Por lo tanto, la generalización fraccional de esta ecuación se puede definir en la forma

$$M_{D_m}(W) = (I^{D_m} \rho)(\mathbf{r}_0) = \frac{2^{3-D_m} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D_m/2)} \int_W \rho(\mathbf{r}) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{D_m-3} d^3\mathbf{r}. \quad (2.5)$$

Si consideramos al medio de fractal homogéneo ($\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 = cte.$) y la región de una bola W , entonces se tiene

$$M_{D_m}(W) = \rho_0 \frac{2^{3-D_m} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D_m/2)} \int_W |\mathbf{R}|^{D_m-3} d^3\mathbf{R},$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Usando coordenadas esféricas, se tiene

$$M_{D_m}(W) = \frac{\pi 2^{5-D_m} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D_m/2)} \rho_0 \int_W R^{D_m-1} dR = \frac{\pi 2^{5-D_m} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D_m/2)} \rho_0 R^{D_m},$$

donde $R = |\mathbf{R}|$. Como resultado, se tiene que $M(W) \sim R^{D_m}$, es decir, se obtiene la ecuación. (2.2) bajo el factor numérico. Por lo tanto, el medio de fractal con dimensión de masa no entera D_m se puede describir por la integral fraccional de orden D_m . Tenga en cuenta que la interpretación de la integración fraccional está conectado con dimensión fraccional. Esta interpretación se desprende de las fórmulas de regularización dimensional [5]:

$$\int f(x) d^{D_m} x = \frac{2\pi^{D_m/2}}{\Gamma(D_m/2)} \int_0^\infty f(x) x^{D_m-1} dx. \quad (2.6)$$

Utilizando la ecuación. (2.6), se obtiene que la integral fraccional

$$\int_W f(x) dV_{D_m},$$

se puede considerar como una integral en el espacio de dimensión fraccional

$$\frac{\Gamma(D_m/2)}{2\pi^{D_m/2} \Gamma(D_m)} \int f(x) d^{D_m} x \quad (2.7)$$

donde $\frac{\Gamma(D_m/2)}{2\pi^{D_m/2} \Gamma(D_m)}$ es un factor numérico

2.2 Ecuación de balance de la densidad de masa

Consideremos la región W del medio. La frontera de esta región se denota por ∂D_m . Se supone que el medio en la región W tiene la dimensión de masas D_m . En general, el medio en la frontera ∂D_m tiene la dimensión D_b . En el caso general, la dimensión D_b no es igual a 2 y no es igual a $(D_m - 1)$.

El balance de la densidad de masa se describe mediante la ecuación

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{R}, t) dV_{D_m} = 0, \quad (2.8)$$

donde se usa $dM_{D_m}(W)/dt = 0$ y se sigue la siguiente notación:

$$dV_{D_m} = \frac{2^{3-D_m} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D_m/2)} |\mathbf{R}|^{D_m-3} dV_3, \quad dV_3 = d^3\mathbf{R}.$$

La integral (2.8) se considera para la región W que se mueve con el medio. El campo de la velocidad se denota por $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$. La derivada total del tiempo de la integral de volumen se define por la ecuación

$$\frac{d}{dt} \int_W A dV_{D_m} = \int_W \frac{\partial A}{\partial t} dV_{D_m} + \int_{\partial W} A u_n dS_{D_b}. \quad (2.9)$$

Aquí se define por $u_n(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = u_k n_k$, el vector $\mathbf{u} = u_k \mathbf{e}_k$, es un campo de velocidad, y $\mathbf{n} = n_k \mathbf{e}_k$ es un vector normal. La integral de superficie para la frontera ∂W se puede representar como una integral de volumen para la Región W . Para realizar la representación, se usa la generalización fraccional del teorema de Gauss [1]. Como resultado, se tiene la siguiente ecuación para la derivada total del tiempo (2.9) de la integral de volumen:

$$\frac{d}{dt} \int_W A dV_{D_m} = \int_W \left(\frac{\partial A}{\partial t} + c_3^{-1} \operatorname{div}(c_2 \mathbf{A} \mathbf{u}) \right) dV_{D_m}. \quad (2.10)$$

Para las dimensiones enteras $D_b = 2$ y $D_m = 3$, se tiene la ecuación usual o Euclidiana [6-8].

Notación que simplifican la forma de ecuaciones.

Generalización de la derivada en el tiempo total

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} = \frac{\partial}{\partial t} + c u_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (2.11)$$

donde el coeficiente c se define como

$$c = c(D_m, D_b, R) = c_3^{-1} c_2 = \frac{2^{D_m - D_b - 1} \Gamma(D_m/2)}{\Gamma(3/2) \Gamma(D_b/2)} |\mathbf{R}|^{D_b + 1 - D_m},$$

Tenga en cuenta que en medios con las dimensiones enteros ($D_b = 2$, $D_m = 3$), se tiene $c = 1$.

Generalización de la divergencia

$$\operatorname{Div}_{D_m}(\mathbf{u}) = c_3^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} (c_2 \mathbf{u}) = \frac{2^{D_m - D_b - 1} \Gamma(D_m/2)}{\Gamma(3/2) \Gamma(D_b/2)} |\mathbf{R}|^{3 - D_m} \operatorname{div}(|\mathbf{R}|^{D_b - 2} \mathbf{u}), \quad (2.12)$$

Generalización de derivada con respecto a las coordenadas

$$\nabla_k^D A = c_3^{-1} \frac{\partial c_2 A}{\partial x_k} = \frac{2^{D_m - D_b - 1} \Gamma(D_m/2)}{\Gamma(3/2) \Gamma(D_b/2)} |\mathbf{R}|^{3 - D_m} \frac{\partial}{\partial x_k} |\mathbf{R}|^{D_b - 2} A. \quad (2.13)$$

$$\text{Aquí} \quad \operatorname{Div}_{D_m} = \mathbf{e}_k \nabla_k^{D_m} \quad \text{y} \quad \operatorname{Div}_{D_m}(\mathbf{A} \mathbf{u}) = \nabla_k^{D_m}(A u_k).$$

Notar que no se satisface

$$\nabla_k^{D_m}(AB) \neq A\nabla_k^{D_m}(B) + B\nabla_k^{D_m}(A).$$

El operador satisface la siguiente regla:

$$\nabla_k^{D_m}(AB) = A\nabla_k^{D_m}(B) + cB \frac{\partial A}{\partial x_k}. \quad (2.14)$$

Notar que $\nabla_k^{D_m}(1) \neq 0$, y se tiene

$$\nabla_k^{D_m}(1) = \frac{c(d-2)x_k}{R^2}.$$

Usando estas notaciones, se reescribe la ecuación (2.10) para la derivada total del tiempo de la integral en una forma equivalente

$$\frac{d}{dt} \int_W A dV_{D_m} = \int_W \left[\left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} A + A \text{Div}_{D_m}(\mathbf{u}) \right] dV_{D_m}. \quad (2.15)$$

Para obtener la generalización fraccionaria de la ecuación de continuidad, se considera $A = \rho(\mathbf{R}, t)$ en la ecuación (2.15) y la ecuación de balance de masa (2.8). Sustituyendo $A = \rho(\mathbf{R}, t)$ en la ecuación (2.15), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dV_{D_m} = \int_W \left[\left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} \rho + \rho \text{Div}_{D_m}(\mathbf{u}) \right] dV_{D_m}. \quad (2.16)$$

Por lo tanto la ecuación de balance de masa (2.8) tiene la forma

$$\int_W \left[\left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} \rho + \rho \text{Div}_{D_m}(\mathbf{u}) \right] dV_{D_m} = 0.$$

Esta ecuación se cumple para todas las regiones W . Por lo tanto, se tiene la ecuación fraccionaria de la continuidad.

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{D_m} \rho + \rho \text{Div}_{D_m}(\mathbf{u}) = 0 \quad (2.17)$$

La generalización fraccional de la ecuación de continuidad tiene la forma

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{D_m} \rho = -\rho \nabla_k^{D_m} u_k.$$

La ecuación de continuidad se puede reescribir en una forma equivalente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{2^{D_m - D_b - 1} \Gamma(D_m/2)}{\Gamma(3/2) \Gamma(D_b/2)} |\mathbf{R}|^{3 - D_m} \text{div}(|\mathbf{R}|^{D_b - 2} \rho \mathbf{u}) = 0,$$

usando

$$\text{grad} |\mathbf{R}|^{D_b - 2} = \frac{\partial |\mathbf{R}|^{D_b - 2}}{\partial \mathbf{R}} = (D_b - 2) |\mathbf{R}|^{D_b - 3} \frac{\partial |\mathbf{R}|}{\partial \mathbf{R}} = (D_b - 2) |\mathbf{R}|^{D_b - 4} \mathbf{R},$$

Ecuación de continuidad en la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{R}} + c \rho \left[\text{div}(\mathbf{u}) + (D_b - 2) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^2} \right] = 0,$$

donde

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{R} = u_k x_k.$$

Para un medio homogéneo, se tiene $\rho = cte.$, y la ecuación de continuidad se simplifica a la ecuación

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) + (D_b - 2) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^2} = 0.$$

Por lo tanto se tienen campos de velocidad no solenoidales ($\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{R} \neq 0$).

Para obtener la ecuación de la densidad del momento, consideramos la fuerza de la masa y la fuerza de superficie.

2.3 Ecuación de balance de la densidad de momento

Sea la fuerza $\mathbf{f} = f_k \mathbf{e}_k$ una función del punto (\mathbf{R}, t) en el espacio-tiempo. La fuerza \mathbf{F}^M que actúa sobre la masa $M_{D_m}(W)$ de la región del medio W , se define por

$$\mathbf{F}^M = \int_W \rho(\mathbf{R}, t) \mathbf{f}(\mathbf{R}, t) dV_{D_m}. \quad (2.20)$$

La fuerza \mathbf{F}^S , que actúa sobre la superficie de frontera ∂W de la región del medio continuo, se define por

$$\mathbf{F}^S = \int_{\partial W} \mathbf{p}_n(\mathbf{R}, t) dS_{D_b}, \quad (2.21)$$

donde $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{R}, t)$ es una densidad de la fuerza en la superficie, y $\mathbf{p}_n = p_{kl} n_k \mathbf{e}_k$. Aquí, $\mathbf{n} = n_k \mathbf{e}_k$ es un vector normal.

Se define la ecuación del momento \mathbf{P} de la masa del medio de la región W . Si la masa $dM_{D_m}(W) = \rho(\mathbf{R}, t) dV_{D_m}$ se mueve con velocidad \mathbf{u} , entonces el momento de esta masa es $d\mathbf{P} = dM_{D_m}(W) \mathbf{u} = \rho \mathbf{u} dV_{D_m}$. El momento \mathbf{P} de la masa de la región W se define por la ecuación

$$\mathbf{P} = \int_W \rho(\mathbf{R}, t) \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) dV_{D_m}. \quad (2.22)$$

La ecuación de balance de la densidad de momento

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^M + \mathbf{F}^S. \quad (2.23)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.20)-(2.22) en la ecuación (2.23), obtenemos la ecuación de equilibrio en la forma

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{R}, t) \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) dV_{D_m} = \int_W \rho(\mathbf{R}, t) \mathbf{f}(\mathbf{R}, t) dV_{D_m} + \int_{\partial W} \mathbf{p}_n(\mathbf{R}, t) dS_{D_b} \quad (2.24)$$

Por otro lado, la integral de superficie se puede representar como la siguiente integral de volumen:

$$\int_{\partial W} \mathbf{p}_n dS_{D_b} = \int_{\partial W} c_2 \mathbf{p}_n dS_2 = \int_W \frac{\partial(c_2 \mathbf{p}_l)}{\partial x_l} c_3^{-1} dV_{D_m} = \int_W \nabla_i^{D_m} \mathbf{p}_l dV_{D_m}.$$

La ecuación de equilibrio de la densidad de momento se puede escribir para las componentes de los vectores $\mathbf{u} = u_k \mathbf{e}_k$, $\mathbf{f} = f_k \mathbf{e}_k$, y $\mathbf{p}_l = p_{kl} \mathbf{e}_k$, en la forma

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho u_k dV_{D_m} = \int_W (\rho f_k + \nabla_i^{D_m} p_{kl}) dV_{D_m}.$$

La relación para derivada de la integral de volumen con respecto al tiempo tiene la forma (2.15).

Usando la relación para $A = \rho u_k$, se obtiene la ecuación de la derivada total en el tiempo de la integral

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho u_k dV_{D_m} = \int_W \left[\left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} (\rho u_k) + (\rho u_k) \text{Div}_{D_m}(\mathbf{u}) \right] dV_{D_m}. \quad (2.25)$$

Por lo tanto, podemos reescribir la densidad de balance en el momento (2.24) en la forma

$$\int_W \left[\left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} (\rho u_k) + (\rho u_k) \text{Div}_{D_m} (\mathbf{u}) - \rho f_k - \nabla_l^{D_m} p_{kl} \right] dV_{D_m} = 0.$$

Esta ecuación se cumple para todas las regiones W . Por lo tanto,

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} (\rho u_k) + (\rho u_k) \text{Div}_{D_m} (\mathbf{u}) - \rho f_k - \nabla_l^{D_m} p_{kl} = 0.$$

Usando la regla de diferenciación, para un producto de funciones, con respecto al tiempo

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} (\rho u_k) = \rho \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} u_k + u_k \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} \rho,$$

se obtiene la siguiente forma de las ecuaciones:

$$\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} u_k + u_k \left[\left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} \rho + \rho \text{Div}_{D_m} (\mathbf{u}) \right] - \rho f_k - \nabla_l^{D_m} p_{kl} = 0.$$

Utilizando la ecuación de continuidad, se reduce la ecuación fraccional de conservación de la densidad de momento a la forma

$$\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} u_k = \rho f_k + \nabla_l^{D_m} p_{kl}. \quad (2.26)$$

Estas ecuaciones se pueden llamar la ecuación de conservación o de balance de del momento del medio fractal.

2.4 Ecuación de balance de la densidad de energía

En el caso general, la energía interna para el medio inhomogéneo es una función del punto (\mathbf{R}, t) en el espacio-tiempo: $e = e(\mathbf{R}, t)$. La energía interna dE de la masa $dM_{D_m}(W)$ es igual a $dE = e(\mathbf{R}, t)\rho(\mathbf{R}, t)dV_{D_m}$. La energía interna de la masa de la región W se define por la ecuación

$$E = \int_W \rho(\mathbf{R}, t)e(\mathbf{R}, t)dV_{D_m}.$$

La energía cinética dT de la masa $dM_{D_m}(W) = \rho dV_{D_m}$, que se mueve con la velocidad $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$, es igual a

$$dT = dM_D \frac{\mathbf{u}^2}{2} = \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} dV_D.$$

La energía cinética de la masa de la región W es

$$T = \int_W \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} dV_D.$$

La energía total es la suma de las energías cinética e interna

$$U = T + E = \int_W \rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e \right) dV_D.$$

El cambio de la energía total se define por

$$U(t_2) - U(t_1) = A_M + A_S + Q_S,$$

donde A_M es el trabajo de las fuerzas de la masa; A_S es el trabajo de las fuerzas de superficie; Q_S es la afluencia de calor en la región.

La masa $dM_{D_m}(W) = \rho dV_{D_m}$ está sometida a la fuerza $\mathbf{f}\rho dV_{D_m}$. El trabajo de esta fuerza es $(\mathbf{u}, \mathbf{f})\rho dV_{D_m} dt$, donde $(\mathbf{u}, \mathbf{f}) = u_k f_k$. El trabajo de las fuerzas de la masa para la región W en el intervalo de tiempo $[t_1; t_2]$ se define por la siguiente ecuación:

$$A_M = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_W \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \rho dV_{D_m}.$$

El elemento de superficie dS_{D_b} está sometida a la fuerza $\mathbf{p}_n dS_{D_b}$. El trabajo de esta fuerza es $(\mathbf{p}_n, \mathbf{u}) dS_{D_b} dt$. El trabajo de las fuerzas de superficie para la región W en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ se define por la siguiente ecuación:

$$A_S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial W} \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n dS_{D_b}.$$

La afluencia de calor en la región W a través de la superficie ∂W se define por

$$Q_S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial W} \hat{q}_n dS_{D_b},$$

donde $\hat{q}_n = (\mathbf{n}, \hat{\mathbf{q}}) = n_k \hat{q}_k$ es la densidad del flujo de calor. Aquí \mathbf{n} es el vector normal.

La velocidad del cambio de energía total es igual a la suma de la potencia de la fuerza de la masa y la potencia de las fuerzas de superficie, y el flujo de energía a través de la superficie:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e \right) dV_{D_m} = \int_W (\mathbf{u}, \mathbf{f}) \rho dV_{D_m} + \int_{\partial W} (\mathbf{u}, \mathbf{p}_n) dS_{D_b} + \int_{\partial W} q_n dS_{D_b}. \quad (2.27)$$

Utilizando la ecuación (2.15) para $A = \rho(\mathbf{u}^2/2 + e)$, podemos reescribir la parte izquierda de la ecuación (2.27) en el forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_W \rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e \right) dV_{D_m} &= \int_W \left[\left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} \rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e \right) + \rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e \right) \text{Div}_{D_m} \mathbf{u} \right] dV_{D_m} \\ &= \int_W \left[\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e \right) + \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} \rho + \rho \text{Div}_{D_m} \mathbf{u} \right] \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e \right) dV_{D_m}. \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación de continuidad, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e \right) dV_{D_m} = \int_W \left[\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e \right) \right] dV_{D_m} = \int_W \left[\rho \mathbf{u} \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} \mathbf{u} + \rho \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} e \right] dV_{D_m}. \quad (2.28)$$

Las integrales de superficie en el lado derecho de la ecuación (2.27) se puede representar como integrales de volumen

$$\int_{\partial W} \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n dS_{D_b} = \int_W \nabla_k^{D_m} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dV_{D_b}, \quad (2.29)$$

y

$$\int_{\partial W} \hat{q}_n dS_{D_b} = \int_W \nabla_k^{D_m} q_k dV_{D_m}, \quad (2.30)$$

Substituyendo las ecuaciones (2.28)-(2.30) en la ecuación (2.27), se obtiene

$$\int_W \left[\rho \mathbf{u} \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} \mathbf{u} + \rho \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} e \right] dV_{D_m} = \int_W \left[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) \rho + \nabla_l^{D_m} (\mathbf{p}_l \cdot \mathbf{u}) + \nabla_k^{D_m} \hat{q}_k \right] dV_{D_m}. \quad (2.31)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en una forma equivalente

$$\int_W \left[\rho u_k \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} u_k + \rho \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} e \right] dV_{D_m} = \int_W \left[\rho u_k f_k + \nabla_l^{D_m} (p_{kl} u_k) + \nabla_k^{D_m} \hat{q}_k \right] dV_{D_m}. \quad (2.32)$$

Multiplicando ambos lados a la ecuación de balance de momento (2.26) por las componentes u_k del vector \mathbf{u} y sumando con respecto a k de 1 a 3, se obtiene la ecuación.

$$\rho u_k \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} u_k = \rho u_k f_k + u_k \nabla_l^{D_m} p_{kl}. \quad (2.33)$$

Substituyendo la ecuación (2.33) en la ecuación (2.34), se obtiene

$$\int_W \left[\rho u_k f_k + u_k \nabla_l^{D_m} p_{kl} + \rho \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} e \right] dV_{D_m} = \int_W \left[\rho u_k f_k + \nabla_l^{D_m} (p_{kl} u_k) + \nabla_k^{D_m} \hat{q}_k \right] dV_{D_m}. \quad (2.34)$$

Usando la ecuación (2.14) en la forma

$$\nabla_l^{D_m} (p_{kl} u_k) = u_k \nabla_l^{D_m} p_{kl} + c p_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}$$

Se obtiene

$$\int_W \left[\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} e - c p_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \nabla_k^{D_m} \hat{q}_k \right] dV_{D_m} = 0 \quad (2.35)$$

Esta ecuación se satisface para todas las regiones de W . Por lo tanto, se obtiene la ecuación de balance en la energía en la forma

$$\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} e = c p_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \nabla_k^{D_m} \hat{q}_k. \quad (2.36)$$

2.5 Ecuaciones de Navier-Stokes para medios fractales

En resumen los modelos de hidrodinámica, para describir el comportamiento de flujo de fluidos en medios porosos con estructura fractal, son representados por las ecuaciones de Navier-Stokes:

1. Ecuación fraccional de continuidad

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} \rho = -\rho \nabla_k^{D_m} u_k. \quad (2.37)$$

2. Ecuación fraccional de balance de la densidad de momento

$$\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} u_k = \rho f_k + \nabla_l^{D_m} p_{kl}. \quad (2.38)$$

3. Ecuación fraccional de balance de la densidad de energía

$$\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} e = c p_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \nabla_k^{D_m} \hat{q}_k. \quad (2.39)$$

Se suma sobre índices repetidos k y l de 1 a 3. Se usa la siguiente notación.

$$\nabla_k^{D_m} A = a R^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_k} (R^{D_b-2} A). \quad (2.40)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{D_m} = \frac{\partial}{\partial t} + c u_l \frac{\partial}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial t} + a R^{D_b+1-D_m} u_l \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad (2.41)$$

donde

$$c = c(D_m, D_b, R) = a R^{D_b+1-D_m}, \quad a = a(D_m, D_b) = \frac{2^{D_m-D_b-1} \Gamma(D_m/2)}{\Gamma(3/2) \Gamma(D_b/2)}, \quad R = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2}$$

$\rho(\mathbf{R}, t)$ es la densidad, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$ es el campo de velocidad, $e = e(\mathbf{R}, t)$ es la energía interna, $p_{kl} = p_{kl}(\mathbf{R}, t)$ es el tensor de tensión de viscosidad, $\hat{q}_k = \hat{q}_k(\mathbf{R}, t)$ es el vector del flujo de calor tales que:

$$p_{kl} = -p \delta_{kl} + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right); \quad \hat{q}_k = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k},$$

donde $T(\mathbf{R}, t)$ es el campo de temperatura y λ es la conductividad de calor.

2.6 Ecuaciones de Hidrodinámica fractal en forma matricial

Reescribiendo las ecuaciones (2.37)-(2.39), como generalmente se hace en el sistema Euclidiano [9-15], se tiene lo siguiente:

Conservación de masa

$$\frac{R^{D_m-3}}{a} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (R^{D_b-2} \rho u_l) = 0 \quad (2.42)$$

Conservación de momento

$$\frac{R^{D_m-3}}{a} \frac{\partial \rho u_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (R^{D_b-2} \rho u_k u_l) - \frac{\partial}{\partial x_l} (R^{D_b-2} \tau_{kl}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (R^{D_b-2} p) - \frac{R^{D_m-3}}{a} \rho f_k = 0 \quad (2.43)$$

Conservación de energía

Energía total

$$U = E_{cinetica} + E_{Interna} = \frac{u_l u_l}{2} + e$$

$$\begin{aligned} & \frac{R^{D_m-3}}{a} \frac{\partial (\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (R^{D_b-2} \rho u_l U) \\ & + \frac{\partial (R^{D_b-2} p u_l)}{\partial x_l} - \frac{\partial (R^{D_b-2} \tau_{kl} u_k)}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(R^{D_b-2} \lambda \frac{\partial T}{\partial x_l} \right) - \frac{R^{D_m-3}}{a} \rho f_l u_l = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde:

$$\tau_{kl} = \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right)$$

Las ecuaciones anteriores las podemos escribir en forma matricial de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \frac{R^{D_m-3}}{a} \frac{\partial(\Phi)}{\partial t} + \nabla \mathbf{F} + \nabla \mathbf{G} + \mathbf{Q} &= \mathbf{0} \\ \text{ó} \\ \frac{R^{D_m-3}}{a} \frac{\partial(\Phi)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_l}{\partial x_l} + \frac{\partial \mathbf{G}_l}{\partial x_l} + \mathbf{Q} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Donde Φ son las variables de conservación de flujo, \mathbf{F}_l son las variables de convección del flux, \mathbf{G}_l son las variables de difusión del flux, \mathbf{Q} son los términos de fuentes. El termino R^{D_m-3} no lo podemos meter dentro del operador $\frac{\partial}{\partial t}$, es decir no se cumple $\frac{1}{a} \frac{\partial(R^{D_m-3}\Phi)}{\partial t} = \frac{R^{D_m-3}}{a} \frac{\partial(\Phi)}{\partial t}$, ya que $R=R(x,y,z)$ y cada una de sus componente dependen del tiempo ($x=x(t),y=y(t),z=z(t)$).

Con:

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho U \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_1 = \begin{Bmatrix} R^{D_b-2} \rho u_1 \\ R^{D_b-2} \rho u_1^2 + R^{D_b-2} p \\ R^{D_b-2} \rho u_1 u_2 \\ R^{D_b-2} \rho u_1 u_3 \\ R^{D_b-2} \rho u_1 U + R^{D_b-2} p u_1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}_2 = \begin{Bmatrix} R^{D_b-2} \rho u_2 \\ R^{D_b-2} \rho u_1 u_2 \\ R^{D_b-2} \rho u_2^2 + R^{D_b-2} p \\ R^{D_b-2} \rho u_2 u_3 \\ R^{D_b-2} \rho u_2 U + R^{D_b-2} p u_2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}_3 = \begin{Bmatrix} R^{D_b-2} \rho u_3 \\ R^{D_b-2} \rho u_1 u_3 \\ R^{D_b-2} \rho u_2 u_3 \\ R^{D_b-2} \rho u_3^2 + R^{D_b-2} p \\ R^{D_b-2} \rho u_3 U + R^{D_b-2} p u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_1 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -R^{D_b-2}\tau_{11} \\ -R^{D_b-2}\tau_{21} \\ -R^{D_b-2}\tau_{31} \\ -R^{D_b-2}(\tau_{11}u_1 + \tau_{21}u_2 + \tau_{31}u_3) + R^{D_b-2}\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \end{array} \right\} \quad \mathbf{G}_2 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -R^{D_b-2}\tau_{12} \\ -R^{D_b-2}\tau_{22} \\ -R^{D_b-2}\tau_{32} \\ -R^{D_b-2}(\tau_{12}u_1 + \tau_{22}u_2 + \tau_{32}u_3) + R^{D_b-2}\lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{G}_3 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -R^{D_b-2}\tau_{13} \\ -R^{D_b-2}\tau_{23} \\ -R^{D_b-2}\tau_{33} \\ -R^{D_b-2}(\tau_{13}u_1 + \tau_{23}u_2 + \tau_{33}u_3) + R^{D_b-2}\lambda \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{Q} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{R^{D_m-3}}{a}\rho f_1 \\ \frac{R^{D_m-3}}{a}\rho f_2 \\ -\frac{R^{D_m-3}}{a}\rho f_3 \\ -\frac{R^{D_m-3}}{a}\rho(f_1u_1 + f_2u_2 + f_3u_3) \end{array} \right\}$$

donde:

$$\tau_{kl} = \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right)$$

El sistema de ecuaciones fraccionarias de Navier-Stokes (2.45) se simplifica a las ecuaciones fraccionarias de Euler si el término de las variables de difusión del flux G_i se desprecia. Otras formas diferentes correspondiente al fenómeno físico particular, se pueden obtener del sistema de ecuaciones fraccionarias de Navier-Stokes, ver figura 2.1.

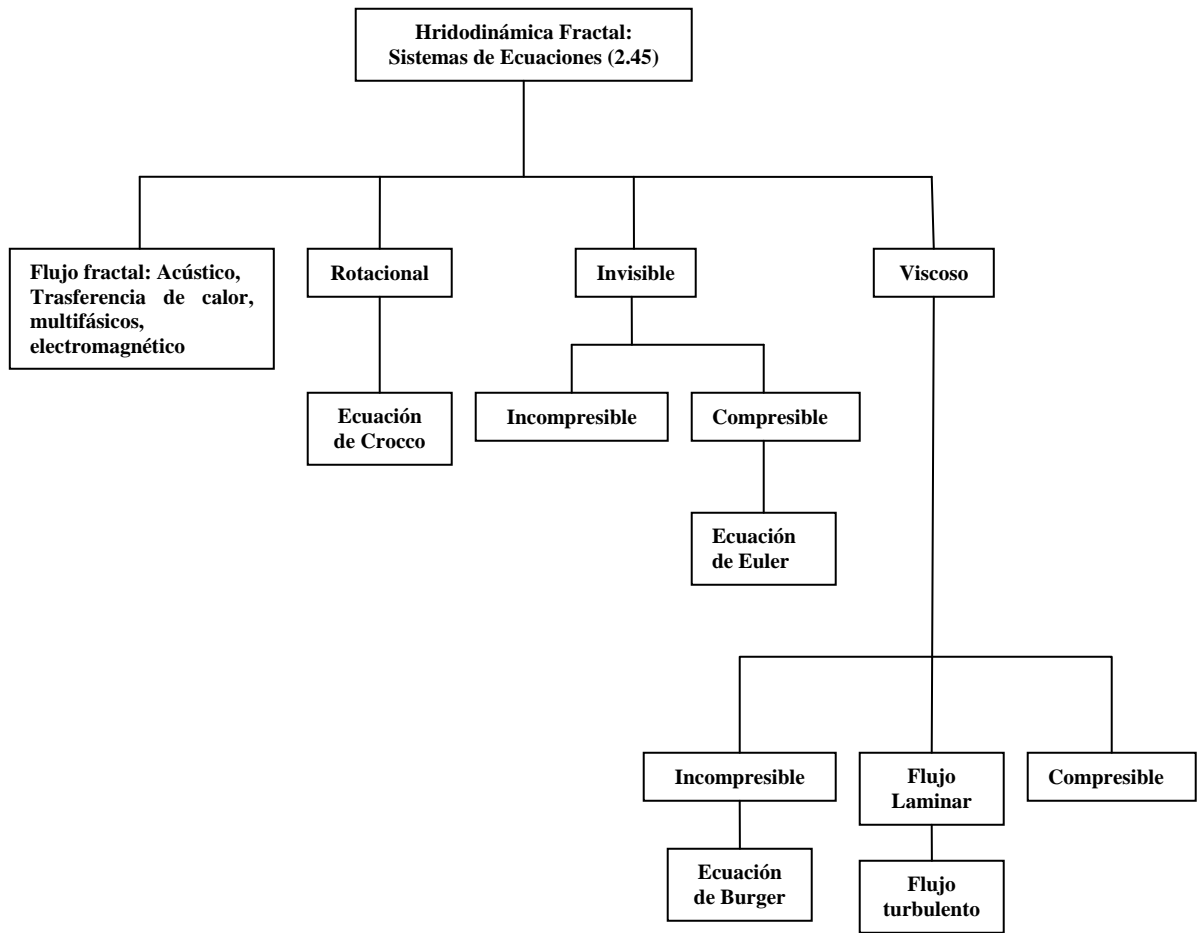


Figura 2.1 Varios tipos de flujos para las ecuaciones de hidrodinámica fractal.

Referencias

- [1] Tarasov V. E., *Ann. Phys.*, **318** (2005) 286.
- [2] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (W.H. Freeman and Company, New York)1983.
- [3] M. Schroeder, *Fractals, Chaos, Power Laws* (W.H. Freeman, New York) 1990.
- [4] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Integrals and Derivatives of Fractional Order and Applications* (Nauka i Tehnika, Minsk) 1987
- [5] J.C. Collins, *Renormalization*, Cambridge (Cambridge University Press) 1984.
- [6] Batchelor G.T., *An introduction to fluid dynamics* (Cambridge University Press) 1967.
- [7] Lamb H., *Hydrodynamics* (Cambridge University Press) 1975.
- [8] Ciurrie G.I., *Fundamental Mechanics of Fluid-Third Edition* (Marcel Dekker) 2003.
- [9] Date A. W., *Introduction to Computational Fluid Dynamics* (Cambridge University Press) 2005.
- [10] Groth C. and Zingg D.W.,*Computational Fluid Dynamics* (Springer)2004.
- [11]Chung T. J., *Computational Fluid Dynamics* (Cambridge University Press) 2002
- [12]Peyret R. *Handbook of Computational Fluid Mechanics* (Elsevier Science & Technology Books) 1996
- [13] Thomas H. P.,*Notes on Solution Methods In Computational Fluid Dynamics*
(http://people.nas.nasa.gov/~pulliam/mypapers/vki_notes/vki_notes.html)
- [14] Pozrikidis C., *Fluid Dynamics Theory, Computation, and Numerical Simulati3n-Second Edition* (Springer) 2009.
- [15] Charles H., *Numerical Computati3n of Internal & External Flows, Volume 1 Fundamentals of Computational Fluid Dynamics-Secons Edition* (Elsevier,Butterworth-Heinemann) 2007.

CAPÍTULO 3

MODELOS FISICO-MATEMÁTICOS PARA FLUJOS MULTIFÁSICOS EN MEDIOS CON POROSIDAD FRACTAL

La simulación de yacimientos es el arte de combinar la física, las matemáticas, la ingeniería de yacimientos y la programación de computadoras [1]. El objetivo principal de la simulación de yacimientos de petróleo es predecir el rendimiento futuro del yacimiento y encontrar los medios de optimizar la recuperación de los hidrocarburos bajo varias condiciones de operación. Esto involucra cuatro principales etapas relacionadas entre sí; primero la creación de modelos físicos, segundo el desarrollo de modelos matemáticos, tercero la discretización de estos modelos, y cuarto el diseño de algoritmos de computadora, como se observa en la figura 3.1. Primero, un modelo físico se refiere a la aplicación de principios y leyes que gobiernan la naturaleza. Segundo, un modelo matemático consiste de un conjunto de ecuaciones, por lo general, diferenciales parciales que junto con un adecuado conjunto de condiciones iniciales y / o de frontera describen el flujo de líquidos en un yacimiento de petróleo. Tercero, un modelo numérico con las propiedades básicas tanto de los modelos físicos y matemáticos se derivan y se analizan. Cuarto, los algoritmos computacionales se desarrollan para resolver eficientemente los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales y no lineales que surgen de la discretización numérica [1-4].

Modelos convencionales de flujos multifásicos para simular los hidrocarburos en un yacimiento han sido desarrollados bajo la suposición de que los yacimientos son homogéneos [1-5]. Sin embargo un yacimiento es altamente heterogéneo, rugoso con fracturas distribuidas aleatoriamente, es decir, es un sistema altamente complejo. Para tratar con el problema, se ha demostrado que la teoría fractal se puede aplicar para expresar geometrías complejas e irregulares [19]. Entonces, aplicando la generalización de la hidrodinámica fractal sugerido por Tarasov [6], este capítulo está dedicado al desarrollo de modelos matemáticos para una amplia variedad de flujos de fluidos en medios con porosidad fractal, incluyendo una fase, dos fases, aceite negro, de flujo monofásico con multicomponentes y de composición. Hasta donde se sabe esta generalización en tres dimensiones para flujo fractal no ha sido reportada en la literatura, y pueden tener muchas aplicaciones en la industria del petróleo.



Figura 3.1. Esquema de la simulación de un sistema físico, por ejemplo un yacimiento de hidrocarburos o acuífero.

3.1 Ecuación de difusión de presión para flujo fractal en una sola fase

En la fase inicial, un yacimiento por lo general contiene un único fluido como el petróleo o el gas. A menudo, la presión en esta etapa es tan alta que el petróleo o el gas es producido por la simple descompresión natural del yacimiento, es decir sin ningún esfuerzo de bombeo en los pozos. Esta etapa se le conoce como recuperación primaria, y termina cuando la presión del aceite o del gas está en equilibrio con la presión atmosférica. En esta sección, se considera el transporte de un fluido newtoniano que ocupa todo el vacío en un medio poroso con estructura fractal a condiciones isotérmicas. Las variables espaciales y temporales serán representadas por $\mathbf{R} = (x_1, x_2, x_3)$ y t , por ρ y $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ la densidad y la velocidad del fluido. Las ecuaciones que rigen el flujo monofásico de un fluido (una sola componente o una mezcla homogénea) en un medio poroso fractal se dan por la conservación de la masa fraccional, la ley de Darcy para flujo fractal, y una ecuación de estado, es decir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_i} (R^{D_b-2} \rho u_i) \quad (3.1)$$

$$u_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial x_j} - \rho g \left(\frac{R^{D_m-D_b-1}}{a} \right) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right], \quad (3.2)$$

ecuación de estado en términos de la compresibilidad isotérmica del fluido c_f

$$c_f = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad (3.3)$$

donde k_{ij} es el tensor de permeabilidad del medio poroso, μ es la viscosidad del fluido, g es la magnitud de la gravedad, h es la profundidad y p es la presión del fluido.

Antes de seguir, a continuación se justifica la Ec. (3.2), es decir, se obtiene un análogo de la ecuación de Darcy para flujo fractal. Para flujo laminar, de la ecuación de conservación de momento en la forma (ver capítulo 2),

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_D u_k = \rho f_k + \nabla_l^D p_{kl},$$

con

$$p_{kl} = -p \delta_{kl} + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right),$$

se obtiene

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_D u_k}_{F_Inercial} = \underbrace{\rho f_k}_{F_gravidad} - \underbrace{\nabla_k^D p}_{F_gradiente_presion} + \underbrace{\mu \nabla_l^D \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right)}_{F_viscosidad}$$

El número de Reynolds expresa la razón entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas.

$$\frac{\bar{F}_{inercial}}{\bar{F}_{viscous}} = \text{Re}$$

Cuando $\text{Re} \ll 1$ las fuerzas de inercia son tan insignificantes en comparación con las fuerzas viscosas que pueden ser despreciadas, es decir tienden a cero. Los flujos con $\text{Re} \ll 1$ se denominan flujos de arrastre (**Creeping Flow**) o flujos de Stokes. Valores típicos para flujos de agua subterránea muestran que $\text{Re} \ll 1$ en casi todos los casos, lo que significa que no necesitamos mantener el término de aceleración (que producen las fuerzas de inercia) en las ecuaciones de Navier-Stokes. Entonces las ecuaciones se convierten en:

$$0 = \underbrace{\rho f_k}_{F_gravidad} - \underbrace{\nabla_k^D p}_{F_gradiente_presion} + \underbrace{\mu \nabla_l^D \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right)}_{F_viscosidad}$$

Por otro lado, según las leyes de Newton, la fuerza de fricción viscosa es proporcional a la velocidad relativa de movimiento de las capas del medio, es decir la fuerza de resistencia viscosa es proporcional a la velocidad y opuesta en dirección

$$\bar{F}_{viscosa} \approx -a R^{D_b+1-D_m} \frac{\mu u_k}{k}$$

Así,

$$0 = \rho f_k - a(D, d) R^{d+1-D} \frac{\partial p}{\partial x_k} - a(D, d) R^{d+1-D} \frac{\mu}{k_{kl}} u_k$$

En un campo gravitacional ($\bar{U} = \tilde{g}h, f_k = \tilde{g}(\partial h / \partial x_k)$), donde \tilde{g} es la aceleración de la gravedad, se tiene

$$u_k = -\frac{k_{kl}}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial x_k} - \rho \tilde{g} \left(\frac{R^{D_m - D_b - 1}}{a} \right) \frac{\partial h}{\partial x_k} \right], \quad (3.4)$$

donde k_{kl} es el tensor de permeabilidad dependiente de la escala. Notar que para el flujo fractal con dimensión fractal de frontera igual a

$$D_b = D_m - 1 \quad (3.5)$$

la ec. (3.4) difiere de la ley de Darcy clásica (ver [1-5]) solo por la constante a , mientras para un flujo Euclidiano con $D_b = D_m - 1 = d - 1$, donde d es la dimensión Euclidiana (en el espacio tres dimensional $d = 3$), la ec. (3.4) obedece la forma clásica de la ecuación de Darcy.

Ahora para obtener la ecuación de difusión de presión para flujo fractal en una sola fase de un fluido ligeramente compresible en el espacio de tres dimensiones, se sustituye la Ec. (3.2) en la Ec. (3.1), y se utiliza la Ec. (3.3) quedando de la siguiente forma

$$c_f \mu \frac{\partial p}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b - 2} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) - \rho g \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m - 3} k_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \right], \quad (3.6)$$

donde el tensor de permeabilidad k_{ij} es generalmente anisotrópico y depende de la porosidad (ϕ) y de las variables espaciales $\{x_i\}$. Notar que la Ec. (3.6) difiere de las ecuaciones de cambio de presión en tres dimensiones usadas en [65-67], mientras que para el flujo Euclidiano en tres dimensiones la Ec. (3.6) coincide con la ecuación clásica (ver [1,2]) con $D_m = d = 3$, $D_b = d - 1 = 2$, $k_{ij} = k_{ij}(\phi)$ y $a = 1$. La ecuación de difusión (3.6) es considerada como una de las expresiones matemáticas más importantes y que se puede utilizar en ingeniería del petróleo. Para yacimientos y pozos con geometría conocida $h(x_i)$ y permeabilidad hidráulica k_{ij} , la Ec. (3.6),

con apropiadas condiciones iniciales y de frontera (dentro y fuera), se puede usar para modelar los cambios de presión del flujo fractal. Aquí, cabe señalar que la escala y la dependencia espacial del tensor de permeabilidad k_{ij} se determina por la geometría fractal del poro y/o canales de fractura.

En las figuras 3.1 y 3.2 muestran un esquema del medio poroso fractal con geometrías cilíndrica y esférica, los puntos representan una red de poros o red de fracturas. En coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , comúnmente usada en modelos de cambios de presión [2], la Ec. (3.6) tiene la forma,

$$c_f \mu \frac{\partial p}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[\begin{aligned} & \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r R^{D_b-2} k \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \rho g \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r R^{D_m-3} k \frac{\partial h}{\partial r} \right) \\ & + \frac{a}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(R^{D_b-2} k \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) - \rho g \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(R^{D_m-3} k \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \\ & + a \frac{\partial}{\partial z} \left(R^{D_b-2} k \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \rho g \frac{\partial}{\partial z} \left(R^{D_m-3} k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \end{aligned} \right] \quad (3.7)$$

Donde $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ y $k = k(r, \theta, z)$, mientras para un medio poroso isotrópico la permeabilidad hidráulica es de la forma $k = k(r)$.

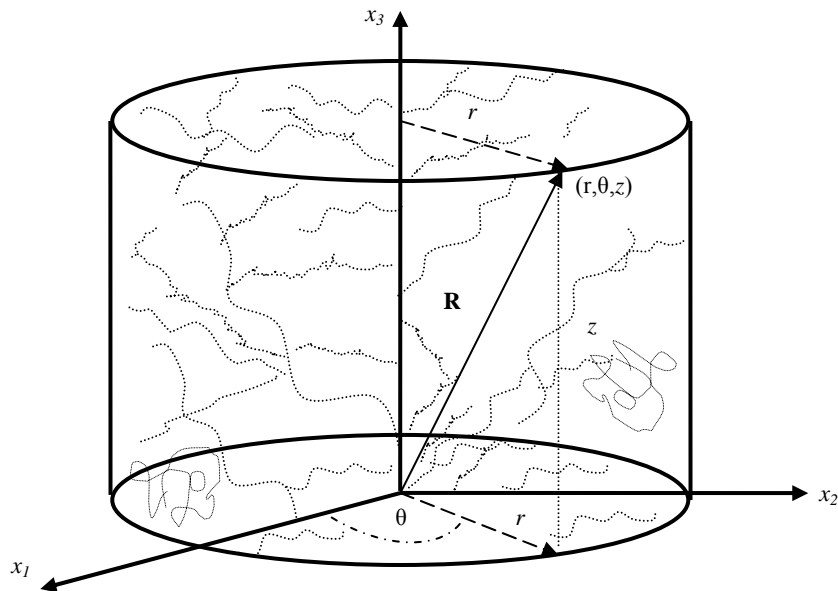


Figura 3.2. Esquema del medio poroso fractal con geometría cilíndrica

En coordenadas esféricas la ecuación (3.6) se transforma en

$$c_f \mu \frac{\partial p}{\partial t} = \left[\begin{aligned} & \frac{a}{r^{D_m-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^{D_b} \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \rho g \frac{1}{r^{D_m-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^{D_m-1} \frac{\partial h}{\partial r} \right) \\ & + \frac{a}{r^{D_m-D_b+1} \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) - \rho g \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{a}{r^{D_m-D_b+1} \sin^2(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) - \rho g \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \right] \quad (3.8)$$

Con $k = k(r, \theta, \varphi)$ y si el medio poroso es isotrópico la permeabilidad hidráulica es de la forma $k = k(r)$.

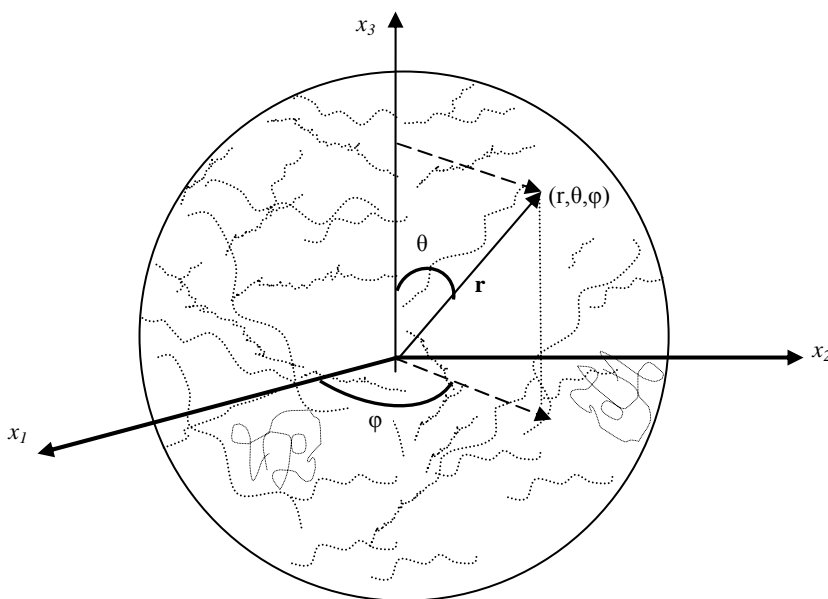


Figura 3.3. Esquema del medio poroso fractal con geometría Esférica

La transformación de coordenadas para obtener los modelos (3.7) y (3,8) se obtienen en apéndice A.

3.1.1 Flujo fractal radial cilíndrico

Si los efectos gravitacionales se pueden despreciar y suponemos que el pozo es desplazado al origen (0,0,0) en este caso $R=r$, de la ecuación (3.7) se obtiene la ecuación de difusión de presión para el flujo fractal radial cilíndrico sumergido en el espacio tres dimensional.

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D_m-2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r) r^{D_b-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (3.9)$$

donde $k(r) = k(\phi_0) r^{-g}$ aquí $k(\phi_0)$ es una permeabilidad que depende de la porosidad y g es un parámetro. La ecuación (3.9) queda de la siguiente manera

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D_m-2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D_b-1-g} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (3.10)$$

donde

$$\chi = \frac{ak(\phi_0)}{c_f \mu}$$

La ecuación (3.10) es sujeta a las siguientes condiciones:

Condición inicial

$$p(r,0) = p_0, \quad (3.11)$$

Condición al interior del pozo (condición de frontera de fuente puntual)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r^{D_b-1-g} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{Q\mu}{2\pi k(\phi_0)H}, \quad (3.12)$$

Condición fuera de la frontera del pozo

$$p(\infty, t) = p_0. \quad (3.13)$$

Forma adimensional de las ecuaciones (3.10), (3.11), (3.12) y (3.13)

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{1}{r_D^{D_m-2}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^{D_b-1-g} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right). \quad (3.14)$$

$$p_D(r_D, 0) = 0, \quad (3.15)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} \left[r_D^{D_b-1-g} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right] = -1, \quad (3.16)$$

$$p_D(\infty, t_D) = 0, \quad (3.17)$$

donde p_D , r_D y t_D son la presión, el radio y el tiempo adimensionales ó variables adimensionales y están dados como

$$p_D = \frac{p_0 - p(r, t)}{p^*},$$

$$r_D = \frac{r}{r^*},$$

$$t_D = \frac{t}{t^*},$$

p_0 es una presión inicial, por otro lado, el radio, tiempo y presión característicos están dados como

$$r^* = r_w,$$

$$t^* = \frac{r_w^{D_m-D_b+1+g}}{\chi},$$

$$p^* = \frac{Q\mu}{2\pi k(\phi_0)Hr_w^{D_b-g-2}},$$

r_w es el radio , H la altura, Q la tasa de producción fija del pozo.

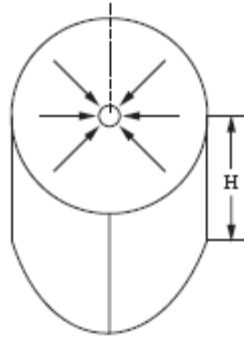


Figura 3.4. Flujo radia cilíndrico

La solución completa (ver apéndice B) es

$$P_D = \frac{r_D^{-D_b+\mathcal{G}+2}}{(D_m - D_b + \mathcal{G} + 1)\Gamma(\sigma)} \Gamma\left(\sigma - 1, \frac{r_D^{D_m - D_b + \mathcal{G} + 1}}{(D_m - D_b + \mathcal{G} + 1)^2 t_D}\right), \quad (3.18)$$

donde $\sigma = \frac{D_m - 1}{D_m - D_b + \mathcal{G} + 1}$ y $\Gamma(\sigma - 1, y)$ es la función gamma incompleta

$$\Gamma(\sigma - 1, y) = \int_y^{\infty} x^{\sigma-2} e^{-x} dx \quad (\Re(\sigma - 1) > 0)$$

$$\text{Con } y = \frac{r_D^{D_m - D_b + \mathcal{G} + 1}}{(D_m - D_b + \mathcal{G} + 1)^2 t_D}$$

Cuando $D_m=3$, $D_b=2$ y $\mathcal{G}=0$ implica que $\sigma=1$ y entonces la ecuación (2.18) se reduce a la forma Euclidiana,

$$p_D = \frac{1}{2} \Gamma\left(0, \frac{r_D^2}{4t_D}\right) = \frac{1}{2} \int_y^{\infty} x^{-1} e^{-x} dx = \frac{1}{2} Ei(y)$$

donde $Ei(y)$ es la función integral exponencial

A continuación se presentan las gráficas que muestran el comportamiento de la ecuación (3.18). La figura 3.5, en coordenadas logarítmicas, muestra las curvas de presión para varios valores de la dimensión fractal de masa D_m manteniendo la dimensión fractal de frontera fija D_b . Para $D_m = 3$ se obtiene la solución euclidiana. A tiempos suficientemente grandes, figura b), las curvas de presión son líneas rectas con pendiente $1 - \sigma$.

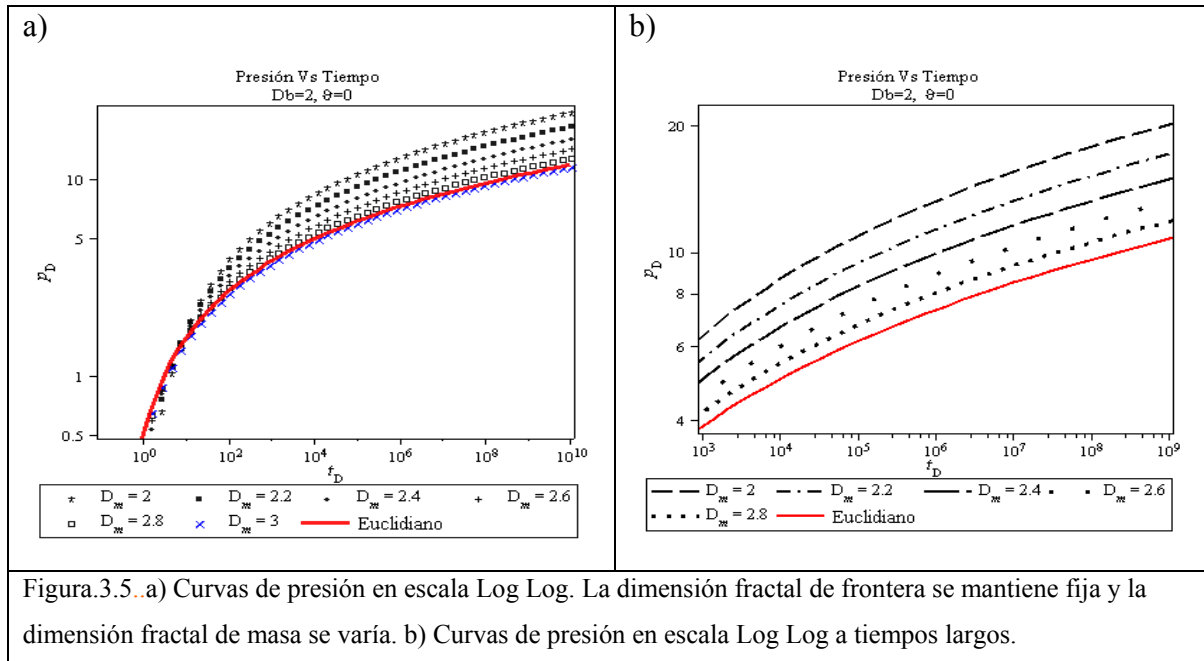


Figura.3.5. a) Curvas de presión en escala Log Log. La dimensión fractal de frontera se mantiene fija y la dimensión fractal de masa se varía. b) Curvas de presión en escala Log Log a tiempos largos.

La figura.3.6 muestra el comportamiento de la presión para dimensiones fractales de masa y frontera variables con la condición $2 \leq D_b \leq D_m \leq 3$.

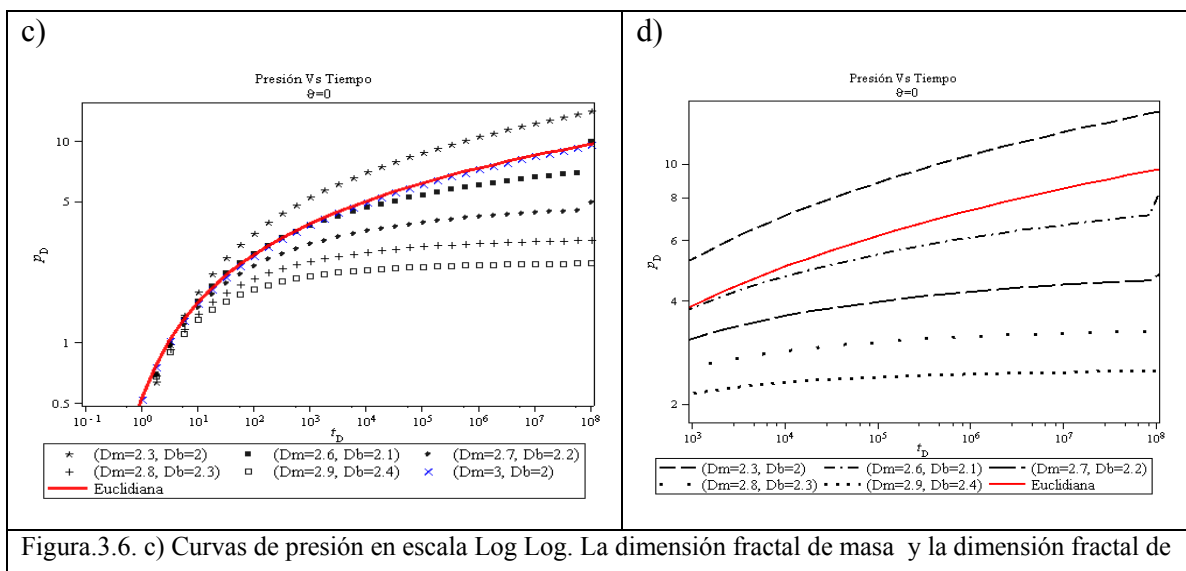
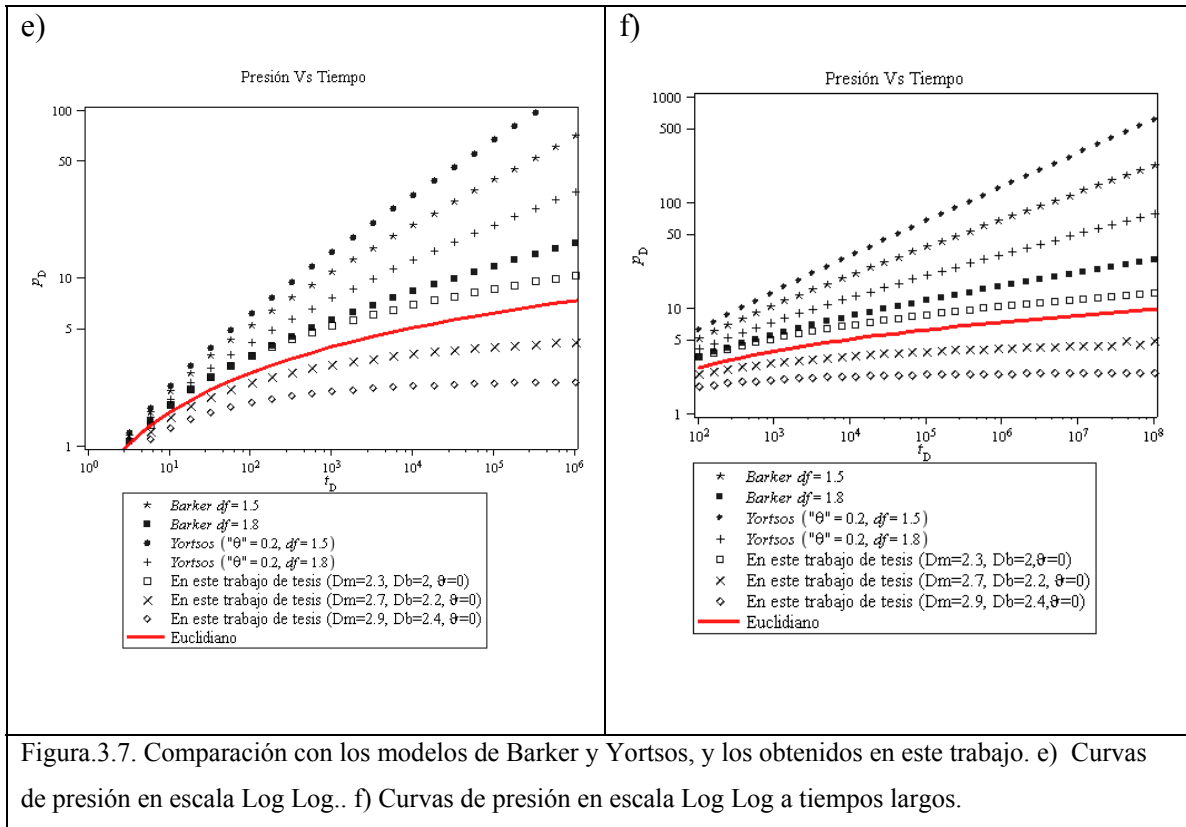


Figura.3.6. c) Curvas de presión en escala Log Log. La dimensión fractal de masa y la dimensión fractal de

frontera se varían. d) Curvas de presión en escala Log Log a tiempos largos.

Por otra parte la figura.3.7 se compara el comportamiento de la presión obtenido en este trabajo con los modelos de Barker y Yortsos [13,14].



Podemos observar de las figuras 3.6, 3.7, que al variar las dimensiones fractales de masa y frontera, con la condición $2 \leq D_b \leq D_m \leq 3$, la presión dimensional disminuye y se recobra la presión Euclidiana (curva roja) cuando $D_b = 2; D_m = 3$.

Aproximación a tiempos largos

La función gamma incompleta se puede escribir de la siguiente manera

$$\Gamma(\sigma - 1, y) = \Gamma(\sigma - 1) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j y^{\sigma-1+j}}{j!(\sigma-1+j)} \quad (\sigma - 1) \neq 0, -1, -2, \dots$$

donde

$$y = \frac{r_D^{D_m - D_b + \mathcal{G} + 1}}{(D_m - D_b + \mathcal{G} + 1)^2 t_D}$$

Cuándo t_D es muy grande se tienen las siguientes aproximaciones: si $D_m = 3$, $D_b = 2$ y $\mathcal{G} = 0$ entonces

$$p_D \approx \frac{1}{2} [\ln t_D + \ln 4 - \gamma]$$

donde γ es la constante de Euler

y para $D_m \neq 3$, $D_b \neq 2$ y $\mathcal{G} \neq 0$

$$p_D \approx \frac{(D_m - D_b + \mathcal{G} + 1)^{2(1-\sigma)}}{(-D_b + \mathcal{G} + 2)\Gamma(\sigma)} t_D^{1-\sigma} \quad (3.19)$$

A tiempos suficientemente grandes, las curvas de presión en escalas Log Log son líneas rectas con pendiente $1 - \sigma$.

Por otro lado en análisis de transientes de presión también se hace uso de la derivada de la presión y esta dada como

$$\frac{dp_D}{d \ln t_D} = \frac{e^{-y}}{\Gamma(\sigma)(D_m - D_b + \mathcal{G} + 1)^{2\sigma-1}} t_D^{1-\sigma} \quad (3.20)$$

Las curvas de esta expresión en coordenadas logarítmicas también son líneas rectas con pendiente $1 - \sigma$ a tiempos largos.

3.1.2 Flujo fractal radial esférico

Análogo al flujo fractal cilíndrico, se tiene la ecuación de difusión de flujo fractal esférico

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D_m-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D_b-g} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (3.21)$$

donde

$$\chi = \frac{ak(\phi_0)}{c_f \mu}$$

La ecuación (3.21) es sujeta a las condiciones:

Condición inicial

$$p(r,0) = p_0, \quad (3.22)$$

Condición al interior del pozo (condición de frontera de fuente puntual en el interior del pozo)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r^{D_b-g} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{Q\mu}{4\pi k(\phi_0)}, \quad (3.23)$$

Condición fuera de la frontera del pozo

$$p(\infty, t) = p_0. \quad (3.24)$$

Forma adimensional

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{1}{r_D^{D_m-1}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^{D_b-\vartheta} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right). \quad (3.25)$$

$$p_D(r_D, 0) = 0, \quad (3.26)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} \left[r_D^{D_b-\vartheta} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right] = -1, \quad (3.27)$$

$$p_D(\infty, t_D) = 0, \quad (3.28)$$

donde las variables adimensional son

$$p_D = \frac{p_0 - p(r, t)}{p^*}, \quad r_D = \frac{r}{r^*}, \quad t_D = \frac{t}{t^*},$$

p_0 es una presión inicial, por otro lado, el radio característico, tiempo característico y presión característica están dados como

$$r^* = r_{sw}, \quad t^* = \frac{r_w^{D_m - D_b + 1 + \vartheta}}{\chi}, \quad p^* = \frac{Q\mu}{4\pi k(\phi_0) r_{sw}^{D_b - \vartheta - 1}},$$

r_{sw} es el radio del pozo esférico, Q la taza de producción fija del pozo.

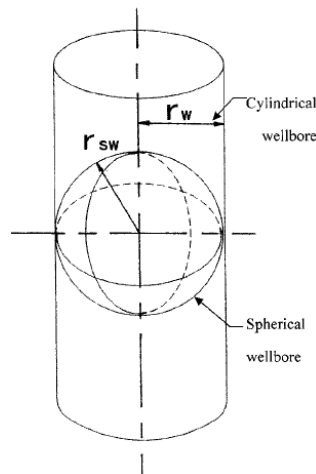


Figura 3.8. Flujo radia cilíndrico y esférico

Como se hizo para el flujo cilíndrico, análogamente se puede obtener una solución para la ecuación (3.21), ver apéndice (*), quedando de la siguiente manera

$$p_D = \frac{r_D^{-D_b+\mathcal{G}+1}}{(D_m - D_b + \mathcal{G} + 1)\Gamma(\sigma)} \Gamma\left(\sigma - 1, \frac{r_D^{D_m-D_b+\mathcal{G}+1}}{(D_m - D_b + \mathcal{G} + 1)^2 t_D}\right) \quad (3.29)$$

En este caso $\sigma = \frac{D_m}{D_m - D_b + \mathcal{G} + 1}$

Cuando $D_m=3$, $D_b=2$, $\mathcal{G}=0$, implica que $\sigma = \frac{3}{2}$ y entonces la ecuación (3.29) se reduce a la forma Euclidiana

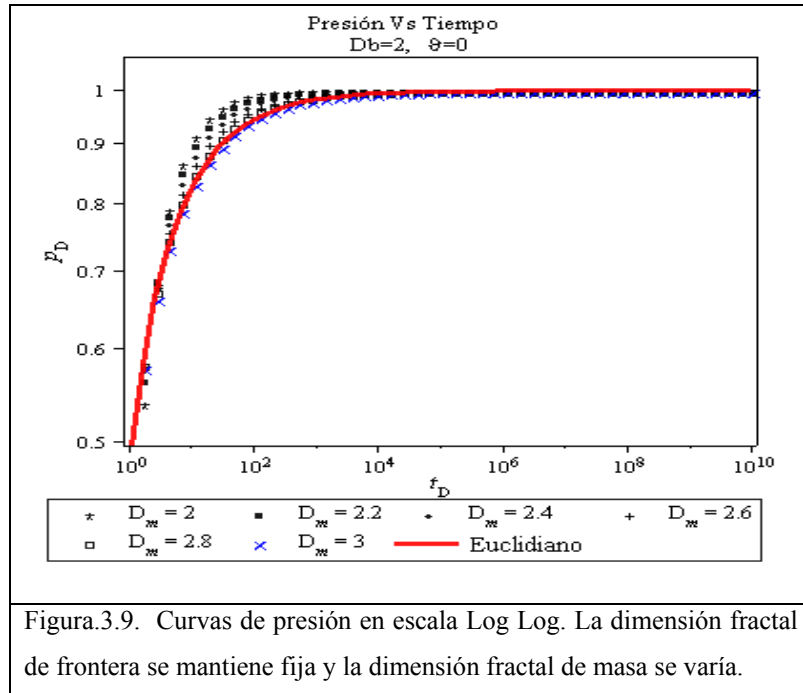
$$p_D = \frac{r_D^{-1}}{2\Gamma(3/2)} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r_D^2}{4t_D}\right) = r_D^{-1} \operatorname{erfc}\left(\frac{r_D}{2\sqrt{t_D}}\right)$$

donde $\operatorname{erfc}(x)$ es la Función de Error complementaria

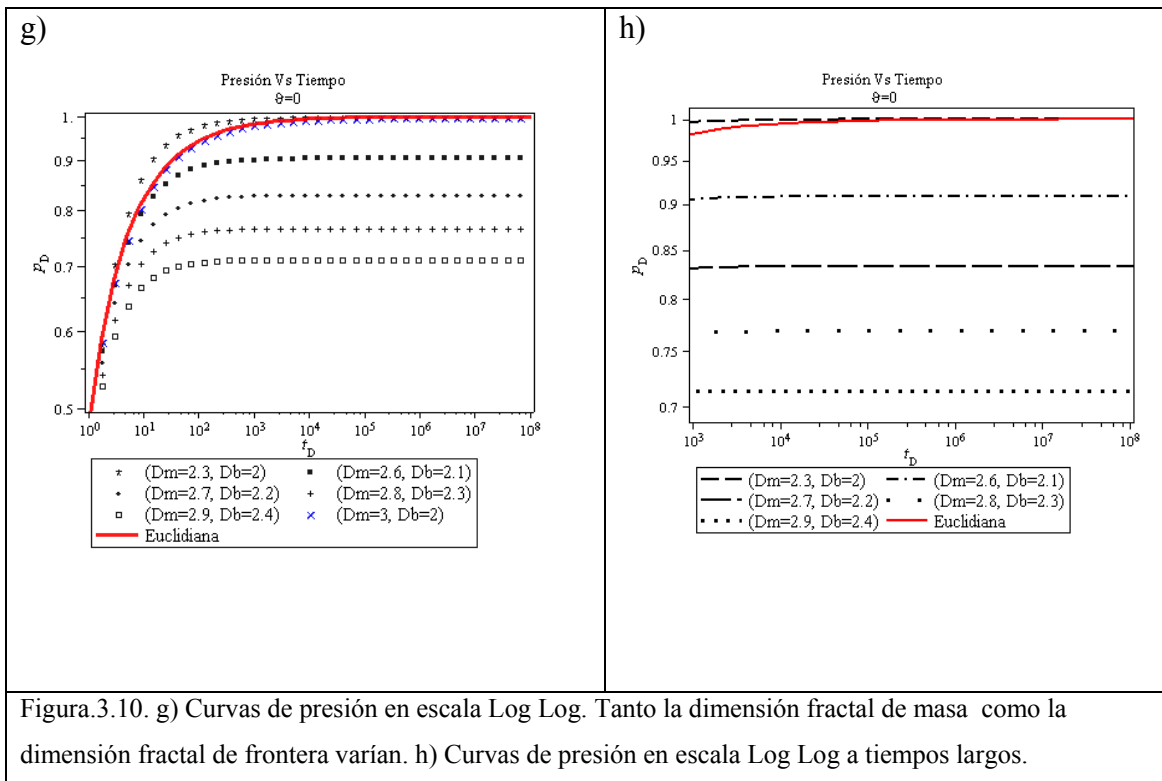
$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

Aquí, $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$ es la Función de Error normal.

A continuación se presentan las gráficas que muestran el comportamiento de la ecuación (3.29). Figura.3.9 en coordenadas logarítmicas muestra las curvas de presión para varios valores de la dimensión fractal de masa D_m manteniendo la dimensión fractal de frontera fija $D_b=2$. Para $D_m=3$ se obtiene la solución euclidiana. A tiempos suficientemente grandes, las curvas de presión son líneas rectas con pendiente $1 - \sigma$, figura h).



La figura 3.10 muestra el comportamiento de la presión para dimensiones fractales de masa y frontera variables, con la condición $2 \leq D_b \leq D_m \leq 3$.



Por otra parte en la figura 3.11 se compara el comportamiento de la presión obtenido en este trabajo con los modelos de Barker y Yortsos [13,14].

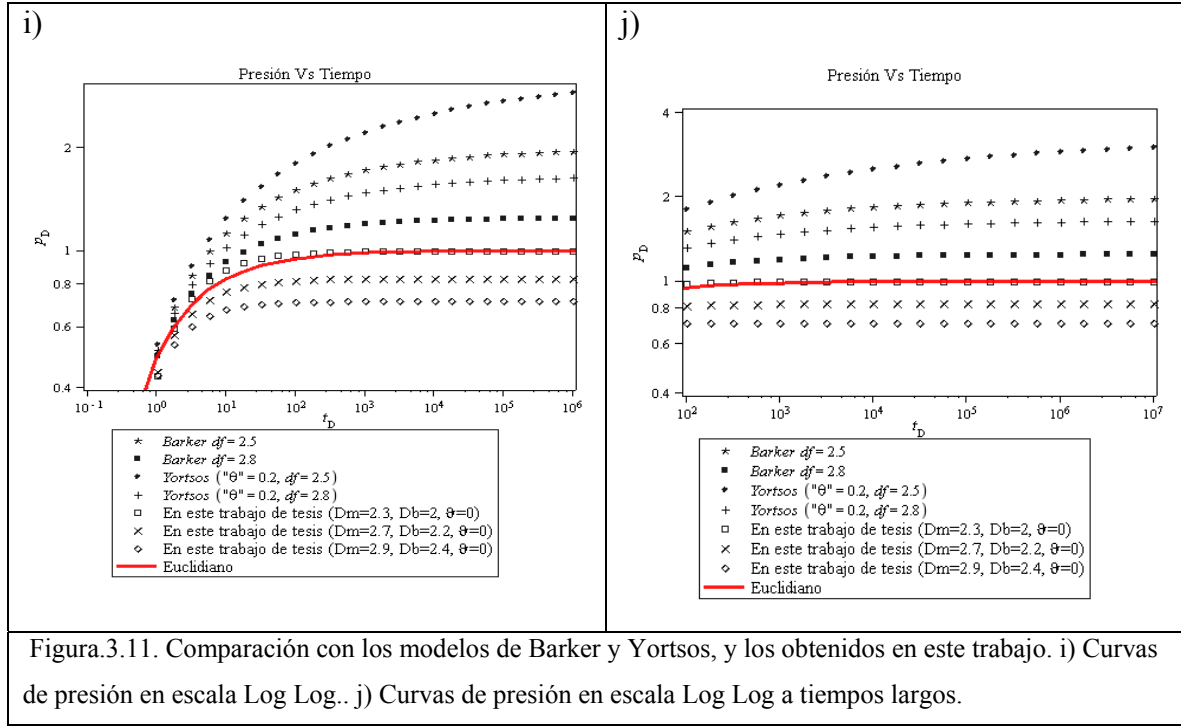


Figura.3.11. Comparación con los modelos de Barker y Yortsos, y los obtenidos en este trabajo. i) Curvas de presión en escala Log Log.. j) Curvas de presión en escala Log Log a tiempos largos.

Podemos observar de las figuras 3.10 y 3.11, que al variar las dimensiones fractales de masa y frontera, con la condición $2 \leq D_b \leq D_m \leq 3$, la presión dimensional disminuye y se recupera la presión Euclidiana (curva roja) cuando $D_b = 2; D_m = 3$.

Aproximación a tiempos largos

$$p_D \approx \frac{(D_m - D_b + \vartheta + 1)^{2(1-\sigma)}}{(-D_b + \vartheta + 1)\Gamma(\sigma)} t_D^{1-\sigma} \quad (3.30)$$

La derivada esta dada como

$$\frac{dp_D}{d \ln t_D} = \frac{e^{-y}}{\Gamma(\sigma)(D_m - D_b + \vartheta + 1)^{2\sigma-1}} t_D^{1-\sigma} \quad (3.31)$$

Las curvas de esta expresión en coordenadas logarítmicas también son líneas rectas con pendiente $1 - \sigma$ a tiempos largos.

Generalmente, la geometría del flujo fractal satisface la desigualdad $D_m - 1 \leq D_b \leq d$ mas que la igualdad $D_b = D_m - 1$. Las dimensiones fractales del flujo en muchos casos se determinan por la geometría fractal del medio.

3.1.3 Casos especiales del flujo fractal

Flujo fractal en medios porosos isotrópicos

Específicamente, **los medios porosos isotropicos son generalmente caracterizados por la dimensión fractal del volumen del poro D_p , la dimensión fractal de la superficie del poro D_s , y la dimensión fractal espectral d_s** [7,8]. En consecuencia, se puede esperar que el flujo fractal en un medio poroso isotrópico se caracterice por la dimensión fractal de masa $D_m = D_p$, la dimensión fractal de la frontera o de superficie $D_b = D_s$, y el exponente espectral θ .

Como caso particular, si las fronteras del poro son superficies Euclidianas de dimensión $D_s = d - 1$, el exponente espectral se relaciona con la dimensión fractal del volumen del poro y la dimensión fractal espectral como $\theta = 2(D_p / d_s - 1)$ [9], mientras la porosidad y la permeabilidad hidráulica se escalan como

$$\phi = \phi_0 r^{D_p - d} \text{ y } k_{ij} = k(\phi_0) r^{-\theta}, \quad (3.32)$$

respectivamente [14,16], donde

$$\theta = d - D_m + \theta. \quad (3.33)$$

Flujo fractal a través de una red de poros fractal

Por otro lado, **el flujo fractal a través de una red porosa fractal** (por ejemplo en un material fibroso) se caracteriza por la dimensión fractal de masa $D_m = D_p$ y la dimensión fractal de frontera se relaciona con D_p como [12]

$$D_b = 2d - 1 - D_p . \quad (3.34)$$

En este caso, también, se espera que la permeabilidad hidráulica obedezca el comportamiento de escalamiento (3.32), (3.33) con $\theta = 2(D_p / d_s - 1)$.

Flujo fractal en una red de fracturas

En una red de fracturas con la dimensión fractal D_n , la **permeabilidad** obedece el comportamiento de escalamiento (3.32), (3.33) con $D_m = D_n$ y $\theta = 2(D_n / d_s - 1)$ [14].

Flujo Euclidiano en una red de fracturas

Por otra parte, se sabe que una respuesta de transientes de presión tipo fractal puede aparecer no solo en redes de fracturas fractal, si no también en las redes de fractura Euclidiana ($D_n = d$), tal que la permeabilidad hidráulica se escala como (3.32), (3.33) con el exponente espectral $\theta = 2(d / d_s - 1)$, donde $d_s \leq d$ [15].

Flujo fractal en grieta autoafín

El flujo fractal en una sola grieta autoafín se espera que tenga dimensión fractal de masa entera $D_m = d$, mientras que la dimensión fractal de frontera del flujo es igual a la dimensión fractal de la superficie fracturada [18], es decir,

$$D_b = D_f = d - H , \quad (3.35)$$

donde D_f es la dimensión fractal de la superficie fracturada y H es el exponente de rugosidad, también llamado exponente de Hurst. En este caso, la permeabilidad hidráulica también exhibe el comportamiento de escalamiento (3.32), pero con exponente

$$\mathcal{G} = \theta, \quad (3.36)$$

donde $\theta = 2(D_f / d_s - 1)$ [10].

Tomemos el caso de la ecuación de difusión de presión para el flujo fractal radial esférico

$$c\mu \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{a}{r^{D_m-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r) r^{D_b} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (3.37)$$

que difiere de la ecuación de difusión clásica en fractales [10,11], por otro lado la ecuación de presión de difusión en el flujo fractal [14] se lee como

$$c\mu \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r) r^{D-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (3.38)$$

donde D es la dimensión fractal del medio.

De hecho, la ec. (3.37) se transforma en la ec. (3.38) solamente en el caso especial de flujo fractal con la dimensión fractal de frontera relacionada con la dimensión fractal de masa como esta dada por la relación $D_b = D_m - 1$. Tenga en cuenta que esto justifica el uso de la forma clásica de la ley de Darcy, junto con la ecuación de difusión fraccionada (3.38), tal como se utiliza en las obras [13,17]. Cabe señalar que para el flujo Euclidiano ($D_b = D_m - 1 = d - 1$) ambas ecuaciones ((3.37) y (3.38)) se transforman a la ecuación clásica de difusión radial en el espacio d -dimensional.

Como se observo en la sección 3.1.1 y ver apéndice B, la solución de la ecuación de presión (3.37) se puede obtener de la misma forma que como (3.38) cuya solución exacta se conoce [9, 11]. Otra solución asintótica de ambas ecuaciones tiene la forma

$$p \propto (\lambda t)^{-\sigma} \exp\left(-\frac{r^\gamma}{\lambda t}\right), \quad \lambda = \frac{ak(\phi_0)\gamma^2}{c\mu}, \quad (3.39)$$

donde en el caso de ec. (3.37) los exponentes de escalamiento son

$$\sigma = \frac{D_m}{(D_m - D_b) + 1 + \mathcal{G}} \quad (3.40)$$

y

$$1 \leq \gamma = (D_m - D_b) + 1 + \mathcal{G} \leq 3, \quad (3.41)$$

Mientras que en el caso de la ecuación de difusión (3.38)

$$\sigma = \frac{D_m}{2 + \mathcal{G}} \quad (3.42)$$

y

$$2 \leq \gamma = 2 + \mathcal{G} \leq 3, \quad (3.43)$$

tal que las ecs. (3.40), (3.41) se transforman a las ecs. (3.42), (3.43) cuando la dimensión de frontera del flujo es $D_b = D_m - 1$.

Entonces, para flujo fractal en una grieta auto-afín ($D_m = 3$, $D_b = 3 - H$, y $\mathcal{G} = \theta$) el cambio de presión se describe por la Ec. (3.29) y Ec.(3.39) con $\gamma = 1 + H + \theta$ y $\sigma = 3/(1 + H + \theta)$. Para flujo fractal en un medio poroso isotropico con $d - 1 < D_m = D_p \leq d$, $D_b = d - 1$, y el exponente de escalamiento de la permeabilidad hidráulica dada por la ec. (3.33), el cambio de presión obedece el comportamiento de escalamiento (3.39) pero con exponente

$$\gamma = 2 + \theta \text{ y } \sigma = D_p / (2 + \theta), \quad (3.44)$$

mientras el cambio de presión del flujo fractal con la dimensión fractal de frontera definida por la ec. (3.32) se caracteriza por

$$\gamma = 2 + \theta - (d - D_p) \text{ y } \sigma = D_m / \gamma \quad (3.45)$$

Es interesante notar que si θ es numéricamente igual a $0 \leq \theta = (d - D_p) \leq 1$, la ecuación (3.37) con permeabilidad hidráulica dependiente del espacio (3.32), (3.33) coincide con la ecuación de cambio de presión de Barker [13].

Finalmente, si $D_b = D_m$, la ecuación de presión (3.39) se caracteriza por los siguientes exponentes de escalamiento $\gamma = (d - D_m) + 1 + \theta$ y $\sigma = D_m / \gamma$.

3.2 Flujo fractal en dos fases

En esta sección se desarrollan las ecuaciones para flujo fractal en dos fases donde los fluidos son inmiscibles y no hay transferencia de masa entre las fases. Se le conoce como fase mojanter (por ejemplo el agua) a la fase que moja más al medio poroso que la otra fase (fase no mojanter, por ejemplo el aceite). Se denota por el subíndice w a la fase agua y por el subíndice o a la fase aceite. En general, el agua es el fluido mojanter relativo al aceite y al gas, mientras que el aceite es el fluido mojanter relativo al gas.

La saturación de una fase (agua, aceite o gas) se define como la fracción del volumen vacío de un medio poroso que esta ocupada por dicha fase. La sumatoria de las saturaciones de todos los fluidos que se encuentran presentes en el espacio poroso de una roca, debe ser igual a 1. Si consideramos un medio poroso saturado por agua y aceite tenemos

$$S_w + S_o = 1 \quad (3.46)$$

donde S_w y S_o son las saturaciones de las fases mojanter y no mojanter. Debido a la curvatura y a la tensión superficial de las interfases entre las dos fases, la presión en el fluido mojanter es menor que en el fluido no mojanter. La diferencia de presiones esta dada por la presión capilar

$$p_c = p_o - p_w \quad (3.47)$$

donde p_w y p_o son las presiones de las fases mojanter y no mojanter.

La conservación de la masa para cada fase en un medio poroso con estructura fractal esta dada como:

Fase agua,

$$\frac{\partial(\rho_w S_w)}{\partial t} = -aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} (R^{D_b-2} \rho_w u_{w,j}) + q_w \quad (3.48)$$

Fase aceite,

$$\frac{\partial(\rho_o S_o)}{\partial t} = -aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} (R^{D_b-2} \rho_o u_{o,j}) + q_o \quad (3.49)$$

donde ρ_w y ρ_o son las densidades de la del aceite y del agua; q_w y q_o son las fuentes / sumideros de las fases aceite y agua. Las velocidades de cada fase están dadas por la ley de Darcy en la forma

$$u_{\alpha,j} = -\frac{k_{\alpha,jl}}{\mu_\alpha} \left[\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_l} - \frac{R^{D_m-D_b-1}}{a} \rho_\alpha \tilde{g} \frac{\partial h}{\partial x_l} \right], \quad \alpha = w, o. \quad (3.50)$$

aquí $k_{\alpha,jl}$ y μ_α son el tensor de permeabilidad y la viscosidad del fluido en la fase α . En simulación de yacimientos se usa ampliamente la permeabilidad relativas de la fase α $k_{r\alpha}$,

$$k_{\alpha,jl} = k_{r\alpha} k_{jl} \quad \alpha = w, o \quad (3.51)$$

donde la función $k_{r\alpha}$ indica la tendencia de la fase α para mojar al medio poroso.

Diversas formulaciones para el flujo fractal en dos fases

I) Formulación en presiones de fluidos

Se usan las variables p_w y p_o como desconocidas. Se asume que la presión capilar p_c tiene una función inversa única

$$S_w = p_c^{-1}(p_o - p_w) \quad (3.52)$$

Entonces sustituyendo (3.46), (3.47),(3.50) y (3.51) en (3.48) y (3.49) y utilizando (3.52) se tiene

$$\frac{\partial(\rho_w p_c^{-1})}{\partial t} = aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_b-2} \frac{\rho_w}{\mu_w} k_{w,jl} \left[\frac{\partial p_w}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \rho_w \tilde{g} \frac{\partial h}{\partial x_l} \right] \right) + q_w \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial(\rho_o(1-p_c^{-1}))}{\partial t} = aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_b-2} \frac{\rho_o}{\mu_o} k_{o,jl} \left[\frac{\partial p_o}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \rho_o \tilde{g} \frac{\partial h}{\partial x_l} \right] \right) + q_o \quad (3.54)$$

Estas expresiones en forma de calculo vectorial están dadas como

$$\frac{\partial(\rho_w p_c^{-1})}{\partial t} = aR^{3-D_m} \nabla \cdot \left(R^{D_b-2} \frac{\rho_w}{\mu_w} \mathbf{k}_w \left[\nabla p_w - R^{D_m-D_b-1} \rho_w \tilde{g} \nabla h \right] \right) + q_w \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial(\rho_o(1-p_c^{-1}))}{\partial t} = aR^{3-D_m} \nabla \cdot \left(R^{D_b-2} \frac{\rho_o}{\mu_o} \mathbf{k}_o \left[\nabla p_o - R^{D_m-D_b-1} \rho_o \tilde{g} \nabla h \right] \right) + q_o \quad (3.56)$$

Las ecuaciones en este sistema son altamente no lineales y están acopladas.

II) Formulación en presiones y saturación del fluido

En este caso se usan las variables principales p_o y S_w como desconocidas. Aplicando (3.46), (3.47) y (3.50) en las ecuaciones (3.48) y (3.49) se tiene

$$\frac{\partial(\rho_w S_w)}{\partial t} = aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_b-2} \frac{\rho_w}{\mu_w} k_{w,jl} \left[\frac{\partial p_o}{\partial x_l} - \frac{dp_c}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \rho_w \tilde{g} \frac{\partial h}{\partial x_l} \right] \right) + q_w \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial(\rho_o(1-S_w))}{\partial t} = aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_b-2} \frac{\rho_o}{\mu_o} k_{o,jl} \left[\frac{\partial p_o}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \rho_o \tilde{g} \frac{\partial h}{\partial x_l} \right] \right) + q_o \quad (3.58)$$

En notación de cálculo vectorial estas ecuaciones se escriben como

$$\frac{\partial(\rho_w S_w)}{\partial t} = aR^{3-D_m} \nabla \cdot \left(R^{D_b-2} \frac{\rho_w}{\mu_w} \mathbf{k}_w \left[\nabla p_o - \frac{dp_c}{dS_w} \nabla S_w - R^{D_m-D_b-1} \rho_w \tilde{g} \nabla h \right] \right) + q_w \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial(\rho_o(1-S_w))}{\partial t} = aR^{3-D_m} \nabla \cdot \left(R^{D_b-2} \frac{\rho_o}{\mu_o} \mathbf{k}_o \left[\nabla p_o - R^{D_m-D_b-1} \rho_o \tilde{g} \nabla h \right] \right) + q_o \quad (3.60)$$

Llevando acabo la diferenciación con respecto al tiempo en (3.60), y dividiendo la primera y segunda ecuación por ρ_w y ρ_o , y sumando las ecuaciones resultantes, se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{S_w}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \frac{1-S_w}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial t} \\ &= \frac{aR^{3-D_m}}{\rho_w} \nabla \cdot \left(R^{D_b-2} \frac{\rho_w}{\mu_w} \mathbf{k}_w \left[\nabla p_o - \frac{dp_c}{dS_w} \nabla S_w - R^{D_m-D_b-1} \rho_w \tilde{g} \nabla h \right] \right) \\ &+ \frac{aR^{3-D_m}}{\rho_o} \nabla \cdot \left(R^{D_b-2} \frac{\rho_o}{\mu_o} \mathbf{k}_o \left[\nabla p_o - R^{D_m-D_b-1} \rho_o \tilde{g} \nabla h \right] \right) + \frac{q_w}{\rho_w} + \frac{q_o}{\rho_o} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Si la saturación S_w en (3.61) es explícitamente evaluada, se puede usar esta ecuación para resolver p_o . Por otro lado la ecuación (3.60) se puede usar para calcular S_w usando el esquema IMPES (*Implicit Pressure–Explicit Saturation*).

3.3 Modelo de petróleo negro para flujo fractal

En esta sección se desarrollan las ecuaciones básicas para flujos simultáneos en tres fases: agua, aceite y gas a través de un medio poroso con estructura fractal. Se asume que no hay transferencia de masa entre las fases y que las componentes de hidrocarburos son divididos en una componente gas y una componente aceite a temperaturas y presiones estándar. No ocurre transferencia de masa entre la fase agua y las fases aceite y gas. La componente gas consiste de metano y etano. Las fases se denotan por subíndices con letras minúsculas (fase agua w , fase aceite o , fase gas g) y las componentes se denotan con subíndices en letras mayúsculas

(componente agua W , componente aceite O , componente gas G). Notar, que la fase agua es la componente agua. El subíndice s indica a condiciones estándar.

La masa total de cada componente se debe de conservar, es decir:

Componente agua,

$$\frac{\partial(\rho_w S_w)}{\partial t} = -aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} (R^{D_b-2} \rho_w u_{w,j}) + q_w \quad (3.62)$$

Componente aceite,

$$\frac{\partial(\rho_{Oo} S_o)}{\partial t} = -aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} (R^{D_b-2} \rho_{Oo} u_{o,j}) + q_o \quad (3.63)$$

Componente Gas,

$$\frac{\partial(\rho_{Go} S_o + \rho_g S_g)}{\partial t} = -aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} (R^{D_b-2} (\rho_{Go} u_{o,j} + \rho_g u_{g,j})) + q_G \quad (3.64)$$

donde

S_w , S_o y S_g son las saturaciones de las fases agua, aceite y gas; q_w , q_o , q_G son las fuentes / sumideros de las componentes agua, aceite y gas; ρ_w , ρ_o , ρ_g son las densidades del agua, aceite y gas; ρ_{Oo} y ρ_{Go} son las densidades parciales de las componentes aceite en la fase aceite y del gas en la fase aceite. La ecuación (3.64) implica que la componente gas puede existir en las fases aceite y gas.

Por otra parte la ley de Darcy para cada fase se escribe en la forma

$$u_{\alpha,j} = -\frac{k_{\alpha,jl}}{\mu_{\alpha}} \left[\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x_l} - \frac{R^{D_m - D_b - 1}}{a} \rho_{\alpha} \bar{g} \frac{\partial h}{\partial x_l} \right], \quad \alpha = w, o, g. \quad (3.65)$$

donde

$$k_{\alpha,jl} = k_{r\alpha} k_{jl} \quad \alpha = w, o, g \quad (3.66)$$

$k_{r\alpha}$, μ_{α} , ρ_{α} y p_{α} son la permeabilidad relativas, la viscosidad, la densidad y la presión del fluido en la fase α , y k_{jl} es el tensor de permeabilidad del medio poroso, \bar{g} es la magnitud de la gravedad, h es la profundidad.

Las tres fases juntas llenan el espacio vacío y se debe de cumplir

$$S_w + S_o + S_g = 1. \quad (3.67)$$

Las presiones de las fases se relacionan con la presión capilar de la siguiente manera

$$p_{cow} = p_o - p_w, \quad p_{cgo} = p_g - p_o. \quad (3.68)$$

la tercera presión capilar se puede definir en términos de p_{cow} y p_{cgo} como

$$p_{cgw} = p_g - p_w = p_{cow} + p_{cgo}. \quad (3.69)$$

Volumenes estandar

$$\rho_0 = \frac{\mathfrak{R}_{so} \rho_{Gs} + \rho_{Os}}{B_o} \quad \rho_g = \frac{\rho_{Gs}}{B_g} \quad \rho_w = \frac{\rho_{Ws}}{B_w} \quad (3.70)$$

donde \mathfrak{R}_{so} (Solubilidad del gas) proporción de disolver gas/aceite, ρ_{Gs} , ρ_{Os} y ρ_{Ws} son las densidades del gas, aceite y agua a condiciones estándar, B_o , B_g y B_w son los factores del volumen de la formación del aceite, gas y agua.

Tasas de flujo

$$q_w = \frac{q_{Ws}\rho_{Ws}}{B_w} \quad q_o = \frac{q_{Os}\rho_{Os}}{B_o} \quad q_G = \frac{q_{Gs}\rho_{Gs}}{B_g} + \frac{q_{Os}\mathfrak{R}_{so}\rho_{Gs}}{B_o} \quad (3.71)$$

donde q_{Ws} , q_{Os} , q_{Gs} , son las tasas de flujo a condiciones estándar.

Sustituyendo (3.65) en (3.62)-(3.64) y luego sustituir (3.70)-(3.71) y dividiendo las ecuaciones resultantes por ρ_{Ws} , ρ_{Os} y ρ_{Gs} , se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) = aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_b-2} T_{w,jl} \left[\frac{\partial p_w}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \gamma_w \frac{\partial z}{\partial x_l} \right] \right) + \frac{q_{Ws}}{B_w} \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right] = aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ R^{D_b-2} \left[\begin{array}{l} T_{g,jl} \left(\frac{\partial p_g}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \gamma_g \frac{\partial z}{\partial x_l} \right) \\ + R_{so} T_{o,jl} \left(\frac{\partial p_o}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \gamma_o \frac{\partial z}{\partial x_l} \right) \end{array} \right] \right\} + \frac{q_{Gs}}{B_g} + \frac{q_{Os} R_{so}}{B_o} \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_o}{B_o} \right) = aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_b-2} T_{o,jl} \left[\frac{\partial p_o}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \gamma_o \frac{\partial z}{\partial x_l} \right] \right) + \frac{q_{Os}}{B_o} \quad (3.74)$$

Donde $\gamma_\alpha = \rho_\alpha \tilde{g}$ y $T_{\alpha,jl} = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha B_\alpha} k_{jl}$ son la gravedad y el tensor de transmisibilidad del fluido en la fase α .

En notación de calculo vectorial estas ecuaciones se escriben como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_w}{B_w} \right) = aR^{3-D_m} \nabla \cdot \left(R^{D_b-2} \mathbf{T}_w \left[\nabla p_w - R^{D_m-D_b-1} \gamma_w \nabla z \right] \right) + \frac{q_{ws}}{B_w} \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_o}{B_o} \right) = aR^{3-D_m} \nabla \cdot \left(R^{D_b-2} \mathbf{T}_o \left[\nabla p_o - R^{D_m-D_b-1} \gamma_o \nabla \cdot z \right] \right) + \frac{q_{os}}{B_o} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) = aR^{3-D_m} \nabla \cdot \left(R^{D_b-2} \left[\mathbf{T}_g \left(\nabla p_g - R^{D_m-D_b-1} \gamma_g \nabla \cdot z \right) + R_{so} \mathbf{T}_o \left(\nabla p_o - R^{D_m-D_b-1} \gamma_o \nabla z \right) \right] \right) \\ + \frac{q_{Gs}}{B_g} + \frac{q_{Os} R_{so}}{B_o} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Estas son las ecuaciones de conservación a volumen estándar. Análogamente como en el caso del modelo negro clásico o Euclidiano se pueden resolver usando las técnicas secuencial, solución simultánea e IMPES. Ecuaciones diferenciales alternativas desarrolladas en dos fases en la sección 3.2 se pueden adaptar para el modelo de petróleo negro de tres fases. Es decir, las ecuaciones (3.62) - (3.66) se pueden reescribir en la formulación de tres presiones, en una formulación de la presión y dos de saturación, o en una presión global y la formulación de dos saturaciones.

3.4 Modelo de flujo fractal monofásico con multicomponentes

En esta sección se obtienen las ecuaciones diferenciales para modelar el transporte de multicomponentes en un fluido para un medio poroso con estructura fractal. No se consideran: los efectos de las reacciones químicas entre las componentes en la fase fluido, el decaimiento radiactivo, la biodegradación, o el crecimiento debido a la actividad de las bacterias que causan la cantidad de este componente para aumentar o disminuir.

Considerar una mezcla de gas o líquido que consiste de N_c especies químicas. Sea n_m el número de moles para la m -ésima especie en la mezcla, entonces el total de moles de la mezcla son

$$n = \sum_{m=1}^{N_c} n_m \quad (3.78)$$

La fracción molar de cada componente se define como

$$\tilde{x}_m = \frac{n_m}{n}, \quad m = 1, 2, \dots, N_c,$$

entonces

$$\sum_{m=1}^{N_c} \tilde{x}_m = 1 \quad (3.79)$$

Por otra parte

$$\xi_m = \frac{n_m}{v_m} \quad m = 1, 2, \dots, N_c,$$

donde ξ_m es la densidad molar de la componente m en la mezcla y v_m es el volumen molar de la componente m . La densidad molar de la mezcla es

$$\xi = \sum_{m=1}^{N_c} \xi_m$$

La conservación de la masa de cada componente en la mezcla fluido es

$$\frac{\partial(\tilde{x}_m \xi)}{\partial t} = -aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[R^{D_b-2} (\tilde{x}_m \xi u_j + J_{j,m}) \right] + q_m \quad m = 1, 2, \dots, N_c \quad (3.80)$$

donde q_m es el termino de fuente/sumidero y $J_{j,m}$ es el flujo difusivo de masa de la m -ésima componente. Por otro lado la ley de Darcy del fluido es

$$u_j = -\frac{k_{jl}}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial x_l} - \frac{R^{D_m - D_b - 1}}{a} \rho \tilde{g} \frac{\partial h}{\partial x_l} \right], \quad (3.81)$$

donde k_{jl} es el tensor de permeabilidad, μ es viscosidad, p es la presión y ρ es la densidad del fluido y \tilde{g} es la constante gravitacional, y h es la profundidad. La densidad de masa del fluido se relaciona con su densidad molar,

$$\rho = \xi W \equiv \xi \sum_{m=1}^{N_c} \tilde{x}_m W_m, \quad (3.82)$$

donde W es el peso molecular total y W_m es el peso molecular de la componente m -ésima

Por otra parte la **ley de Fick** clásica para una fase esta dada como

$$J_{j,m} = -\phi \xi \mathbf{D}_{jl,m} \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x_l} \quad m = 1, 2, \dots, N_c \quad (3.83)$$

donde $\mathbf{D}_{jl,m}$ es el tensor de difusión / dispersión de la componente m en la mezcla fluido.

Sustituyendo (3.81), (3.83), en (3.80) se obtiene

$$\frac{\partial(\tilde{x}_m \xi)}{\partial t} = a R^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ R^{D_b-2} \left[\frac{\tilde{x}_m \xi}{\mu} k_{jl} \left(\frac{\partial p}{\partial x_l} - \frac{R^{D_m - D_b - 1}}{a} \rho \tilde{g} \frac{\partial h}{\partial x_l} \right) + \phi \xi \mathbf{D}_{jl,m} \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x_l} \right] \right\} + q_m \quad (3.84)$$

En forma de cálculo vectorial

$$\frac{\partial(\tilde{x}_m \xi)}{\partial t} = a R^{3-D_m} \nabla \cdot \left\{ R^{D_b-2} \left[\frac{\tilde{x}_m \xi}{\mu} \mathbf{k} (\nabla p - R^{D_m - D_b - 1} \gamma \nabla h) + \phi \xi \mathbf{D}_m \nabla \tilde{x}_m \right] \right\} + q_m, \quad (3.85)$$

donde $\gamma = \rho \tilde{g}$ es la gravedad del fluido, $m = 1, 2, \dots, N_c - 1$.

El tensor de difusión / dispersión de la componente m en la mezcla fluido, \mathbf{D}_m se define como

$$\mathbf{D}_m(\mathbf{u}) = {}_{mm}d\mathbf{I} + |\mathbf{u}| [{}_{mL}d\mathbf{E}(\mathbf{u}) + {}_{mT}d(\mathbf{I} - \mathbf{E}(\mathbf{u}))] \quad (3.86)$$

donde ${}_{mm}d$ es el coeficiente de difusión molecular, ${}_{mL}d$ y ${}_{mT}d$ son los coeficientes de dispersión longitudinal y transversal de la componente m , $|\mathbf{u}|$ es la norma euclidiana de la velocidad, es decir $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$, \mathbf{I} es la matriz identidad y $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ es la proyección ortogonal a lo largo de la velocidad,

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3^2 \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

Por otra parte, la sumatoria de todas las especies de la ecuación (3.80) sobre m y aplicando la restricción (3.79) nos da

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} [R^{D_b-2} \xi u_j] + q \quad (3.88)$$

Donde

$$q = \sum_{m=1}^{N_C} q_m$$

Entonces usando (3.81) se tiene

$$c(p) \frac{\partial p}{\partial t} = aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ R^{D_b-2} \left[\frac{\xi}{\mu} k_{jl} \left(\frac{\partial p}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \gamma \frac{\partial h}{\partial x_l} \right) \right] \right\} + q \quad (3.89)$$

Con

$$c(p) = \frac{\partial \xi}{\partial p}$$

Si la viscosidad μ es constante, la forma de la ecuación (3.84) es exactamente la misma que la ecuación (3.6) para el flujo fractal en una sola fase.

3.5 Modelo de flujo fractal composicional.

Ahora consideramos un modelo composicional bajo la suposición que los procesos de flujo son isotérmicos, las componentes al menos forman tres fases (es decir, agua, aceite, y gas), no hay intercambio de masa entre la fase agua y la fase hidrocarburos (es decir, las fases aceite y gas), y se desprecian los efectos difusivos.

Sean k_{jl} la permeabilidad del medio poroso con estructura fractal, y $S_\alpha, \mu_\alpha, p_\alpha, u_{\alpha,j}$, y $k_{r\alpha}$ la saturación, viscosidad, presión, la velocidad y la permeabilidad relativa de la fase α ($= w, o, g$). También sean ξ_{mo} y ξ_{mg} la densidad molar de la componente en la fase aceite (líquido) y en la fase gas (vapor), $m = 1, 2, \dots, N_c$ donde N_c es el número de componentes. La densidad molar de la fase α esta dada por

$$\xi_\alpha = \sum_{m=1}^{N_c} \xi_{m\alpha} \quad \alpha = o, g. \quad (3.90)$$

La fracción molar de la componente m en la fase α se define por

$$\bar{x}_{m\alpha} = \frac{n_{m\alpha}}{n_\alpha}, \quad m = 1, 2, \dots, N_c, \quad \alpha = o, g. \quad (3.91)$$

Donde $n_{m\alpha}$ es el número de moles de la componente m en la fase α y n_α es el total de moles en esta fase.

La masa se conserva para cada componente $m = 1, 2, \dots, N_c$

$$\frac{\partial(\xi_w S_w)}{\partial t} = -aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} (R^{D_b-2} \xi_w u_{w,j}) + q_w \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial[(\tilde{x}_{mo} \xi_o S_o + \tilde{x}_{mg} \xi_g S_g)]}{\partial t} = -aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} [R^{D_b-2} (\tilde{x}_{mo} \xi_o u_{o,j} + \tilde{x}_{mg} \xi_g u_{g,j})] + q_m \quad (3.93)$$

Donde q_w y q_m son las tasas de flujo molar del agua y de la m -ésima componente. La velocidad $u_{\alpha,j}$ está dada por la ley de Darcy,

$$u_{\alpha,j} = -\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} k_{jl} \left[\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_l} - \frac{R^{D_m-D_b-1}}{a} \rho_\alpha g \frac{\partial h}{\partial x_l} \right], \quad \alpha = w, o, g. \quad (3.94)$$

Donde ρ_α es la densidad de masa de la fase α , \tilde{g} es la constante gravitacional, y h es la profundidad. La densidad de masa del fluido se relaciona con su densidad molar,

Condiciones algebraicas para las ecuaciones (3.92)-(3.94):

Balance de fracción molar implica que

$$\sum_{m=1}^{N_c} x_{mo} = 1, \quad \sum_{m=1}^{N_c} x_{mg} = 1. \quad (3.95)$$

Las tres fases juntas llenan el espacio vacío y se debe de cumplir

$$S_w + S_o + S_g = 1. \quad (3.96)$$

Las presiones de las fases se relacionan con la presión capilar de la siguiente manera

$$P_{cow} = P_o - P_w, \quad P_{cgo} = P_g - P_o. \quad (3.97)$$

El intercambio de masa entre las fases se caracteriza por la variación de la distribución de masa de cada componente en las fases vapor y líquido. Estas dos fases se asumen que estén en el estado de equilibrio de fases. Esto es físicamente razonable, ya que el intercambio de masa entre las fases se produce mucho más rápido que el flujo de fluidos en medios porosos. En consecuencia, la distribución de cada componente del hidrocarburo en las dos fases está sujeta a la condición de equilibrio termodinámico estable, lo que viene dado por minimizar la energía libre de Gibbs del sistema de composición,

$$f_{mo}(p_o, x_{1o}, x_{2o}, \dots, x_{N_{co}}) = f_{mg}(p_o + p_{cg}, x_{1g}, x_{2g}, \dots, x_{N_{cg}}) \quad (3.98)$$

Donde f_{mo} y f_{mg} son las funciones de fugacidad de la m -ésima componente en las fases líquida y vapor.

Las ecuaciones (3.92)-(3.98) forman un sistema fuertemente acoplado de ecuaciones diferenciales y restricciones algebraicas, ambas, dependientes del tiempo y no lineales.

Sean F la variable de masa total del sistema de hidrocarburos,

$$F = \xi_o S_o + \xi_g S_g, \quad (3.99)$$

y las fracciones de masa del petróleo y del gas en este sistema como

$$L = \frac{\xi_o S_o}{F}, \quad V = \frac{\xi_g S_g}{F}. \quad (3.100)$$

Se cumple

$$L + V = 1.$$

A continuación, en lugar de usar las fracciones molares individuales, se usa el total de la fracción molar de los componentes en el sistema de hidrocarburos,

$$z_m = Lx_{mo} + (1-L)x_{mg}, \quad m = 1, 2, \dots, N_c. \quad (3.101)$$

Entonces usando (3.95), (3.99) y (3.100)

$$\sum_{m=1}^{N_c} z_m = 1 \quad (3.102)$$

y

$$x_{mo}\xi_o S_o + x_{mg}\xi_g S_g = Fz_m, \quad m = 1, 2, \dots, N_c. \quad (3.103)$$

Aplicando (3.94) en (3.92) y (3.93) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Fz_m)}{\partial t} = aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ R^{D_b-2} k_{jl} \left[\frac{\tilde{x}_{mo}\xi_o k_{ro}}{\mu_o} \left(\frac{\partial p_o}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \gamma_o \frac{\partial h}{\partial x_l} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\tilde{x}_{mg}\xi_g k_{rg}}{\mu_g} \left(\frac{\partial p_g}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \gamma_g \frac{\partial h}{\partial x_l} \right) \right] \right\} + \tilde{x}_{mo} q_o + \tilde{x}_{mg} q_g \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\text{donde } \gamma_o = \frac{\rho_o \tilde{g}}{a} \quad \text{y} \quad \gamma_g = \frac{\rho_g \tilde{g}}{a}$$

Sumando la ecuación (3.104) sobre m y aplicando (3.95) y (3.102) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ R^{D_b-2} k_{jl} \left[\frac{\xi_o k_{ro}}{\mu_o} \left(\frac{\partial p_o}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \gamma_o \frac{\partial h}{\partial x_l} \right) + \frac{\xi_g k_{rg}}{\mu_g} \left(\frac{\partial p_g}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \gamma_g \frac{\partial h}{\partial x_l} \right) \right] \right\} \\ + q_o + q_g \end{aligned} \quad (3.105)$$

La ecuación (3.104) es la ecuación de flujo individual para la m -ésima componente ($m=1,2,\dots,N_c-1$), y la ecuación (3.105) es la ecuación de flujo de hidrocarburos global.

Para simplificar, se definen las transmisibilidades

$$T_{\alpha,jl} = \frac{\xi_{\alpha} k_{r\alpha}}{\mu_{\alpha}} k_{jl} \quad \alpha = w, o, g, \quad (3.106)$$

$$T_{m\alpha,jl} = \frac{x_{m\alpha} \xi_{\alpha} k_{r\alpha}}{\mu_{\alpha}} k_{jl} \quad \alpha = o, g, \quad m = 1, 2, \dots, N_c. \quad (3.107)$$

Resumen de ecuaciones

Ecuación de Equilibrio

$$f_{m_o}(p_o, x_{1o}, x_{2o}, \dots, x_{N_c o}) = f_{m_g}(p_o + p_{cg}, x_{1g}, x_{2g}, \dots, x_{N_c g}) \quad m = 1, 2, \dots, N_c. \quad (3.108)$$

Usando (3.106), (3.107) y (3.104) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Fz_m)}{\partial t} = aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ R^{D_b-2} \left[T_{m_o,jl} \left(\frac{\partial p_o}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \gamma_o \frac{\partial h}{\partial x_l} \right) + T_{m_g,jl} \left(\frac{\partial p_g}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \gamma_g \frac{\partial h}{\partial x_l} \right) \right] \right\} \\ + x_{m_o} q_o + x_{m_g} q_g \end{aligned} \quad (3.109)$$

Similarmente se tiene de (3.105)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ R^{D_b-2} \left[T_{o,jl} \left(\frac{\partial p_o}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \gamma_o \frac{\partial h}{\partial x_l} \right) + T_{g,jl} \left(\frac{\partial p_g}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \gamma_g \frac{\partial h}{\partial x_l} \right) \right] \right\} + q_o + q_g \quad (3.110)$$

Aplicando la ecuación (3.92) y las ecuaciones (3.106)-(3.107) se obtiene

$$\frac{\partial(\xi_w S_w)}{\partial t} = aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_b-2} T_{w,jl} \left[\frac{\partial p_w}{\partial x_l} - R^{D_m-D_b-1} \gamma_w \frac{\partial h}{\partial x_l} \right] \right) + q_w \quad (3.111)$$

Finalmente usando (3.99) y (3.100), la ecuación de estado de la saturación (3.96) se escribe como

$$F \left(\frac{L}{\xi_o} + \frac{1-L}{\xi_g} \right) + S = 1 \quad (3.112)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales consiste de $2N_c+2$ ecuaciones (3.108)-(3.112) para las $2N_c+2$ variables desconocidas: x_{mo} (o x_{mg}), L (o V), z_m , F , $S=S_w$, y $p=p_o$, $m=1,2,\dots,N_c-1$. Para (rates-specified wells), la ecuación (*, apéndice *). se puede usar para encontrar p_{bh} .

En notación de cálculo vectorial se tiene las ecuaciones (3.09)-(3.111) se escriben como

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Fz_m)}{\partial t} &= aR^{3-D_m} \nabla \cdot \left\{ R^{D_b-2} \left[\mathbf{T}_{mo} (\nabla p_o - R^{D_m-D_b-1} \gamma_o \nabla h) + \mathbf{T}_{mg} (\nabla p_g - R^{D_m-D_b-1} \gamma_g \nabla h) \right] \right\} \\ &+ x_{mo} q_o + x_{mg} q_g \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = aR^{3-D_m} \nabla \cdot \left\{ R^{D_b-2} \left[\mathbf{T}_o (\nabla p_o - R^{D_m-D_b-1} \gamma_o \nabla h) + \mathbf{T}_g (\nabla p_g - R^{D_m-D_b-1} \gamma_g \nabla h) \right] \right\} + q_o + q_g \quad (3.114)$$

$$\frac{\partial(\xi_w S_w)}{\partial t} = aR^{3-D_m} \nabla \cdot \left[R^{D_b-2} \mathbf{T}_w (\nabla p_w - R^{D_m-D_b-1} \gamma_w \nabla h) \right] + q_w \quad (3.115)$$

Referencias

- [1] Jamal H., Farouq Ali S. M., Rafiq Islam M. *Petroleum Reservoir Simulation A Basic Approach* (Gulf Publishing Company, Houston, Texas) 2006.
- [2] Chen Z., *Reservoir Simulation Mathematical Techniques in Oil Recovery* (SIAM, Philadelphia) 2007.
- [3] Chen Zh, Huan G. and Ma Y., *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media* (SIAM, Philadelphia) 2006.
- [4] Banks h. T, *The mathematics of reservoir simulation* (SIAM, Philadelphia) 1983.
- [5] Ahmed T. and McKinney P. D., *Advanced Reservoir Engineering* (Elsevier, New York) 1989.
- [6] Tarasov V. E., *Ann. Phys.*, **318** (2005) 286.
- [7] Cherepanov G. P., Balankin A. S. and Ivanova V. S., *Eng. Fract. Mech.*, **51** (1995) 997.
- [8] Balankin A. S., *Eng. Fract. Mech.*, **57** (1997) 135.
- [9] O'Shaugnessy B. and Procaccia I, *Phys. Rev. A*, **32** (1985) 3073.
- [10] Metzler R. and Klafter J., *Phys. Rep.*, 339 (2000) 1.
- [11] Havlin S., Ben-Avraha D., *Adv. Phys.*, **51** (2002) 187.
- [12] Balankin A. S., Susarrey O. and Márquez J., *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2003) 096101.
- [13] Barker J. A., *Water Resour. Res.*, **24** (1988) 1796.
- [14] Chang J. and Yortsos Y. C., *SPE Formation Evaluation*, **5** (1990) 31.
- [15] Herrick M. G., Benson D. A., Meerschaert M. M. and McCall K. R., *Water Resour. Res.*, **38** (2002) 1227.
- [16] Bernard S., Delay F. and Porel G., *J. Hydrology*, **328** (2006) 647.
- [17] Lei Zh.-D., *J. Hydrodynamics B*, 19 (2007) 494.
- [18] Drazer G., Auradou H., Koplik J. and Hulin J. P., *Phys. Rev. Lett.*, 90 (2004) 014501.
- [19] Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman, San Francisco CA.) 1982.

CAPÍTULO 4

MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA DESCRIBIR FLUJOS DE AGUA SUBTERRÁNEA EN SUELOS CON POROSIDAD FRACTAL

Las aplicaciones de los modelos de agua subterránea van desde simular el flujo de agua y la migración química en la zona saturada, hasta evaluar el impacto de los cambios del régimen del agua en el medio ambiente. Para un manejo racional de los recursos hídricos, que incluya un aprovechamiento integral del agua subterránea, es necesaria la creación / optimización de redes de monitoreo para proteger las zonas de protección de los mantos acuíferos [2]. Por estas razones, los modelos de aguas subterráneas son una herramienta de investigación útil que los hidrólogos pueden utilizar para varias aplicaciones, como las mencionadas anteriormente. En resumen los modelos de aguas subterráneas describen el flujo de agua en el subsuelo y los procesos de transporte mediante ecuaciones matemáticas [1-8]. Sin embargo, los modelos antes mencionados solo sirven para simular medios con geometrías suaves o Euclidianas. Un acuífero es altamente heterogéneo, rugoso con fracturas que contiene un sistema de juntas, grietas, microgrietas, fallas y zonas de cizalla distribuidas aleatoriamente, es decir, es un sistema altamente complejo. Para resolver este problema se ha demostrado que la teoría fractal se puede aplicar para expresar geometrías complejas e irregulares utilizando auto-similaridad, la propiedad de que cualquier fenómeno muestra el mismo comportamiento independientemente de la escala, y puede tener un potencial muy importante en el análisis de propiedades de flujo y transporte en el medio poroso [8. Por otro lado, Tyler y wheatcraft [10] experimental que mostraron que el suelo o los estratos tienen estructura fractal, aplicaron la matemática fractal para analizar la retención del agua en el suelo. Young y Crawford [11] investigaron el escalamiento fractal de la estructura del poro en el suelo, y encontraron que el rango de la dimensión fractal es de 2.75 a 2.93. Análisis fractal del flujo y transporte en el suelo ha mostrado ser una herramienta muy poderosa en ciencias de la tierra [10-22].

El propósito de este capítulo es establecer el enfoque matemático de modelos de difusión no lineal de flujos de agua subterránea en medios con porosidad fractal.

4.1 Definiciones básicas del flujo de no saturado

Un **suelo** es un medio poroso que consiste en una matriz sólida y un espacio vacío (o espacio poroso). El espacio vacío se llena con uno o más líquidos miscibles o inmiscibles. Nos referiremos en la parte posterior por lo general al agua y el aire. El agua proporcionada por las lluvias, los riegos, las fugas de fuentes de aguas superficiales o subterráneas, pueden infiltrarse en los huecos. **El flujo se dice no saturado** cuando todavía están presentes espacios vacíos. Sin embargo, las **zonas** parcialmente **saturadas** pueden ocurrir cuando todos los poros dentro de ellos están llenos de agua. Entonces, las interfaces entre las regiones de la tierra saturadas e insaturadas son fronteras libre. Llamamos al movimiento del agua en esta situación flujo saturados-insaturados. Por lo tanto, el término de la infiltración se relaciona con el hecho del flujo de agua en un suelo insaturados o parcialmente saturado. A veces el dominio del flujo total en estudio puede llegar a ser totalmente saturado y, en este caso, la infiltración cesa y nos enfrentamos a un flujo saturado. El suelo puede llegar a ser, otra vez, insaturado por un proceso de drenaje de cualquier tipo (por evaporación-transpiración natural, el consumo por raíz de la planta, extracción de bombeo, etc.).

Se considera al agua que sea un fluido incompresible, es decir, con densidad $\rho = \text{constante}$ (tal como en un flujo saturado).

La porosidad del suelo,

$$\phi := \frac{V_p}{V_r}$$

donde V_p es el volumen del espacio del poro y V_r es un volumen elemental de referencia, centrado en el punto $\vec{R} = (x_1, x_2, x_3)$ del dominio del flujo.

El contenido volumétrico del agua, o humedad del suelo, se relaciona como

$$\theta := \frac{V_w}{V_r}$$

donde V_w es el volumen del agua en el volumen V_r .

La saturación del agua

$$S_w := \frac{V_w}{V_p}$$

Relación humedad del suelo, porosidad y saturación

$$\theta = \phi S_w$$

La porosidad puede ser función de \bar{R} y t , y $0 \leq \phi \leq 1$. En el límite superior $\phi = 1$, el medio es un fluido libre, y cuando $\phi = 0$, el medio es totalmente impermeable.

Se define, **el contenido de humedad residual** o la capacidad de campo θ_r , como la cantidad de agua que permanece en el suelo después de cualquier drenaje impuesto por las fuerzas gravitatorias, y el **valor de saturación** de θ_s como el valor alcanzado por la humedad cuando todos los poros se llenan de agua, es decir, $\theta_s = \phi$, de tal manera se deduce que

$$0 \leq \theta_r \leq \theta \leq \theta_s = \phi$$

La fuerza capilar, es el concepto relacionado con el flujo insaturado, es la que retiene el agua dentro de los poros en contra de la fuerza de gravedad. Está determinada por la atracción mutua de las moléculas de agua (cohesión) y la atracción de las moléculas de agua con las paredes de los poros (adherencia). El nivel de esta fuerza se ha establecido como inversamente proporcional con el tamaño de los poros. Por lo tanto, en el flujo insaturado, el sistema agua-aire en el suelo es un sistema de dos fases con las presiones parciales de agua (p_w) y aire (p_a), entre cuyos valores hay una discontinuidad de la forma,

$$p_c := p_a - p_w > 0.$$

Esto define la **presión capilar**, que es una medida de la tendencia del medio poroso parcialmente saturado a succionar el agua o repeler el aire.

Si suponemos que el aire en el espacio vacío está en todas partes a presión atmosférica, entonces la presión en el agua existente en el espacio vacío es $p_w < p_a$. Normalmente, la presión atmosférica constante se toma como referencia, y se re-escala a cero. Por lo tanto en un suelo insaturados, el agua presente en el espacio vacío, p_w es siempre negativo ($p_w = -p_c$). En tales condiciones, se introduce la definición de la **cabeza de la presión capilar**, ψ también llamada succión, por

$$\psi := -\frac{p_w}{g\rho_w} > 0,$$

donde g es la constante gravitacional. La succión se puede definir también, para $p_a \neq 0$, por

$$\psi = -\frac{p_c}{g\rho_w}.$$

El agua dentro de los poros en virtud de succión y cuando la succión es positiva, la presión en el agua es negativa. Estamos hablando aquí de la presión del agua en los suelos no saturados, llamada **cabeza de presión** y se define como la succión negativa

$$h := \frac{p_w}{g\rho_w}$$

Por otra parte, hay que especificar que en el suelo no saturado una relación básica, llamada ley constitutiva, tiene lugar entre la humedad y la presión, $\theta = \theta(h)$ y que describe un aspecto fundamental del comportamiento hidráulico del suelo.

Dado que la porosidad ϕ no depende de h , la ley constitutiva implica una relación entre la saturación del agua y la cabeza de presión, llamada curva de retención.

$$S_w = S_w(h).$$

4.2 Generalización fraccional de las ecuaciones de Richards

Ecuación de Darcy

$$u_i = -K_{ij} \left[\frac{\partial h}{\partial x_j} - \left(\frac{R^{D_m - D_b - 1}}{a} \right) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right] \quad (4.1)$$

Donde h es la cabeza de presión, K_{ij} es el tensor de conductividad hidráulica, Z es la profundidad y

$$a = a(D_m, D_b) = \frac{2^{D_m - D_b - 1} \Gamma(D_m / 2)}{\Gamma(3/2) \Gamma(D_b / 2)}, \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

La conductividad hidráulica expresa la propiedad del medio poroso a conducir agua.

Conservación de la masa para medios fractales.

$$\frac{\partial(\theta \rho_w)}{\partial t} = -a R^{3 - D_m} \frac{\partial}{\partial x_i} (R^{D_b - 2} \rho_w u_i) + q \quad (4.2)$$

Relación humedad del suelo θ , porosidad ϕ y saturación S_w

$$\theta = \phi S_w$$

En la ecuación (4.2) $q = q(\vec{R}, t)$ es alguna fuente de agua ($q > 0$), o sumidero ($q < 0$).

Tenemos que especificar que si el medio es anisotrópico (es decir, diferentes propiedades corresponden a diferentes direcciones), la conductividad hidráulica es representado por un tensor, K_{ij} , mientras que en los medios isotrópicos (cuyas propiedades no dependen de la dirección) este tensor es un escalar. K_{ij} depende de la presión, $K_{ij} = K_{ij}(h)$ y tiene las dimensiones de una velocidad.

La incompresibilidad del agua, resulta en $\rho_w = const.$, así podemos escribir

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_i} (R^{D_b-2} u_i) + q \quad (4.3)$$

Recordemos que $\theta = \phi S_w$ y si ϕ depende de \mathbf{R} o t , entonces tenemos que tomar en cuenta la contribución de esta relación en la ecuación

$$\frac{\partial(\phi S_w)}{\partial t} = -aR^{3-D_m} \frac{\partial}{\partial x_i} (R^{D_b-2} u_i) + q \quad (4.4)$$

Cuando $S_w = 1$ todo el medio esta saturado, es decir, todo el espacio vacío está lleno.

4.3 Ecuaciones para flujos no saturados

La generalización de las ecuaciones de Richards para medios fractales que describen la dinámica de flujo en una zona insaturada se deduce de combinar la ley de Darcy (4.1) y la ecuación de continuidad (4.3)

Medios porosos homogéneos

Asumamos que el medio es indeformable en el tiempo (porosidad es constante con respecto al tiempo) y homogéneo, es decir, consiste de un único tipo de textura.

4.3.1 La forma mixta de la ecuación de infiltración

La ecuación de Richards que representa la ecuación de infiltración del agua en un medio poroso fractal insaturado anisotrópico en tres dimensiones es (Ec.(4.1) en Ec.(4.3))

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} K_{ij}(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m-3} K_{ij}(h) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.5)$$

4.3.2 Ecuación de cabezas de presión

Como $\theta = \theta(h)$, entonces el lado izquierdo de (4.5) se puede expresar como

$$\frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} K_{ij}(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m-3} K_{ij}(h) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q$$

o

$$C_w(h) \frac{\partial h}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} K_{ij}(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m-3} K_{ij}(h) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.6)$$

donde

$$C_w(h) = \frac{\partial \theta}{\partial h}, \quad (4.7)$$

se le conoce como la capacidad específica del agua. Cuando la cabeza de presión aumenta, θ aumenta, entonces $C_w(h) \geq 0$.

Si h se expresa como función de θ , denotamos **al tensor de conductividad** en términos de θ por $K_{ij}(\theta)$. Definición de la **difusividad del agua para flujo insaturado**

$$D_{ij}(\theta) := K_{ij}(\theta) \frac{dh}{d\theta} \quad (4.8)$$

y podemos escribir la ec.(4.5) en la equivalente forma difusiva

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} K_{ij}(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m-3} K_{ij}(\theta) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q$$

o

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} D_{ij}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m-3} \mathbf{K}_{ij}(\theta) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.9)$$

Las ecuaciones (4.5), (4.6) y (4.9), son las ecuaciones de Richards para medios fractales, pero el caso de un medio anisotrópico y homogéneo.

Para un medio poroso anisotrópico donde se considera que los ejes principales del tensor \mathbf{K}_{ij} ó D_{ij} están a lo largo de las direcciones de los ejes x_1, x_2 y x_3 , así de las ecuaciones (4.5) y (4.9) se tiene

$$\frac{\partial(\theta)}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_b-2} K_j(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_m-3} K_j(h) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial(\theta)}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_b-2} D_j(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_m-3} \mathbf{K}_j(\theta) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.11)$$

Donde D y K son escalares que depende de manera no lineal de las funciones desconocidas h o θ . Si los efectos gravitacionales son despreciables se obtienen **la ecuación para la infiltración horizontal** (para un suelo isotrópico), también llamada sorción,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.12)$$

Todas estas ecuaciones son para representar flujo insaturados. Cuando se produce la saturación, la difusividad del agua ya no puede ser definida por (4.8)

En el flujo no saturado las funciones θ , K , C depende de una forma no lineal de la cabeza de presión h . Obviamente, K y D dependen de manera no lineal de la humedad del suelo θ y todos ellos dependen de las variables espaciales a través de h o θ .

4.4 Medios porosos heterogéneos

Un medio heterogéneo consiste de muchos tipos de suelos estructurados regularmente. En este caso, cada tipo de suelo se caracteriza por su porosidad propia y los parámetros hidráulicos y por consiguiente, ϕ se convierte en una función de la posición. Por ejemplo, (4.10) se convierte en

$$\phi(x) \frac{\partial(S_w)}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} K(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m-3} K(h) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.13)$$

Sin embargo, se sabe que los suelos heterogéneos tienen muchas capas homogéneas que se encuentran paralelamente a una dirección. Este tipo de suelo se llama estratificado y en la literatura se considera una aproximación suficientemente buena para determinados medios heterogéneos. Si la estratificación es paralela a la dirección horizontal, todos los parámetros que caracterizan este suelo son funciones solamente de la profundidad y este modelo es más fácil de estudiar desde el punto de vista matemático. Sin embargo, en la interfase entre dos capas de tales estructuras, algunas funciones de interés pueden mostrar un comportamiento particular, por ejemplo, que la saturación de agua (o el contenido de humedad) ya no es continua. En cambio, la cabeza de presión se requiere que sea continua en la superficie de separación entre dos capas diferentes.

Resumen de ecuaciones de flujo de agua

Ecuaciones de flujo insaturado para un medio poroso anisotrópico y homogéneo

La forma mixta de la ecuación de infiltración

$$\frac{\partial(\theta)}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} K_{ij}(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m-3} K_{ij}(h) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.14)$$

Si consideramos que los ejes principales del tensor $K_{ij}(h)$ están a lo largo de las direcciones x_1 , x_2 y x_3 , se tiene

$$\frac{\partial(\theta)}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_b-2} K_j(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_m-3} K_j(h) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.15)$$

Cabezas de presión

$$C_w \frac{\partial(h)}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} K_{ij}(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m-3} K_{ij}(h) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.16)$$

Si consideramos que los ejes principales del tensor $K_{ij}(h)$ están a lo largo de las direcciones x_1 , x_2 y x_3 , se tiene

$$C_w \frac{\partial(h)}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_b-2} K_j(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_m-3} K_j(h) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.17)$$

Forma difusiva

$$\frac{\partial(\theta)}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} D_{ij}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m-3} K_{ij}(\theta) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.18)$$

Si consideramos que los ejes principales de los tensores $D_{ij}(\theta)$ y $K_{ij}(\theta)$ están a lo largo de las direcciones x_1, x_2 y x_3 , se tiene

$$\frac{\partial(\theta)}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_b-2} D_j(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R^{D_m-3} K_j(\theta) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.19)$$

Ecuaciones de flujo insaturado para un medio poroso isotropico y homogéneo

Donde $K(h)$, $\Lambda(\theta)$ y $D(\theta)$ son escalares que dependen de una forma no lineal de las funciones desconocidas h ó θ

La forma mixta de la ecuación de infiltración

$$\frac{\partial(\theta)}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} K(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m-3} K(h) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.20)$$

Cabezas de presión

$$C_w \frac{\partial(h)}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} K(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m-3} K(h) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.21)$$

Forma difusiva

$$\frac{\partial(\theta)}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m-3} K(\theta) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.22)$$

Cuando $D=3$, $d=2$, estas ecuaciones (4.14)-(4.22), se transforman a las Ecuaciones de Richards 3-D en un medio euclidiano [*].

Ecuación para la infiltración horizontal, llamada sorción

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.23)$$

Ecuación para medios porosos heterogéneos

$$\phi(x) \frac{\partial (S_w)}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} K(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m-3} K(h) \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) \right] + q \quad (4.24)$$

Los modelos matemáticos son herramientas que son utilizadas en el estudio de sistemas de aguas subterráneas. En general, los modelos matemáticos son usados para simular (o predecir) el flujo de las aguas subterráneas y en algunos casos el transporte de soluto y/o de calor. Dependiendo de la calidad y la incertidumbre de los datos de entrada, las simulaciones predictivas se deben considerar como estimaciones. Se pueden utilizar los modelos como herramientas de predicción, sin embargo el terreno de monitoreo debe ser incorporado para verificar las predicciones del modelo. El mejor método de eliminar o reducir los errores de modelado es aplicar el buen juicio hidrogeológicos y a cuestionar los resultados de modelos de simulación. Si los resultados no tienen sentido físico, encontrar por qué.

Referencias

- [1] Kumar C. P. , *Groundwater flow models*. (Eds. N. C. Ghosh & K. D. Sharma) 2006.
- [2] Andrzej j. W., Andrzej K. & Owalczyk J. V., *Groundwater Vulnerability Assessment and Mapping* (Taylor & Francis Group) 2007.
- [3] Haitjema H. M., *Analytic Element Modeling of Groundwater Flow* (academic press) 1995.
- [4] Banks h. T., *The mathematics of reservoir simulation* (SIAM, Philadelphia) 1983.
- [5] William C. Walton, *Aquifer Test Modeling* (Taylor & Francis group) 2007.
- [6] Vedat B., *Applied Flow and Solute Transport Modeling in Aquifers Fundamental Principles and Analytical and Numerical methods* (Taylor & Francis group) 2006.
- [7] George f. P., William G., *Essentials of Multiphase Flow and Transport in Porous Media* (John Wiley & sons) 2008.
- [8] G. Marinocchi , *Functional Approach to Nonlinear Models of Water Flow in Soils* (Springer,
- [9] Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman, San Francisco CA.) 1982.
- [10] Tyler, S. W., and Wheatcraft, W., *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **53**, (1989) 987.
- [11] Young, I. M., and Crawford, J. W., *J. Soil Sci.*, **42** (1991) 187
- [12] Dimri V. P. *Fractal Behaviour of the Earth System* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg) 2005.
- [13] Perfect, E., and Kay, B. D., *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **55** (1991) 1552.
- [14] Rieu, M., and Sposito, G., *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **55** (1991) 1231.
- [15] Giménez, D., Perfect, E., Rawls, W. J., and Pachepsky, Ya., *Eng. Geol. Amsterdam*, **48** (1997) 161.
- [16] Perrier, E., Bird, N., and Rieu, M., *Geoderma*, **88** (1999) 137.
- [17] Moldrup, P., Olesen, T., Komatsu, T., Schjønning, P., and Rolston, D. E., *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **65** (2001) 613.
- [18] Berkowitz, B., *Adv. Water Resour.*, **25**, (2002) 861.
- [19] Perfect, E., *Vadose Zone J.*, **4** (2005) 959.
- [20] Wang, K., Zhang, R. D., and Wang, F. G., *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **69** (2005) 776.
- [21] Schaap, M. G., *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **70**, (2006) 1036.
- [22] Bird, N., Cruz, D. M., Saa, A., and Tarquis, A. M., *J. Hydrol.*, **322** (2006) 211.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se reportaron nuevos modelos matemáticos para flujos multifásicos para describir el flujo de fluidos en medios porosos con estructura fractal, tales como yacimientos o acuíferos:

1.-Se derivó la ecuación de difusión de presión (ec. (3.6)) para flujo fractal contenido en el espacio de tres dimensiones, que se puede utilizar en ingeniería del petróleo para el análisis de pruebas de pozos y para pronosticar el declive de la producción.

2.-También presentamos las soluciones analíticas, ecuaciones (3.18 y 3.29) del capítulo 3 de esta tesis, para las presiones del flujo fractal radial con geometría cilíndrica y esférica para un yacimiento infinito con tasa de producción constante. Estas soluciones se pueden usar para el análisis de pruebas de pozos o curvas de declive. Se encontró que las soluciones asintóticas a tiempos largos y la derivada de la presión, sigue un comportamiento de ley de potencia en el tiempo ($\sim t_D^{1-\sigma}$), donde $\sigma = D_m - 1/D_m - D_b + \mathcal{G} + 1$ para el flujo fractal cilíndrico; y $\sigma = D_m/D_m - D_b + \mathcal{G} + 1$ para el caso de flujo fractal esférico.

3.-Se desarrollaron nuevos modelos matemáticos para una amplia variedad de flujos de fluidos en medios con porosidad fractal: en dos fases, modelo de petróleo negro para flujo fractal (tres fases), flujo fractal monofásico con multicomponentes y flujo fractal de composición.

4.-Por otra parte, en este trabajo de tesis se obtuvo la generalización para medios porosos con estructura fractal de las ecuaciones de Richards, tales como: el modelo fractal de cabezas de presión, entre otros. Estos modelos se pueden usar en hidrología para simular el flujo del agua en estudios de abatimientos de agua subterránea o para modelar la infiltración del agua en el suelo poroso con estructura fractal.

5.-Finalmente, como se analizó en la sección 3.1.3, casos especiales para el flujo fractal se pueden obtener de la relación entre los parámetros de escalamiento y la geometría fractal del poro/ o medio fracturado, por ejemplo: flujo fractal en medios porosos isotrópicos, flujo fractal a

través de una red de poros fractal, flujo fractal en una red de fracturas, flujo Euclidiano en una red de fracturas, flujo fractal en grieta autoafín.

Recomendaciones

Hasta ahora los modelos matemáticos para flujos multifásicos para describir el flujo de fluidos en medios porosos con estructura fractal, reportados en esta tesis, han sido desarrolladas bajo la condición de que el flujo es isotérmico, es decir, a temperatura constante. Es necesario agregar una ecuación para la energía. Esta ecuación introduce una variable adicional a cargo, la temperatura, para el sistema. Estas ecuaciones se basan en los mecanismos de desplazamiento de los métodos térmicos; por ejemplo, al aumentar la temperatura se reduce la viscosidad del crudo, y se puede mantener la presión alta en el yacimiento y por lo tanto aumentar el desplazamiento de petróleo. Entonces se pueden aplicar las ecuaciones hidrodinámicas fractales para modelar y simular estos procesos térmicos y obtener una ecuación para la energía del flujo fractal.

Por otra parte, los modelos reportados en esta tesis son ecuaciones diferenciales parciales altamente no lineales, y obtener una solución analítica de ellas sería un gran reto. Gracias a los avances en métodos numéricos y algoritmos computacionales se pueden resolver así simular el yacimiento petrolero ó acuífero.

Apéndice A

Ecuación de difusión 3-D en notación de cálculo vectorial

$$c_f \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{R^{D_m-3}} \left[a \nabla \cdot \left(\frac{R^{D_b-2} \mathbf{k}}{\mu} \nabla p \right) - g \rho \nabla \cdot \left(\frac{R^{D_m-3} \mathbf{k}}{\mu} \nabla z \right) \right] \quad (\text{A.1})$$

Ecuación de difusión 3-D en coordenadas cilíndricas

$$\vec{R} = r \hat{e}_r + x_3 \hat{e}_{x_3}$$

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{r^2 + x_3^2}$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{x_3}}{\partial x_3} \quad (\text{A.2})$$

Gradiente

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial x_3} \hat{e}_{x_3} \quad (\text{A.3})$$

Suponiendo que el medio es isotrópico, entonces $\mathbf{k} = k\mathbf{I}$, donde \mathbf{I} es el tensor identidad, aplicando la ecuación (A.3) a la ecuación (A.1) se obtiene,

$$c_f \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{R^{D_m-3}} \left[a \nabla \cdot \left[\frac{R^{D_b-2} k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial x_3} \hat{e}_{x_3} \right) \right] - \rho g \nabla \cdot \left[\frac{R^{D_m-3} k}{\mu} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial z}{\partial x_3} \hat{e}_{x_3} \right) \right] \right]$$

ó

$$c_f \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{R^{D_m-3}} \left[\begin{array}{l} a \nabla \cdot \left[\frac{R^{D_b-2} k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{R^{D_b-2} k}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{R^{D_b-2} k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \hat{e}_{x_3} \right] \\ - \rho g \nabla \cdot \left[\frac{R^{D_m-3} k}{\mu} \frac{\partial z}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{R^{D_m-3} k}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{R^{D_m-3} k}{\mu} \frac{\partial z}{\partial x_3} \hat{e}_{x_3} \right] \end{array} \right] \quad (\text{A.4})$$

Ahora empleando la ecuación (A.2) en la ecuación (A.4),

$$\phi_{c_t} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{R^{D-3}} \left\{ \begin{array}{l} a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r R^{d-2} k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{R^{d-2} k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{R^{d-2} k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) \right] \\ - \rho g \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r R^{D-3} k}{\mu} \frac{\partial z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{R^{D-3} k}{\mu} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{R^{D-3} k}{\mu} \frac{\partial z}{\partial x_3} \right) \right] \end{array} \right\}$$

Finalmente obtenemos

$$c_f \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{R^{D_m-3}} \left[\begin{array}{l} \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r R^{D_b-2} k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \rho g \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r R^{D_m-3} k}{\mu} \frac{\partial z}{\partial r} \right) \\ + \frac{a}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{R^{D_b-2} k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) - \rho g \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{R^{D_m-3} k}{\mu} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \\ + a \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{R^{D_b-2} k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) - \rho g \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{R^{D_m-3} k}{\mu} \frac{\partial z}{\partial x_3} \right) \end{array} \right] \quad (\text{A.5})$$

Donde

$$a = \frac{2^{D-d-1} \Gamma(D/2)}{\Gamma(3/2) \Gamma(d/2)}, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Ecuación de difusión 3-D en coordenadas Esféricas

$$\vec{R} = r\hat{e}_r$$

$$R = |\vec{R}| = r$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin(\theta)) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{A.6})$$

Gradiente

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \quad (\text{A.7})$$

Suponiendo que el medio es isotrópico, entonces $\mathbf{k} = k\mathbf{I}$, donde \mathbf{I} es el tensor identidad, aplicando la ecuación (A.7) a la ecuación (A.1) se obtiene,

$$c_f \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D_m-3}} \left[\begin{aligned} & a \nabla \cdot \left(\frac{r^{D_b-2} k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{r^{D_b-2} k}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{r^{D_b-2} k}{\mu} \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial p}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \right) \\ & - \rho g \nabla \cdot \left(\frac{r^{D_m-3} k}{\mu} \frac{\partial z}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{r^{D_m-3} k}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{r^{D_m-3} k}{\mu} \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial z}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.8})$$

Ahora empleando la ecuación (A.6) en la ecuación (A.8), finalmente se obtiene

$$c_f \frac{\partial p}{\partial t} = \left[\begin{aligned} & \frac{a}{r^{D_m-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^{D_b} k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \rho g \frac{1}{r^{D_m-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^{D_m-1} k}{\mu} \frac{\partial z}{\partial r} \right) \\ & + \frac{a}{r^{D_m-D_b+1} \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k}{\mu} \sin(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) - \rho g \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k}{\mu} \sin(\theta) \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{a}{r^{D_m-D_b+1} \sin^2(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \phi} \right) - \rho g \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial z}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.9})$$

Apéndice B

Resolviendo ecuaciones diferenciales parciales, por transformación de similitud.

B.1 Ecuación de flujo fractal radial cilíndrico

La ecuación de difusión de presión para el flujo fractal radial cilíndrico obtenida en esta tesis está dada por

$$\frac{c_f \mu}{a} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D_m-2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r) r^{D_b-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (\text{B.1})$$

Sea $k(r) = k(\phi_0) r^{-\mathcal{G}}$ donde $k(\phi_0)$ es una permeabilidad que depende de la porosidad y \mathcal{G} es un parámetro. La ecuación (B.1) queda de la siguiente manera

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D_m-2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\beta \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (\text{B.2})$$

donde

$$\chi = \frac{a k(\phi_0)}{c_f \mu}$$

$$\beta = D_b - 1 - \mathcal{G}$$

La ecuación (B.2) es sujeta a la condición inicial

$$p(r, 0) = p_0, \quad (\text{B.3})$$

condición al interior del pozo (condición de frontera de fuente puntual en el interior del pozo)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r^\beta \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{Q\mu}{2\pi k(\phi_0)H}, \quad (\text{B.4})$$

condición fuera de la frontera del pozo

$$p(\infty, t) = p_0. \quad (\text{B.5})$$

Forma sin dimensiones de las ecuaciones (B.2), (B.3), (B.4) y (B.5)

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{1}{r_D^{D_m-2}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^{D_b-1-g} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right). \quad (\text{B.6})$$

$$p_D(r_D, 0) = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} \left[r_D^\beta \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right] = -1, \quad (\text{B.8})$$

$$p_D(\infty, t_D) = 0, \quad (\text{B.9})$$

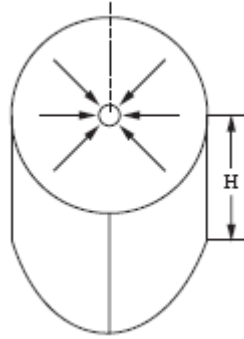
donde las variables sin dimensiones son

$$p_D = \frac{p_0 - p(r, t)}{p^*}, \quad r_D = \frac{r}{r^*}, \quad t_D = \frac{t}{t^*},$$

p_0 es una presión inicial, por otro lado, el radio característico, tiempo característico y presión característica están dados como

$$r^* = r_w, \quad t^* = \frac{r_w^{D_m - D_b + 1 + g}}{\chi}, \quad p^* = \frac{Q\mu}{2\pi k(\phi_0)Hr_w^{\beta-1}},$$

r_w es el radio, H la altura, Q la tasa de producción fija del pozo.



Para obtener una solución para la ecuación (B.6) hacemos la siguiente transformación,

$$u = (D_m - 1)^{2-\frac{1}{\sigma}} p_D, \quad x = \frac{1}{(D_m - 1)} r_D^{(D_m-1)}, \quad t_1 = (D_m - 1)^{2-\frac{1}{\sigma}} t_D, \quad (\text{B.10})$$

donde $\sigma = \frac{D_m - 1}{D_m - D_b + \mathcal{G} + 1}$

Se encuentra la siguiente ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{2-\frac{1}{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (\text{B.11})$$

$$u(x,0) = 0, \quad (\text{B.12})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{2-\frac{1}{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -1, \quad (\text{B.13})$$

$$u(\infty, t) = 0. \quad (\text{B.14})$$

El problema de valor inicial y de frontera de arriba, puede ser visto como un problema fuente continuo. Primero, se resolverá el problema de fuente instantáneo correspondiente al problema de fuente continuo.

El problema de fuente instantáneo se formula con las Ecs.

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{2-\frac{1}{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{2-\frac{1}{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad t_1 > 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$u|_{t_1=0} = \delta(x) \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (\text{B.18})$$

Donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac

Nuevamente hacemos la siguiente transformación de similaridad

$$u = w(\rho)t_1^{-\sigma} \quad \rho = xt_1^{-\sigma} \quad \sigma > 0 \quad (\text{B.19})$$

$$-\frac{\partial}{\partial \rho} (w\rho) = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{2-\frac{1}{\sigma}} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \quad (\text{B.20})$$

Sujeto a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\rho^{2-\frac{1}{\sigma}} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (\text{B.21})$$

Integrando una vez la Ec. (B.20)

$$-\int \frac{\partial}{\partial \rho} (w\rho) d\rho = \frac{1}{\sigma} \int \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{2-\frac{1}{\sigma}} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) d\rho + c_1$$

$$\Rightarrow -(w\rho) = \frac{1}{\sigma} \left(\rho^{2-\frac{1}{\sigma}} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) + c_1 \quad (\text{B.22})$$

Utilizando la ecuación (B.21) se encuentra que la constante de integración $c_1 = 0$. Nuevamente integrando (B.22) se obtiene

$$-\int \rho^{-1+\frac{1}{\sigma}} d\rho = \frac{1}{\sigma} \int \frac{dw}{w}$$

Entonces

$$w(\rho) = w_0 \exp \left[-\sigma^2 \rho^{\frac{1}{\sigma}} \right], \quad (\text{B.23})$$

aquí w_0 es el valor de $w(\rho)$ en $\rho = 0$.

Para completar la solución se nota que cuando,

$$\int_0^{\infty} u(x) dx = 1, \text{ entonces}$$

$$\int_0^{\infty} w(\rho) d\rho = 1$$

es decir

$$\int_0^{\infty} \left\{ w_0 \exp \left[-\sigma^2 \rho^{\frac{1}{\sigma}} \right] \right\} d\rho = w_0 \int_0^{\infty} \left\{ \exp \left[-\sigma^2 \rho^{\frac{1}{\sigma}} \right] \right\} d\rho = 1$$

$$\Rightarrow w_0 = \frac{1}{\int_0^{\infty} \left\{ \exp \left[-\sigma^2 \rho^{\frac{1}{\sigma}} \right] \right\} d\rho}$$

ó

$$w_0 = \frac{1}{\sigma \int_0^{\infty} t^{\sigma-1} \left\{ \exp \left[-\sigma^2 t \right] \right\} dt} \quad (\text{B.24})$$

$$w_0 = \frac{\sigma^{2\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} \quad (\text{B.25})$$

Donde $\Gamma(\sigma)$ es la función gamma

$$\Gamma(\sigma) = \int_0^{\infty} t^{\sigma-1} e^{-t} dt = k^{\sigma} \int_0^{\infty} t^{\sigma-1} e^{-kt} dt$$

Con $k = \sigma^2$

Sustituyendo B(25) en B(23), se obtiene la solución de fuente instantánea

$$w(\rho) = \frac{\sigma^{2\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} \exp \left[-\sigma^2 \rho^{\frac{1}{\sigma}} \right] \quad (\text{B.26})$$

Por el principio de Duhamel, la solución de fuente continua se obtiene al integrar la solución de fuente instantánea con respecto al tiempo “t”, es decir

$$u = \int_0^{t_1} w t_1^{-\sigma} dt_1 = w_0 \int_0^{t_1} t_1^{-\sigma} \exp \left[-\sigma^2 x^{\frac{1}{\sigma}} t_1^{-1} \right] dt_1$$

Haciendo la transformación $y = \sigma^2 x^{\frac{1}{\sigma}} t_1^{-1}$ se encuentra

$$u = w_0 \left[\sigma^2 x^{\frac{1}{\sigma}} \right]^v \int_y^{\infty} y^{\sigma-2} \exp[-y] dy$$

De la definición de la función Gamma incompleta $\Gamma(a, x)$,

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \quad (\Re a > 0)$$

Se tiene

$$u = w_0 \left[\sigma^2 x^{\frac{1}{\sigma}} \right]^{1-\sigma} \Gamma(\sigma-1, y)$$

Ahora sustituyendo la ecuación (B.25) en (B.27), se obtiene

$$u = \frac{\sigma^{2\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} \left[\sigma^2 x^{\frac{1}{\sigma}} \right]^{1-\sigma} \Gamma(\sigma-1, y) = \frac{\sigma}{\Gamma(\sigma)} x^{-1+\frac{1}{\sigma}} \Gamma(\sigma-1, y) \quad (\text{B.27})$$

Entonces la solución completa esta dada al sustituir la Ec. (B.27) en la Ec. (B.10), de la siguiente manera

$$u = (D_m - 1)^{2-\frac{1}{\sigma}} p_D \Rightarrow P_D = \frac{1}{(D_m - 1)^{2-\frac{1}{\sigma}}} u \Rightarrow P_D = \frac{1}{(D_m - 1)^{2-\frac{1}{\sigma}}} \frac{\sigma}{\Gamma(\sigma)} x^{-1+\frac{1}{\sigma}} \Gamma(\sigma-1, y)$$

Por otra parte

$$x = \frac{1}{(D_m - 1)} r_D^{(D_m-1)} \quad t_1 = (D_m - 1)^{2-\frac{1}{\sigma}} t_D \quad y = \sigma^2 x^{\frac{1}{\sigma}} t_1^{-1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sigma^2 r_D^{(D_m-1)/\sigma}}{(D_m - 1)^2 t_D}$$

Entonces

$$P_D = \frac{1}{(D_m - 1)^{2-\frac{1}{\sigma}}} \frac{\sigma}{\Gamma(\sigma)} \left(\frac{1}{(D_m - 1)} r_D^{(D_m-1)} \right)^{-1+\frac{1}{\sigma}} \Gamma(\sigma - 1, y)$$

$$\Rightarrow P_D = \frac{1}{(D_m - 1)} \frac{\sigma}{\Gamma(\sigma)} r_D^{-(D_m-1)+\frac{(D_m-1)}{\sigma}} \Gamma(\sigma - 1, y)$$

Pero

$$\sigma = \frac{D_m - 1}{D_m - D_b + \vartheta + 1}$$

$$P_D = \frac{r_D^{-D_b+\vartheta+2}}{(D_m - D_b + \vartheta + 1)\Gamma(\sigma)} \Gamma(\sigma - 1, y)$$

asi

$$y = \frac{r_D^{D_m-D_b+\vartheta+1}}{(D_m - D_b + \vartheta + 1)^2 t_D}$$

La solución completa es

$$P_D = \frac{r_D^{-D_b+\vartheta+2}}{(D_m - D_b + \vartheta + 1)\Gamma(\sigma)} \Gamma\left(\sigma - 1, \frac{r_D^{D_m-D_b+\vartheta+1}}{(D_m - D_b + \vartheta + 1)^2 t_D}\right) \quad (\text{B.28})$$

Donde $\Gamma(a, y)$ es la función gamma incompleta

$$\Gamma(a, y) = \int_y^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \quad (\Re a > 0)$$

Cuando $D_m=3$, $D_b=2$, $\mathcal{G} = 0$ que implica que $\sigma = 1$ y entonces la ecuación (B.28) se reduce a la forma Euclidiana

$$p_D = \frac{1}{2} \Gamma \left(0, \frac{r_D^2}{4t_D} \right) = \frac{1}{2} \int_y^\infty x^{-1} e^{-x} dx = \frac{1}{2} Ei(y)$$

Donde $Ei(y)$ es la función integral exponencial

Aproximación a tiempos largos

$$\Gamma(a, y) = \Gamma(a) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j y^{a+j}}{j!(a+j)} \quad a \neq 0, -1, -2, \dots$$

para $D_m = 3$, $D_b = 2$ y $\mathcal{G} = 0$

$$p_D \approx \frac{1}{2} [\ln t_D + \ln 4 - \gamma]$$

Donde γ es la constante de Euler

y para $D_b \neq 2$

$$p_D \approx \frac{(D_m - D_b + \mathcal{G} + 1)^{2(1-\sigma)}}{(-D_b + \mathcal{G} + 2)\Gamma(\sigma)} t_D^{1-\sigma}$$

Por otro lado, la derivada de la presión esta dada como,

$$\frac{dp_D}{d \ln t_D} = \frac{e^{-y}}{\Gamma(\sigma)(D_m - D_b + \mathcal{G} + 1)^{2\sigma-1}} t_D^{1-\sigma}$$

B.2 Ecuación de flujo fractal radial esférico

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D_m-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\beta \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (\text{B.29})$$

donde

$$\chi = \frac{ak(\phi_0)}{c_f \mu}$$

$$\beta = D_b - \mathcal{G}$$

La ecuación (B.2) es sujeta a la condición inicial

$$p(r,0) = p_0, \quad (\text{B.30})$$

condición al interior del pozo (condición de frontera de fuente puntual en el interior del pozo)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r^\beta \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{Q\mu}{4\pi k(\phi_0)}, \quad (\text{B.31})$$

condición fuera de la frontera del pozo

$$p(\infty, t) = p_0. \quad (\text{B.32})$$

Forma sin dimensiones

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{1}{r_D^{D_m-1}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^{D_b-\mathcal{G}} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right). \quad (\text{B.33})$$

$$p_D(r_D, 0) = 0, \tag{B.34}$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} \left[r_D^\beta \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right] = -1, \tag{B.35}$$

$$p_D(\infty, t_D) = 0, \tag{B.36}$$

donde las variables sin dimensiones son

$$p_D = \frac{p_0 - p(r, t)}{p^*},$$

$$r_D = \frac{r}{r^*},$$

$$t_D = \frac{t}{t^*},$$

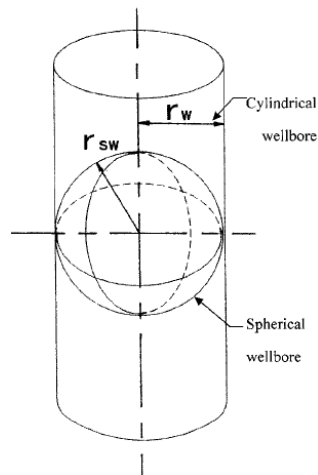
p_0 es una presión inicial, por otro lado, el radio característico, tiempo característico y presión característica están dados como

$$r^* = r_{sw},$$

$$t^* = \frac{r_w^{D_m - D_b + 1 + g}}{\chi},$$

$$p^* = \frac{Q\mu}{4\pi k(\phi_0)r_{sw}^{\beta-1}},$$

r_{sw} es el radio del pozo esférico, Q la tasa de producción fija del pozo.



Como se hizo para el flujo cilíndrico, análogamente se puede obtener una solución para la ecuación (B.33) quedando de la siguiente manera

$$p_D = \frac{r_D^{-D_b+\vartheta+1}}{(D_m - D_b + \vartheta + 1)\Gamma(\sigma)} \Gamma\left(\sigma - 1, \frac{r_D^{D_m-D_b+\vartheta+1}}{(D_m - D_b + \vartheta + 1)^2 t_D}\right) \quad (\text{B.37})$$

donde $\sigma = \frac{D_m}{D_m - D_b + \vartheta + 1}$

Cuando $D_m=3$, $D_b=2$, $\vartheta = 0$, implica que $\sigma = \frac{3}{2}$ y entonces la ecuación (B.37) se reduce a la forma Euclidiana

$$p_D = \frac{r_D^{-1}}{2\Gamma(3/2)} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r_D^2}{4t_D}\right) = r_D^{-1} \text{erfc}\left(\frac{r_D}{2\sqrt{t_D}}\right)$$

Donde $\text{erfc}(x)$ es la Función de Error Complementaria

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz = 1 - \text{erf}(x)$$

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz \text{ es la Función Error.}$$

Aproximación a tiempos largos

$$\Gamma(a, y) = \Gamma(a) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j y^{a+j}}{j!(a+j)} \quad a \neq 0, -1, -2, \dots$$

$$p_D \approx \frac{(D_m - D_b + \vartheta + 1)^{2(1-\sigma)}}{(-D_b + \vartheta + 1)\Gamma(\sigma)} t_D^{1-\sigma}$$

Por otra parte se puede demostrar que la derivada de la presión se expresa como,

$$\frac{dp_D}{d \ln t_D} = \frac{e^{-y}}{\Gamma(\sigma)(D_m - D_b + \vartheta + 1)^{2\sigma-1}} t_D^{1-\sigma}$$

GLOSARIO

A

Absorción. Un proceso para separar mezclas en sus constituyentes, aprovechando la ventaja de que algunos componentes son más fácilmente absorbidos que otros. Un ejemplo es la extracción de los componentes más pesados del gas natural.

Aceite. Porción de petróleo que existe en fase líquida en yacimientos y permanece así en condiciones originales de presión y temperatura. Puede incluir pequeñas cantidades de sustancias que no son hidrocarburos.

Aceite crudo. El aceite que proviene de un yacimiento, después de separarle cualquier gas asociado y procesado en una refinería; a menudo se le conoce como crudo.

Aceite in situ. La estimación de la verdadera cantidad de aceite en un yacimiento, y por lo tanto una cifra superior a las reservas recuperables de yacimiento.

Acuífero. Una capa en el suelo que es capaz de transportar un volumen significativo de agua subterránea.

Agua subterránea Agua que se encuentra bajo la superficie de la tierra ocupando el espacio entre las partículas del suelo o entre las superficies rocosas.

C

Compresibilidad. La compresibilidad de cualquier material (sólido, líquido o gaseoso) en un intervalo de presión dado y a una temperatura fija se define como el cambio de volumen por unidad de volumen inicial causado por una variación de presión

$$c = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

Como el término $(\partial V/\partial P)_T$ es negativo, se antepone el signo menos en la ecuación para que la compresibilidad sea positiva.

D

Densidad. Propiedad intensiva de la materia que relaciona la masa de una sustancia y su volumen a través del cociente entre estas dos cantidades. Se expresa en gramos por centímetro cúbico, o en libras por galón.

E

Etano. Un hidrocarburo que consiste de dos átomos de carbono y seis átomos de hidrógeno. Normalmente este gas está presente en la mayor parte de los casos referentes al gas natural.

F

Falla. Superficie de ruptura de las capas geológicas a lo largo de la cual ha habido movimiento diferencial.

Factor de compresibilidad del gas (Z). Relación que existe entre el volumen de un gas real y el volumen de un gas ideal. Es una cantidad adimensional que varía usualmente entre 0.7 y 1.2.

Fase es un líquido, sólido, o gas que es separado de otro sólido, líquido, o gas por una frontera identificable. La transferencia de materia, momento y energía puede ocurrir entre las fases; una fase no necesita tener una composición o temperatura homogénea.

Fracturas. Se refiere a todas las grietas, fisuras, juntas y fallas que pueden estar presentes en una formación (roca sólida).

G

Gradiente hidráulico En general, la dirección del flujo de agua subterránea debido a cambios en la profundidad del nivel piezométrico.

H

Hidrocarburos. Compuestos químicos constituidos completamente de hidrógeno y carbono.

I

Infiltración Penetración del agua en un medio, por ejemplo el suelo.

Inmiscibilidad. La inhabilidad de dos o más sólidos o líquido para disolverse fácilmente uno dentro del otro.

L

Líquido inmiscible. Son aquellos que se disuelven en cualquier proporción; aquellos que se disuelven en mediana proporción se los denomina "parcialmente miscibles".

Líquido miscible. Son aquellos líquidos que no se disuelven.

M

Modelos multifáse. Deben ser formulados para tomar en cuenta las formas de transferencia de componentes químicos, de momento y de energía dentro de cada fase y a través de las interfaces de la fase.

Miscibilidad. Es un término usado en química que se refiere a la propiedad de algunos líquidos para mezclarse en cualquier proporción, formando una solución homogénea. Se emplea más a menudo para referirse a la solubilidad de un líquido en otro.

Metano. La más pequeña de las moléculas de los hidrocarburos, con un átomo de carbono y cuatro átomos de hidrógeno. Es el componente principal del gas natural, pero también está presente en las capas de carbón, y es producido por animales y por la descomposición de los vegetales. Es un gas ligero, sin color, sin olor y flamable bajo condiciones normales.

P

Permeabilidad. Se define como la capacidad que tiene una roca de permitir el flujo de fluidos a través de sus poros interconectados. Si los poros de la roca no se encuentran interconectados no puede existir permeabilidad.

Permeabilidad absoluta. Se define como la capacidad que tiene una roca de permitir el flujo de fluidos a través de sus poros interconectados, cuando el medio poroso se encuentra completamente saturado por un fluido.

Permeabilidad efectiva. Cuando más de una fase se encuentra presente en un medio poroso, la conductividad o capacidad que tiene una roca de permitir el flujo de cada una de las fases a través de dicho medio poroso se define como permeabilidad efectiva. La permeabilidad efectiva a una fase dada es menor que la permeabilidad absoluta y es función de la saturación de la fase.

Permeabilidad relativa. Se define como la razón entre la permeabilidad efectiva y una permeabilidad base.

Petróleo Mezcla de carburos de hidrógeno líquido, resultante de la descomposición de materia orgánica (fermentación bioquímica), ocurrida en paleócuencas bajo condiciones específicas de presión y temperatura. El petróleo comúnmente se encuentra asociado con gases.

Porosidad. La porosidad es una medida de la capacidad de almacenamiento de fluidos que posee una roca y se define como la fracción (entre 0 y 1) del volumen total de la roca que corresponde a espacios que pueden almacenar fluidos.

Pozo. Agujero perforado en la roca desde la superficie de un yacimiento a efecto de explorar o para extraer aceite o gas.

Pozo petrolero. Perforación efectuada por medio de barrenas de diferentes diámetros y a diversas profundidades, con el propósito de definir las condiciones geológico-estructurales de la corteza terrestre, para la prospección o explotación de yacimientos petrolíferos. El método más utilizado es el rotatorio, y las perforaciones pueden desarrollarse con o sin recuperación de núcleo.

Presión. El esfuerzo ejercido por un cuerpo sobre otro cuerpo, ya sea por peso (gravedad) o mediante el uso de fuerza. Se le mide como fuerza entre área, tal como newtons/por metro².

Presión Atmosférica. El peso de la atmósfera sobre la superficie de la tierra. A nivel del mar, ésta es aproximadamente 1.013 bars, 101,300 Newtons/m², 14.7 lbs/pulg² ó 30 pulgadas de mercurio.

Presión capilar. Se define como la diferencia de presión a través de la interfase que separa dos fluidos inmiscibles, cuando se ponen en contacto en un medio poroso.

R

Recuperación mejorada. La recuperación de aceite de un yacimiento utilizando otros medios aparte de la presión natural del yacimiento. Esto puede ser incrementando la presión (recuperación secundaria), o por calentamiento, o incrementando el tamaño de los poros en el yacimiento (recuperación terciaria).

Recuperación primaria. La recuperación de aceite y gas de un yacimiento empleando sólo la presión natural del yacimiento para forzar la salida del aceite o gas. Ver también recuperación secundaria y terciaria.

Recuperación secundaria. La recuperación secundaria de hidrocarburos de un yacimiento incrementando la presión del yacimiento mediante la inyección de gas o agua en la roca del yacimiento.

Recuperación terciaria. Recuperación de hidrocarburos de un yacimiento por encima de lo que se puede recuperar por medio de recuperación primaria o secundaria. Normalmente implica un método sofisticado tal como el calentamiento del yacimiento o el ensanchamiento de los poros empleando productos químicos. Ver: acidificación.

Reservorio (yacimiento) fractal: Sistema que consiste de objetos fractales (red de fracturas) sumergido en un objeto Euclidiano (matriz).

Reservas petroleras. Volumen de hidrocarburos y sustancias asociadas, localizado en las rocas del subsuelo, que pueden ser recuperables económicamente con métodos y sistemas de explotación aplicables a condiciones atmosféricas y bajo regulaciones.

Roca del yacimiento. Roca porosa que contiene poros interconectados o fisuras en los cuales se encuentra aceite o gas.

Roca porosa fracturada. Incluye la función de la porosidad y / o roca huésped permeables.

S

Saturación. La saturación de un medio poroso con respecto a un fluido se define como la fracción del volumen poroso de una roca que esta ocupada por dicho fluido.

$$S_{\alpha} := \frac{V_{\alpha}}{V_p}$$

Donde:

S_α = Saturación de la fase α .

V_α = Volumen que ocupa la fase α .

V_p = Volumen del espacio del poro.

La sumatoria de las saturaciones de todos los fluidos que se encuentran presentes en el espacio poroso de una roca, debe ser igual a 1. Si consideramos un medio poroso saturado por aceite, agua y gas, tenemos:

$$S_o + S_w + S_g = 1$$

Donde:

S_o = Saturación de petróleo.

S_w = Saturación de agua.

S_g = Saturación de gas.

Saturación residual de una fase. La saturación residual de una fase, generalmente expresada como $S_{\alpha r}$, donde α corresponde a la fase (petróleo, agua o gas), corresponde a la saturación de dicha fase que queda en el yacimiento en la zona barrida, después de un proceso de desplazamiento.

T

Temperatura crítica. La temperatura arriba de la cual un gas no puede ser licuado cualquiera que sea su presión.

Tortuosidad. Los poros interconectados de la roca que representan los canales de flujo de fluidos en el yacimiento no son tubos capilares rectos ni tampoco tienen pared lisa. Debido a la presencia de interfases entre fluidos, que originan presiones capilares que afectan los procesos de desplazamiento, es necesario definir la tortuosidad como la medida de la desviación que presenta el sistema poroso real respecto a un sistema equivalente de tubos capilares. En el capítulo 1 de este trabajo de tesis hay diferentes relaciones matemáticas para expresar la tortuosidad.

Transmisividad. La capacidad de un acuífero de transmitir el agua.

V

Viscosidad. Pegajoso, esto es: la resistencia de un líquido al movimiento o flujo; normalmente se abate al elevar la temperatura.

Y

Yacimiento (Reservorio). Acumulación de aceite y/o gas en roca porosa tal como arenisca. Un yacimiento petrolero normalmente contiene tres fluidos (aceite, gas y agua) que se separan en secciones distintas debido a sus gravedades variantes. El gas siendo el más ligero ocupa la parte

superior del yacimiento, el aceite la parte intermedia y el agua la parte inferior. Existen yacimientos en diversas estructuras geológicas tales como anticlinales, afallamientos, plegamientos recostados y recumbentes, así como en domos salinos, entre otras estructuras.

Anexo I. Publicaciones

Slow kinetics of water escape from randomly folded foils

Alexander S. Balankin, S. Matias Gutierrez, D. Samayoa Ochoa, J. Patino Ortiz, B. Espinoza Elizarraraz, and C. L. Martinez-Gonzalez

Accepted Tuesday Jan 18, 2011

We study the kinetics of water escape from balls folded from square aluminum foils of different thickness and edge size. We found that the water discharge rate obeys the scaling relation $Q \propto (M - M_r)^\alpha$ with the universal scaling exponents $\alpha = 3 \pm 0.1$, where VP is the volume of pore space, $M(t)$ is the actual mass of water in the ball, and M_r is the mass of residual water. The last is found to be a power law function of VP . The relation of these findings to the fractal geometry of randomly folded matter is discussed.

Slow kinetics of water escape from randomly folded foils

Alexander S. Balankin, S. Matías Gutierrez, D. Samayoa Ochoa,

J. Patiño Ortiz, B. Espinoza Elizarraraz, C. L. Martínez-González

Grupo "Mecánica Fractal", Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México 07738

We study the kinetics of water escape from balls folded from square aluminum foils of different thickness and edge size. We found that the water discharge rate obeys the scaling relation $Q \propto V_p (M - M_r)^\alpha$ with the universal scaling exponents $\alpha = 3 \pm 0.1$, where V_p is the volume of pore space, $M(t)$ is the actual mass of water in the ball, and M_r is the mass of residual water. The last is found to be a power law function of V_p . The relation of these findings to the fractal geometry of randomly folded matter is discussed.

47.56.+r, 89.75.Da, 61.43.Hv, 05.45.Df

Folded configurations of thin matter are ubiquitous in nature [1], ranging from nanoparticle membranes [2] to hand folded paper [3,4] and fault-related geological formations [5]. The physics of folded states display many interesting phenomena associated with statistical properties of folding configurations [6,7]. The porosity of randomly folded sheet can be as large as 99% and decreases with increase of the contraction ratio $\lambda = L/R$, where L is the sheet size and R is the characteristic size of folded configuration. While the statistical topology and geometry of folding configurations were studied in a number of works (see [2-8] and references therein), as far as we know, there have been no attempts to characterize the scaling properties of porous space in randomly folded matter. Though it seems reasonable to expect that the pore space and pore-solid interface both possess some kind of statistical scale invariance, characterized by the power law behaviors $V_p \propto r^{D_p}$ and $S_p \propto r^{D_s}$ within a bounded range of $r_m < r < R$, where V_p is the volume of pore space, S_p is the area of solid-pore interface, and r_m is the lower cutoff, while D_p and D_s are termed as the physical fractal dimensions (see [9]) of the pore space and solid-pore interface, respectively. The fractal properties of porous materials have been found to have a significant effect on their transport properties [10,11,12]. Accordingly, in this work we study the kinetics of water escape from hand folded aluminum foils.

The aluminum foils of different thickness h and size L were folded in hands into approximately spherical balls (see Fig. 1) with different contraction ratios λ (see Refs. [8]). Specifically, 24 balls were folded from square sheets of thickness $h = 0.02$ mm and edge lengths of $L = 15, 20, 30,$ and 45 cm. Additionally, 9 balls were folded from sheets

of different thicknesses $h = 0.02, 0.1, \text{ and } 0.24$ mm with the same edge length $L = 30$ cm. The mean diameter \bar{R} of each ball was determined from measurements along 15 directions taken at random (see [4]). The volume of pore space is defined as $V_p = (\pi/6)\bar{R}^3 - hL^2 = (\pi/6)\bar{R}^3 p$, where $p = 1 - (6/\pi)\lambda^3(h/L)$ is the ball porosity. After the series of hydrodynamic experiments, each ball was further compressed, such that each folded sheet was tested with four different contraction ratios λ [13].

To fill the pore space with water, the folded balls were partially submerged in the water until they sink [14]. When the ball is extracted from the water reservoir, the water escapes downward under gravity through the openings between the folding surfaces with the cross-sectional area $0.1 \leq S \leq 1 \text{ cm}^2$. In this work, the amount of water realized for the time t was measured in two ways. First, the weight of the ball with water was continuously monitored using a digital balance (*Scout Pro SP202*) and second, the mass of escaped water $M_e(t)$ was measured each second (see Fig. 1) until the water discharge is stopped and the ball mass does not change in time. Figure 2 shows an example of experimental register of $M_e(t)$. We found that the instantaneous water discharge rate Q obeys the kinematic wave flux law (see [15]) of the form

$$Q = \frac{dM_e}{dt} = K \left(\frac{M - M_r}{\rho V_p - M_r} \right)^\alpha, \quad (1)$$

where $M(t) = M_0 - M_e(t)$ is the actual mass of water in the ball, M_r is the mass of residual water, ρ is the water density, and K is the fitting coefficient (see Fig. 3). The

power law exponent $\alpha = 3.0 \pm 0.1$ [16] is found to be statistically independent on the ball orientation with respect to the discharge direction (see Fig 3 a), the folding contraction ratio λ (see Fig. 3 b), the sheet size L (see Fig 3 c) and thickness h (see Fig. 3 d), whereas the coefficient K and the mass of residual water M_r vary with the variations of these parameters. Integrating Eq. (1) with $\alpha = 3$ and the initial condition $M(t=0) = M_0$, we obtain the following kinetic curve of water escape

$$M_e = (M_0 - M_r) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{(1+t/\tau)}} \right], \quad \tau = \frac{(\rho V_p - M_r)^3}{2K(M_0 - M_r)^2}, \quad (2)$$

which provides an excellent fit of the experimental data (see Figs. 2 and 4) with M_r used as the fitting parameter. In this way, we found that the value of M_r^{BF} providing the best fit of experimental data is always slightly less than the value of M_r obtained by direct measurement after the water escape is stopped [17]. This difference may be attributed to the change from the kinematic wave flux (1) to the diffusion wave flux (see [15]) at the final stage of water discharge. In our experiments, the duration of kinematic wave regime was in the range of $\tau \ll 6 < t_s < 20$ minutes [18], while $0,8 \leq \tau < 8$ seconds (see Fig. 4).

The parameters K and M_r are strongly dependent on the ball orientation with respect to the gravity direction (see Figs. 3 a), because of an inhomogeneous distribution of openings along the ball surface. Though, we found that the orientation averaged coefficient K displays an almost linear increase with the volume of pore space [19], *i.e.*,

$$\bar{K} = \tau_0^{-1} \rho V_p, \quad (3)$$

where $\tau_0^{-1} = 0.35 \pm 0.15 \text{ sec.}^{-1}$ is the fitting constant independent of the sheet sizes and the contraction ratio (see Fig. 5 a). Furthermore, we found that the orientation averaged value of residual water mass is related to the volume of pore space as

$$\frac{\bar{M}_r}{\rho V_p} = \left(\frac{V_0}{V_p} \right)^\theta, \quad (4)$$

at least when $V_p \gg V_0$, where $V_0 = 0.65 \pm 0.5 \text{ cm}^3$ is the fitting parameter independent of the sheet sizes and the contraction ratio, while the power-law exponent is found to be $\theta = 0.27 \pm 0.08$ (see Fig. 5 b). We noted that the characteristic length size $3 \leq l_0 = V_0 / L^2 \leq 28 \mu\text{m}$ ($15 \leq L \leq 45 \text{ cm}$) is much smaller than the characteristic width of pore channels in folded sheets $0.5 \leq W_p = V_p / L^2 \leq 6 \text{ mm}$, while the last is of the order of the bask capillary length of water $l_c = \sqrt{\gamma / \rho g} \approx 2.7 \text{ mm}$, where $\gamma = 0.072 \text{ N/m}$ is the surface tension of water and g is the gravitational acceleration constant. Hence, the gravitational and capillary forces are of the same order.

A standard approach to analysis of fluid flow in porous media is to characterize the system in terms of Darcy's law, accounting the mechanical energy loss due to friction in laminar flow through porous media [20]. With respect to our experiments in particular, the Darcy's law states that

$$Q = \frac{dM}{dt} = \frac{SK_p}{\mu} \left[\frac{\Delta P}{\Delta l} - \rho g \right], \quad (5)$$

where $\Delta P/\Delta l$ is the actual pressure drop ΔP over a given distance Δl , $\mu = 10^{-3}$ kg/m-sec. is the dynamic viscosity of water, and K_p is the permeability depending on water content in a folded sheet. We note that equation (5) is consistent with the experimental relationship (1) only if the term in the square brackets is almost independent of M as far as $M > M_r^{BF}$ [21], while the permeability of folded sheet obeys the Brooks–Corey relation

$$K_p = K_S \Phi^n(M), \quad (6)$$

where $\Phi = (M - M_r)/(\rho V_p - M_r)$ is the relative water saturation of the folded sheet, K_S is the permeability at saturation, and n is the fitting exponent [22]. If so, from the comparison of (1) with (5), (6) follows that $K = S\rho g K_S / \mu$, while $\alpha = n$.

It is commonly assumed that relative permeability $k_R = K_p / K_S$ is controlled by the capillary pressure–saturation relation $P = P_S f(\Phi)$, where P_S is the pressure at saturation [10,22,23]. Strictly speaking, this approach is not always valid for a transient flow, because generally the capillary pressure–saturation relation depends on the flow velocity (see [24] and references therein). However, in our experiments the water velocity $v = Q/\rho\sqrt{S} < 10^{-1}$ m/sec. is rather small ($\text{Re} = \rho v W_p / \mu < 10$), such that the ratio of

viscous to capillary forces is $Ca = \mu v / \gamma < 10^{-3}$ and so the dynamic effect in the capillary pressure–saturation relation can be neglected [24,25]. Accordingly, one can expect that the relative permeability of folded sheets is determined by a quasi-steady capillary pressure–saturation relation [26]. In fractal porous media $P = P_s f(\Phi)$ often obeys the power law relation $\Phi = (P / P_s)^{-\omega}$, where ω is the fitting exponent [10,12,23]. However, even in this case, there is no universal relationship between n and ω . A comprehensive review of this topic is given in [23]. Empirical values of n obtained from the water retention curves for different porous media vary in a wide range $1 \leq n < 25$ (see [10, 23]), while the relation between n and ω is determined by the statistical geometry of porous space as

$$n = \chi + (2 + \zeta) / \omega \quad (7)$$

where $1 \leq \chi \leq 3$ and $0 \leq \zeta < 1$ are the parameters of geometric nature used to model a specific type of porous media (see [23] and references therein). For a given type of porous media, parameters χ and ζ are expected to be constants [23] and so our finding $n = \alpha = 3$ together with (7) suggest that the capillary pressure–saturation relation in hand folded aluminum sheets are characterized by the universal exponent $\omega = (2 + \zeta) / (3 - \chi)$.

Furthermore, the same universal value of ω is expected for other kinds of randomly folded thin matter, because the geometry of folding configurations is mainly controlled by the topological constrain and the phenomenon of self-avoidance (see [4-8]). Though, the universality of ω for randomly folded thin matter needs to be confirmed by further research.

On the other hand, there were many attempts to relate ω with the fractal properties of porous media (see [10] and references therein). In this way, using a thermodynamic formulation for equilibrium capillary pressure, the authors of [12] have derived the following relation

$$\omega = \frac{3 - D_p}{3 - D_s}, \quad (8)$$

accounting the scaling properties of the pore space, as well as of the pore-solid interface. The fractal dimension of the pore space in a folded matter (D_p) is expected to be a function of λ [27]. So, if ω is the universal constant, the relation (8) suggests that the fractal dimension of the pore-solid interface (D_s) should be a decreasing function of λ [28].

In summary, we found that water escape from folded reservoirs obeys the kinematic wave flux law (1) with the universal scaling exponent $\alpha = 3$ as far as $M > M_r^{BF}$. The corresponding kinetic curve (2) provides a good fit of the experimental data. The relation between fractal geometry and relative permeability of hand folded sheets is discussed. We expect that our findings will stimulate further experimental and theoretical studies in these topics.

This work was partially supported by the FONCICYT (México - European Union) under Project 96095 and by the Government of Mexico City under the research project PICCT08-38.

Figure captions

Figure 1. Experimental set up of water escape measurements.

Figure 2. The kinetic curve of water escape from ball of diameter $\bar{R} = 67$ mm folded from the foil of thickness 0.02 mm and edge size 45 cm ($\lambda = 6.7$) in coordinates M_e in grams versus time t in seconds. Circles – experimental data ($M_0 = 122.34$ gram, $M_r = 30.70$ gram), solid line – Eq. (2) with $M_r(BF) = 29.81$ gram ($\tau = 2.95$ sec.). Insert shows the initial part of the kinetic curve.

Figure 3. Log-log plots of water discharge rate Q in gram/sec. versus $M^* = (M - M_r)/(\rho V_p - M_r)$ in arbitrary units for: a) two different orientations of the ball of diameter $\bar{R} = 67$ mm folded from the sheet of size $L = 45$ cm and thickness $h = 0.02$ mm with respect to the gravity direction; b) ball folded from foil of size $L = 45$ cm and thickness $h = 0.02$ mm with different contraction ratios $\lambda = 6.14$ (1), 6.7 (2), and 9.96 (3); c) balls folded from sheets of thickness $h = 0.02$ mm and size $L = 45$ (1), 30 (2), and 20 cm (3) with the same contraction ratio $\lambda = 5.76$ (experimental data for each ball are the average over 6 orientations with respect of gravity direction); d) balls folded from sheets of size $L = 30$ cm and thickness $h = 0.1$ (1) and 0.24 mm (2) with the same contraction ratio $\lambda = 3.69$ (notice that the large difference between data for balls folded from foils of different thickness is due to the dependence of Q on the ball orientation). In all panels the straight lines are the data fitting with Eq. (1).

Figure 4. Log-log plot of dimensionless constrain $m = [(M_0 - M_r^{BF}) / (M - M_r^{BF})]^2 - 1$ versus the dimensionless time t/τ for escape from balls folded from sheet of thickness 0.02 mm and edge size $L = 45$ cm (circles), 30 cm (triangles), and 20 cm (squares). Straight line – $m = t/\tau$.

Figure 5. Log-log plot of the orientation averaged values of: a) coefficient \bar{K} in gram/sec. versus the volume of pore space V_p in cm^3 ; b) residual water mass \bar{M}_r in grams versus the volume of pore space V_p in cm^3 . Symbols – experimental data for: balls folded from foils of thickness 0.02 mm and edge size: (\circ) 45 cm, (\square) 30 cm, (∇) 20 cm, and (\diamond) 15 cm with different contraction ratios (λ); and balls of diameter $\bar{R} = 8.10 \pm 0.04$ cm folded from foils with the edge size 30 cm and thickness: (\blacksquare) 0.1 mm and (\blacklozenge) 0.24 mm; straight lines – data fitting with Eqs. (3) and (4), respectively. Notice that each point represents the data averaged over different ball with the same pore volume. Inserts in the panel a) show: top – log-log plot of \bar{K} versus V_p ; dashed line – linear fit ($R^2 = 0.94$), solid line – power law fit $\bar{K} = 0.13V_p^{1.2}$ ($R^2 = 0.97$); bottom – \bar{K} versus V_p for the ball folded from sheet of thickness 0.02 mm and edge size 45 cm at different contraction ratios; straight line – linear fit $\bar{K} = 0.35V_p$ ($R^2 = 0.995$).

-
- ¹ In mathematics, Riemann has used a crumpled ball of paper with bookworms to explain the hidden dimensions in non-Euclidean geometry (M. Kaku, *Hyperspace: a scientific odyssey through parallel universes, time warps, and the 10th dimension*, Oxford University Press, New York, 1994).
- ² M. S. Spector, E. Naranjo, S. Chiruvolu, and J. A. Zasadzinski, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2867 (1994); T. Tallinen, A. Aström, P. Kekäläinen, and J. Timonen, *ibid.* **105**, 026103 (2010).
- ³ D. L. Blair and A. Kudrolli, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 166107 (2005); E. Sultan and A. Boudaoud, *ibid.* **95**, 136103 (2006).
- ⁴ A. S. Balankin, *et al.*, *Phys. Rev. E* **74**, 061602 (2006); A. S. Balankin, R. C. Montes de Oca, and D. Samayoa, *ibid.* **76**, 032101 (2007); A. S. Balankin, D. Samayoa, I. A. Miguel, J. Patiño, and M. A. Martínez, *ibid.* **81**, 061126 (2010).
- ⁵ Z. Ismat, *J. Struct. Geolog.* **31**, 972 (2009).
- ⁶ T. A. Witten, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 643 (2007).
- ⁷ K. Matan, R. B. Williams, T. A. Witten, and S. R. Nagel, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 076101 (2002); Y.-Ch. Lin, *et al.*, *ibid.* **103**, 263902 (2009); T. Tallinen, J. A. Aström, and J. Timonen, *ibid.* **95**, 106101 (2008); *Nature Mater.* **8**, 25 (2009); A. S. Balankin, *et al.*, *Phys. Rev. B* **77**, 125421 (2008); A. S. Balankin and O. Susarrey, *Phys. Rev. E* **77**, 051124 (2008).
- ⁸ M. A. F. Gomes, *et al.*, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **22**, 1217 (1989); A. S. Balankin, *et al.*, *Phys. Rev. E* **75**, 051117 (2007); Y. C. Lin, Y. L. Wang, Y. Liu, and T. M. Hong, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 125504 (2008).

-
- ⁹ F. M. Borodich and Z. Feng, *Z. Angew. Math. Phys.* **61**, 21 (2010).
- ¹⁰ B. Yu, J. Li, Z. Li, M. Zou, *Int. J. Multiphase Flow* **29**, 1625 (2003); G. Huang and R. Zhang, *Geoderma* **127**, 52 (2005); A. Dathe and M. Thullner, *ibid.* **129**, 279 (2005); J. M. Köhne, S. Köhne, and J. Šimůnek, *J. Contaminant Hydrol.* **104**, 4 (2009); K. Li, *J. Petroleum Sci. Eng.* **73**, 20 (2010).
- ¹¹ A. S. Balankin, O. Susarrey, and Márquez, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 096101 (2003); A. S. Balankin, *et al.*, *ibid.* **96**, 056101 (2006); S.W. Coleman and J. C. Vassilicos, *ibid.* **100**, 035504 (2008).
- ¹² M. R. Deinert, A. Dathe, J.-Y. Parlange, and K. B. Cady, *Phys. Rev. E* **77**, 021203 (2008); M. R. Deinert and J.-Y. Parlange, *ibid.* **79**, 021202 (2009).
- ¹³ The porosity of tested balls was varied in the range of $0.802 < p(\lambda) < 0.987$.
- ¹⁴ In this way, we were able to fill with water up to 97% of pore space of a folded ball.
- ¹⁵ V. P. Singh, *Hydrol. Process* **16**, 667 (2002).
- ¹⁶ It should be pointed out that the value of exponent α obtained by the least square fitting of experimental data with Eq. (1) varied from experiment to experiment in the range from 2.7 to 3.1 with the mean 2.96 and the standard deviation $\sigma_\alpha = 0.073$.
- ¹⁷ Specifically, we found that $M_r - M_r(BF) = \varepsilon \rho V_p$, where the parameter ε are varied from experiment to experiment in the range of $0.003 \leq \varepsilon \leq 0.004$.
- ¹⁸ Notice that the same amount of water escapes from a hollow reservoir with holes more than ten times faster than from a folded sheet with the same cross-sectional area available for water escape.

¹⁹ Strictly speaking, the best fit of all experimental data is $\bar{K} = 0.13\rho V_p^{1.2}$ (see the top insert in Fig. 5 a), whereas the data for balls with different contraction ratios are best fitted by Eq. (3) (see the bottom insert in Fig. 5 a).

²⁰ J. Bear, *The dynamics of fluids in porous media* (Dover, Mineola, NY, 1988).

²¹ This is possible, for example, if the height of water in a folded sheet does not decrease so far $M > M_r^{BF}$, or if both ΔP and Δl decrease as M decreases, in such a way that $\Delta P / \Delta l = const$. Alternatively, we can assume that $\Delta P / \Delta l \ll \rho g$, but this seems less probable. In any case, this point needs to be clarified in further studies.

²² R. H. Brooks and A. T. Corey, in *Hydrology Papers*, No. 3 (Colorado State University, Fort Collins, Colorado, 1964) pp. 22-27.

²³ W. Brutsaert, *Adv. Water Res.* **23**, 811 (2000).

²⁴ A.G. Hunt, *Adv. Water Res.* **27**, 245 (2004).

²⁵ N. Fries, M. Dreyer, *J. Colloid Interface Sci.* **338**, 514 (2009).

²⁶ Of course, this statement needs to be verified by direct experiments.

²⁷ Experimentally it was found that the mass fractal dimension of folded matter increases as λ increases (see Y.-Ch. Lin, *et al.*, *Phys. Rev. E* **80**, 066114, 2009). As far as the pore space is continuous, its physical fractal dimension is in the range of $2 \leq D_p \leq 3$, whereas $D_p < 2$, if the porosity $p(\lambda)$ is less than its critical value p_c at the percolating threshold, when the pore space becomes discontinuous; obviously that the limit $D_p(p=0) \equiv 0$.

²⁸ For many porous materials it was found that $D_p = D_s$ (see P. Pfeifer and D. Avnir, *J. Chem. Phys.* **79**, 3558, 1983 and references therein). In this way, we can speculate that

randomly folded thin matter is also characterized by $D_p = D_s$. If so, our finding $n = \alpha = 3$ together with (7), (8) suggest that $\omega = 1$, while $\zeta = 1 - \chi$.

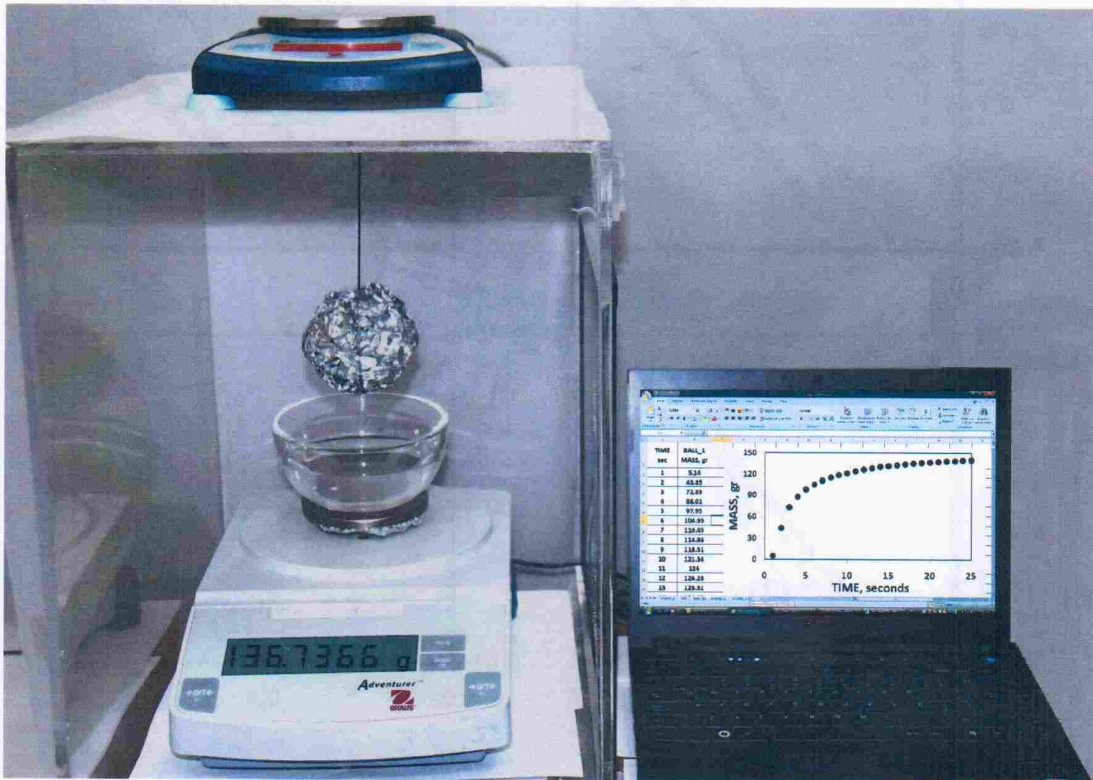


Figure 1.

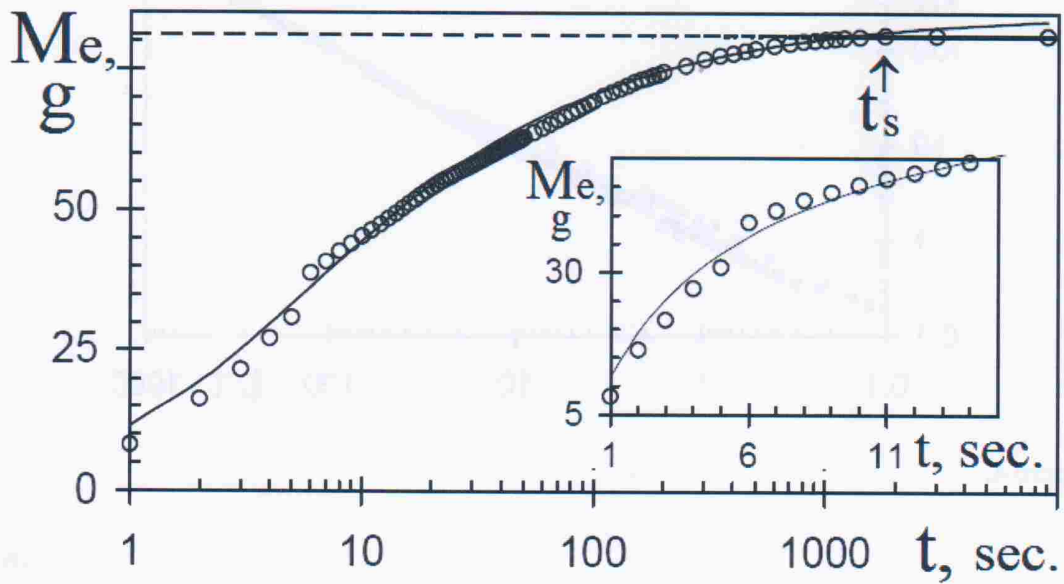


Figure 2.

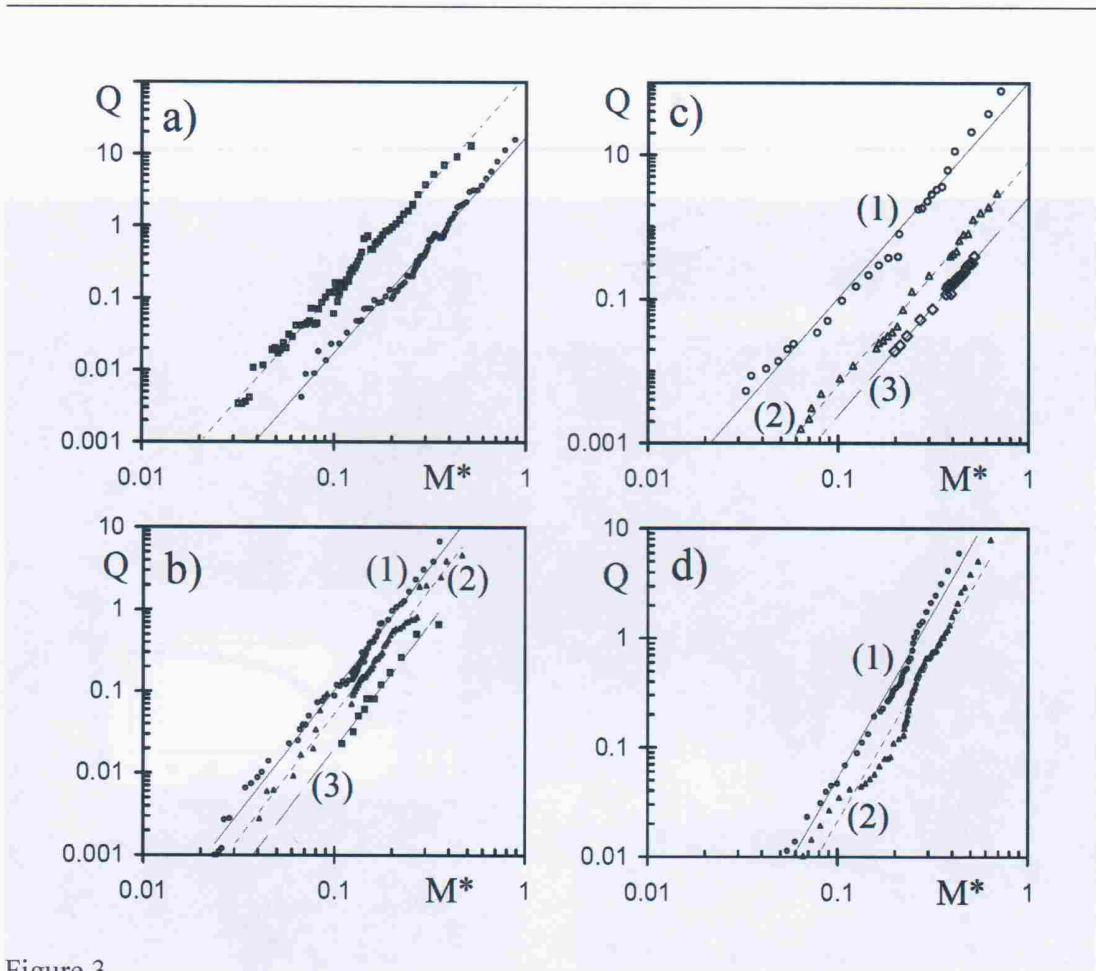


Figure 3.

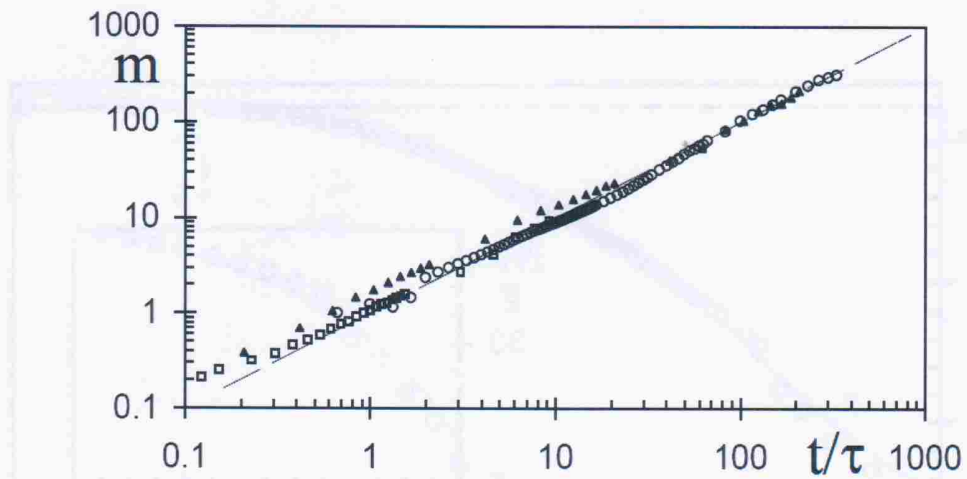


Figure 4.

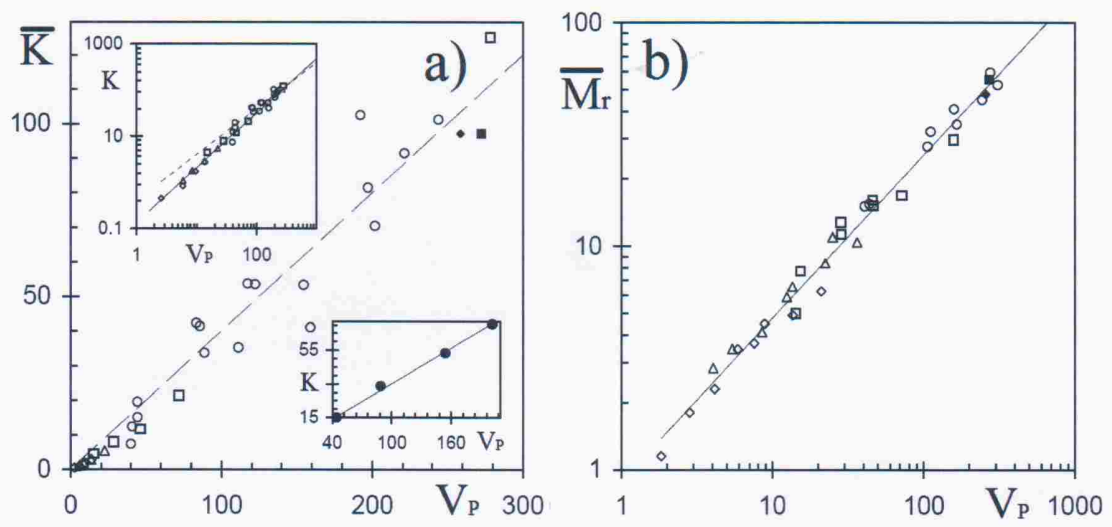


Figure 5.

Pressure-transient behavior of fractal flow

Alexander S. Balankin^{1(a1)}, Benjamin Alberto Espinoza Elizarraraz¹

¹ *Grupo Mecánica Fractal, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México*

PACS 47.53.+n – Fractals in fluid dynamics

PACS 47.56.+r – Flows through porous media

PACS 61.43.Hv – Fractals; macroscopic aggregates in structure of solids

Abstract – The pressure transient equation for flow with fractional mass (D_m) and boundary (D_b) dimensions is derived from the conservation laws for fractal continuum.

In some special cases of radial flow the pressure transient equation transforms to the pressure diffusion equations usually used to interpret the pressure transient data of pumping tests. The relations between the scaling parameters of fractal flow and the fractal geometry of porous and/or fractured media are also discussed. It is pointed out that the fractal nature of the mass and boundary of flow affects the fluid dynamics in a different way.

^{a1} E-mail: abalankin@ipn.mx

Introduction. – Fluid flows through heterogeneous media play an important role in a wide variety of environmental and technological processes. Examples include ground water flow, spread of hazardous wastes, oil recovery, and filtration technologies, among others [1-3]. Now, it is widely accepted that the porosity and fractures of geological formations exhibit fractal characteristics over many length scales, ranging from microscopic pore to field scale [3-10]. The fractal nature of media strongly influences their transport properties [9-25]. Accordingly, there have been many attempts to improve the hydrodynamic equations for fractal flow [26-70]. These works explore the scale invariance of fractal media either through the space and/or scale dependence of hydraulic permeability [26-44], or by use the anomalous diffusion equations to model the fractal flow [45-67].

A standard method to characterize hydraulic properties of heterogeneous media is the pressure transient analysis of pumping tests data [1, 2, 26]. A widespread analysis is based on the Darcy's law relating the flux to pressure gradient with an effective or spatially and, sometimes, time dependent hydraulic permeability [3, 26]. In this way, making use the lattice-gas method to simulate the fluid flow in systems with fractal surfaces, the authors of [13] have found that a single fracture permeability is substantially increases if the fracture interface has fractal characteristics (see also [9, 22-25]), whereas the permeability of porous media decreases as the fractal dimension of pore space decrease [27] (see also refs. [14-16, 28-31]). Further, these findings were explored in the works [32-44].

On the other hand, Barker [45] has proposed a celebrated pressure-transient equation involving the fractional dimension of flow, while retaining the assumptions of radial

flow and homogeneity of the fractured medium. It should be pointed out that Barker [36] considered the physical meaning of the flow dimension unclear, but conjectured that it would be related to the anomalous diffusion on fractal network. Nonetheless, the Barker pressure transient equation becomes very popular, especially for practical applications (see refs. [46-51] and references therein). Later, based on the study by O'Shaughnessy and Procaccia [11] on anomalous fractal diffusion, Chang and Yortsos [52] have suggested the equation of radial fractal flow which also takes into account the spatial variation of hydraulic permeability. Accordingly, in the model [52] the fractal flow is characterized by two independent fractal dimensions: the mass fractal dimension of fracture network D_n and the spectral fractal dimension $d_s = 2D_n / (1 + \theta)$, where $\theta \geq 0$ is the network spectral exponent, also called the anomalous transport exponent [17]. Alternatively, a long-time memory of hydraulic permeability can be taken into account by making use the Caputo fractional time derivative in the diffusion equation [53, 54]. In practice, the order of fractal time derivative (α) is used as a parameter for fitting experimental test data [54]. Further, the models [45, 52-54] were widely used to describe the pressure-transients for radial oil and water flows in fractal reservoirs (see [46-51, 55-64]). There were some attempts to generalize the radial fractal flow pressure-transient equations [45, 52] for the fractal flow in two- and three- dimensional systems [65-67]. However the validity of these attempts is questionable, because the fulfillment of conservation laws was not verified.

From our point of view, a more promising approach is to derive the pressure-transient equation from the conservation of mass, momentum, and energy of fractal flow with a known fluid constitutive equation. In this way, some works were devoted to the conservation laws for fractal flow [68-70], as well as to the extensions of the Gauss,

Green and Stokes theorems for flow with a fractal boundary [70-78]. In this work, we derived the pressure-transient equation for fractal flow embedded in the three dimensional space, based on the fractional generalization of the hydrodynamic equations suggested by Tarasov [69].

Fractal hydrodynamics. – In general, the fractal flow embedded in the d -dimensional Euclidean space is characterized by three independent fractal dimensions: the mass fractal dimension D_m , the boundary fractal dimension D_b , and the spectral fractal dimension d_s . The latter governs an anomalous diffusion in the fractal space and/or along the fractal surface [17, 18]. It should be pointed out that, as viewed from Euclidean embedding space, the fractal flow cannot be considered as a continuous medium, because there are points and domains of space that do not filled by the fluid. However, the fractal flow can be treated as the fractal continuum [68], such that the mass $M(W)$ of region W obeys the scaling relation $dM(\lambda W) = \lambda^{D_m} dM(W)$, where $\lambda W = \{\lambda x, x \in W\}$, while the area of region boundary scales as $dS(\lambda W) = \lambda^{D_b} dS(W)$ [68, 69], where generally [6],

$$D_m - 1 \leq D_b \leq d . \quad (1)$$

Furthermore, it should be pointed out that the concept of fractal continuum flow implies that $D_m \geq D_b \geq 1$ and so, it is applicable only in Euclidean spaces of dimension $d \geq 2$.

The mass, momentum and energy balance equations for homogeneous fractal continuum embedded in the three-dimensional space ($d = 3$) were derived in [68] in the form

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_D \rho = -\nabla_i^D u_i, \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{d}{dt}\right)_D u_i = \nabla_j^D p_{ij} + \rho f_i, \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{d}{dt}\right)_D e = a p_{ij} R^{D_b - D_m + 1} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \nabla_i^D q_i, \quad (4)$$

respectively; where the summation convention over repeated index is assumed

($i, j \in 1, 2, 3$), $\bar{u} = \{u_i\}$ is the flow velocity, $\bar{p} = \{p_{ij}\}$ is the stress tensor, $\bar{f} = \{f_i\}$ is the force acting on the region W , e is internal energy of the mass of region W , $\bar{q} = \{q_i\}$ is the density of heat flow,

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x_i')^2}, \quad a = a(D_m, D_b) = \frac{2^{D_m - D_b - 1} \Gamma(D_m / 2)}{\Gamma(3/2) \Gamma(D_b / 2)}; \quad (5)$$

here the following notations for the fractional derivatives are used:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_D = \frac{\partial}{\partial t} + a R^{D_b - D_m + 1} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (6)$$

$$\nabla_i^D F = a R^{3 - D_m} \frac{\partial}{\partial x_i} (R^{D_b - 2} F), \quad (7)$$

and $\Gamma(\cdot)$ is the Gamma function.

Besides, in this work we consider only homogeneous ($\rho(\bar{r}) = \rho = const$) low compressible ($\rho = \rho_0 \exp(cp)$) viscous fluids obeying the stress-velocity constitutive relation

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu[\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i - 2/3(\partial u_m / \partial x_m)\delta_{ij}], \quad (8)$$

where δ_{ij} is the usual Kronecker delta, c and μ are the fluid compressibility coefficient and viscosity, respectively [2].

Pressure-transient equation for fractal flow. – For laminar isothermal ($q_i = 0$) flow in the gravitational field ($U = gh$, $f_i = g(\partial h / \partial x_i)$) from the balances of momentum (3) and energy (4) densities under the standard assumptions (see [1-3]) follows an analog of Darcy equation for fractal flow in the form

$$u_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial x_j} - \rho g \left(\frac{R^{D_m - D_b - 1}}{a} \right) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right], \quad (9)$$

where k_{ij} is the porosity and scale dependent permeability tensor. Notice that for the fractal flow with the boundary fractal dimension equal to

$$D_b = D_m - 1 \quad (10)$$

eq. (9) differs from the classical Darcy law (see [1-3]) only by the constant $a(D_m, D_b)$ defined in eq. (5), while for a Euclidean flow with

$$D_b = D_m - 1 = d - 1 \quad (11)$$

eq. (9) obeys the classical form of Darcy equation.

Putting eq. (9) in eq. (2), we obtain the following equation of pressure diffusion for fractal flow in three-dimensional space:

$$c\mu \frac{\partial p}{\partial t} = R^{3-D_m} \left[a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_b-2} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) - \rho g \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R^{D_m-3} k_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \right], \quad (12)$$

where the permeability tensor k_{ij} is generally anisotropic and depends on the porosity (ϕ) and spatial variables $\{x_i\}$. Notice that eq. (12) differs from the three-dimensional pressure-transient equations used in [65-67], while for the three-dimensional Euclidean flow ($D_m = d = 3$, $D_b = d - 1 = 2$, $k_{ij} = k_{ij}(\phi)$ and $a = 1$) eq. (12) coincides with the classic one (see [1,2]).

For reservoirs and wells of known geometry $h(x_i)$ and hydraulic permeability k_{ij} , eq. (12) with appropriate inter and outer boundary and initial conditions can be used to model the pressure-transients of fractal flow. Here, it should be pointed out that the scale and space dependence of permeability tensor k_{ij} is determined by the fractal

geometry of pore and/or fracture channels. In the spherical coordinates (r, θ, φ) , commonly used in the pressure transient models (see [2]), eq. (12) has the form

$$c\mu \frac{\partial p}{\partial t} = \left[\begin{aligned} & \frac{a}{r^{D_m-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^{D_b} \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \rho g \frac{1}{r^{D_m-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^{D_m-1} \frac{\partial h}{\partial r} \right) \\ & + \frac{a}{r^{D_m-D_b+1} \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) - \rho g \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{a}{r^{D_m-D_b+1} \sin^2(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) - \rho g \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \right] \quad (13)$$

where, generally, $k = k(r, \theta, \varphi)$, while for an isotropic porous medium the hydraulic permeability $k = k(r)$. Further, when the gravitational effect can be neglected, the radial fractal flow obeys the following pressure diffusion equation

$$c\mu \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{a}{r^{D_m-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r) r^{D_b} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (14)$$

that differs from the classical diffusion equation on fractals [17, 18], which in terms of pressure diffusion in the fractal flow [52] reads as

$$c\mu \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r) r^{D-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (15)$$

where D is the fractal dimension of medium.

In fact, eq. (14) transforms to eq. (15) only in the special case of fractal flow with the boundary fractal dimension related to the mass fractal dimension as it is given by eq.

(10). Notice that this justifies the use of the classic form of Darcy law together with the fractional diffusion equation (15), as it is employed in the works [45-64]. It should be pointed out that for Euclidean flow (11) both equations ((14) and (15)) transform to the classical equation of radial diffusion in the d-dimensional space.

Generally, the geometry of fractal flow satisfies the inequality (1) rather than the equality (10). The fractal dimensions of flow in many cases are determined by the fractal geometry of medium. Specifically, isotropic porous media are generally characterized by the pore volume fractal dimension D_p , the pore surface fractal dimension D_s , and the spectral fractal dimension d_s [5, 6]. Accordingly, one can expect that the fractal flow in an isotropic porous medium is characterized by the mass fractal dimension $D_m = D_p$, the boundary fractal dimension $D_b = D_s$, and the spectral exponent θ . In particular, if the pore boundaries are the Euclidean surfaces of dimension $D_s = d - 1$, the spectral exponent is related to the pore volume and spectral dimensions as $\theta = 2(D_p / d_s - 1)$ [17], while the porosity and the hydraulic permeability scale as

$$\phi = \phi_0 r^{D_p - d} \quad \text{and} \quad k_{ij} = k(\phi_0) r^{-g}, \quad (16)$$

respectively [52, 60], where

$$g = d - D_m + \theta. \quad (17)$$

On the other hand, the fractal flow through fractal pore network in a fibrous material is characterized by the mass fractal dimension $D_m = D_p$ and the boundary fractal dimension related to D_p as [20]

$$D_b = 2d - 1 - D_p. \quad (18)$$

In this case, the hydraulic permeability also expected to obey the scaling behavior (16), (17) with $\theta = 2(D_p / d_s - 1)$. Besides, the permeability of fracture network with the fractal dimension D_n obeys the scaling behavior (16), (17) with $D_m = D_n$ and $\theta = 2(D_n / d_s - 1)$ [52]. Moreover, it was noted that a fractal-like pressure transient response can appear not only in fractal fractures networks, but also in the Euclidean fracture networks ($D_n = d$), such that the hydraulic permeability scales as (16), (17) with the spectral exponent $\theta = 2(d / d_s - 1)$, where $d_s \leq d$ [58].

Instead to this, the fractal flow in a single self-affine crack is expected to have integer mass fractal dimension $D_m = d$, whereas the flow boundary fractal dimension is equal to the fractal dimension of fracture surface [79], *i.e.*,

$$D_b = D_f = d - H, \quad (19)$$

where D_f is the fractal dimension of fracture surface and H is the roughness exponent, also called the Hurst exponent. In this case, the hydraulic permeability also displays the scaling behavior (16), but with exponent

$$\mathcal{G} = \theta, \quad (20)$$

where $\theta = 2(D_f / d_s - 1)$ [17].

The solution of pressure diffusion equation (14) can be obtained in the same way as for (15) whose exact solution is known [11, 18]. Namely, the solutions of both equations have the form

$$p \propto (\lambda t)^{-\beta} \exp\left(-\frac{r^\gamma}{\lambda t}\right), \quad \lambda = \frac{ak(\phi_0)\gamma^2}{c\mu}, \quad (21)$$

where in the case of eq. (14) the scaling exponents are

$$\beta = \frac{D_m}{(D_m - D_b) + 1 + \mathcal{G}} \quad (22)$$

and

$$1 \leq \gamma = (D_m - D_b) + 1 + \mathcal{G} \leq 3, \quad (23)$$

whereas in the case of diffusion equation (15)

$$\beta = \frac{D_m}{2 + \mathcal{G}} \quad (24)$$

and

$$2 \leq \gamma = 2 + \mathcal{G} \leq 3, \quad (25)$$

such that eqs. (22), (23) transform to eqs. (24), (25) when the flow boundary dimension is $D_b = D_m - 1$.

Thus, for fractal flow in self-affine crack ($D_m = 3$, $D_b = 3 - H$, and $\mathcal{G} = \theta$) the pressure transient is described by eq. (21) with $\gamma = 1 + H + \theta$ and $\beta = 3/(1 + H + \theta)$. For fractal flow in isotropic porous medium with $d - 1 < D_m = D_p \leq d$, $D_b = d - 1$, and the hydraulic permeability scaling exponent given by eq. (17), the pressure transient obeys the scaling behavior (21) but with exponents

$$\gamma = 2 + \theta \text{ and } \beta = D_p / (2 + \theta), \quad (26)$$

whereas the pressure transient of fractal flow with the boundary fractal dimension defined by eq. (18) is characterized by

$$\gamma = 2 + \theta - (d - D_p) \text{ and } \beta = D_m / \gamma \quad (27)$$

It is interesting to note that if θ is numerically equal to $0 \leq \theta = (d - D_p) \leq 1$, the equation (14) with the space dependent hydraulic permeability (16), (17) coincides with the celebrated Barker pressure transient equation [45]. Finally, if $D_b = D_m$, the pressure transient (21) is characterized by the following scaling exponents $\gamma = (d - D_m) + 1 + \theta$ and $\beta = D_m / \gamma$.

Conclusion. – In summary, we derive the general pressure diffusion equation (12) for the fractal flow embedded in the three-dimensional space. In the case of radial flow, the

pressure diffusion eq. (14) differs from the usual diffusion equation on fractals (15). The later corresponds to the special case of fractal flow described by eq. (14), when the flow boundary dimension is related to the mass flow dimension as $D_b = D_m - 1$. The physical meanings of fractional exponents involved in different pressure-transient models are clarified. The relations between the scaling parameters of fractal flow and the fractal geometry of porous and/or fractured media are also discussed. It is pointed out that the fractal nature of the mass and boundary of flow affects the fluid dynamics in a different way.

This work has been supported by the Government of Mexico City under the research project PICCT08-38.

REFERENCES

- [1] Ahmed T. and McKinney P. D., *Advanced Reservoir Engineering* (Elsevier, New York) 1989.
- [2] Chen Zh, Huan G. and Ma Y., *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media* (SIAM, Philadelphia) 2006.
- [3] Sahimi M., *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rocks* (VCH, New York) 1995.
- [4] Sahimi M., *Rev. Modern Phys.*, **65** (1993) 1393.
- [5] Cherepanov G. P., Balankin A. S. and Ivanova V. S., *Eng. Fract. Mech.*, **51** (1995) 997.
- [6] Balankin A. S., *Eng. Fract. Mech.*, **57** (1997) 135.
- [7] Brid N. R. A., Perrier E. and Rieu M., *Eur. J. Soil Sci.*, **51** (2000) 55.
- [8] Oleschko K., Korvin G., Figueroa B., Vuelvas M. A., Balankin A. S., Flores L. and Carreon D., *Phys. Rev. E*, **67** (2003) 041403.
- [9] Schmittbuhl J., Steyer A., Jouniaux L., Toussaint R., *Int. J. Rock Mechanics & Mining Sci.*, **45** (2008) 422.
- [10] Köhne J. M., Köhne S. and Šimůnek J., *J. Contaminant Hydrology*, **104** (2009) 4.
- [11] O'Shaughnessy B. and Procaccia I, *Phys. Rev. A*, **32** (1985) 3073.
- [12] Metzler R., Glockle W. G. and Nonnenmacher T. F, *Physica A*, **211** (1994) 13.
- [13] Zhang X., Knackstedt M. and Sahimi M., *Physica A*, **233** (1996) 835.
- [14] Andrade J. S., Almeida M. P., Mendes Filho J., Havlin S., Suki B. and Stanley H. E., *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 3901.
- [15] Almeida M. P., Andrade J. S., Buldyrev S. V., Cavalcante F. S. A., Stanley H. E. and Suki B., *Phys. Rev. E*, **60** (1999) 5486.
- [16] Andrade J. S., Costa U. M. S., Almeida M. P., Makse H. A. and Stanley H. E., *Phys. Rev. Lett.*, **82** (1999) 5249
- [17] Metzler R. and Klafter J., *Phys. Rep.*, 339 (2000) 1.
- [18] Havlin S., Ben-Avraha D., *Adv. Phys.*, **51** (2002) 187.
- [19] Balankin A. S., Ortega A. B. and Matamoros D. M., *Phil. Mag. Lett.*, **80** (2000) 503.

- [20] Balankin A. S., Susarrey O. and Márquez J., *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2003) 096101.
- [21] Balankin A. S., Paredes R. G., Susarrey O., Morales D. and Castrejon F., *Phys. Rev. Lett.*, **96** (2006) 056101.
- [22] Mourzenko V. V., Thovert J.-F. and Adler P. M., *Phys. Rev. E*, **59** (1999) 4265.
- [23] Drazer G. and Koplik J., *Phys. Rev. E*, **62** (2000) 8076.
- [24] Glass R. J., Rajaram H. and Detwiler R. L., *Phys. Rev. E*, **68** (2003) 061110.
- [25] Yan Y. and Koplik J., *Phys. Rev. E*, **77** (2008) 036315.
- [26] Delay F., Kaczmaryk A. and Ackerer P., *Adv. Water Res.*, **30** (2007) 314.
- [27] Makse H. A., Andrade J. S. and Stanley H. E., *Phys. Rev. E*, **61** (2000) 583.
- [28] Makse H. A., Davies G. V., Havlin S., Ivanov P. Ch., King P. R. and Stanley H. E., *Phys. Rev. E* **54** (1996) 3129.
- [29] Jiménez-Hornero F. J., Gutiérrez de Ravé E., Giráldez J. V. and Laguna A. M., *Geoderma*, **150** (2009) 196.
- [30] Coleman S. W. and Vassilicos J. C., *Phys. Rev. Lett.*, **100** (2008) 035504.
- [31] Matyka M., Khalili A. and Koza Z., *Phys. Rev. E*, **78** (2008) 026306
- [32] Hilfer R. and Manwart C., *Phys. Rev. E*, **64** (2001) 021304.
- [33] Zaks M. A. and Straube A. V., *Phys. Rev. Lett.*, **89** (2002) 244101.
- [34] Gioia G. and Bombardelli F. A., *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002) 014501.
- [35] Wang X.-H., Liu Zh.-F., Wu Q.-S. and Li B., *Physica A*, **311** (2002) 320.
- [36] Yu B. and Cheng P., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **45** (2002) 2983.
- [37] Vandersteen K., Carmeliet J. and Feyen J., *Transport in Porous Media*, **50** (2003) 197.
- [38] Yu B., Li J., Li Zh. abd Zou M., *Int. J. Multiphase Flow*, **29** (2003) 1625.
- [39] Guarracino L., *J. Hydrology*, **324** (2006) 154.
- [40] Chen J., Yu B., Xu P. and Li Y., *Phys. Rev. E*, **75** (2007) 056301.

- [41] Bogdanov I. I., Mourzenko V. V., Thovert J.-F. and Adler P. M., *Phys. Rev. E*, **76** (2007) 036309.
- [42] Wu J. and Yu B., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **50** (2007) 3925.
- [43] Zhang L. Zh., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **51** (2008) 5288.
- [44] Xu P., Yu B., Qiu Sh. and Cai J., *Physica A*, **387** (2008) 6471.
- [45] Barker J. A., *Water Resour. Res.*, **24** (1988) 1796.
- [46] Bangoy L. M., Bidaux P., Drogue C., Plégat R. and Pistre S., *J. Hydrology*, **138** (1992) 77.
- [47] Bangoy L. M. and Drogue C., *J. Hydrology*, **158** (1994) 47
- [48] Leveinen J., *J. Hydrology*, **234** (2000) 116.
- [49] Jourde H., Pistre S., Perrochet P. and Drogue C., *Adv. Water Res.*, **25** (2002) 371.
- [50] Walker D. D. and Roberts R. M., *Water Resour. Res.*, **39** (2003) 1349.
- [51] Clout A. and Botha J. F., *Water SA*, **32** (2006).
- [52] Chang J. and Yortsos Y. C., *SPE Formation Evaluation*, **5** (1990) 31.
- [53] Berkowitz B., Klafter J., Metzler R. and Scher H., *Water Resour. Res.*, **38** (2002) 1191.
- [54] Tian J. and Tong D., *J. Hydrodynamics B*, **18** (2006) 287.
- [55] Acuna J. A., Ershaghi I. and Yortsos Y. C., *SPE Formation Evaluation*, **10** (1995) 173.
- [56] Acuna, J. A. and Yortsos Y. C., *Water Resour. Res.*, **31** (1995) 527.
- [57] Pachepsky Y. and Timlin D., *J. Hydrology*, **204** (1998) 98.
- [58] Herrick M. G., Benson D. A., Meerschaert M. M. and McCall K. R., *Water Resour. Res.*, **38** (2002) 1227.
- [59] Campos D., Fort J. and Méndez V., *Europhys. Lett.*, **68** (2004) 769.
- [60] Bernard S., Delay F. and Porel G., *J. Hydrology*, **328** (2006) 647.

- [61] Frippiat Ch. C. and Holeyman A. E., *J. Hydrology*, **362** (2008) 150.
- [62] Zhang Y. and Tong D., *J. Hydrology*, **20** (2008) 306.
- [63] Wang S., Ma Z, Yao H., *Chem. Eng. Sci.*, **64** (2009) 1318.
- [64] Lei Zh.-D., *J. Hydrodynamics B*, 19 (2007) 494.
- [65] Chon B. and Choi Y.-S., *Mineral ad Energy Resour. Korea*, **34** (1997) 420.
- [66] Chon B. and Choi Y.-S., *Korean J. Chem. Eng.*, **18** (2001) 382.
- [67] Lemaire R. and Adler P. M., *Transp. Porous Med.*, **5** (1990) 325.
- [68] Tarasov V. E., *Phys. Lett. A*, **336** (2005) 167.
- [69] Tarasov V. E., *Ann. Phys.*, **318** (2005) 286.
- [70] Wheatcraft S. W. and Meerschaert M. M., *Adv. Water Res.*, **31** (2008) 1377.
- [71] Harrison, J. and Norton, A., *Duke Math. J.*, **67** (1992) 575.
- [72] Harrison J., *Bull. Am. Math. Soc.*, **29** (1993) 235.
- [73] Harrison J., *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32** (1999) 5317.
- [74] Borodich F. M. and Volovikov A. Yu., *Proc. R. Soc. Lond. A*, **456** (2000) 1.
- [75] Lyons T. J. and Yam P. S. C., *J. Math. Pures Appl.*, **85** (2006) 38.
- [76] Meerschaerta M. M., Mortensen J. and Wheatcraft S. W., *Physica A*, **367** (2006) 181.
- [77] Huikun J., Zheng G., *J. Math. Anal. Appl.*, **355** (2009) 164.
- [78] Tarasov V. E., *Ann. Phys.*, **323** (2008) 2756.
- [79] Drazer G., Auradou H., Koplik J. and Hulin J. P., *Phys. Rev. Lett.*, 90 (2004) 014501.

Diffusion in fractal media

Alexander S. Balankin, Benjamin A. Espinoza Elizarraraz, J. E. Benito Hernández

Grupo Mecánica Fractal, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., Mexico, 07738

ABSTRACT

A differential equation for diffusion on isotropic and homogeneous fractals with arbitrary mass and surface fractal dimensions is derived. The solution of this equation obeys the general scaling form of probability distribution function expected for diffusion processes. In some special cases, this equation transforms to the known diffusion equations in the Euclidean space and on fractals. Furthermore, the expressions for scaling exponents obtained in other models of diffusion on fractals can be also recovered under specific assumptions.

PACS numbers: 66.30.Dn, 05.40.-a, 05.45.Df, 89.75.Da

Diffusion is one of the most ubiquitous processes in nature [1,2]. Normal diffusion in a d -dimensional homogeneous medium is characterized by a dispersion of position of diffusing particles given by $\langle r^2(t) \rangle \propto t$ and by a Gaussian propagator

$$P(r,t) \propto t^{-d/2} \exp(-r^2/2t), \quad (1)$$

obeying the classical diffusion equation in the form

$$\frac{\partial}{\partial t} P(r, t) = \frac{K_0}{r^{d-1}} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} P(r, t) \right) \quad (2)$$

with a constant diffusion coefficient K_0 [2]. Accordingly, in the case of normal diffusion in the Euclidean space, the probability of return to the origin decreases with time as $P(0, t) \propto t^{-d/2}$.

In the past two decades, considerable research efforts have been expended to study diffusion on fractals, because of their wide-ranging physical and technological applications [3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23]. It was found that the scale invariance of fractals imposes the geometrical constraints on the diffusion process [*]. These constraints represent the long-range spatial correlations in the fractal structure leading to an anomalous behavior of the dispersion of position of diffusing particles on all time scales

$$\langle r^2(t) \rangle^{1/2} \propto t^{1/d_w}, \quad (3)$$

where r is measured in the Euclidean space and d_w is called the random walk dimension [1,2]. Strictly speaking, relation (2) is just the definition of d_w . Processes with $d_w < 2$ dispersing faster than standard diffusion processes are called superdiffusion, while $d_w > 2$ means that a system displays subdiffusive behavior. [*]. Moreover, the scaling

arguments and numerical simulations suggest that the probability of return to origin for a random walker in a fractal medium scales as

$$P(0,t) \propto t^{-D_m/d_w}, \quad (4)$$

where D_m is the mass fractal dimension of medium [*]. Notice that the ratio D/d_w is related to the so-called spectral (fracton) dimension of the fractal as $d_s = 2D_m/d_w$ [*].

A more complicated and still open question is the form of the propagator $P(r,t)$. The scaling arguments suggest the following general relation [*]

$$P(r,t) \propto t^{-D_m/d_w} \Phi(\xi), \quad (5)$$

where choice of the scaling variable

$$\xi = \frac{r}{t^{1/d_w}} \quad (6)$$

is dictated by the requirement that the second moment has to be compatible with (3), while the prefactor of Φ is determined by the scaling behavior (4) [*]. Furthermore, different theoretical models and numerical simulations [24] suggest that $\Phi(\xi)$ obeys a stretched exponential form

$$\Phi \propto \exp(-c\xi^\gamma) \quad (7)$$

at least asymptotically, where the scaling exponent γ and the coefficient c can be expressed in terms of the fractal characteristics of medium [*]. A somewhat different asymptotic behavior

$$\Phi \propto \xi^\omega \exp(-c\xi^\gamma) \quad (8)$$

was suggested by Klafter *et al.* [*] on the basis of their numerical simulations. Notice that (8) is reduced to eq. (7) when $\omega = 0$.

In the realm of anomalous diffusion, the classical diffusion equation (2) has to be replaced by the so-called generalized diffusion equations [*]. One of the first generalizations of equation (2) for diffusion on fractals of dimension $D_m \leq d$ was deduced by O'Shaughnessy and Procaccia, [25] from the following conservation and transport equations

$$r^{1-D_m} \frac{\partial}{\partial t} P(r,t) = \frac{\partial}{\partial r} J(r,t), \quad (9)$$

$$J(r,t) = K(t,r) r^{D_m-1} \frac{\partial}{\partial r} P(r,t), \quad (10)$$

where $J(r,t)$ is the total probability current, leaving the spherical region of radius r and $K(t,r)$ is the diffusion coefficient, which can be time and/or space dependent [26]. The corresponding diffusion equation on fractals has the form

$$\frac{\partial P(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r^{D_m-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(K(t,r) r^{D_m-1} \frac{\partial P(r,t)}{\partial r} \right) \quad (11)$$

similar to the classical diffusion equation in the Euclidean space (2) [27].

Hentschel and Procaccia [26] have argued that, generally, the diffusion coefficient scales as

$$K(t,r) = K_0 r^{-\theta} t^{-\nu}, \quad (12)$$

where θ and ν are non-universal exponents which cannot be fixed on dimensional grounds alone [26]. Under the assumption that $\nu = 0$, O'Shaughnessy and Procaccia [25] have obtained the exact solution of equation (11, 12) in the form (5-7) with the scaling exponent

$$\gamma = d_w = 2 + \theta. \quad (13)$$

On the other hand, starting from numerical renormalization results in the Laplace space Guyer [*] has obtained a quite different relationship between γ and d_w . Namely, he found that the propagator behaves as (5, 7) where

$$\gamma = \frac{d_w}{d_w - 1} \quad (14)$$

in agreement with results of numerical simulations in [*]. Later, the relationship (14) was derived by other means in [*] and confirmed by analytical renormalization considerations in [*]. Guyer [*] suggested that equations (13) and (14) may be valid in different time regimes. In fact, Guyer's results are based on numerical simulations in a range of values of ξ larger than those used by O'Shaughnessy and Procaccia [*] in checking their conclusions. The problem as of 1987 has been reviewed by Havlin and Ben-Avraham [*] and further discussed by Aharony [*] and by Van den Broeck [*].

The situation has been somewhat clarified by numerical work of Klafter *et al.* [*]. These authors find that the O'Shaughnessy-Procaccia form (5-7), (13) describes their numerical work well for $\xi \ll 1$, whereas for $\xi > 1$ they found that the propagator behaves as (8) with γ given by the Guyer relationship (14) and

$$\omega = \frac{2D_m - d_w}{2(d_w - 1)}. \quad (15)$$

Thereafter, Giona and Roman [6] have suggested the fractional diffusion equation

$$\frac{\partial^\zeta}{\partial t^\zeta} P(r, t) = \frac{K_0}{r^\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^\kappa P(r, t) \right) \quad (16)$$

with $\zeta = 1/d_w$ and $K_0 > 0$, which can be considered as a "halved" diffusion equation.

The asymptotic solution of (16) obeys the scaling form (5), (7) with the scaling exponents

γ given by eq. (13) when $\kappa = (D_m - 1)/2$; otherwise the asymptotic solution of (16) has the form (5), (8) with γ given by eq. (13) and

$$\omega = \frac{2D_m - d_w(1 + 2\kappa)}{2(d_w - 1)} \quad (17)$$

Specifically, equation (17) yields $\omega = D_m(2 - d_w)/2(d_w - 1)$ when $\kappa = (d_s - 1)/2$. Notice the difference between this result and empirical relation (15). Furthermore, while in the Euclidean limit $D_m = d$ and $d_w = 2$, the asymptotic solution of (16) recover classical asymptotic (1), the order of time derivative in (16) in the Euclidean limit is $\zeta = 1/2$ and so eq. (16) does not reduce to equation (2).

To overcome this limitation, Metzler *et al.* [9] have formulated the fractional diffusion equation in the form

$$\frac{\partial^\zeta}{\partial t^\zeta} P(r, t) = -\frac{K_0}{r^{(d_s-1)/2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^{(d_s-1)/2} \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right), \quad (18)$$

where the order of time derivative is $\zeta = 2/d_w$ and $d_s = 2D_m/d_w$. The solution of (18) can be expressed in closed form by an H-function [9]. The asymptotic of this solution in the regime $r > t^{1/d_w}$ has the form (5-7) with the scaling exponents given by eq. (14) without the additional ξ^ω term (see eq. (8)) observed in the numerical work of Klafter *et al.* [*]. Furthermore, the solution does not obey the O'Shaughnessy-Procaccia scaling (3,-

7), (13) for $\xi \ll 1$ and it does not appear to have the form of an equation of continuity for the probability current. In fact, the authors of [*] and [*] did not derive equation (16) and (18) from physical arguments, rather than they have proposed this equations as mathematical constructs which would yield the previously proposed asymptotic form (5-7), (14).

In later times, Mosco [12] has suggested an alternative approach by introducing an intrinsic metric for fractals, defined by the relation $x \equiv r^{d_w/2}$, where x and r are the intrinsic and Euclidean distances, respectively. Within this framework, Mosco [12] has obtained an expression for the propagator on fractals in the form (5-7), with the scaling exponents

$$\frac{d_w d_{\min}}{d_w - d_{\min}} \tag{19}$$

where d_{\min} is the fractal dimension of the minimum path defined by the scaling behavior of the minimum path between two points of the fractal $l_{\min} \propto r^{d_{\min}} \equiv x^{2d_{\min}/d_w}$. Notice that eq. (19) coincides with (14) in the case $d_{\min} = 1$.

Campos *et al.* [15] repeated the procedure from [25] using the intrinsic metric of the fractal (see [*]) and have derived the diffusion equation on fractals in the form

$$\frac{\partial P(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r^{D_m-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(K(t,r) r^{D_m-d_w+1} \frac{\partial P(r,t)}{\partial r} \right), \quad (20)$$

where the diffusion coefficient depends on the time and r . Specifically, the authors of [15] argued that

$$K(t,r) = \left(\frac{r}{t^{1/d_w}} \right)^{-\theta}. \quad (21)$$

where

$$\theta = \frac{d_w(2d_{\min} - d_w)}{d_w - d_{\min}} \leq 0, \quad (22)$$

and so, in terms of eq. (12),

$$\nu = \frac{d_w - 2d_{\min}}{d_w - d_{\min}} \geq 0. \quad (23)$$

The exact solution of (20)-(22) has the scaling form (5-7) with the scaling exponents γ given by eq. (19).

It should be pointed out that the diffusion equations (11) and (20) are associated with two different forms of the continuity equation conjectured in works [25] and [15], respectively. However, in both works it is implicitly assumed that the fractal dimension of medium boundaries is related to the mass fractal dimension of the medium as

$$D_b = D_m - 1, \quad (24)$$

whereas, in general [28],

$$D_m - 1 \leq D_b \leq d . \quad (25)$$

In this work, the diffusion equation on fractals is derived based on the concept of fractal continuum introduced by Tarasov [29,30,31] with arbitrary mass and boundary fractal dimensions obeying inequality (25).

Diffusion equation in fractal media.

Following Tarasov [28], the fractal medium is considered as a fractal continuum such that the mass $M(W)$ of region W obeys the scaling relation $M(\lambda W) = \lambda^{D_m} M(W)$, while the area of region boundary scales as $S(\lambda W) = \lambda^{D_b} S(W)$, where $\lambda W = \{\lambda x, x \in W\}$; D_m and D_b are the mass and surface fractal dimensions, respectively. For a homogeneous fractal medium, Tarasov [28] has derived the continuity equation in the form

$$\frac{\partial}{\partial t} P(r,t) + aR^{D_b - D_m + 1} \bar{u}(r,t) \times \nabla P(r,t) = -aR^{d - D_m} \nabla \times \left(R^{D_b - (d-1)} \bar{u}(r,t) \right), \quad (26)$$

where $\vec{u}(r, t)$ is the velocity field, $R = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - x_i')^2}$, d is the dimension of the embedding Euclidean space, $a = a(D_m, D_b) = \frac{2^{D_m - D_b - 1} \Gamma(D_m / 2)}{\Gamma(3/2) \Gamma(D_b / 2)}$, and $\Gamma(\cdot)$ is the Gamma function.

To obtain the diffusion equation, here we assume that the probability current leaving the region of radius R through the fractal surface with area $S = sR^{D_b}$ obeys the transport equation

$$\vec{J}(r, t) = sR^{D_b} \vec{u}(r, t) = K(t, r) sR^{D_b} \nabla P(r, t), \quad (27)$$

which is converted to eq. (10) in the special case (24). From eqs. (26) and (27) follows the equation for diffusion in an isotropic and homogeneous fractal media, which in spherical coordinates has the form

$$\frac{\partial}{\partial t} P(r, t) = \frac{a}{r^{D_m - 1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(K(t, r) r^{D_b} \frac{\partial}{\partial r} P(t, r) \right). \quad (28)$$

Notice that in the case (24), equation (28) is converted to eq. (11). Furthermore, it is interesting to note that equation (28) can be converted into eq. (20), if we assume the relation

$$D_b = D_m - d_w + 1 \quad (29)$$

is hold. However, since $D_m - D_b \leq 1$, the equality (29) can be fulfilled only in the cases of a non-anomalous diffusion ($d_w = 2$) [32] and super-diffusion ($d_w < 2$) [1].

The exact solution of (28) with the diffusion coefficient defined by eq. (12) has the form (5-7) with

$$\gamma = 2 + \theta - \Omega = d_w(1 - \nu), \quad (30)$$

where

$$0 \leq \Omega = 1 - (D_m - D_b) \leq 1 + (d - D_m). \quad (31)$$

Accordingly, the mean-square displacement of a random walker on the fractal obeys the scaling behavior (3) with the random walk dimension

$$d_w = \frac{2 + \theta - \Omega}{1 - \nu}. \quad (32)$$

It is worth nothing that using relation (32) between θ and ν as a fitting parameter we can fit the results of numerical simulations. Specifically, in the case of diffusion on the Sierpinski gasket it was found that $\gamma = 1.9 \pm 0.1$ [*], while $d_w = \ln 5 / \ln 2 = 2.32$,

$D_m = D_s = \ln 3 / \ln 2$, and so $\Omega = 1$ [*]. This result can be fitted with (28), (12) and (30),

if we put $\nu = 0.19 \pm 0.05$ and $\theta = 0.9 \pm 0.1$ in the (12).

Special cases of diffusion in fractal media

If we assume that the classical relation $d_w = 2 + \theta$ [33] is hold together with (32), from (30) follows that $\nu = \Omega/d_w$ and so the diffusion coefficient is expected to behave as

$$K = K_0 \left(\frac{r}{t^{1/d_w}} \right)^\Omega r^{-d_w+2-\Omega}. \quad (33)$$

It should be pointed out that, in this case, we recover the O'Shaughnessy and Procaccia [25] solution (5-7), (13), when equality (24) is hold, *i.e.*, $\Omega = 0$; whereas, if $D_b = D_m$, *i.e.*, $\Omega = 1$, we find $\nu = 1/d_w$ and so we find $\gamma = d_w - 1$.

Furthermore, in the case of $D_b = 2d - 1 - D_m$ considered in [34], from (28) and (33) follows that

$$\nu = \frac{2(d - D_m)}{d_w} \quad (34)$$

and

$$\gamma = d_w - 2(d - D_m). \quad (35)$$

Hence, in the case of spontaneous imbibition in fractal media (see [*]), we expect that the propagator obeys the scaling form (5-7) with exponent γ given by eq. (35).

Finally, if the scaling exponent ν is given by eq. (23), as it is suggested and confirmed by numerical simulations in [15], while $\theta = d_w - 2$, we recover the Mosco [12] result (19) based on the intrinsic metric arguments. Notice that in this case

$$\frac{\Omega}{d_w} = \frac{(d_w - 2d_{\min})}{d_w - d_{\min}} \geq 0. \quad (36)$$

Strictly speaking, for diffusion on the fractal with known D_m , D_b , and d_{\min} , equation (36) determines the value of the random walk dimension. It should be pointed out that, while eqs. (28, 33) with exponents $\theta = d_w - 2$ and ν defined by eq. (23) have the same solution as eqs. (20-22), the physics underlying the corresponding diffusion models is quite different.

Conclusions.

Starting from continuity equation for fractal media (26) and transport equation in the form (27) we derived the equation of diffusion in fractal media with arbitrary mass and boundary fractal dimensions obeying inequality (25). The exact solution of the diffusion equation in fractal media obeys the general scaling form (5-7) with the scaling exponents depending on the fractal dimensions and the time and/or space dependence of the diffusion coefficient. In some special cases, the general equation (27) transforms to the known diffusion equations in the Euclidean space and on fractals. Furthermore, the

expressions for scaling exponents obtained in other models of diffusion on fractals can be also recovered under specific assumptions.

Acknowledgments.

This work has been supported by the Government of Mexico City under Project No. PICCT08-38.

¹ R. Metzler and J. Klafter, *Phys. Rep.* **339**, 1. (2000).

² S. Havlin and D. Ben-Avraha, *Adv. Phys.* **51**, 187 (2002).

³ P. Argyrakis, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1729 (1987).

⁴ E. Koscielny-Bunde, A. Bunde, S. Havlin, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. A* **37**, 1821 (1988).

-
- ⁵ R. Muralidhar, D. J. Jacobs, D. Ramkrishna, and H. Nakanishi, *Phys. Rev. A* **43**, 6503 (1991).
- ⁶ M. Giona and H. E. Roman, *Physica A* **185**, 87 (1992).
- ⁷ T. H. Solomon, E. R. Weeks, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3975 (1993).
- ⁸ G. Zumofen and J. Klafter, *Phys. Rev. E* **47**, 851 (1993).
- ⁹ R. Metzler, W. G. Glöckle, and T. F. Nonnenmacher, *Physica A* **211**, 13 (1994).
- ¹⁰ J. C. Vassilicos, *Phys. Rev. E* **52**, R5753 (1995).
- ¹¹ A. Adrover, W. Schwalm, M. Giona, and D. Bachand, *Phys. Rev. E* **55**, 7304 (1997).
- ¹² U. Mosco, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4067 (1997).
- ¹³ S. Bravo Yuste, *Phys. Rev. E* **57**, 6327 (1998).
- ¹⁴ R. Metzler, E. Barkai, and J. Klafter, *Physica A* **266**, 343 (1999).
- ¹⁵ D. Campos, V. Méndez, and J. Fort, *Phys. Rev. E* **69**, 031115 (2004).
- ¹⁶ V. Méndez, D. Campos, and J. Fort, *Phys. Rev. E* **69**, 016613 (2004).
- ¹⁷ D. H. N. Anh, P. Blaudeck, K. H. Hoffmann, and S. Tarafdar, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** 11453 (2007).
- ¹⁸ P. R. Nair and M. A. Alam, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 256101 (2007).
- ¹⁹ O. Bénichou, B. Meyer, V. Tejedor, and R. Voituriez, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 130601 (2008).
- ²⁰ S. Wang, Z.-F. Ma, H.-Q. Yao, *Chem. Eng. Sci.* **64** 1318 (2009).
- ²¹ L.-J. Lv, J.-B. Xiao, L. Zhang, L. Gao, *J. Comp. Appl. Math.* **225** 301 (2009).
- ²² E. K. Lenzi, L.R. da Silva, A.T. Silva, L.R. Evangelista, and M.K. Lenzi, *Physica A* **388**, 806 (2009).

-
- ²³ John H. Cushman, Daniel O'Malley, and Moongyu Park, Phys. Rev. E **79**, 032101 (2009).
- ²⁴ Guyer, R. A., Phys. Rev. A **29**, 2751. (1984).
- ²⁵ B. O'Shaughnessy and I. Procaccia, Phys. Rev. Lett. **54**, 455 (1985).
- ²⁶ H. G. E. Hentschel and I. Procaccia, Phys. Rev. A **29**, 1461 (1984).
- ²⁷ B. O'Shaughnessy and I. Procaccia, Phys. Rev. A **32**, 3073 (1985).
- ²⁸ L M Zelenyi and A V Milovanov, Physics Uspekhi **47**, 749 (2004).
- ²⁹ V. E. Tarasov, Phys. Lett. A **336**, 167 (2005).
- ³⁰ V. E. Tarasov, Ann. Phys. **318**, 286 (2005).
- ³¹ V. E. Tarasov, Chaos **16**, 033108 (2006).
- ³² Examples of fractal structures with nonanomalous diffusion ($d_w = 2$) were analyzed in R. Burioni and D. Cassi, Phys. Rev. E **49**, R1785 (1994).
- ³³ T. Nakayama, K. Yakubo, and R. L. Orbach, Rev. Mod. Phys. **66**, 381 (1994).
- ³⁴ A. S. Balankin, O. Susarrey, and J. M. Gonzáles, Phys. Rev. Lett. **90**, 096101 (2003).

Joule Inversion Temperatures for Some Simple Real Gases

E. Albarrán-Zavala^{1,*}, B. A. Espinoza-Elizarraraz² and F. Angulo-Brown¹

¹Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, ESFM-IPN

²Departamento de Ingeniería de Sistemas, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, ESIME-IPN. Instituto Politécnico Nacional, U. P. Adolfo López Mateos, C. P. 07738, México D. F.

Abstract: In the present work we calculate inversion temperatures T_i for some simple real gases (He, Ne, Ar, Kr and H₂) in the case of a Joule expansion; that is, a free adiabatic expansion. These calculations are made by means of an intermolecular potential of the Lennard-Jones type (12, 6), slightly modified by using a Jagla linear ramp in the repulsive part of the potential. For the Helium we find a T_i in agreement with both previous calculations published by other authors and with experimental results. For Ne and Ar our results are also within the interval of values previously reported, and for Kr we also obtain a very high inversion temperature as some other authors. However, for H₂ we find a T_i approximately twice to big than its estimated experimental value. This last calculation is corrected if we use a short ranged Lennard-Jones potential of the type (24, 12), obtaining a result in good agreement with the recognized experimental value.

INTRODUCTION

It is well known that all real gases undergoing a throttling process (the so-called Joule-Kelvin expansion) have an inversion temperature, T_i ; that is, a temperature at which the process changes from a heating to a cooling process. This temperature depends upon the particular gas and upon both the initial and final pressures [1]. On the other hand, only in some few references [2-4], the problem of an inversion temperature associated to the so-called Joule expansion (free adiabatic expansion) for real gases is discussed. In fact, Goussard and Roulet [2] asserted that there exists an inversion temperature, T_i , for all real gases undergoing an adiabatic free expansion. If T_0 is the initial temperature, then for $T_0 < T_i$, the gas is cooler after a free expansion and for $T_0 > T_i$, the gas is warmer. According to Goussard and Roulet [2], all real gases which can be described by intermolecular potentials $u(r)$ which diverge with small values for r at least like r^{-3} , necessarily have an inversion temperature. For example, for the Lennard-Jones model $u(r) \sim r^{-12}$ for $r \rightarrow 0$, and they used this potential to calculate T_i for helium and hydrogen [2]. Their result for the helium case is excellent according to experimental variations of the second virial coefficient $B(T)$ measured by Holborn and Otto [5] and also given in [1]. However, for the hydrogen case they calculated T_i twice to big than its estimated experimental value [1, 5]. Boschi-Filho and Butchers [3] studied the Joule inversion temperature for several simple real gases at high temperatures based on the $B(T)$ behavior and they suggested that most of simple real gases have an inversion temperature corresponding to the maximum value of $B(T)$ in a range of temperatures so high that few experimental data are available. Recently, Parsafar, *et al.* [4] proposed a method to

modify hard-core potentials to predict real fluid properties at low densities, including the inversion temperature. In the present article we discuss the problem of the Joule inversion temperature by means of a Lennard-Jones potential slightly modified in its repulsive and positive part according to the so-called Jagla potential [6]. This potential allows to obtain analytical expressions for the second virial coefficient and for its first derivative dB/dT , necessary to calculate the Joule inversion temperature. With this potential we calculate T_i for He, Ne, Ar, Kr and H₂.

Our results for He, Ne and Ar are in agreement with [2] and [3] respectively, and for Kr we obtain a very high inversion temperature as in [3]. For the hydrogen case we also obtain a T_i value twice to big the recognized experimental value reported in [1]. However, we recuperate a correct result by using a Lennard-Jones potential with exponents (24, 12). The article is organized as follows: In section 2 we present the Lennard-Jones modified model for the intermolecular potential. In section 3 we use experimental data to fit our approximated model to calculate T_i . In section 4, we calculate T_i for hydrogen by using a (24, 12) Lennard-Jones potential. Finally we present our concluding remarks.

THE MODIFIED LENNARD-JONES POTENTIAL

The temperature change for a gas undergoing an adiabatic free expansion can be calculated by means of the so-called Joule coefficient,

$$J = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_E = - \left(\frac{\partial T}{\partial E} \right)_V \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = - \frac{1}{C_V} \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T \quad (1)$$

being T the absolute temperature, V the volume, E the internal energy and C_V the heat capacity at constant volume. Since C_V is always positive, the sign of the temperature variation along the expansion is determined by the sign of $(\partial E/\partial V)_T$. The coefficient J can also be calculated knowing C_V and the gas state equation [2],

*Address correspondence to this author at the Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, ESFM-IPN. Instituto Politécnico Nacional, U. P. Adolfo López Mateos, C. P. 07738, México D. F.; Tel: +52 (55) 57296000 ext 55034; E-mail: caesar_erik@yahoo.com

$$J = \frac{1}{C_v} \left[P - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \right] \quad (2)$$

with P the gas pressure. Writing the virial expansion as

$$PV = nRT \left(1 + \frac{nB}{V} + \frac{n^2 C}{V^2} + \frac{n^3 D}{V^3} + \dots \right) \quad (3)$$

which expresses the deviation of P from that of an ideal classical gas, it is easy to show, that in the thermodynamic limit $V \rightarrow \infty$ [3], the Joule coefficient can be expressed as

$$J = - \frac{n^2 RT^2}{C_v V^2} \left(\frac{dB}{dT} \right) \quad (4)$$

being $B=B(T)$ the second virial coefficient and n the molar number. If an inversion temperature T_i exists then,

$$\left(\frac{dB}{dT} \right)_{T_i} = 0 \quad (5)$$

Boschi-Filho and Butchers [3] showed that some state equations such as Van der Waals, Berthelot, Dieterici, Redlich-Kwong and Beattie-Bridgeman have not an inversion temperature. This fact according to Goussard and Roulet [2] occurs because for real gases the existence of an inversion temperature comes directly from the fact that there is a high but not infinite repulsive part in $u(r)$. On the other hand, for a hard sphere repulsive part, $u(r) = \infty$ for $r < \sigma$ and therefore $(\partial E/\partial V)_T$ is always positive in their Eq. (6), [2]. This is clearly the case for a Van der Waals gas, which always cools in a Joule expansion [2].

As is well known [7], the second virial coefficient can be written as

$$B = 2\pi N_A \int_0^\infty (1 - e^{-u/kT}) r^2 dr \quad (6)$$

where $u(r)$ is the intermolecular potential, k the Boltzmann's constant, N_A the Avogadro's number, and r is the distance between a pair of molecules. In the present article we use the Lennard-Jones (LJ) potential, that is,

$$u(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad (7)$$

being ϵ the well depth and σ the point where $u(r) = 0$. We slightly modify the LJ-potential following the procedure of Jagla [6], which is depicted in Fig. (1), and is given by:

$$u(r) = \begin{cases} +\infty & \text{if } 0 \leq r \leq \lambda \\ \alpha(r-\sigma) & \text{if } \lambda \leq r \leq \sigma \\ 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] & \text{if } \sigma \leq r \leq +\infty \end{cases} \quad (8)$$

where:

$$\alpha = \left(\frac{4\epsilon}{\lambda - \sigma} \right) \left[\left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^6 \right] \quad (9)$$

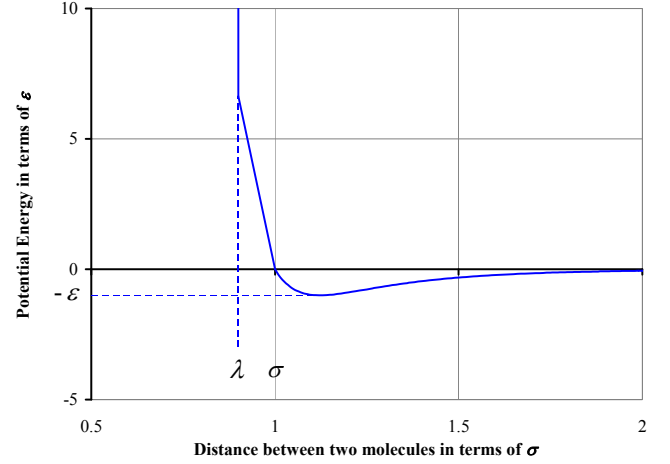


Fig. (1). The modified LJ-potential. The function is composed by three parts. The first part is in the interval corresponding to $0 < r < \lambda$ where the function is $+\infty$. The second part is formed by a ramp with negative slope for $\lambda < r < \sigma$. Finally, the third part is the LJ-potential in the interval corresponding to $\sigma < r < +\infty$.

For this potential we propose the following approximations: for the interval $0 < r < \lambda$, the term $1 - e^{-\beta u}$ inside the integral of Eq. (6) can be approximated by

$$1 - e^{-\beta u} \approx 1 \quad (10)$$

being $\beta = 1/kT$. For the interval $\lambda < r < \sigma$ the term $1 - e^{-\beta u}$ is maintained as it is. And finally, in the interval $\sigma < r < +\infty$, for the case $|\beta u| \ll 1$, we take:

$$1 - e^{-\beta u} \approx \beta u \quad (11)$$

By using these approximations, Eq. (6) can be written as,

$$B(T) = 2\pi N_A \int_0^\lambda r^2 dr + 2\pi N_A \int_\lambda^\sigma (1 - e^{-\beta u}) r^2 dr + 2\pi N_A \int_\sigma^\infty \beta u r^2 dr \quad (12)$$

which leads to

$$B = \frac{2}{3} \pi N_A \sigma^3 - \frac{16\pi\epsilon N_A \sigma^3}{9kT} + \frac{2\pi N_A kT}{\alpha} [\sigma^2 - \lambda^2 e^{\alpha\beta(\sigma-\lambda)}] + \frac{4\pi N_A k^2 T^2}{\alpha^2} [\sigma - \lambda e^{\alpha\beta(\sigma-\lambda)}] + \frac{4\pi N_A k^3 T^3}{\alpha^3} [1 - e^{\alpha\beta(\sigma-\lambda)}] \quad (13)$$

The first derivative of $B(T)$ is immediately obtained,

$$\frac{dB}{dT} = \frac{16\pi\epsilon N_A \sigma^3}{9kT^2} + \frac{2\pi N_A k}{\alpha} [\sigma^2 - \lambda^2 e^{\alpha\beta(\sigma-\lambda)}] + \frac{8\pi N_A k^2 T}{\alpha^2} [\sigma - \lambda e^{\alpha\beta(\sigma-\lambda)}] + \frac{12\pi N_A k^3 T^2}{\alpha^3} [1 - e^{\alpha\beta(\sigma-\lambda)}] + \frac{2\pi N_A kT}{\alpha} \left[\frac{\alpha(\sigma-\lambda)\lambda^2 e^{\alpha\beta(\sigma-\lambda)}}{kT^2} \right] + \frac{4\pi N_A k^2 T^2}{\alpha^2} \left[\frac{\alpha(\sigma-\lambda)\lambda e^{\alpha\beta(\sigma-\lambda)}}{kT^2} \right]$$

$$+ \frac{4\pi N_A k^3 T^3}{\alpha^3} \left[\frac{\alpha(\sigma - \lambda) e^{\alpha\beta(\sigma - \lambda)}}{kT^2} \right] \quad (14)$$

In the following section we shall use these algebraic results to obtain the Joule inversion temperatures for several simple real gases. We will plot $B(T)$ and $f(T) = (T^2/2\pi) \times (dB/dT)$ against T for several gases (He, Ne, Ar, Kr and H₂).

JOULE INVERSION TEMPERATURES

In this section we shall use Eqs. (13) and (14) to calculate the Joule inversion temperature for several simple real gases (He, Ne, Ar, Kr, and H₂).

A) Helium

For this gas we take experimental data for $B(T)$ reported by White *et al.* [8] for obtaining λ , σ and ε in Eq. (13) as fitting parameters. In Fig. (2) we see the experimental points of $B(T)$ and the fitted curve given by Eq. (13). The resulting values of the parameters are $\lambda = 2.002807 \times 10^{-10}$ m, $\sigma = 2.477172 \times 10^{-10}$ m, and $\varepsilon = 1.260382 \times 10^{-22}$ J, which means $\varepsilon/k = 9.1289$ K. From quantum mechanics calculations, Poling *et al.* [9] give for the helium $\varepsilon/k = 10.22$ K. In Fig. (3) we depict $f(T) = (T^2/2\pi) \times (dB/dT)$ against T according to Eq. (14). The inversion temperature is given by the point where $dB/dT=0$ and it corresponds to $T_i \approx 177$ K. Goussard and Roulet [2] for a LJ-potential, obtained an inversion temperature given by $T_i \approx 25\varepsilon/k$, which for He gives $T_i \approx 200$ K (See Figs. 2 and 3).

B) Neon

In this case we took $B(T)$ experimental data from Prausnitz *et al.* [7] and Dymond and Smith [10]. In Fig. (4), we depict the fitted curve, Eq. (13), to experimental data obtaining the following values for the parameters $\lambda = 2.027787 \times 10^{-10}$ m, $\sigma = 2.571497 \times 10^{-10}$ m, and $\varepsilon = 6.311761 \times 10^{-22}$ J, which give $\varepsilon/k = 45.7158$ K. From viscosity data, Poling *et al.* [9] report for Neon $\varepsilon/k = 32.8$ K. In Fig. (5) we obtain an inversion temperature of $T_i \approx 867$ K, which is within the T_i -interval given by ref. [3], for Neon 870 ± 390 K.

C) Argon

In this case we take experimental second virial data given by Fender and Halsey [11] (see Fig. 6). The resulting fitted parameters according with Eq. (13) are $\lambda = 3.145084 \times 10^{-10}$ m, $\sigma = 4.74678 \times 10^{-10}$ m, and $\varepsilon = 1.231451 \times 10^{-21}$ J, which give $\varepsilon/k = 89.1935$ K. From viscosity data, Poling *et al.* [9] find $\varepsilon/k = 93.3$ K. In Fig. (7) we have $f(T)$ versus T , and we obtain $T_i \approx 3448$ K which is within the T_i -interval reported by Boschi-Filho and Butchers [3] for Argon, $T_i \approx 3800 \pm 1800$ K.

D) Krypton

For this gas we use $B(T)$ experimental data also given by Fender and Halsey [11] (see Fig. 8). The resulting fitted parameters by using Eq. (13) are $\lambda = 3.631624 \times 10^{-10}$ m, $\sigma = 6.153939 \times 10^{-10}$ m, and $\varepsilon = 1.276291 \times 10^{-21}$ J, which give $\varepsilon/k = 92.4413$ K. From viscosity data, Poling *et al.* [9]

obtain $\varepsilon/k = 178.9$ K. In Fig. (9) we see that T_i for krypton seemingly has a very high value, $T_i \approx 6481$ K. Boschi-Filho and Butchers [3] assert that at least for the temperature range 0-4000 K this gas does not show a maximum in its second virial coefficient. However, for $T_i > 4000$ K we find a possible inversion temperature.

E) Hydrogen

In the hydrogen case we found an inversion temperature by taking $B(T)$ experimental data from Prausnitz *et al.* [7] and Dymond and Smith [10]. By means of Eqs. (13) and (14) we obtained $T_i \approx 922$ K. The fitted parameters are $\lambda = 2.368190 \times 10^{-10}$ m, $\sigma = 2.861934 \times 10^{-10}$ m, and $\varepsilon = 5.513926 \times 10^{-22}$ J, which give $\varepsilon/k = 39.9372$ K. On the other hand, from viscosity data, Poling *et al.* [9] report $\varepsilon/k = 59.7$ K (See Figs. 10 and 11).

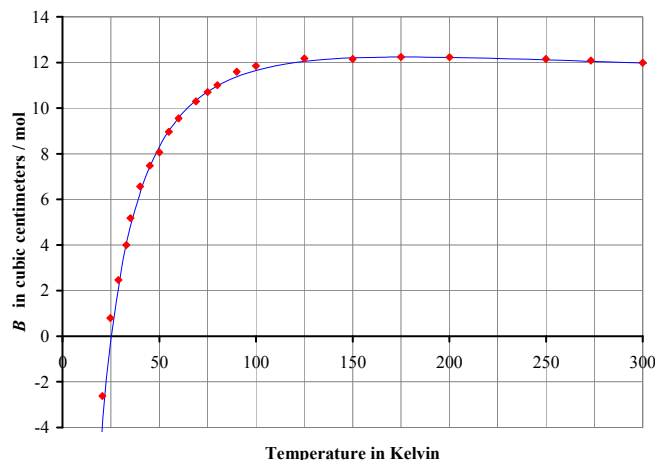


Fig. (2). Fitted curve for $B(T)$ Helium data.

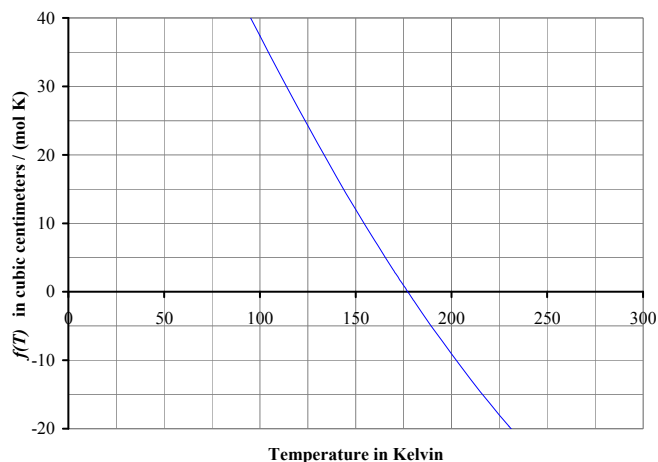


Fig. (3). $f(T)$ versus T for Helium, resulting $T_i \approx 177$ K.

(24, 12) LENNARD-JONES POTENTIAL

According to Callen [1], the experimental Joule inversion temperature for hydrogen is $T_i \approx 400$ K. By means of a LJ-potential, Goussard and Roulet [2] calculated $T_i \approx 800$ K. However, if one uses the algebraic expression for $B(T)$ given by Holborn and Otto [3, 5] the resulting T_i is 474 K, no so far the accepted experimental value $T_i \approx 400$ K. In section 3, we

found that by means of a LJ-potential modified by using a Jagla type ramp the Joule inversion temperature for H₂ is $T_i \approx 922$ K. However, if we use a Lennard-Jones potential with exponents (12, 6), $B(T)$ can be calculated as an infinite power series [3, 12].

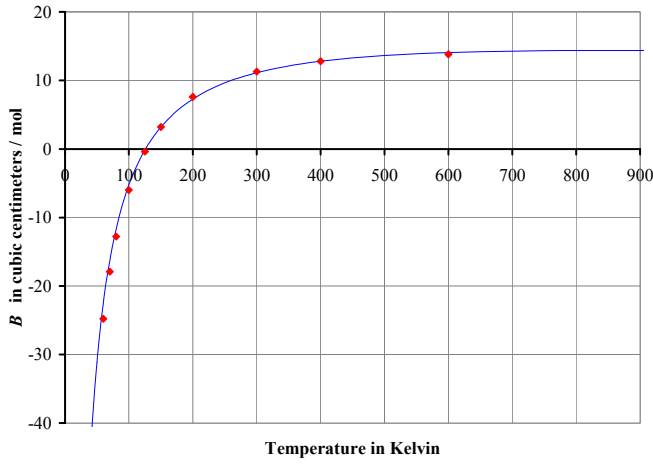


Fig. (4). Fitted curve for $B(T)$ Neon data.

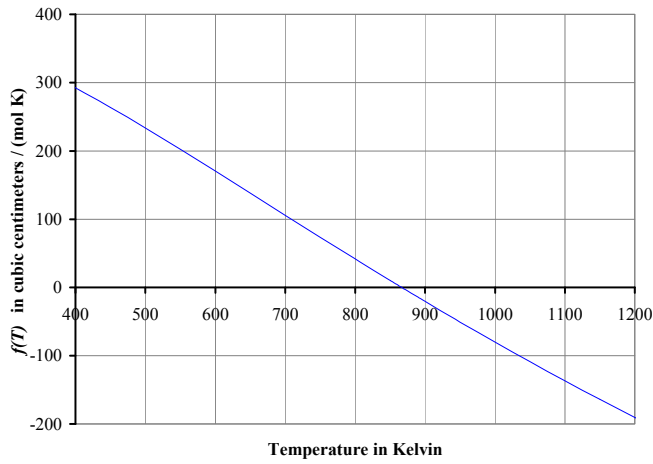


Fig. (5). $f(T)$ versus T for Neon, resulting $T_i \approx 867$ K.

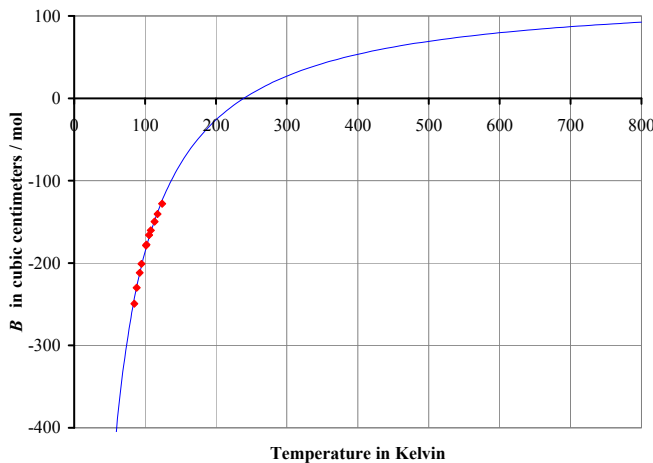


Fig. (6). Fitted curve for $B(T)$ Argon data.

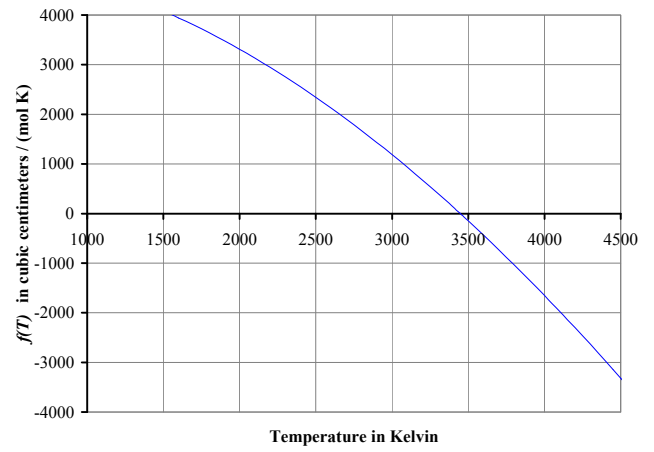


Fig. (7). $f(T)$ versus T for Argon, resulting $T_i \approx 3448$ K.

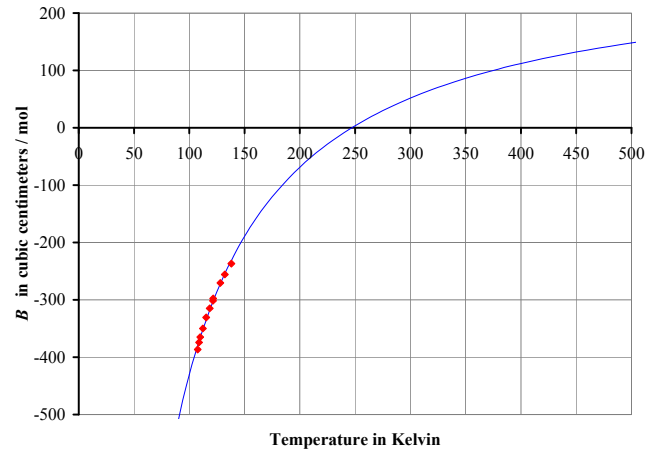


Fig. (8). Fitted curve for $B(T)$ Krypton data.

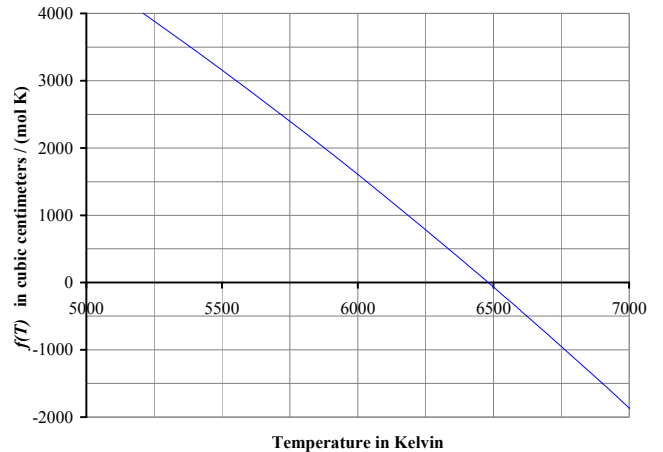


Fig. (9). $f(T)$ versus T for Krypton, resulting $T_i \approx 6481$ K.

$$B(T) = b_0 \sum_{j=0}^{\infty} b^{(j)} T^{*- \left(\frac{2j+1}{4}\right)} \quad (15)$$

being $T^* = kT/\varepsilon$ the reduced temperature, $b_0 = (2/3)\pi N_A \sigma^3$ is four times the volume of a molecule multiplied by N_A , and

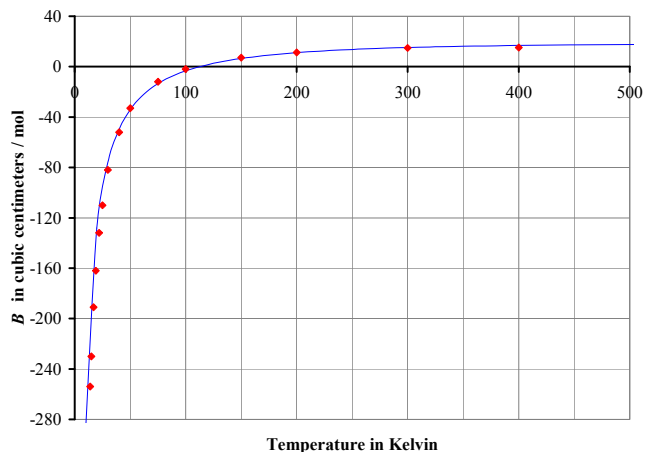


Fig. (10). Fitted curve for $B(T)$ Hydrogen data.

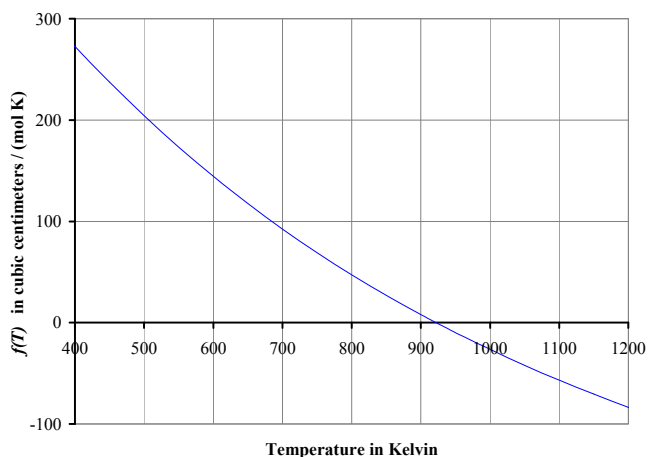


Fig. (11). $f(T)$ versus T for Hydrogen, finding $T_i \approx 922$ K.

$$b^{(j)} = -\frac{2^{j+\frac{1}{2}}}{4j!} \Gamma\left(\frac{2j-1}{4}\right) \tag{16}$$

By means of $dB/dT = 0$ and taking $j = 5$ one finds [3]

$$T^* = \frac{kT_i}{\epsilon} \approx 25.125 \tag{17}$$

which leads to $T_i \approx 930$ K for hydrogen; that is a value far from the recognized experimental value, $T_i \approx 400$ K. On the other hand, if we take the LJ-potential in the form [13],

$$u(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{2n} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^n \right] \tag{18}$$

in terms of the reduced temperature T^* for the second virial coefficient, we obtain,

$$B^*(T^*, 2n, n) = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{3}{2j!n} \Gamma\left(\frac{nj-3}{2n}\right) \left(\frac{4}{T^*}\right)^{(nj+3)/2n} \tag{19}$$

This expression, by means of $dB/dT = 0$ gives us the reduced inversion temperatures shown in Table 1.

Table 1. T_i^* As Function of LJ-Potentials ($2n, n$)

LJ($2n, n$)	T_i^*
LJ(8, 4)	90
LJ(12, 6)	25.15
LJ(16, 8)	17
LJ(20, 10)	14
LJ(24, 12)	12.47
LJ(28, 14)	11
LJ(48, 24)	9.7
LJ(96, 48)	8.65

It is remarkable that for the exponents (24, 12) which corresponds to a very short ranged potential [14], $T_i^* = 12.47$. Thus by using $\epsilon \approx 28 \times 10^{-4}$ eV for hydrogen [2, 15], we obtain a Joule inversion temperature of $T_i(\text{H}_2) \approx 400$ K in agreement with the experimental value given by Callen [1]. In Fig. (12) we depict a comparison between the LJ-potential for both pairs of exponents (12, 6) and (24, 12).

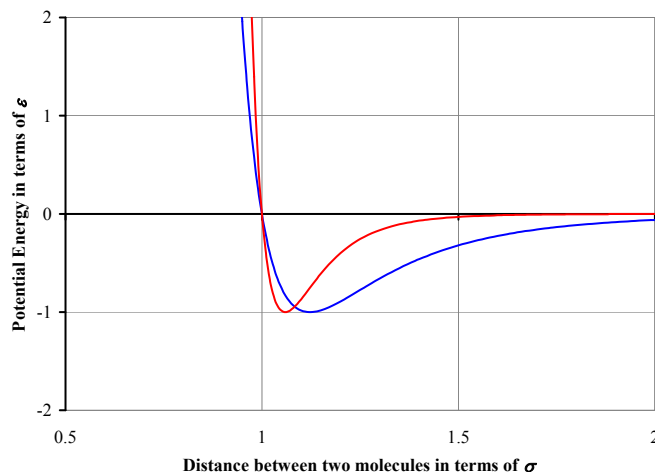


Fig. (12). LJ-potential (12, 6) is plotted by using a blue line. The red line shows the LJ-potential (24, 12), [14].

CONCLUDING REMARKS

Although the throttling Joule-Kelvin expansion is a process widely presented in thermodynamics textbooks, the so-called Joule expansion for real gases is scarcely discussed in the literature [2-4]. Goussard and Roulet [2] found that all real gases which can be described by an intermolecular potential $u(r)$ diverging for small values of r at least like r^{-3} , necessarily have an inversion temperature. These authors calculated T_i for He and H_2 by using a Lennard-Jones potential finding a good result for He and twice to big than its estimated experimental value for H_2 . On the other hand, Boschi-Filho and Butners [3] calculated T_i for several real gases at high temperatures by using $B(T)$ behavior and they concluded that most of simple real gases have T_i 's in a range of temperatures so high that few experimental data are available.

In the present paper, we have calculated Joule inversion temperatures for some simple real gases by means of a

Table 2. Calculated Values for λ , σ and ε/k by Fitting the Experimental Data to Eq. (13). The Last Column Shows the ε/k Values Provided by Poling *et al.* [9]

Gas	λ [$\times 10^{-10}$ m]	σ [$\times 10^{-10}$ m]	ε/k [K]	ε/k [K] by Poling <i>et al.</i> [9]
He	2.002807	2.477172	9.1289	10.22
Ne	2.027787	2.571497	45.7158	32.80
Ar	3.145084	4.746780	89.1935	93.30
Kr	3.631624	6.153939	92.4413	178.90
H ₂	2.368190	2.861934	39.9372	59.70

Table 3. Joule Inversion Temperatures for Several Real Gases. The Second Column Shows Calculated T_i by Using Eq. (14). Also, the Calculated T_i 's by Goussard and Roulet [2] and Those Calculated by Boshi-Filho and Butthers [3] are Shown in Third and Fourth Columns Respectively

Gas	T_i [K] by Using eq. (14)	T_i [K] by [2]	T_i [K] by [3]
He	177	200	200 \pm 50
Ne	867	-----	870 \pm 390
Ar	3448	-----	3800 \pm 1800
Kr	6481	-----	-----
H ₂	922	800	660 \pm 270

Lennard-Jones potential modified by a Jagla type ramp, obtaining T_i -results within a range similar to previous reported values [2, 3]. In Table 2 we present our obtained results for λ , σ and ε/k , according to experimental data and equation (13). In the same Table 2, we show the values for ε/k provided by Poling *et al.* [9]. In Table 3 we show the Joule inversion temperatures obtained by using equation (14) and the results obtained by [2, 3]. However, for the case of hydrogen, we found that a Lennard-Jones potential with (24, 12) exponents is more suitable to calculate a T_i near its estimated experimental value of $T_i \approx 400$ K.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was partially supported by COFFA-EDI-IPN, México.

REFERENCES

- [1] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. New York: John Wiley and Sons, 1985.
- [2] J. O. Goussard, and B. Roulet, "Free expansion for real gases", *Am. J. Phys.*, vol. 61, pp. 845-848, January 1993.
- [3] H. Boschi-Filho, and C. C. Butthers, "Second virial coefficient for real gases at high temperature", eprint arXiv:cond-mat/9701185 v2 28, Jan 1997. [Online]. Available: http://arxiv.org/PS_cache/cond-mat/pdf/9701/9701185v2.pdf [Accessed March 15, 2009].
- [4] G. A. Parsafar, M. Khanpour, and A. A. Mohammadi, "Calculation of equilibrium and transport properties using modified hard-core potential models", *Chem. Phys.*, vol. 326, pp. 527-534, March 2006.
- [5] L. Holborn, and J. Otto, "Über die Isothermen einiger Gase zwischen +400° und - 183°", (in German), *Z. Physik*, vol. 33, pp. 1-11, May 1925.
- [6] L. Xu, I. Ehrenberg, S. V. Buldyrev, and H. E. Stanley, "Relationship between the liquid-liquid phase transition and dynamic behaviour in the Jagla model", *J. Phys. Condens. Matter*, vol. 18, pp. S2239-S2246, August 2006.
- [7] J. M. Prausnitz, R. N. Lichtenthaler, and Y. E. Gomes de Azevedo, *Termodinámica Molecular de los Equilibrios de Fases*, (in Spanish). Madrid: Prentice Hall, 2000.
- [8] D. White, T. Rubin, P. Camky, and H. L. Johnston, "The virial coefficients of helium from 20 to 300°K", *J. Phys. Chem.*, vol. 64, pp. 1607-1612, January 1960.
- [9] B. E. Poling, J. M. Prausnitz, and J. P. O'Connell, *The Properties of Gases and Liquids*. New York: McGraw Hill, 2000.
- [10] J. D. Dymond, and E. B. Smith, *The Virial Coefficients of Pure Gases and Mixtures*. Oxford: Clarendon Press, 1980.
- [11] B. E. F. Fender, and G. D. Halsey, Jr., "Second virial coefficients of argon, krypton, and argon-krypton mixtures at low temperatures", *J. Chem. Phys.*, vol. 36, pp. 1881-1888, October 1962.
- [12] J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*. New York: Wiley, 1954.
- [13] M. L. Glasser, "Second virial coefficient for a Lennard-Jones (2n-n) system in d dimensions and confined to a nanotube surface", *Phys. Lett. A*, vol. 300, pp. 381-384, June 2002.
- [14] G. A. Vliegthart, J. F. M. Lodge, and H. N. W. Lekkerkerker, "Strong weak and metaestable liquids structural and dynamical aspects of the liquid state", *Phys. A*, vol. 263, pp. 378-388, February 1999.
- [15] Shang-Keng Ma, *Statistical Mechanics*. Philadelphia: World Scientific, 1985.

Received: January 1, 2009

Revised: March 17, 2009

Accepted: March 18, 2009

© Albarrán-Zavala *et al.*; Licensee Bentham Open.

This is an open access article licensed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted, non-commercial use, distribution and reproduction in any medium, provided the work is properly cited.

Anexo II. Participación en congresos



DESARROLLO DE MODELOS DE PROCESOS GEOFÍSICOS BASADOS EN LA MECÁNICA DE SISTEMAS COMPLEJOS. APLICACIONES PARA PROGRAMAS DE MONITOREO Y PREVISIÓN DE RIESGOS EN EL VALLE DE MÉXICO

Proyecto: PICCT08 – 38

Responsable: DR. ALEXANDER BALANKIN

DR. ALEXANDER BALANKIN¹, DR. MIGUEL PATIÑO O.², DR. JULIÁN PATIÑO O.³, M.C. BENJAMÍN ESPINOZA E.⁴, DR. ERNESTO PINEDA⁵
 ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

¹E-mail: abalankin@ipn.mx, Tel: 5729 6000 Ext. 54589; ²E-mail: mpatiño2002@ipn.mx; ³E-mail: jpatino@ipn.mx; ⁴E-mail: ajeez@hotmail.com; ⁵E-mail: epineda@ipn.mx

RESUMEN

1. Desarrollar fundamentos teóricos-experimentales de análisis y modelación del comportamiento dinámico de sistemas geofísicos.
2. Desarrollar una nueva metodología de monitoreo y predicción de riesgos urbanos en el Valle de México en simulación con la Secretaría de Protección Civil del Distrito Federal
3. Preparar recursos humanos a través del desarrollo de 3 tesis de doctorado y 4 tesis de maestría.

Introducción

La Ciudad de México sufre de agrietamientos, fallas e inundaciones, los cuales afectan la infraestructura urbana más debido a la extracción de agua subterránea, y al a esto le sumamos la actividad sísmica, la Ciudad permanece en riesgo constante. Los sismos representan un grave peligro para la Ciudad de México, estos fenómenos tienen repercusiones tanto grandes consecuencias económicas y sociales, como todo en el marco de la pérdida de vidas humanas, que aunado a las pérdidas materiales, son de gran consideración. Los desarrollos de los nuevos métodos de caracterización y modelación de los sistemas geofísicos y los nuevos métodos de predicción y valoración de riesgos sísmicos ayudarán en el desarrollo de mejores métodos de monitoreo y prevención de posibles eventos de riesgo via desarrollo tecnológico.



Enfoques Metodológicos



Metodología de Investigación para el Proyecto



Metodología de la Investigación y modelación de sistemas complejos geofísicos.

Resultados

En esta etapa investigativa que la actividad sísmica relativa, en forma de fluctuaciones, pueden incrementarse de escala dentro de un amplio rango de eventos sísmicos consecutivos (ver figura 1) además, observamos que las fluctuaciones de la actividad sísmica se comportan análogamente al Anzón de Frenet-Volterra de la forma de crecimiento dinámico de superficies rugosas (ver figura 2). Como resultado final, que las resultantes de eventos sísmicos presenten correlaciones espaciales de largo alcance asociadas con la actividad de los distribuciones de la actividad sísmica [1,2].

Resultados

En este trabajo derivamos las ecuaciones de hidrodinámica de fluido en medios porosos con estructura fractal. Determinamos que la naturaleza fractal de la masa y la densidad del flujo afectan la dinámica del flujo de manera esencial. Encontramos las relaciones entre los parámetros de escalamiento del flujo fractal y la geometría fractal del medio poroso y fracturas [4].

Hidrodinámica Fractal

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

α_1 - Dimensión fractal de masa
 α_2 - Dimensión fractal de porosidad
 α_3 - Factor de escala

Comportamiento de la presión del flujo fractal

$$p = p_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\alpha_1} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\alpha_2}$$

Flujo fractal

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right)$$

Solución

$$p = p_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\alpha_1} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\alpha_2}$$

Flujo fractal en medios saturados

Modelos para flujo fractal de agua en sólidos

Ecuación para medios porosos heterogéneos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Ecuación para la infiltración horizontal, llamada acción

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

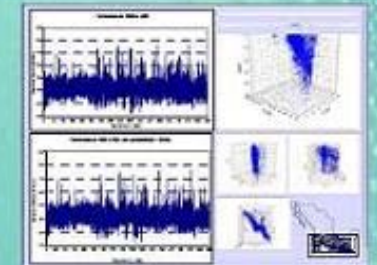


Figura 1. A la izquierda: Gráfico de tiempo de llegada de ondas P y S de un sismo ocurrido en México desde el 20 de febrero al 20 de marzo de 2008. A la derecha: Gráfico de la actividad sísmica en el Valle de México durante el periodo de 1990 a 2008.

Los resultados teóricos pueden ser aplicados para el análisis de riesgo sísmico en el Valle de México [5]. Identificar los parámetros que gobiernan el fenómeno bajo investigación, construir el modelo matemático más simple posible, resolviendo la ecuación física, y aplicar y probarlos estadísticamente, empleando metodología de ingeniería, en los datos de riesgo que existieron en el desarrollo de este Proyecto.

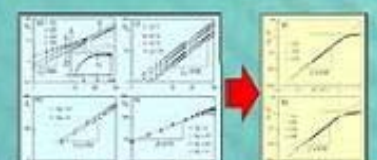
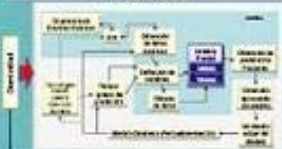


Figura 2. Gráfico de la actividad sísmica en el Valle de México durante el periodo de 1990 a 2008. A la izquierda: Gráfico de la actividad sísmica en el Valle de México durante el periodo de 1990 a 2008. A la derecha: Gráfico de la actividad sísmica en el Valle de México durante el periodo de 1990 a 2008.



Metodología para la monitorización de Riesgos de Protección Sísmica y Modelos de Flujos de Agua Subterránea

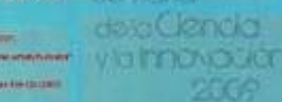


Conclusiones

- Diseño de una metodología de reducción de riesgo en la Ciudad, desarrollada en colaboración con la Secretaría de Protección Civil del Distrito Federal.
- Con estos nuevos métodos de caracterización de sistemas geofísicos, se desarrollaron mejores técnicas de monitoreo y predicción de riesgos y desastres.
- Con este proyecto, pretendemos reducir los niveles de riesgo para la población y incrementar la sustentabilidad en el desarrollo de nuestra ciudad.

Recomendaciones

- Para realizar los análisis de riesgo sísmico se debe considerar las condiciones del subsuelo, que se generen por los flujos subterráneos y la extracción de agua de los pozos artesianos.
- Evaluar la posibilidad de mejorar los mapas de riesgo del Distrito Federal, considerando las herramientas de la mecánica fractal.



Referencias

1. A. Balankin, "Urban Fractals and the Dynamics of Earthquake Activity," *Journal of Earth System Science*, vol. 116, pp. 101-110, 2007.
2. A. Balankin, "Urban Fractals and the Dynamics of Earthquake Activity," *Journal of Earth System Science*, vol. 116, pp. 101-110, 2007.
3. A. Balankin, "Urban Fractals and the Dynamics of Earthquake Activity," *Journal of Earth System Science*, vol. 116, pp. 101-110, 2007.
4. A. Balankin, "Urban Fractals and the Dynamics of Earthquake Activity," *Journal of Earth System Science*, vol. 116, pp. 101-110, 2007.

Semana de la Ciencia y la Innovación 2010





DESARROLLO DE MODELOS DE PROCESOS GEOFÍSICOS BASADOS EN LA MECÁNICA DE SISTEMAS COMPLEJOS. APLICACIONES PARA PROGRAMAS DE MONITOREO Y PREVISIÓN DE RIESGOS EN EL VALLE DE MÉXICO

Proyecto: **PICCT08 – 38** Responsable: **DR. ALEXANDER BALANKIN**
DR. ALEXANDER BALANKIN¹, DR. JULIÁN PATIÑO O.², DR. MIGUEL PATIÑO O.³, DR. BENJAMÍN ESPINOZA E.⁴, DR. GENE TRIGO SOTO⁵, DR. ISMAEL REYES GONZÁLES⁶
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
 E-mail: abalankin@ipn.mx, Tel. 5729 6000 Ext. 54589; E-mail: jpatino@ipn.mx; E-mail: mpatino2002@ipn.mx; E-mail: bjeez@hotmail.com

OBJETIVOS:

1. Desarrollar fundamentos teórico-experimentales de análisis y modelación del comportamiento dinámico de sistemas geofísicos.
2. Desarrollar una nueva metodología de monitoreo y previsión de riesgos urbanos en el Valle de México en vinculación con la Secretaría de Protección Civil del Distrito Federal.
3. Preparar recursos humanos de alto nivel de Posgrado, a través del desarrollo de 5 tesis de doctorado y 5 tesis de maestría.

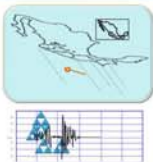
Introducción:

Los fenómenos geofísicos siempre han estado presentes en la historia de la Ciudad de México y es un hecho que lo seguirán estando. Uno de los principales por las importantes consecuencias que desencadenan son los terremotos, basta recordar el del 19 de Septiembre de 1985, uno de los más destructivos en la historia de nuestro país. Un aspecto importante que puede repercutir en las consecuencias de un sismo, es la modificación de las propiedades dinámicas del suelo, derivado de una extracción excesiva y mal planeada del agua subterránea. El desarrollo de nuevos métodos de caracterización de los fenómenos geofísicos basados en la mecánica de sistemas complejos, la creación de modelos innovadores y el trabajo conjunto con diversos organismos del Gobierno del Distrito Federal, contribuirá en la disminución del nivel de riesgo y de la vulnerabilidad de la Ciudad.

Estrategia Metodológica:



LOS DAÑOS DE LOS SISMOS QUE SE REGISTRAN EN EL VALLE DE MÉXICO SON ANALIZADOS A TRAVÉS DE LAS MATEMÁTICAS



Resultados:

En este trabajo encontramos que para la actividad sísmica ocurrida en la Plaza de Cocos – México, se puede establecer una ley de escala (ver figura 1). Además, descubrimos que existe auto – semejanza en el proceso de actividad sísmica para diferentes ventanas en la Magnitud [1, 2].

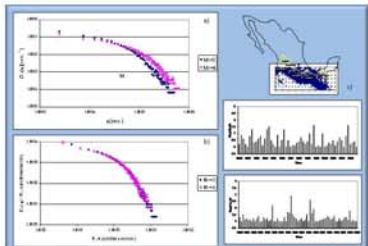


Figura 1: a) Gráfica de probabilidad de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. b) Gráfica del tiempo de recurrencia. c) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. d) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. e) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. f) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. g) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. h) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. i) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. j) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. k) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. l) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. m) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. n) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. o) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. p) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. q) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. r) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. s) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. t) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. u) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. v) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. w) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. x) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. y) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud. z) Gráfica de recurrencia para diferentes ventanas de magnitud.

La actividad sísmica la estamos analizando como un sistema complejo [3], uno de estos análisis, se desarrolla considerando los eventos sísmicos en 2D de estos análisis, donde los nodos, se ubican dentro de un cuadrado determinado por los valores de Longitud y Latitud para diferentes medidas, así, un evento que cae dentro de este cuadrado, constituye un nodo, y la conexión entre dos eventos consecutivos constituye una liga ("Link"), con lo cual, se va formando la red compleja. Los resultados teóricos pueden ser aplicados para el análisis de riesgos sísmicos en el Valle de México.

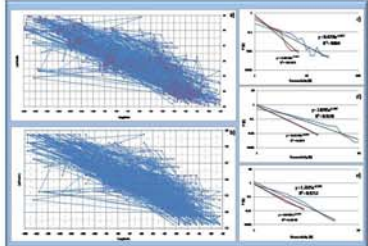
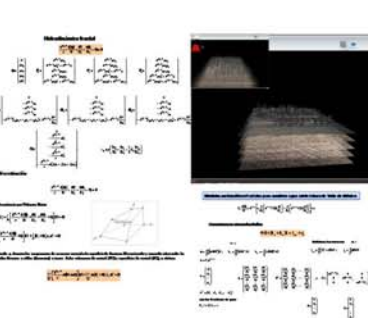
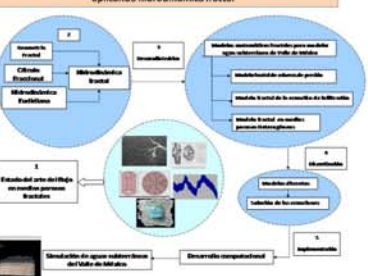


Figura 2: Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. a) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. b) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. c) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. d) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. e) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. f) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. g) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. h) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. i) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. j) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. k) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. l) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. m) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. n) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. o) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. p) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. q) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. r) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. s) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. t) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. u) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. v) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. w) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. x) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. y) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud. z) Gráfica de recurrencia de los tiempos de recurrencia de los terremotos en la Plaza de Cocos, México para diferentes ventanas de magnitud.

Resultados:

En este trabajo se aplicaron las ecuaciones de hidrodinámica en medios porosos con estructura fractal para simular la dinámica del agua subterránea del Valle de México [4].

Metodología de simulador de agua subterránea de la Ciudad de México aplicando hidrodinámica fractal



Referencias:

[1] ABE, S. and SUZUKI, N., Scale Free Network of Earthquakes, *Geophy. Lett.*, 45, 583-586, (2004)
 [2] A. Balankin, D. Mariani Matamoros, J. Peña Cortés, M. Peña Cortés, E. Alvarado, D. Saragoza Ochoa, Scaling dynamics of volcanic activity fluctuations – *Geophy. Letters*, Volume 31, pages 1-4 (2008)
 [3] A. S. Balankin, Fractal Behavior of Complex Systems – *The Mexican Journal of Electromechanical Engineering*, Volume 7, No. 1, pages 109-120 (2003)
 [4] A. S. Balankin and E. A. Espinoza Elizarraraz, Pressure transient behavior of fractal flow – *Geophy. Journal*, in press (2009)

Prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México

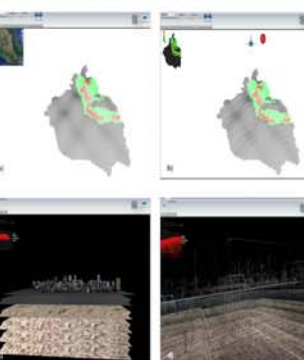


Figura 4: a) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. b) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. c) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. d) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. e) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. f) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. g) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. h) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. i) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. j) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. k) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. l) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. m) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. n) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. o) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. p) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. q) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. r) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. s) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. t) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. u) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. v) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. w) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. x) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. y) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México. z) Simulador del prototipo del Simulador de Riesgos Sísmicos para el Valle de México.

Contribuciones:

- > Diseño de una metodología de reducción de riesgos en la Ciudad, desarrollada en colaboración con la "Secretaría de Protección Civil del Distrito Federal".
- > Con estos nuevos métodos de caracterización de sistemas geofísicos, se desarrollaron mejores formas de monitorear y predecir futuros riesgos y desastres.
- > Con este proyecto, pretendemos reducir los niveles de riesgo para la población e incrementar la confiabilidad en la predicción de desastres.

Recomendaciones:

- > Para realizar los análisis de riesgos sísmicos se deben considerar las condiciones del subsuelo, que se generan por los flujos subterráneos y la extracción de agua de los mantos acuíferos.
- > Evaluar la posibilidad de mejorar los mapas de riesgos del distrito federal, considerando las herramientas de la mecánica fractal y los resultados obtenidos con el prototipo del simulador de riesgos sísmicos.



[S.VII.6] Comportamiento de la presión del flujo fractal. *Alexander S. Balankin y Benjamín A. Espinoza Elizarraraz, Grupo Mecánica Fractal, IPN.*

Se usan las leyes de conservación de fractal continuo para obtener la ecuación de presión para un flujo con dimensión de masa fraccional (D_m) y dimensión de frontera fraccional (D_b). Para flujo radial, en algunos casos especiales, la ecuación de presión se transforma en la ecuación de difusión de presión generalmente usada para interpretar el comportamiento de los datos de presión obtenidos de registros de pozos. También se discuten las relaciones entre los parámetros de escalamiento del flujo fractal y la geometría fractal del poro y / o el medio fracturado.